Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. К. Бабенко, Топологическая энтропия геодезических потоков на односвязных многообразиях и смежные вопросы, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1997, том 61, выпуск 3, 57–74

DOI: <https://doi.org/10.4213/im123>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 07:23:09

УДК 514.76+515.143+517.974

И. К. Бабенко

Топологическая энтропия геодезических потоков на односвязных многообразиях и смежные вопросы

Получены оценки снизу топологической энтропии геодезических потоков на односвязных многообразиях. Эти оценки включают две константы; первая зависит только от гомотопического типа многообразия, вторая, введенная в настоящей работе, – от свойств рассматриваемой метрики. Изучается ряд смежных вопросов.

Библиография: 27 наименований.

Связь топологической энтропии геодезического потока с гомотопическими свойствами многообразия, наверное, впервые заметил Е. И. Динабург [1], доказавший положительность топологической энтропии геодезического потока на многообразиях с фундаментальной группой экспоненциального роста. Теорема Динабурга является качественным результатом. В конце 70-х годов А. Мэннинг нашел удачный тополого-геометрический инвариант риманова многообразия и получил оценку снизу на топологическую энтропию геодезического потока. В случае многообразий с фундаментальной группой экспоненциального роста этот инвариант, названный Мэннингом “скорость роста”, всегда положителен, что дает положительность топологической энтропии (т.е. теорему Динабурга).

Пусть M – замкнутое многообразие размерности m и g – риманова метрика. Рассмотрим универсальное накрытие $\widetilde{M}$ и поднятие римановой метрики $\tilde{g}$. Если $q \in \widetilde{M}$ – произвольная точка, то положим

$$V(t; q, g) = \{p \in \widetilde{M}, \quad \rho_g(p, q) \leq t\}, \quad v(t; q, g) = \text{vol}_{\tilde{g}} V(t; q, g),$$

где ρ_g – топологическая метрика на $\widetilde{M}$, индуцированная $\tilde{g}$. Согласно [2] всегда существует не зависящий от q предел

$$\Omega(M, g) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln v(t; q, g)}{t},$$

и, кроме того,

$$h(g) \geq \Omega(M, g),$$

где $h(g)$ – топологическая энтропия геодезического потока на множестве единичных касательных элементов метрики g . Точные определения и некоторые свойства топологической энтропии можно найти в [3]; см. также [1] и [2].

Скорость роста, которую мы будем далее называть *асимптотическим объемом многообразия*, удачно сочетает в себе характеристику роста фундаментальной группы, т.е. топологическую характеристику многообразия, с метрическими характеристиками рассматриваемой римановой метрики.

Работа частично поддержана Фондом Сороса и Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 96-01-00182-А).

Отделить рост $\pi_1(M)$ от метрических характеристик риманова многообразия (M, g) не очень просто, поскольку в π_1 нет канонического выбора образующих. Попытка такого разделения приводит к понятию *диаметра* фундаментальной группы.

Выберем и зафиксируем точку $q \in M$ и для любого элемента $h \in \pi = \pi_1(M, q)$ определим $l_g(h)$ как длину кратчайшей геодезической петли класса h (с началом и концом в q). Пусть $\alpha = (a_1, \dots, a_n)$ – некоторая система образующих в π ; положим

$$d_q(\alpha, g) = \max_{a_i \in \alpha} l_g(a_i).$$

Назовем g -диаметром $\pi_1(M)$ величину

$$d(\pi_1, g) = \inf_{q \in M} \inf_{\alpha} d_q(\alpha, g),$$

где внутренний минимум берется по всем системам образующих в π_1 . Очевидно, $d(\pi_1, g)$ всегда положительна.

Каждая система образующих α определяет в π_1 дискретный шар $V(t; \alpha)$ радиуса t относительно стандартной метрики слов (см. [4]). Положим

$$\Omega(\pi_1, \alpha) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln |V(t; \alpha)|}{t},$$

где $|\cdot|$ означает число элементов, т.е. дискретный объем. Существование этого предела следует из аргументов [2] и хорошо известно. Наконец, введем *абсолютный асимптотический объем* π_1 , положив

$$\omega(\pi_1) = \inf_{\alpha} \Omega(\pi_1, \alpha),$$

где нижняя грань берется по всем системам образующих π_1 . Это внутренний инвариант π_1 и, следовательно, не зависит от метрики. Заметим, что не ясно, положителен ли $\omega(\pi)$ для любой конечно порожденной группы экспоненциального роста.

Оценке Мэннинга, несколько ослабляя ее, можно теперь придать следующую форму:

$$h(g) \geq \frac{\omega(\pi_1(M))}{d(\pi_1, g)}.$$

Числитель правой части характеризует “запас” одномерных гомотопий, и если их “достаточно много”, то энтропия всегда положительна.

Основная цель этой работы – показать, что на односвязных многообразиях (многообразиях с конечной фундаментальной группой) положительность $h(g)$ зависит от тех же самых причин, т.е. от большого запаса гомотопий высших размерностей.

Основным результатом является

ТЕОРЕМА 1. *Если M – односвязное многообразие, то для любой C^∞ -метрики g имеет место неравенство*

$$h(g) \geq D^h(M, g)^{-1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(\text{rk } \pi_n(M))}{n},$$

где $D^h(M, g)$ – гомологический диаметр риманова многообразия (M, g) .

Гомологический диаметр $D^h(M, g)$ определяется в § 1, где также обсуждаются некоторые его свойства. Для определения $D^h(M, g)$ существенна односвязность M . Мы используем классическую конструкцию специального сингулярного цепного комплекса, восходящую к Адамсу и Хилтону. Специальные сингулярные цепи были популярны в середине 50-х годов в связи с геометрической кобар-конструкцией. Сейчас этот подход к вычислению гомологий пространства петель забыт, хотя в силу своей геометричности он оказывается полезным для нужд “геометрии в целом” и динамики на многообразии.

В § 2 мы определяем гомотопический диаметр $D^\pi(M, g)$ риманова многообразия (M, g) . Число $D^\pi(M, g)$ полезно для оценок топологической энтропии геодезического потока на коформальных многообразиях. Это объясняется простым топологическим соображением: для коформальных пространств M кольцо Понтрягина $H_*(\Omega M, \mathbb{Q})$ оказывается конечно порожденной алгеброй. В отличие от гомологического диаметра, который зависит от всех гомологий $H_*(M, \mathbb{Q})$, гомотопический диаметр зависит только от образа гомоморфизма Гуревича.

§ 3 посвящен доказательству теоремы 1, вариантов этого утверждения для некоторых специальных классов многообразий и нескольких следствий. В § 4 рассматривается связь длины кратчайшей нетривиальной замкнутой геодезической с гомотопическим диаметром многообразия. В § 5 читатель найдет ряд открытых вопросов, связанных с нижней гранью топологической энтропии на множестве всех метрик единичного объема.

§ 1. Гомологический диаметр риманова многообразия

Пусть M – односвязное многообразие размерности m , $q \in M$ – некоторая точка. Далее все отображения предполагаются липшицевыми. Как обычно, под стандартным симплексом σ^n размерности n мы понимаем выпуклую оболочку концов ортонормального репера в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$. Пусть σ_k^n – k -скелет σ^n ; назовем *специальным сингулярным симплексом* в (M, q) отображение $f: (\sigma^n, \sigma_1^n) \rightarrow (M, q)$.

Следуя Адамсу и Хилтону (см. [5]), рассмотрим специальный сингулярный комплекс $CS_n^1(M, q; \mathbb{R})$, состоящий из специальных сингулярных $\mathbb{R}$ -цепей размерности n вида

$$c = \sum_{i \in I} \alpha_i f_i, \quad (1)$$

где I – некоторое конечное множество индексов, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i \in I$, и f_i , $i \in I$, – специальные сингулярные симплексы. Далее, пусть

$$C_n^1(M, q; \mathbb{R}) = CS_n^1(M, q; \mathbb{R}) / CS^1(q, q; \mathbb{R}).$$

Хорошо известно [5], что для стандартного дифференциала ∂ на $C_*^1(M, q; \mathbb{R})$

$$H(C_*^1(M, q; \mathbb{R}), \partial) \simeq H_*(M; \mathbb{R}),$$

и кобар-конструкция, примененная к $(C_*^1(M, q; \mathbb{R}), \partial)$, позволяет строить элементы $H_*(\Omega M; \mathbb{R})$ прямыми геометрическими методами.

Если на M имеется некоторая риманова метрика, то, рассматривая на σ^n стандартную евклидову метрику, для каждого сингулярного симплекса $f: \sigma^n \rightarrow M$

определим его константу Липшица $\text{Lip}_g f$. Если $c \in C_n^1(M, q; \mathbb{R})$ имеет вид (1), то положим

$$\text{diam}_q(c; g) = \max_{i \in I} \text{Lip}_g f_i.$$

Наконец, для любого $\xi \in H_n(M; \mathbb{R})$ под (g, q) -диаметром ξ будем понимать

$$D_n^h(\xi) = D_n^h(\xi; g, q) = \inf_{c \in \xi} \text{diam}_q(c; g),$$

где нижняя грань берется по всем цепям c , представляющим элемент ξ .

Непосредственно из определения вытекают два очевидных свойства функции D_n^h на $H_n(M; \mathbb{R})$:

- 1) $D_n^h(\xi + \eta) \leq \max\{D_n^h(\xi), D_n^h(\eta)\}$;
- 2) $D_n^h(r\xi) = D_n^h(\xi)$, $0 \neq r \in \mathbb{R}$.

Из свойства 2) следует, что D_n^h в действительности является функцией на проективизации гомологий исходного многообразия, т.е.

$$D_n^h: P^{b_n-1}H_n(M; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R},$$

где верхний индекс указывает размерность соответствующего проективного пространства, $b_n = b_n(M)$ — n -мерное число Бетти.

Из свойства 1) легко вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Существует стратификация $PH_n(M; \mathbb{R})$, зависящая от метрики g и начальной точки q ,*

$$\mathbb{R}P^0 \subset \mathbb{R}P^1 \subset \dots \subset \mathbb{R}P^{b_n-2} \subset PH_n(M; \mathbb{R}),$$

такая, что $D_n^h|_{\mathbb{R}P^k \setminus \mathbb{R}P^{k-1}} = D(k) - \text{const}$, причем $D(k) \geq D(k-1)$, $k = 1, 2, \dots, b_n - 1$.

Непосредственно из предложения получаем, что почти для любой точки $x \in PH_n(M; \mathbb{R})$

$$D_n^h(x) = \max_{y \in PH_n(M; \mathbb{R})} D_n^h(y).$$

Последнее значение будем называть (g, q) -диаметром n -мерных гомологий и писать $D_n^h(M, q)$. Наконец, определим полный гомологический g -диаметр $D^h(M, g)$, положив

$$D^h(M, g) = \inf_{q \in M} \max_{1 \leq n \leq m} D_n^h(M, q).$$

ВОПРОС 1. Когда имеет место равенство

$$D^h(M, g) = \inf_{q \in M} D_m^h(M, q)?$$

Пусть $\Omega_{pq}M$ — пространство петель, базированных в точках $p, q \in M$, $\Omega_{pq}^tM \subset \Omega_{pq}M$ — подпространство петель длины не более t . Применяя прямую геометрическую конструкцию из [5], легко показать, что любому набору специальных сингулярных симплексов $\{f_i: (\sigma^{k_i}, \sigma_1^{k_i}) \rightarrow (M, q)\}_{i=1}^s$ размерностей $\{k_i\}_{i=1}^s$ можно сопоставить сингулярный куб $I^k \rightarrow \Omega_{qq}^{D \cdot k}M$, отвечающий элементу $f_{k_1} \otimes f_{k_2} \otimes \dots \otimes f_{k_s}$ кобар-конструкции, где $k = (k_1 - 1) + (k_2 - 1) + \dots + (k_s - 1)$ и $D = \max_{1 \leq i \leq s} \text{diam}_q f_i$. Отсюда несложно вывести, что для любого $\varepsilon > 0$ любой элемент $h \in H_n(\Omega M; \mathbb{R})$ можно реализовать на петлях длины не более $(D^h(M) + \varepsilon)n$. Таким образом, имеем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для любого $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство

$$\mathrm{rk} \pi_{k+1}(M) \leq b_k(\Omega M) \leq b_k(\Omega_{pq}^t M)$$

для всех $k \leq \frac{t - \mathrm{diam}(M, g)}{D^h(M, g) + \varepsilon}$.

§ 2. Гомотопический диаметр риманова многообразия

Как и выше, (M, g) суть риманово многообразие. Рассмотрим некоторое (конечномерное) градуированное подпространство $V \subseteq \pi_*(M) \otimes \mathbb{R} = \pi_*^{\mathbb{R}}(M)$ и определим функцию

$$D^\pi: V \rightarrow \mathbb{R},$$

аналогичную введенной в предыдущем параграфе. Пусть $v \in V_n$ – однородный элемент и

$$v_* = \sum_{i \in I} \alpha_i f_i \quad (2)$$

– некоторое его представление, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $f_i: S^n \rightarrow M$, $i \in I$. Считая S^n евклидовой сферой радиуса 1, как и в случае гомологического диаметра, положим

$$\mathrm{diam}_q(v_*, g) = 2\pi \max_{i \in I} \mathrm{Lip} f_i$$

и, наконец,

$$D_n^\pi(v) = D_n^\pi(v; g, q) = \inf \mathrm{diam}_q(v_*, g),$$

где нижняя грань берется по всем представлениям (2) элемента v_* .

Непосредственно из определения получаем, что свойства 1), 2) предыдущего параграфа справедливы и для функции D_n^π , следовательно, предложение 1 также справедливо для этой функции.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Существует стратификация PV_n , зависящая от метрики g и начальной точки $q \in M$,

$$\mathbb{R}P^0 \subset \mathbb{R}P^1 \subset \dots \subset \mathbb{R}P^{b-2} \subset PV_n, \quad b = \dim V_n,$$

такая, что $D_n^\pi|_{\mathbb{R}P^k \setminus \mathbb{R}P^{k-1}} = D(k) - \mathrm{const}$, причем $D(k) \geq D(k-1)$, $k = 1, 2, \dots, b-1$.

Как и выше, положим

$$D_n^\pi(V, q) = \max_{y \in PV_n} D_n^\pi(y)$$

и будем называть *верхним n -мерным гомотопическим (g, q) -диаметром V* . Определим *нижний n -мерный гомотопический (g, q) -диаметр V* , положив

$$d_n^\pi(V, q) = \min_{y \in PV_n} D_n^\pi(y).$$

Наконец, положим

$$D^\pi(V, g) = \inf_{q \in M} \max_n D_n^\pi(V, q)$$

и назовем (*полным*) *верхним гомотопическим g -диаметром* подпространства V ;

$$d^\pi(V, g) = \inf_{q \in M} \min_k d_k^\pi(V, q)$$

будем называть (*полным*) *нижним гомотопическим g -диаметром* подпространства V .

Пусть $\Gamma: \pi_*^{\mathbb{R}}(M) \rightarrow H_*(M; \mathbb{R})$ – гомоморфизм Гуревича; наиболее интересным для приложений случаем является подпространство $V_{\Gamma} \subseteq \pi_*^{\mathbb{R}}(M)$, которое изоморфно отображается на $\text{im } \Gamma$. Выбор V_{Γ} , вообще говоря, неоднозначен.

Гомотопическим (верхним, нижним) g -диаметром M будем называть величину

$$D^{\pi}(M, g) = \inf_{V_{\Gamma}} D^{\pi}(V_{\Gamma}, g), \quad d^{\pi}(M, g) = \inf_{V_{\Gamma}} d^{\pi}(V_{\Gamma}, g),$$

где нижняя грань берется по всем подходящим прообразам V_{Γ} гомоморфизма Гуревича.

ПРИМЕР. Пусть M – односвязное четырехмерное многообразие. В этом случае $V_{\Gamma} = \pi_2^{\mathbb{R}}(M)$ и $\text{im } \Gamma = H_2(M; \mathbb{R})$, причем V_{Γ} определено однозначно.

Ограничивая функцию D_*^h на подпространство $\text{im } \Gamma \subseteq H_*(M; \mathbb{R})$, получим еще один диаметр $D^{\Gamma}(M, g)$. Диаметры $D_n^{\pi}(M)$ и $D_n^{\Gamma}(M)$ связаны простым неравенством

$$\sqrt{2} \pi(n+1) D_n^{\pi}(M, g) \geq D_n^{\Gamma}(M, g), \quad (3)$$

и для k -связных многообразий полные диаметры удовлетворяют неравенству

$$\sqrt{2} \pi(m-k+1) D^{\pi}(M, g) \geq D^{\Gamma}(M, g). \quad (4)$$

Действительно, если S_{ρ}^n – n -мерная евклидова сфера радиуса ρ и N суть ее северный полюс, то легко видеть, что имеется отображение

$$f: (\sigma^n, \sigma_{n-1}^n) \rightarrow (S_{1/\sqrt{2} \pi(n+1)}^n, N)$$

с константой Липшица, равной 1. Отсюда для любого односвязного многообразия M легко получаем неравенство (3), которое обращается в равенство для четырехмерных многообразий. Поскольку для k -связных многообразий $m-k$ является максимальной размерностью подпространства $\text{im } \Gamma$, то вместе с (3) это дает (4).

ВОПРОС 2. Верны ли неравенства

$$D_n^{\Gamma}(M, g) \geq D_n^{\pi}(M, g), \quad d_n^{\Gamma}(M, g) \geq d_n^{\pi}(M, g)?$$

Заметим, что формально они не противоречат (3) и (4).

Произведение Уайтхеда $[\cdot, \cdot]$ определяет на $\pi_*^{\mathbb{R}}(M)$ структуру супералгебры Ли, что в ряде случаев дает возможность получать оценки, аналогичные предложению 2, используя только гомотопии. Определение коформального пространства, используемое в следующем предложении, дано ниже (детали см. в [6]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть M – односвязное коформальное многообразие и g – произвольная метрика на M . Тогда для любого $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство

$$\text{rk } \pi_{k+1}(M) \leq b_k(\Omega M) \leq b_k(\Omega_{pq}^t M)$$

для всех $k \leq \frac{t - \text{diam}(M, g)}{D^{\pi}(M, g) + \varepsilon}$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть M – односвязное 4-мерное многообразие. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство

$$\mathrm{rk} \pi_{k+1}(M) \leq b_k(\Omega M) \leq b_k(\Omega_{pq}^t M)$$

для всех $k \leq \frac{t - \mathrm{diam}(M, g)}{D^\pi(M, g) + \varepsilon}$.

Действительно, согласно [6] для коформальных многообразий $\pi_*^\mathbb{R}(M)$ порождена V_Γ как алгебра Уайтхеда. Далее, если однородные элементы $\xi, \eta \in \pi_*^\mathbb{R}(M)$ реализуются на петлях длины t_1 и t_2 соответственно, то прямая геометрическая конструкция $[\cdot, \cdot]$ показывает, что $[\xi, \eta]$ реализуется на петлях длины $t_1 + t_2$. Отсюда следует предложение. Поскольку (см. [6]) любое 4-мерное многообразие формально и коформально, то это дает следствие.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В предложении 4 и следствии 1 можно было бы заменить $D^\pi(M, g)$ на $D^\Gamma(M, g)$, соответственно $D^\pi(M, g)$ на $D_2^h(M, g)$ (гомологический диаметр, вычисленный только для $H_2(M; \mathbb{R})$). Судя по всему (см. вопрос 2), это только ухудшит оценку для k .

§3. Оценки топологической энтропии

В этом параграфе мы дадим краткое доказательство теоремы 1, рассмотрим несколько вариантов этого утверждения, относящихся к специальным классам многообразий, а также ряд следствий. Далее будем использовать некоторые конструкции и результаты рациональной теории гомологий; детали можно найти в [6]–[13].

Для любого односвязного комплекса M предел

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(\mathrm{rk} \pi_n(M))}{n}, \quad (5)$$

фигурирующий в оценке из теоремы 1, является гомотопическим инвариантом M . Как показано в [13], этот предел равен $-\ln r$, где r – радиус сходимости так называемого ряда Пуанкаре пространства петель

$$P_{\Omega M}(z) = \sum_{n \geq 0} \dim H_n(\Omega M; \mathbb{R}) z^n.$$

Теорема 1 может дать что-либо содержательное, только если предел в (5) положителен. В [7] установлен замечательный факт: предел (5) равен нулю тогда и только тогда, когда рациональная алгебра Уайтхеда $\pi_*^\mathbb{Q}(M) = \pi_*(M) \otimes \mathbb{Q}$ конечномерна. В этом случае пространство M называется *рационально эллиптическим*. Таким образом, согласно теореме Феликса–Гальперина–Тома, если $\pi_*^\mathbb{Q}(M)$ бесконечномерно, предел (5) положителен. Пространства M с бесконечномерной алгеброй Уайтхеда $\pi_*^\mathbb{Q}(M)$ называются *рационально гиперболическими*. Этот термин несколько диссонирует с понятием гиперболического многообразия (в смысле римановой структуры), но он уже устойчиво вошел в лексикон “рациональных” топологов, и мы не будем от него отказываться.

Как показано в [8], конечномерность $\pi_*^\mathbb{Q}(M)$ накладывает сильные ограничения на топологию M . Хотя нет теоремы, утверждающей, что любое рациональное эллиптическое многообразие допускает метрику с нулевой топологической энтропией, верно обратное утверждение, доказанное Патернайном.

ТЕОРЕМА 2 [14]. *Если на односвязном многообразии M существует C^∞ -метрика g с нулевой топологической энтропией, то M рационально эллиплично.*

Рационально эллиптические пространства достаточно интересны с топологической точки зрения. Много топологических свойств таких пространств можно найти в [8], [9] (см. также [15]), где рассмотрена связь топологии рационально эллиптических многообразий с существованием инвариантных замкнутых геодезических. Рациональная эллипτικότητα связана с интегрируемостью геодезического потока. Как доказано в работах [14] и [16], если односвязное многообразие допускает метрику, геодезический поток которой вполне интегрируем в каком-нибудь “естественном” смысле, то это многообразие рационально эллиплично.

Односвязное многообразие “общего положения” оказывается рационально гиперболическим; для нас это наиболее интересный случай, и в дальнейшем мы будем рассматривать только рационально гиперболические многообразия.

Имеются два важных класса односвязных комплексов – *формальные* и *коформальные*. Формальные комплексы – это комплексы, рациональный гомотопический тип которых определяется кольцом когомологий. Важный пример формальных пространств – келеровы многообразия. Коформальные – это такие, у которых рациональный гомотопический тип определяется алгеброй Уайтхеда на рациональных гомотопических группах. Важный пример коформальных пространств – пространства, для которых $\pi_*^{\mathbb{Q}} \simeq L/B$, где L свободна, а B – так называемый идеал Бореля (см. [6]). Заметим, что эти два класса имеют нетривиальное пересечение; например, 4-мерные односвязные многообразия ($\dim H_2(M; \mathbb{Q}) \geq 2$) одновременно формальны и коформальны. Точные определения и детали можно найти в [6].

ТЕОРЕМА 3. *Для C^∞ -метрики на односвязном коформальном многообразии M имеет место неравенство*

$$h(g) \geq D^\pi(M, g)^{-1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \operatorname{rk} \pi_n(M)}{n},$$

где $D^\pi(M, g)$ – гомотопический диаметр риманова многообразия (M, g) .

СЛЕДСТВИЕ 2. *Для C^∞ -метрики g на односвязном 4-мерном многообразии M , двумерное число Бетти которого $b_2 = b_2(M) > 2$, имеет место неравенство*

$$h(g) \geq \frac{\ln[(b_2 + \sqrt{b_2^2 - 4})/2]}{D^\pi(M, g)}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. На 4-мерных многообразиях, для которых $b_2 = 0, 1, 2$, имеются метрики со вполне интегрируемым геодезическим потоком и нулевой топологической энтропией.

Существование метрик положительной кривизны Риччи ($\operatorname{Ric}(g) > 0$) на рационально гиперболических многообразиях известно давно. Так, в [17] построены метрики положительной кривизны Риччи на многообразиях Брискорна

$$V_m(4) = \{z \in \mathbb{C}^{m+1}; |z| = 1, z_1^4 + z_2^4 + \dots + z_{m+1}^4 = 0\}$$

при достаточно большом m . Среди $V_m(4)$ имеется много рационально гиперболических многообразий (см. [15]). В начале 90-х годов Янг и Ша [18] научились строить метрики положительной кривизны Риччи на связных суммах произведений

сфер, продемонстрировав таким образом, что существование метрики $\text{Ric}(g) > 0$ на рационально гиперболических многообразиях не является чем-то исключительным. Для метрик с положительной кривизной Риччи топологическую энтропию удобно оценивать не через диаметры, а непосредственно через кривизну Риччи.

ТЕОРЕМА 4. Пусть g – C^∞ -метрика положительной кривизны Риччи $\text{Ric}(g) \geq kg$, $k > 0$, на односвязном m -мерном многообразии M . Тогда имеет место неравенство

$$h(g) \geq \frac{\sqrt{k}}{\pi\sqrt{m-1}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \text{rk } \pi_n(M)}{n}.$$

Наличие у односвязного пространства “большого” количества гомотопий можно проследить на конечной последовательности гомотопических групп. Как показано С. Гальпериным [10], односвязный комплекс X размерности m будет рационально гиперболическим тогда и только тогда, когда $\text{rk} \left(\sum_{l=2m}^{3m-2} \pi_l(X) \right) > 0$.

Таким образом, из теоремы 1 получаем

СЛЕДСТВИЕ 3. Если для односвязного m -мерного многообразия M

$$\text{rk} \left(\sum_{l=2m}^{3m-2} \pi_l(M) \right) > 0,$$

то любая C^∞ -метрика на M имеет положительную топологическую энтропию.

Предел (5) даже для формальных многообразий довольно трудно вычислить. Несколько ухудшая оценку теоремы 1, можно придать ей более эффективную форму. Так, используя результаты [11], получаем

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть M – m -мерное формальное многообразие гиперболического типа, полином Пуанкаре которого имеет корни

$$P_M(z) = \sum_{i=0}^m b_i(M) z^i = \prod_{i=1}^m (z - \xi_i).$$

Тогда для любой C^∞ -метрики g на M имеет место неравенство

$$h(g) \geq \frac{\max_{1 \leq i \leq m} \ln |\xi_i|}{D^h(M, g)}.$$

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть M – m -мерное $(k-1)$ -связное формальное многообразие гиперболического типа, для которого $kb_k(M) > m$. Тогда для любой C^∞ -метрики g на M имеет место неравенство

$$h(g) \geq \frac{\ln(kb_k/m)}{kD^h(M, g)}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Следствие 2, в отличие от следствий 4 и 5, основано на точном вычислении предела (5). Применение следствия 4 к четырехмерным многообразиям дает в 2 раза меньшую оценку $h(g)$, следствие 5 дает оценку еще более слабую.

Далее, используя оценки из § 1 и § 2, дадим краткие доказательства сформулированных утверждений. Мы следуем схеме Патернайна [14] доказательства приведенного выше результата о метриках с нулевой энтропией.

Для любой пары точек $p, q \in M$ обозначим $n(t; p, q)$ число геодезических длины не более t , соединяющих p и q . Это измеримая относительно p и q функция, конечная почти всюду. Пусть

$$I(t; p) = \int_M n(t; p, q) dq \quad (6)$$

и

$$\Phi(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln I(t; p)}{t}.$$

Функция $\Phi(p)$ известна как “геодезическая энтропия” в точке p . Оказывается, она оценивает снизу топологическую энтропию $h(g)$. Точнее, как доказано в [14], для любой точки $p \in M$ имеет место неравенство

$$\Phi(p) \leq h(g). \quad (7)$$

Теперь оценим снизу $\Phi(p)$. Для любой пары точек $p, q \in M$, не сопряженных вдоль любой геодезической, из неравенств Морса будем иметь

$$n(t; p, q) \geq \sum_{i \geq 0} b_i(\Omega_{pq}^t M).$$

Из предложения 2 получаем

$$n(t; p, q) \geq \sum_{i=2}^{N(t)} \text{rk } \pi_i(M), \quad (8)$$

где

$$N(t) = \frac{t - \text{diam}(M, g)}{D^h(M, g) + \varepsilon}.$$

Подставляя (8) в (6), получаем

$$I(t; p) \geq \text{vol}(M, g) \sum_{i=2}^{N(t)} \text{rk } \pi_i(M),$$

откуда

$$\begin{aligned} \Phi(p) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln I(t; p)}{t} \geq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \left[\text{vol}(M, g) \sum_{i=2}^{N(t)} \text{rk } \pi_i(M) \right]}{t} \\ &= \frac{1}{D^h(M, g) + \varepsilon} \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(\sum_{i=2}^s \text{rk } \pi_i(M) \right)}{s} \\ &= \frac{1}{D^h(M, g) + \varepsilon} \overline{\lim}_{s \rightarrow \infty} \frac{\ln \text{rk } \pi_s(M)}{s}. \end{aligned}$$

Поскольку ε произвольно, то вместе с (8) это дает нужную оценку энтропии.

Для доказательства теоремы 3 в (8) нужно применить предложение 4. Для вывода следствия 2 из теоремы 3 нужно вычислить

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln \operatorname{rk} \pi_k(M)}{k},$$

где M – любое 4-мерное односвязное многообразие. Это можно легко сделать, применив основной результат работы [12] к частному случаю 4-мерных многообразий. Заметим, что не любое 4-мерное односвязное многообразие является полным пересечением, но несложно усмотреть, что ко всем 4-мерным многообразиям применимы результаты [12].

Для доказательства теоремы 4 в (8) нужно применить теорему Мейерса (см., например, [19]). Рассуждения Мейерса показывают, что на многообразии с положительной кривизной Риччи $\operatorname{Ric}(g) \geq kg$, $k > 0$, любая геодезическая длины не меньше $\pi \sqrt{\frac{m-1}{k}}$ имеет индекс не менее s . Таким образом, в (8) можно взять

$$N(t) = \frac{\sqrt{k}(t - \operatorname{diam}(M, g))}{\pi \sqrt{m-1}}.$$

§ 4. Длина кратчайшей замкнутой геодезической

Общей систолой, или просто *систолой*, замкнутого риманова многообразия (M, g) называется длина кратчайшей (нетривиальной) замкнутой геодезической; обозначим ее $\operatorname{sys}_0(M, g)$. Чтобы исключить гомотетии метрики $g \rightarrow \lambda g$, удобно зафиксировать объем многообразия, положив $\operatorname{vol}(M, g) = 1$. Возникает естественный вопрос о систолах: существует ли константа $c(M)$, зависящая только от топологии многообразия и такая, что в классе метрик единичного объема справедливо неравенство $\operatorname{sys}_0(M, g) \leq c(M)$?

В общей постановке этот вопрос далек от разрешения, но уже довольно много известно в неодносвязной ситуации. Если M – неодносвязное многообразие, то, рассматривая только гомотопически нетривиальные геодезические, мы получим систолу $\operatorname{sys}(M, g)$; очевидно,

$$\operatorname{sys}_0(M, g) \leq \operatorname{sys}(M, g).$$

Таким образом, существование универсальной оценки

$$\operatorname{sys}(M, g) \leq c(M), \quad \operatorname{vol}(M, g) = 1$$

дает положительный ответ на поставленный вопрос для общей систолы $\operatorname{sys}_0(M, g)$.

Следуя М. Грому, будем говорить, что неодносвязное многообразие M называется *существенным*, если каноническое отображение

$$f: M \rightarrow K(\pi_1(M), 1)$$

индуцирует нетривиальный гомоморфизм m -мерных гомологий

$$f_*: H_m(M; \mathbb{k}) \rightarrow H_m(K(\pi_1(M), 1); \mathbb{k}),$$

где $\mathbb{k} = \mathbb{Z}$ в ориентируемом и $\mathbb{k} = \mathbb{Z}_2$ в неориентируемом случае. Теорема М. Громова [20] дает универсальную оценку сверху для систолы неодносвязного сущест­венного многообразия

$$\text{sys}(M, g) \leq c(M) \cdot \text{vol}(M, g)^{1/m}; \quad (9)$$

здесь $c(M)$ – константа, зависящая только от топологии M .

В односвязном случае вопрос о верхней оценке для $\text{sys}_0(M, g)$ далеко не так про­двинут, и неравенство типа (9) имеется только в случае S^2 . Точнее, имеет место неравенство Крока [21]

$$\text{sys}_0(S^2, g) \leq 31 \cdot \text{vol}(S^2, g)^{1/2}. \quad (10)$$

Константа 31 не является оптимальной и объясняется техническими потребнос­тями доказательства. Вопрос об оптимальной константе в (10) открыт и, судя по всему, достаточно сложен. “Короткой” геодезической из теоремы Крока отвечает критическая точка функции длины $l: \Lambda S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ на пространстве свободных петель, которая может не соответствовать нетривиальному элементу $H_1(\Lambda S^2; \mathbb{Z})$. На ри­сунке изображены “трехрогая” сфера и короткая замкнутая геодезическая на ней. При этом не существует ее “короткой” деформации в одноточечные кривые. Иначе говоря, нетривиальный элемент $\pi_1(\Lambda S^2)$ для “рогатой” сферы нельзя реализовать отображением $S^1 \rightarrow \Lambda^t S^2$ для достаточно маленького t , а, увеличивая длину “ро­гов”, t можно сделать сколь угодно большим (сохраняя объем).

Для неодносвязных многообразий мы имеем очевидное неравенство

$$\text{sys}(M, g) \leq d(\pi_1(M), g). \quad (11)$$

В односвязной ситуации оценку сверху для $\text{sys}_0(M, g)$ также можно получить через гомотопический диаметр $d^\pi(M, g)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Для односвязного многообразия M имеет место неравенство*

$$\text{sys}_0(M, g) \leq d^\pi(M, g).$$

Действительно, из определения $d = d^\pi(M, g)$ получаем, что для произвольного $\varepsilon > 0$ найдутся $q \in M$ и отображение $f: (S^k, N) \rightarrow (M, q)$ ($k < m$, N – северный полюс сферы) такие, что $\text{Lip } f < \frac{d+\varepsilon}{2\pi}$. Если $\partial: \pi_k(M, q) \rightarrow \pi_{k-1}(\Omega_q M, q)$ – оператор границы точной последовательности расслоения Серра, то легко видеть, что $\partial(\{f\})$ можно реализовать отображением $\tilde{f}: (S^{k-1}, N) \rightarrow (\Omega_q^{d+\varepsilon} M, q)$. Пусть, как обычно, ΛM – пространство свободных петель над M и $l: \Lambda M \rightarrow \mathbb{R}$ – функция длины. Рассмотрим отображение включения

$$i_q: (\Omega_q M, q) \hookrightarrow (\Lambda M, M)$$

и индуцированный гомоморфизм гомотопических групп $(i_q)_*$. Легко видеть, что $(i_q)_*(\{\tilde{f}\})$ нетривиален как элемент относительной гомотопической группы $\pi_{k-1}(\Lambda M, M)$. Поскольку $\{\tilde{f}\}$ реализуется на петлях длины не более $d + \varepsilon$, то l должна иметь критическую точку $\gamma \in \Lambda M \setminus M$, для которой $l(\gamma) \leq d + \varepsilon$. В силу произвольности ε получаем требуемое утверждение.

Следует заметить, что предложение 5 может давать достаточно грубую оценку sys_0 . Так, пример “трехрогой” сферы показывает, что при достаточной длине рогов (и постоянной площади) можно сделать $D^h(M, g)$, $d^\pi(M, g)$ сколь угодно большими.

Вариация метрики g на M в классе метрик единичного объема приводит к вопросу о точной верхней грани $\text{sys}(M, g)$

$$\sigma(M) = \left[\sup_{\text{vol}(M, g)=1} \text{sys}(M, g) \right]^{-m}.$$

Величина $\sigma(M)$ называется (гомотопической) *систолической константой многообразия M* . Как следует из теоремы М. Громова [20], для существенных многообразий она всегда положительна. Кроме того, $\sigma(M)$ зависит только от гомотопического топа M [22]. Аналогичные соображения приводят к (общей) систолической константе

$$\sigma_0(M) = \left[\sup_{\text{vol}(M, g)=1} \text{sys}_0(M, g) \right]^{-m}.$$

Из очевидного неравенства $\sigma(M) \leq \sigma_0(M)$ следует положительность $\sigma_0(M)$ для всех существенных многообразий. Имеет ли $\sigma_0(M)$ гомотопическую природу или нет, остается совершенно неясным. Отметим еще одно гипотетическое отличие $\sigma(M)$ от $\sigma_0(M)$. Если M неодносвязно, а N – любое односвязное многообразие той же размерности, то (см. [23])

$$\sigma(M) = \sigma(M \# N).$$

Возникает естественный вопрос: зависит ли $\sigma_0(M \# N)$ от топологии односвязной части N ?

Вариация метрики приводит к вопросу о верхних и нижних гранях $d(\pi_1, g)$ в не-односвязном случае и о верхних и нижних гранях $d^\pi(M, g)$ и $D^\pi(M, g)$ – в одно-связном. Этот вопрос решается довольно просто в сравнении с аналогичным для систол. Действительно, легко видеть, что для любого неодносвязного M

$$\inf_{\text{vol}(M, g)=1} d(\pi_1(M), g) = 0.$$

Далее, рассматривая двумерный тор $M = T^2$, полученный склеиванием очень вытянутого прямоугольника (площади 1), мы получим

$$\sup_{\text{vol}(T^2, g)=1} d(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, g) = \infty.$$

Аналогичные метрики легко построить и на сферах с ручками; более того, имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Если для многообразия M найдутся неодносвязный симплицальный комплекс K , $\dim K < \dim M$, и отображение $f: M \rightarrow K$, индуцирующее эпиморфизм фундаментальных групп, то*

$$\sup_{\text{vol}(M, g)=1} d(\pi_1(M), g) = \infty.$$

Доказательство может быть проведено так же, как и доказательство леммы 8.4 в [22].

СЛЕДСТВИЕ 6. *Если $H_1(M; \mathbb{R}) \neq 0$, то $\sup_{\text{vol}(M, g)=1} d(\pi_1(M), g) = \infty$.*

Действительно, условие $H_1(M; \mathbb{R}) \neq 0$ необходимо и достаточно для существования отображения $f: M \rightarrow S^1$, индуцирующего эпиморфизм фундаментальных групп.

Исключая существенные многообразия с однопорожденной фундаментальной группой, мы видим, что равенство $\sup_{\text{vol}(M, g)=1} d(\pi_1(M), g) = \infty$ имеет место “очень часто”. Нам не известно, верно ли оно всегда: например, справедливо ли равенство для 3-мерных гомологических сфер.

В случае односвязного многообразия $M \neq S^m$ несложно показать, что

$$\inf_{\text{vol}(M, g)=1} d^\pi(M, g) = \inf_{\text{vol}(M, g)=1} D^\pi(M, g) = 0.$$

Примеры трехрогой сферы или ее произведения на себя показывают, что равенство

$$\sup_{\text{vol}(M, g)=1} d^\pi(M, g) = \sup_{\text{vol}(M, g)=1} D^\pi(M, g) = \infty,$$

судя по всему, имеет место для любого односвязного многообразия M , хотя мы и не располагаем точным доказательством этого факта.

§ 5. Вариация метрики

В предыдущем параграфе мы затронули вопрос о том, что происходит с некоторыми метрическими константами при вариации метрики. Здесь нам хотелось бы обсудить аналогичные вопросы для топологической энтропии. Рассматриваемые многообразия не предполагаются односвязными.

Чтобы исключить тривиальные преобразования метрики – гомотетии, – мы, как и выше, рассматриваем естественное нормализационное условие $\text{vol}(M, g) = 1$. Что происходит с топологической энтропией $h(g)$ при изменении метрики? Можно показать, что за счет локальных изменений метрики топологическую энтропию можно сделать сколь угодно большой. Поэтому сформулированный выше вопрос – это вопрос о нижней грани

$$h(M) = \inf_{\text{vol}(M, g)=1} h(g).$$

На сегодняшний день об этом известно довольно мало; исключение составляют лишь многообразия, допускающие метрику постоянной отрицательной секционной кривизны.

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 5. *Пусть M – замкнутое m -мерное многообразие, допускающее метрику g_0 ($\text{vol}(M, g_0) = 1$) постоянной отрицательной кривизны. Тогда для любой метрики g единичного объема*

$$h(g) \geq h(g_0),$$

причем если $h(g) = h(g_0)$, то в случае $m = 2$ g – метрика постоянной кривизны, в случае $m \geq 3$ $g = g_0$.

Для $m = 2$ эта теорема была доказана А. Катком [24], а в общем случае Бессоном, Галло и Куртуа [25].

Неодносвязные многообразия существенным образом отличаются от односвязных. Пусть M – неодносвязное многообразие; положим

$$\omega(M) = \inf_{\text{vol}(M, g)=1} \Omega(M, g).$$

Как показано в [22], $\omega(M)$ является гомотопическим инвариантом M . Этот инвариант часто бывает положительным (см. также [23]). С другой стороны, теорема Мэннинга [2] влечет неравенство

$$h(M) \geq \omega(M). \quad (12)$$

Таким образом, для неодносвязного многообразия M $h(M)$ может быть положительным числом по чисто топологическим причинам. Заметим также, что положительность $\omega(M)$ и $h(M)$ не свойство фундаментальной группы, а свойство всего многообразия M (см. [22]).

Из положительности $\omega(M)$ следует, что $\pi_1(M)$ имеет экспоненциальный рост; обратное неверно.

Неравенство (12) имеет смысл для произвольной фундаментальной группы. Естественный вопрос, возникающий в связи с (12): верно ли, что для любого многообразия $h(M) = \omega(M)$? Даже ослабленная форма этого вопроса представляет

интерес: верно ли, что для любого односвязного многообразия M $h(M) = 0$? Заметим, что равенство $h(M) = 0$ для односвязного M не противоречит теореме 1, поскольку в оценку энтропии входит гомологический диаметр, который не ограничен как функция метрики.

Приведенная выше теорема 5 вместе с теоремой Мэннинга показывает, что если многообразие M допускает метрику постоянной отрицательной кривизны, то $h(M) = \omega(M)$.

Не менее интересен вопрос об экстремальных метриках для $\omega(M)$ и $h(M)$. В теореме Бессона–Галло–Куртуа экстремальные метрики очень хорошие – они однородны. Судя по всему, экстремальные метрики в типичной ситуации будут сингулярными. Например, пусть M – многообразие, допускающее метрику g_0 постоянной отрицательной кривизны, и N – произвольное односвязное многообразие. Тогда, как показано в [23], $\omega(M \# N) = \omega(M)$; при этом экстремальная метрика будет сингулярной метрикой g'_0 , совпадающей с g_0 на $M \setminus D^m$ и равной 0 на $N \setminus D^m$, где D^m – m -мерный диск.

§ 6. Гомологический диаметр 4-мерного односвязного риманова многообразия

Рассмотрим 4-мерное односвязное риманово многообразие (M, g) , и пусть $D_2(M, g)$ – его двумерный гомологический диаметр, введенный в § 1. Риманова метрика g позволяет определить на $H_2(M; \mathbb{R})$ норму $\|\cdot\|_m$, называемую *массой*. (Точные определения можно найти, например, в [26]; см. также [27]). Кроме того, на $H_2(M; \mathbb{R})$ имеется корректно определенный элемент объема (мера Хаара) mes . Нормировка меры Хаара определяется следующим условием: решетка $H_2(M; \mathbb{Z}) \subseteq H_2(M; \mathbb{R})$ имеет единичный объем.

Пусть B_m – единичный шар в норме $\|\cdot\|_m$ на $H_2(M; \mathbb{R})$. Гомологический диаметр $D_2(M, g)$ и объем $\text{mes } B_m$ связаны неравенством:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *Для любого 4-мерного односвязного риманова многообразия (M, g) справедливо неравенство*

$$D_2(M, g)^{2b_2} \cdot \text{mes}(B_m) \geq \frac{2^{3b_2}}{3^{b_2/2} \cdot b_2!},$$

где $b_2 = b_2(M)$ – второе число Бетти M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $q \in M$ – некоторая точка; рассмотрим функцию 2-мерного гомологического диаметра

$$D_2: PH_2(M; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R},$$

введенную в § 1. Эта функция зависит от выбора точки q и согласно § 1 принимает значения $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{b_2-1}$. Выберем элементы $\alpha_k \in H_2(M; \mathbb{R})$, $k = 0, 1, 2, \dots, b_2 - 1$, удовлетворяющие условию $D_2(\alpha_k) = \lambda_k$. Как показано в § 1, элементы $\{\alpha_k\}_{k=0}^{b_2-1}$ можно выбрать линейно независимыми, причем если все λ_k различны, то они однозначно определены с точностью до пропорциональности.

Далее, выберем и зафиксируем достаточно малое $\varepsilon > 0$ и, как в § 1, представим каждый элемент α_k специальной сингулярной цепью

$$c_k = \sum_{i=1}^{n(k)} r_{i(k)} f_{i(k)} \quad (13)$$

такой, что

$$\text{diam}_q(c_k; g) \leq \lambda_k + \varepsilon, \quad k = 0, 1, \dots, b_2 - 1. \quad (14)$$

Каждый специальный сингулярный симплекс

$$f_{i(k)}: (\sigma^2, \partial\sigma^2) \rightarrow (M, q), \quad k = 0, 1, \dots, b_2 - 1,$$

является целочисленным сингулярным циклом, причем можно считать, что в представлении (13) участвуют только гомологически нетривиальные циклы $f_{i(k)}$, $i = 1, \dots, n(k)$, $k = 0, 1, \dots, b_2 - 1$.

Для произвольного целочисленного сингулярного цикла a обозначим (a) класс его гомологий. Тогда простые соображения линейной алгебры показывают справедливость следующего утверждения.

Для любого целого $0 \leq m \leq b_2 - 1$ среди классов гомологий $(f_{i(k)})$, $i = 1, \dots, n(k)$, $k = 0, 1, \dots, b_2 - 1$, найдутся $m + 1$ $\mathbb{R}$ -линейно независимых классов $(f_0), \dots, (f_m)$ таких, что

$$f_s \in \{f_{i(k)}\}_{i=1, k=0}^{n(k), s}. \quad (15)$$

Выберем каким-либо образом и зафиксируем b_2 целочисленных циклов $f_0, \dots, f_{b_2-1}$, удовлетворяющих этому условию. Вместе с (15) неравенство (14) дает для этих циклов неравенство

$$\text{Lip } f_s \leq \lambda_s + \varepsilon, \quad s = 0, 1, \dots, b_2 - 1. \quad (16)$$

Для g -объемов сингулярных циклов $\{f_s\}_{s=0}^{b_2-1}$ из неравенства (16) получаем

$$\text{vol}_g f_s \leq \frac{\sqrt{3}}{4} (\text{Lip } f_s)^2 \leq \frac{\sqrt{3}}{4} (\lambda_s + \varepsilon)^2.$$

Для нормы $\|\cdot\|_m$ на $H_2(M; \mathbb{R})$ из этого неравенства вытекает

$$\left\| \frac{4}{\sqrt{3}} (\lambda_s + \varepsilon)^{-2} (f_s) \right\|_m \leq 1, \quad s = 0, 1, \dots, b_2 - 1. \quad (17)$$

Рассмотрим единичный шар в этой норме B_m . Поскольку (f_s) , $s = 0, 1, \dots, b_2 - 1$, — целочисленные векторы $H_2(M; \mathbb{R})$, то мера параллелепипеда, натянутого на эти векторы, не меньше 1. Поэтому из (17) получаем неравенство

$$\text{mes}(B_m) \geq \left(\frac{4}{\sqrt{3}} \right)^{b_2} \prod_{s=0}^{b_2-1} (\lambda_s + \varepsilon)^{-2} \cdot 2^{b_2} \cdot \frac{1}{b_2!},$$

откуда в силу произвольности ε будем иметь

$$\left(\prod_{s=0}^{b_2-1} \lambda_s \right)^2 \geq \frac{2^{3b_2}}{3^{b_2/2} \cdot b_2! \cdot \text{mes}(B_m)}.$$

Мы только усилим неравенство, если заменим каждое λ_s , $s = 0, 1, \dots, b_2 - 1$, на максимальное значение λ_{b_2-1} . Кроме того, правая часть этого неравенства не зависит от точки q , поэтому, минимизируя λ_{b_2-1} по q , окончательно получим

$$D_2(M, g)^{2b_2} \geq \frac{2^{3b_2}}{3^{b_2/2} \cdot b_2! \cdot \text{mes}(B_m)}.$$

Предложение доказано.

Список литературы

1. Динабург Е. И. Связь между различными энтропийными характеристиками динамических систем // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1971. Т. 35. № 2. С. 324–366.
2. Manning A. Topological entropy for geodesic flows // Annals of Math. 1979. V. 110. № 3. P. 567–573.
3. Adler R. A., Konheim A., McAndrew M. Topological entropy // Trans. Amer. Math. Soc. 1965. V. 114. P. 309–319.
4. Шарц А. С. Объемный инвариант накрывающих // ДАН СССР. 1955. Т. 105. № 1. С. 32–34.
5. Adams J. F. On the cobar construction // Proc. NAS USA. 1956. V. 42. P. 409–412.
6. Neisendorfer J., Miller T. Formal and coformal spaces // Illinois J. of Math. 1978. V. 22. № 4. P. 565–580.
7. Félix Y., Halperin S., Thomas J.-C. The homotopy Lie algebra for finite complexes // Publ. IHES. 1982. № 56. P. 387–410.
8. Halperin S. Finiteness in the minimal models of Sullivan // Trans. AMS. 1977. V. 230. P. 173–190.
9. Halperin S. Spaces whose rational homology and de Rham homotopy are both finite dimensional // Asterisque. 1984. № 113–114. P. 109–117.
10. Halperin S. Torsion gaps in the homotopy of finite complexes. II // Topology. 1991. V. 30. № 3. P. 471–478.
11. Félix Y., Thomas J.-C. The radius of convergence of Poincaré series of loop spaces // Invent. Math. 1982. V. 68. P. 257–274.
12. Бабенко И. К. О вещественных гомотопических свойствах полных пересечений // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 43. № 5. С. 1004–1024.
13. Бабенко И. К. Об аналитических свойствах рядов Пуанкаре пространства петель // Матем. заметки. 1980. Т. 27. № 5. С. 751–765.
14. Paternain G. On the topology of manifolds with completely integrable geodesic flows // Ergod. Th. and Dyn. Syst. 1992. V. 12. № 3. P. 109–121.
15. Grove H., Halperin S. Contributions of rational homotopy theory to global problems of Geometry // Publ. IHES. 1982. № 56. P. 379–385.
16. Тайманов И. А. Топология римановых многообразий с интегрируемыми геодезическими потоками // Тр. МИ РАН. 1994. Т. 205.
17. Hernandez-Andrade H. A class of compact manifolds with positive Ricci curvature // Proc. Symp. Pure Math. AMS. 1975. V. XXVII. P. 73–87.
18. Sha Ji. P., Yang Da-g. Positive Ricci curvature on the connected sums of $S^n \times S^m$ // J. Diff. Geom. 1991. V. 33. № 1. P. 127–137.
19. Милнор Дж. Теория Морса. М.: Мир, 1965.
20. Gromov M. Filling riemannian manifolds // J. Diff. Geom. 1983. V. 18. № 1. P. 1–147.
21. Croke C. B. Area and the length of the shortest closed geodesic // J. Diff. Geom. 1988. V. 27. № 1. P. 1–21.
22. Бабенко И. К. Асимптотические инварианты гладких многообразий // Изв. РАН. Сер. матем. 1992. Т. 56. № 4. С. 707–751.
23. Бабенко И. К. Экстремальные проблемы геометрии, перестройки многообразий и задачи теории групп // Изв. РАН. Сер. матем. 1995. Т. 59. № 2. С. 97–108.
24. Katok A. Entropy and closed geodesics // Ergod Th. and Dyn. Syst. 1982. № 2. P. 339–367.
25. Besson J., Gallot S., Courtois J. Entropies et rigidités des espaces localement symétriques de courbure strictement négative // Prépublication de l'Institut Fourier. № 281. Grenoble, 1994.
26. Gromov M. Structures métriques pour les variétés riemanniennes // La collection “Textes Mathématiques” des Editions CEDIC. Paris, 1981.
27. Federer H. Real flat chains, cochains and variational problems // Indiana Univ. Math. J. 1974. V. 24. P. 351–407.

Поступило в редакцию
4.IX.1995