Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Х. Бикулов, И. В. Волович, p -адическое броуновское движение, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1997, том 61, выпуск 3, 75–90

DOI: <https://doi.org/10.4213/im126>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 13:04:16

УДК 519.216.22+517.98

А. Х. Бикулов, И. В. Волович

 p -адическое броуновское движение

Построен и исследован p -адический аналог броуновского движения. Изучены свойства траекторий p -адического винеровского процесса на основе использования оператора p -адического дифференцирования В. С. Владимирова.

Для построения p -адического броуновского движения использован p -адический аналог метода Пэли–Винера и стохастическое псевдодифференциальное уравнение.

Библиография: 12 наименований.

§1. Введение

Основной результат этой работы – построение и исследование p -адического аналога броуновского движения. p -адические случайные процессы играют важную роль в p -адической квантовой механике и p -адической теории струн [1]. Мы будем рассматривать случайный процесс, который принимает вещественные (или комплексные) значения и зависит от p -адического аргумента, в рамках стандартной аксиоматики Колмогорова [2]. Случайные процессы, принимающие p -адические значения, исследовались А.Ю. Хренниковым [3]. Широкий класс p -адических случайных процессов был рассмотрен А. Н. Кочубеем [4]. Гауссовские стохастические процессы, индексированные локальным полем, рассматривались С. Эвансом [5], [6]. Случайные блуждания над полем p -адических чисел изучались С. Альбеверии и В. Карвовским [11].

Символически p -адический винеровский процесс может быть определен как решение Ψ стохастического дифференциального уравнения

$$D\Psi = \Phi,$$

где D – оператор Владимирова [7]; этот оператор будет играть основную роль во всей излагаемой теории p -адического броуновского движения. Здесь Φ – p -адический белый шум, который будет введен в §5; он является простейшим из p -адических обобщенных процессов гауссовского типа и играет роль, аналогичную роли δ -функции в теории обобщенных функций.

Мы первоначально определим p -адическое броуновское движение аксиоматически, затем докажем его существование и, наконец, будет показано, что построенное p -адическое броуновское движение удовлетворяет этому стохастическому уравнению. Для конструктивного построения p -адического броуновского движения, излагаемого в §7, используется аналог метода Пэли–Винера, который дает

Работа осуществлялась при частичной поддержке РФФИ (грант 96-01-00312).

возможность прямого построения гауссовских счетно-аддитивных мер в гильбертовых пространствах. Этот метод использует понятия случайной последовательности и меры в пространстве последовательностей. В §4 будет дано их явное построение и получены их свойства. И наконец, в §8 будут изучены свойства траекторий p -адического винеровского процесса и установлен аналог их непрерывности по Гёльдеру.

§2. p -адические случайные процессы

Вначале приведем обозначения и некоторые сведения из теории вероятностей, которые будут использоваться в данной работе (см., например, [2]).

Измеримым пространством называется пара (Ω, Σ) , где Ω – непустое множество, Σ – семейство подмножеств множества Ω , образующих σ -алгебру.

Тройка $(\Omega, \Sigma, \mathbf{P})$, где $\mathbf{P}$ – вероятностная мера, т.е. определенная на Σ счетно-аддитивная неотрицательная функция множеств, удовлетворяющая условию $\mathbf{P}(\Omega) = 1$, называется *вероятностным пространством*. Элементы $A \in \Sigma$ называются *событиями*, а $\mathbf{P}(A)$ называется *вероятностью события* A .

Случайной величиной $\xi = \xi(\omega)$ называется Σ -измеримая вещественно- или комплекснозначная функция на Ω , т.е. $\xi^{-1}(S) \in \Sigma$ для любого борелевского множества S на $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Случайная величина ξ порождает вероятностную меру $\mathbf{P}_\xi$ на $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, определяемую соотношением $\mathbf{P}_\xi(S) = \mathbf{P}(\xi^{-1}(S))$. Это понятие случайной величины легко может быть распространено на случайные величины, значения которых суть векторы, функции или обобщенные функции.

Фиксируем вероятностное пространство $(\Omega, \Sigma, \mathbf{P})$. Пусть X – некоторое множество, а $(Y, \mathcal{B})$ – измеримое пространство. *Случайным отображением* X в измеримое пространство $(Y, \mathcal{B})$ называется отображение $\xi: X \times \Omega \rightarrow Y$ такое, что при фиксированном $x \in X$ оно является измеримым отображением (Ω, Σ) в $(Y, \mathcal{B})$, т.е. для любого $B \in \mathcal{B}$ множество $\{\omega \in \Omega: \xi(x, \omega) \in B\}$ принадлежит Σ .

Рассмотрим примеры случайных отображений, связанных с полем p -адических чисел $\mathbb{Q}_p$. (По поводу определения $\mathbb{Q}_p$ и p -адических чисел см. [1].) Напомним только, что для любого $p = 2, 3, \dots$ поле $\mathbb{Q}_p$ является пополнением поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ по p -адической норме $|\cdot|_p$. Если ненулевое рациональное число x представлено в виде $x = p^k \cdot m/n$, где m и n не делятся на p , то $|x|_p = p^{-k}$.

ПРИМЕР 1. Пусть даны вероятностное пространство $(\Omega, \Sigma, \mathbf{P})$ и измеримое пространство $(Y, \mathcal{B})$. Пусть X есть подмножество в $\mathbb{Q}_p$. Тогда случайное отображение $\xi: X \times \Omega \rightarrow Y$ называется *p -адическим случайным процессом* со значениями в Y .

Мы будем в дальнейшем рассматривать случай, когда X равно кольцу целых p -адических чисел $\mathbb{Z}_p = \{t \in \mathbb{Q}_p: |t|_p \leq 1\}$, а $Y = \mathbb{C}$ и $\mathcal{B}$ – σ -алгебра борелевых множеств в $\mathbb{C}$. Таким образом, p -адический случайный процесс – это функция $\xi: \mathbb{Z}_p \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, измеримая при фиксированном $x \in \mathbb{Z}_p$.

ПРИМЕР 2. Пусть даны $(\Omega, \Sigma, \mathbf{P})$ и $(Y, \mathcal{B})$. Пусть $X = \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$ – основные функции p -адического аргумента (это локально постоянные функции с компактным носителем; см. [7]). Тогда случайное отображение $\xi(x, \omega)$ называется *p -адическим обобщенным случайным процессом* со значениями в Y , если ξ линейно по $x \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Система $\{\xi(x, \omega), x \in X\}$ называется *гауссовской*, если для любого конечного набора элементов $x_1, x_2, \dots, x_n$ из X и любого борелевского множества $B \subset \mathbb{C}^n$ мера множества

$$\{\omega \in \Omega : (\xi(x_1, \omega), \xi(x_2, \omega), \dots, \xi(x_n, \omega)) \in B \subset \mathbb{C}^n\}$$

выражается формулой

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\{\omega \in \Omega : (\xi(x_1, \omega), \xi(x_2, \omega), \dots, \xi(x_n, \omega)) \in B \subset \mathbb{C}^n\}) \\ = \frac{\det \Lambda}{(2\pi)^n} \int_B e^{-(\Lambda z, z)} dz \wedge d\bar{z}, \end{aligned}$$

где Λ – положительно определенная невырожденная матрица, $(\Lambda z, z) = \sum_{i,j=1}^n \lambda_{ij} z_i \bar{z}_j$ – квадратичная форма, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, $\bar{z} = (\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_n)$, $z_k = u_k + iv_k$, $\bar{z}_k = u_k - iv_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, и $dz \wedge d\bar{z} = 2^n du_1 dv_1 du_2 dv_2 \dots du_n dv_n$.

§3. Аксиоматическое определение p -адического броуновского движения

Дадим определение p -адического броуновского движения. Пусть $(\Omega, \Sigma, \mathbf{P})$ – вероятностное пространство.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. p -адическим броуновским движением или p -адическим винеровским процессом со значениями в $\mathbb{C}$ называется p -адический случайный процесс $\{\psi(t, \omega), t \in \mathbb{Z}_p\}$, обладающий следующими свойствами:

- 1) $\psi(0, \omega) = 0$ для почти всех $\omega \in \Omega$;
- 2) система $\{\psi(t, \omega), t \in \mathbb{Z}_p\}$ гауссовская;
- 3) математическое ожидание случайного процесса есть

$$\mathbf{E}[\psi(t)] \equiv \int_{\Omega} \psi(t, \omega) \mathbf{P}(d\omega) = 0;$$

- 4) ковариационная функция имеет вид

$$\mathbf{E}[\psi(s) \overline{\psi(t)}] \equiv \int_{\Omega} \psi(s, \omega) \overline{\psi(t, \omega)} \mathbf{P}(d\omega) = B_p(s, t) = \frac{1}{2}(|s|_p + |t|_p - |s - t|_p).$$

Приведем некоторые свойства, которые следуют из этого определения.

(а) Если $|s|_p \neq |t|_p$, то $B_p(s, t) = \frac{1}{2} \min(|s|_p, |t|_p)$. Для сравнения напомним, что ковариация классического (вещественного) броуновского движения имеет вид $B_{\infty}(s, t) = \min(s, t)$, s и $t \in \mathbb{R}_+$.

(б) Зная ковариационную функцию $B_p(s, t)$, нетрудно вычислить дисперсию $\mathbf{D}_p(h)$ этого процесса. Для любых t и $h \in \mathbb{Z}_p$

$$\mathbf{D}_p(h) \equiv \mathbf{E}[|\psi(t+h) - \psi(t)|^2] = |h|_p.$$

Для классического броуновского движения $\mathbf{D}_{\infty}(h) = |h|$, $h \in \mathbb{R}$.

(с) Имеет место следующая адельная формула:

$$\prod_p \mathbf{D}_p(h) = 1, \quad h \in \mathbb{Q}.$$

Эта формула есть следствие известного соотношения (см. [1])

$$\prod_p |x|_p = 1, \quad x \in \mathbb{Q}.$$

(д) Если $|t_1|_p \leq |t_2|_p < |t_3|_p \leq |t_4|_p$, то случайный вектор $(\psi(t_2, \omega) - \psi(t_1, \omega), \psi(t_4, \omega) - \psi(t_3, \omega))$ в силу свойств 2) и 3) подчиняется двумерному гауссовскому закону распределения со средним $(0, 0)$; кроме того, в силу свойства 3) имеем

$$\mathbf{E}[(\psi(t_2) - \psi(t_1)), (\overline{\psi(t_4)} - \overline{\psi(t_3)})] = 0.$$

Это означает, что $\psi(t_2, \omega) - \psi(t_1, \omega)$ и $\psi(t_4, \omega) - \psi(t_3, \omega)$ независимы. Вообще, для любого конечного числа моментов времени t_i таких, что $|t_i|_p < |a|_p$, приращение $\psi(b, \omega) - \psi(a, \omega)$, где $|b|_p \geq |a|_p$, не зависит от $\psi(t_i, \omega)$. (Иначе говоря, приращение процесса $\psi(t, \omega)$ не зависит от его прошлого до момента времени a , где прошлое – это множество прошлых относительно настоящего момента времени $t = a$ значений процесса $\psi(t, \omega)$.)

(е) Пусть $\{\psi(t, \omega), t \in \mathbb{Z}_p\}$ есть броуновское движение. Тогда процесс $\{|t|_p \psi(t^{-1}, \omega), t \in \mathbb{Q}_p \setminus \mathbb{Z}_p\}$ имеет то же распределение.

Это утверждение можно легко доказать, заметив, что ковариационные функции двух этих процессов совпадают.

(ф) Пусть $B_p(s, t) = \frac{1}{2}(|s|_p + |t|_p - |s - t|_p)$ для $s, t \in \mathbb{Q}_p$; тогда имеет место следующая формула:

$$\mathbf{D}_s \mathbf{D}_t B_p(s, t) = \mathbf{D}_t \mathbf{D}_s B_p(s, t) = \frac{1}{2} \frac{p^2}{p+1} \delta(s - t),$$

где $\mathbf{D}_t$ – ранее упоминавшийся оператор Владимирова.

(г) $B_p(rs, rt) = |r|_p B_p(s, t)$ для $r, s, t \in \mathbb{Q}_p$.

§4. Каноническая мера на пространстве последовательностей

Пусть $(\Omega, \Sigma, \mathbf{P})$ – фиксированное вероятностное пространство, $(\mathbb{C}, \mathcal{B})$ – измеримое пространство, где $\mathbb{C}$ – поле комплексных чисел, $\mathcal{B}$ – σ -алгебра борелевских множеств.

Для фиксированного простого числа p рассмотрим множество I , элементы которого пробегает значения $k = 0, k = p^{-\gamma}(k_0 + k_1 p + \dots + k_{\gamma-1} p^{\gamma-1})$, где $\gamma = 1, 2, 3, \dots$; $k_0 = 1, 2, \dots, p-1$; $k_j = 0, 1, 2, \dots, p-1$; $j = 1, 2, \dots, \gamma-1$. Это счетное множество, имеющее естественное лексикографическое упорядочение по $\gamma, k_0, k_1, \dots$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Функция $\xi: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ называется *случайной последовательностью*, если для любого $B \in \mathcal{B}$ и $k \in I$ имеем $\{\omega \in \Omega : \xi(k, \omega) \in B\} \subset \Sigma$.

Рассмотрим пространство Π всевозможных комплекснозначных последовательностей $Z = \{Z_k, k \in I\}$. Отображение $\Omega \rightarrow \Pi$, определяемое случайной последовательностью ξ такой, что $\{Z_k, k \in I\} = \{\xi(k, \omega), k \in I\}$, индуцирует преобразование вероятностной меры $\mathbf{P}$ в вероятностную меру $\mathbf{m}$, которая задана на σ -алгебре Σ_Π подмножества пространства Π .

Построим конкретную гауссовскую меру на (Π, Σ_Π) , которую будем называть *канонической мерой* на пространстве последовательностей. Для этого рассмотрим цилиндрическое множество из Σ_Π :

$$C_{(n)} = \{Z \in \Pi : \{Z_k, k \in I^{(n)}\} \in B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_n, B_i \in \mathcal{B}\}.$$

Здесь $I^{(n)}$ – множество первых n элементов из I . Определим меру цилиндрического множества $C_{(n)}$ по формуле

$$\mathbf{m}(C_{(n)}) = \int_{C_{(n)}} \mathbf{m}(dZ) = \frac{1}{2\pi} \int_{B_1 \times \cdots \times B_n} \prod_{k \in I^{(n)}} e^{-z_k \bar{z}_k} dz_k \wedge d\bar{z}_k.$$

В силу теоремы Колмогорова [8] она единственным образом продолжается до σ -аддитивной меры на (Π, Σ_Π) , которую будем обозначать так же. Таким образом, мы можем смотреть на тройку $(\Pi, \Sigma_\Pi, \mathbf{m})$ как на конкретную реализацию абстрактного вероятностного пространства $(\Omega, \Sigma, \mathbf{P})$.

Нам удобно будет использовать естественное представление случайных последовательностей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. *Пространством последовательностей с канонической мерой* будем называть вероятностное пространство $(\Pi, \Sigma_\Pi, \mathbf{m})$, на котором определена случайная последовательность $\{Z_k = \xi(k, Z), k \in I\}$, $Z \in \Pi$, обладающая следующими свойствами:

- 1) $\mathbf{E}[Z_k] \equiv \int_\Pi Z_k \mathbf{m}(dZ) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} z e^{-z \bar{z}} dz \wedge d\bar{z} = 0$;
- 2) $\mathbf{E}[Z_k \bar{Z}_l] \equiv \int_\Pi Z_k \bar{Z}_l \mathbf{m}(dZ) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{C} \times \mathbb{C}} z_k \bar{z}_l e^{-(z_k \bar{z}_k + z_l \bar{z}_l)} dz_k \wedge d\bar{z}_k dz_l \wedge d\bar{z}_l = \delta_{kl}$.

Заметим, что случайная последовательность $\{Z_k, k \in I\}$ образует систему независимых случайных величин, а в пространстве $L^2_{\mathbb{C}}(\Pi, \Sigma_\Pi, \mathbf{m})$ – ортонормальный базис.

Рассмотрим некоторые свойства меры $\mathbf{m}$.

(а) Пусть $\widehat{\Pi}$ – множество всевозможных комплекснозначных последовательностей, координаты которых принимают, возможно, и значения ∞ . Аналогично строится $(\widehat{\Pi}, \widehat{\Sigma}_\Pi)$ и $\widehat{\mathbf{m}}$. Покажем, что множество $A = \widehat{\Pi} - \Pi = \{Z \in \Pi : \text{хотя бы одна } |Z_k| \text{ равна } \infty\}$ имеет меру 0.

Действительно, рассмотрим множества $A^{(k)} = \{Z \in \Pi : |Z_k| = \infty\}$. Множество $A^{(k)}$ покрывается множеством $B^{(k)} = \{Z \in \Pi : |Z_k| > \rho_k\}$; тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\rho_k > 0$ такое, что $\widehat{\mathbf{m}}(B^{(k)}) = e^{-\rho_k^2} < \varepsilon$. Это означает, что $\mathbf{m}(A^{(k)}) = 0$, а так как $A = \bigcup_{k \in I} A^{(k)}$, то в силу аддитивности меры $\widehat{\mathbf{m}}(A) = 0$.

Если выбросить из $\widehat{\Pi}$ все точки множества A , то останется множество полной меры Π . Это множество представляет собой линейное пространство с обычными (координатными) линейными операциями.

(b) Покажем, что всякое множество $A \in \Pi$, состоящее из последовательностей, координаты которых ограничены, т.е. множество $A = \{Z \in \Pi : |Z_k| \leq c, k \in I\}$ имеет меру 0.

Действительно, A покрывается множеством $B = \{Z \in \Pi : |Z_k| \leq c, k \in I^{(n)}\}$. Тогда $\mathbf{m}(B) = \prod_{k \in I^{(n)}} (1 - e^{-c^2}) = \theta^n$, $0 < \theta < 1$, т.е. $\mathbf{m}(A) \leq \theta^n$ для любых n . Это означает, что $\mathbf{m}(A) = 0$.

ТЕОРЕМА 4.1. *Рассмотрим подмножество $L_s \subset \Pi$,*

$$L_s = \{Z \in \Pi : |Z_k|^2 \leq \ln |k|_p^s, \quad k \in I \setminus \{0\}\}.$$

Тогда имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{m}(L_s) &= 0 \quad \text{при } s \leq 1, \quad \mathbf{m}(L_s) > 0 \quad \text{при } s > 1, \\ \lim_{s \rightarrow \infty} \mathbf{m}(L_s) &= 1. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим множество $B_s^{(n)}$, покрывающее множество L_s ,

$$B_s^{(n)} = \{Z \in \Pi : |Z_k|^2 \leq \ln |k|_p^s, \quad k \in I^{(n)}\};$$

$I^{(n)}$ – множество первых n элементов множества $I \setminus \{0\}$. Тогда

$$\mathbf{m}(B_s^{(n)}) = \prod_{k \in I^{(n)}} (1 - |k|_p^{-s}).$$

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} B_s^{(n)} = L_s$, то

$$\begin{aligned} \mathbf{m}(L_s) &= \prod_{k \in I \setminus \{0\}} (1 - |k|_p^{-s}) = \exp \left(\sum_{k \in I \setminus \{0\}} \ln(1 - |k|_p^{-s}) \right), \\ \sum_{k \in I \setminus \{0\}} \ln(1 - |k|_p^{-s}) &= \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{n=1}^{\infty} p^n \ln(1 - p^{-ns}). \end{aligned}$$

Этот ряд сходится для $s > 1$ и расходится для $s \leq 1$. Отсюда следуют соотношения теоремы.

ТЕОРЕМА 4.2. *Рассмотрим множество*

$$L_\beta = \{Z \in \Pi : |Z_k| \leq \sqrt{\ln |k|_p} + \beta, \quad k \in I \setminus \{0\}\}.$$

Тогда имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{m}(L_\beta) &= 0 \quad \text{при } \beta \leq 0, \quad \mathbf{m}(L_\beta) > 0 \quad \text{при } \beta > 0, \\ \lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbf{m}(L_\beta) &= 1. \end{aligned}$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 4.1.

СЛЕДСТВИЕ. *Множество*

$$E = \left\{ Z \in \Pi : \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|Z_k|}{\sqrt{\ln |k|_p}} = 1, \quad k \in I \setminus \{0\} \right\}$$

имеет меру 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $E = \bigcap_{m=1}^{\infty} E_m$, где

$$E_m = \left\{ Z \in \Pi : \lim_{|k|_p \rightarrow \infty} \frac{|Z_k|}{\sqrt{\ln |k|_p}} \leq 1 + \frac{1}{m} \right\} - \left\{ Z \in \Pi : \lim_{|k|_p \rightarrow \infty} \frac{|Z_k|}{\sqrt{\ln |k|_p}} < 1 \right\}.$$

Каждое из E_m (с точностью до множества меры 0) содержит все множества L_β и поэтому имеет полную меру, а тогда $\bigcap_{m=1}^{\infty} E_m$ как пересечение множеств полной меры также имеет полную меру.

Нам понадобится следующее утверждение.

ПРИЗНАК КОЛМОГорова–ХИНЧИНА. Пусть дан ряд $\sum_{k \in I} \lambda_k$, $\lambda_k \in \mathbb{R}_+$, и пусть

$$E_{\langle \lambda_k \rangle} = \left\{ Z \in \Pi : \sum_{k \in I} \lambda_k |Z_k|^2 < \infty \right\}.$$

Тогда

$$\mathbf{m}(E_{\langle \lambda_k \rangle}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_{k \in I} \lambda_k < \infty, \\ 0, & \text{если } \sum_{k \in I} \lambda_k = \infty. \end{cases}$$

Доказательство для $k \in \mathbb{N}$, где $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, см. в [8]. Оно без труда обобщается для $k \in I$.

§5. p -ади́ческий белый шум

Пусть даны вероятностное пространство $(\Omega, \Sigma, \mathbf{P})$ и измеримое пространство $(\mathbb{C}, \mathcal{B})$, где $\mathbb{C}$ – поле комплексных чисел и $\mathcal{B}$ – σ -алгебра борелевских множеств.

Пусть $\mathcal{D}(\mathbb{Z}_p)$ – локально выпуклое ядерное пространство основных комплекснозначных функций $\varphi(t)$ p -ади́ческого аргумента, $t \in \mathbb{Z}_p$ [1].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Отображение $f: \mathcal{D} \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, линейное по $\varphi \in \mathcal{D}$, называется p -ади́ческим обобщенным случайным процессом, если для любого $B \in \mathcal{B}$ и $\varphi \in \mathcal{D}$ имеем $\{\omega \in \Omega : f(\varphi, \omega) \in B\} \in \Sigma$.

Рассмотрим двойственное к $\mathcal{D}$ пространство $\mathcal{D}'$ линейных функционалов Φ . Отображение $\Omega \rightarrow \mathcal{D}'$, которое определяется p -ади́ческим обобщенным случайным процессом f , таково, что $\{\Phi(\varphi), \varphi \in \mathcal{D}\} = \{f(\varphi, \omega), \varphi \in \mathcal{D}\}$ индуцирует преобразование вероятностной меры $\mathbf{P}$ в вероятностную меру μ , заданную на σ -алгебре $\Sigma_{\mathcal{D}'}$ пространства $\mathcal{D}'$, содержащей все цилиндрические множества вида

$$C_n = \{\Phi \in \mathcal{D}' : (\Phi(\varphi_1), \dots, \Phi(\varphi_n)) \in B \subset \mathbb{C}^n\},$$

где $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ – линейно независимые функции из $\mathcal{D}$. Таким образом, тройка $(\mathcal{D}', \Sigma_{\mathcal{D}'}, \mu)$ есть вероятностное пространство, на котором определен p -ади́ческий обобщенный случайный процесс $\{\Phi(\varphi), \varphi \in \mathcal{D}\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2. *p -адическим белым шумом* называется гауссовский p -адический обобщенный случайный процесс $\{\Phi(\varphi), \varphi \in \mathcal{D}\}$ такой, что:

- 1) $\mathbf{E}[\Phi(\varphi)] \equiv \int_{\mathcal{D}'} \Phi(\varphi) \mu(d\Phi) = \int_{\Omega} f(\varphi, \omega) \mathbf{P}(d\omega) = 0$;
- 2) $\mathbf{E}[\Phi(\varphi) \overline{\Phi(\psi)}] \equiv \int_{\mathcal{D}'} \Phi(\varphi) \overline{\Phi(\psi)} \mu(d\Phi) = \int_{\mathbb{Z}_p} \varphi(t) \overline{\psi(t)} dt$.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть $\{Z_k, k \in I\}$ – случайная последовательность, определенная на вероятностном пространстве $(\Pi, \Sigma_{\Pi}, \mathbf{m})$; она образует ортонормальный базис в $L_{\mathbb{C}}^2(\Pi, \Sigma_{\Pi}, \mathbf{m})$. Тогда ряд $\sum_{k \in I} Z_k \tilde{\varphi}_k$, где $\tilde{\varphi}_k = \int_{\mathbb{Z}_p} \varphi(t) \chi(kt) dt$, $\chi(kt)$ – аддитивный характер на $\mathbb{Z}_p$, $\varphi(t) \in \mathcal{D}(\mathbb{Z}_p)$, сходится в $L_{\mathbb{C}}^2(\Pi, \Sigma_{\Pi}, \mathbf{m})$ и определяет p -адический белый шум $\Phi(\varphi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сходимость этого ряда следует из сходимости ряда $\sum_{k \in I} |\tilde{\varphi}_k|^2$, и нетрудно показать, что этот ряд определяет p -адический белый шум. Действительно,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[\sum_{k \in I} Z_k \tilde{\varphi}_k \right] &= \sum_{k \in I} \tilde{\varphi}_k \mathbf{E}[Z_k] = 0, \\ \mathbf{E} \left[\sum_{k \in I} Z_k \tilde{\varphi}_k \overline{\sum_{l \in I} Z_l \tilde{\psi}_l} \right] &= \sum_{k, l \in I} \tilde{\varphi}_k \overline{\tilde{\psi}_l} \mathbf{E}[Z_k \overline{Z_l}] = \sum_{k \in I} \tilde{\varphi}_k \overline{\tilde{\psi}_k} = \int_{\mathbb{Z}_p} \varphi(t) \overline{\psi(t)} dt, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

§6. Исследование p -адического стохастического псевдодифференциального уравнения

Мы будем искать p -адическое броуновское движение как решение стохастического псевдодифференциального уравнения

$$\mathbf{D}\Psi = f, \tag{6.1}$$

где $\mathbf{D}$ – псевдодифференциальный оператор Владимирова; по поводу его определения и свойств см. [7], [1]. Здесь мы отметим, что на основные функции из $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$ он действует по формуле

$$\mathbf{D}_t \varphi(t) = \frac{p^2}{p+1} \int_{\mathbb{Q}_p} \frac{\varphi(t) - \varphi(\tau)}{|t - \tau|_p^2} d\tau = \int_{\mathbb{Q}_p} |k|_p \tilde{\varphi}(k) \chi(-kt) dk,$$

где

$$\tilde{\varphi}(k) = \int_{\mathbb{Q}_p} \varphi(t) \chi(kt) dt.$$

Его действие на обобщенные функции Φ из $\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p)$, для которых Φ непрерывно распространяется на множество функций $\{\psi = \mathbf{D}\varphi, \varphi \in \mathcal{D}\}$, определяется формулой

$$\langle \mathbf{D}\Phi, \varphi \rangle = \langle \Phi, \mathbf{D}\varphi \rangle.$$

Обобщенная функция f в правой части уравнения (6.1) представляет собой продолжение на $\mathbb{Q}_p$ p -адического белого шума, который был определен на $\mathbb{Z}_p$ в §5. Это продолжение определяется формулой

$$f(\varphi, \omega) = \langle f, \varphi \rangle = \sum_{k \in I} \xi(k, \omega) \int_{\mathbb{Q}_p} dt \chi(-kt) \Delta(|t|_p) \varphi(t),$$

где

$$\Delta(|t|_p) = \begin{cases} 1, & |t|_p \leq 1, \\ 0, & |t|_p > 1, \end{cases}$$

$\varphi(t) \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$, т.е. f – обобщенная функция из $\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p)$ с носителем в $\mathbb{Z}_p$.

ТЕОРЕМА 6.1. *Решение стохастического псевдодифференциального уравнения (6.1) существует в $\mathcal{D}'$ и задается формулой (6.2).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 1 из [1, с.173] решение уравнения (6.1) существует для тех $\Psi \in \mathcal{D}'$, для которых $\mathbf{D}\Psi \in \mathcal{D}'$, и выражается формулой

$$\Psi = \mathbf{D}^{-1}f + C,$$

где $C = C(\omega)$ – произвольная стохастическая постоянная. Оператор $\mathbf{D}^{-1}$ определяется формулой

$$g_1(t) = -\frac{p-1}{p \ln p} \ln |t|_p$$

(см. [1]); тогда

$$\langle \mathbf{D}^{-1}f, \varphi \rangle = \langle f, \mathbf{D}^{-1}\varphi \rangle = \sum_{k \in I} \xi(k, \omega) \int_{\mathbb{Q}_p} dt \chi(-kt) \Delta(|t|_p) \mathbf{D}_t^{-1}\varphi(t),$$

где

$$\mathbf{D}_t^{-1}\varphi(t) \equiv g_1 * \varphi(t) = -\frac{p-1}{p \ln p} \int_{\mathbb{Q}_p} \ln |t - \tau|_p \varphi(\tau) d\tau.$$

Поэтому имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{k \in I} \xi(k, \omega) \int_{\mathbb{Q}_p} dt \chi(kt) \Delta(|t|_p) \mathbf{D}_t^{-1}\varphi(t) \\ &= -\frac{p-1}{p \ln p} \sum_{k \in I} \xi(k, \omega) \int_{\mathbb{Z}_p} dt \chi(kt) \left[\int_{\mathbb{Z}_p} d\tau \ln |t - \tau|_p \varphi(\tau) \right. \\ & \quad \left. + \int_{\mathbb{Q}_p \setminus \mathbb{Z}_p} d\tau \ln |\tau|_p \varphi(\tau) \right]. \end{aligned}$$

Поменяем порядок интегрирования. Это можно сделать в силу теоремы Фубини, поскольку:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \int_{\mathbb{Z}_p} d\tau \int_{\mathbb{Z}_p} dt |\ln |t - \tau|_p \varphi(\tau)| \\ &= \int_{\mathbb{Z}_p} d\tau |\varphi(\tau)| \int_{\mathbb{Z}_p} dt |\ln |t - \tau|_p| = \frac{\ln p}{p-1} \int_{\mathbb{Z}_p} d\tau |\varphi(\tau)| < \infty, \end{aligned}$$

$$2) \int_{\mathbb{Z}_p} dt \int_{\mathbb{Q}_p \setminus \mathbb{Z}_p} d\tau |\ln |\tau|_p \varphi(\tau)| < \infty,$$

так как $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$ локально постоянная функция с компактным носителем.

Тогда, меняя порядок интегрирования и учитывая, что

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \chi(kt) \ln |t - \tau|_p dt = \begin{cases} -\chi(k\tau) \frac{p \ln p}{p-1} |k|_p^{-1}, & k \neq 0, \\ -\frac{\ln p}{p-1}, & k = 0, \end{cases}$$

получим

$$\begin{aligned} \langle \Psi, \varphi \rangle &= \sum_{k \in I \setminus \{0\}} \frac{\xi(k, \omega)}{|k|_p} \tilde{\varphi}_k + \frac{1}{p} \xi(0, \omega) \tilde{\varphi}_0 \\ &\quad - \frac{p-1}{p \ln p} \xi(0, \omega) \int_{\mathbb{Q}_p \setminus \mathbb{Z}_p} \ln |t|_p \varphi(t) dt + C(\omega) \int_{\mathbb{Q}_p} \varphi(t) dt, \end{aligned} \quad (6.2)$$

где $\tilde{\varphi}_k = \int_{\mathbb{Z}_p} \varphi(t) \chi(kt) dt$, $\tilde{\varphi}_0 = \int_{\mathbb{Z}_p} \varphi(t) dt$, что и требовалось доказать.

Обобщенная функция (6.2) имеет непрерывное ядро; это вытекает из следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 6.2. *Функция $\Psi(t, \omega; C)$, имеющая вид*

$$\Psi(t, \omega; C) = C(\omega) + \begin{cases} \frac{1}{p} \xi(0, \omega) + \sum_{k \in I \setminus \{0\}} \frac{\xi(k, \omega)}{|k|_p} \chi(-kt), & t \in \mathbb{Z}_p, \\ -\frac{p-1}{p \ln p} \xi(0, \omega) \ln |t|_p, & t \in \mathbb{Q}_p \setminus \mathbb{Z}_p, \end{cases} \quad (6.3)$$

является непрерывной функцией по $t \in \mathbb{Q}_p$ почти для всех $\omega \in \Omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция $\Psi(t, \omega; C)$ для $t \in \mathbb{Q}_p \setminus \mathbb{Z}_p$ непрерывна для всех $\omega \in \Omega$, так как $\ln |t|_p$ — локально постоянная функция в этой области, а значит, непрерывна. Для области $t \in \mathbb{Z}_p$ докажем равномерную сходимость по t ряда

$$\sum_{k \in I \setminus \{0\}} \frac{\xi(k, \omega)}{|k|_p} \chi(-kt) \quad (6.4)$$

почти для всех $\omega \in \Omega$.

(а) Ряд (6.4) сходится равномерно по $t \in \mathbb{Z}_p$ в $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \Sigma, \mathbf{P})$. Действительно, рассмотрим частичную сумму

$$S_{mn}(t, \omega) = \sum_{k \in I_{(m)}^{(n)}} \frac{\xi(k, \omega)}{|k|_p} \chi(-kt),$$

где $I_{(m)}^{(n)} = I^{(n)} \setminus I^{(m)}$, а $I^{(n)}(I^{(m)})$ — множество первых $n(m)$ элементов множества $I \setminus \{0\}$. Тогда

$$\int_{\Omega} |S_{mn}(t, \omega)|^2 \mathbf{P}(d\omega) \equiv E[S_{mn}(t) \overline{S_{mn}(t)}] = \sum_{k \in I_{(m)}^{(n)}} |k|_p^{-2}.$$

Сделаем оценку для этой суммы. Пусть $k = p^{-\gamma}(k_0 + \dots + k_{\gamma-1}p^{\gamma-1})$, $\gamma = 1, 2, \dots, r$. Тогда сумма по k будет содержать $p^r - 1$ членов. Для любого n существует наибольшее $\gamma = \gamma(n)$ такое, что

$$p^{\gamma(n)} - 1 \leq n < p^{\gamma(n)+1} - 1.$$

Тогда найдутся $n_{(+)}$ и $n_{(-)}$ такие, что

$$\begin{aligned} p^{\gamma(n)} - 1 &= n - n_{(-)}, \\ p^{\gamma(n)+1} - 1 &= n + n_{(+)}. \end{aligned}$$

Нетрудно показать (подробнее см. ниже), что

$$\sum_{\substack{k \in I \setminus \{0\} \\ \gamma \leq r}} |k|_p^{-2} = \frac{1}{p}(1 - p^{-r}).$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k \in I_{(m)}^{(n)}} |k|_p^{-2} &= \sum_{k \in I^{(n)}} |k|_p^{-2} - \sum_{k \in I^{(m)}} |k|_p^{-2} \\ &= \frac{1}{p} \left(1 - \frac{1}{n - n_{(-)} + 1} \right) - \frac{1}{p} \left(1 - \frac{p}{m + m_{(+)} + 1} \right) \\ &= \frac{1}{p} \left(\frac{p}{m + m_{(+)} + 1} - \frac{1}{n - n_{(-)} + 1} \right) \leq \frac{1}{p} \left(\frac{p}{m + 1} - \frac{1}{n + 1} \right), \end{aligned}$$

что обеспечивает равномерную сходимость по $t \in \mathbb{Z}_p$ ряда (6.4) в среднем квадратическом по ω .

(b) Из сходимости ряда (6.4) в среднем квадратическом следует сходимость по вероятности (см. [2, с.21]). Таким образом, мы показали, что ряд (6.4) сходится равномерно по $t \in \mathbb{Z}_p$ по вероятности.

(с) И наконец, для ряда, состоящего из взаимно независимых случайных величин, в силу теоремы Леви (см. [2, с.94, теорема 7]), из сходимости по вероятности следует сходимость с вероятностью 1. Таким образом, ряд (6.4) сходится равномерно по $t \in \mathbb{Z}_p$ почти для всех $\omega \in \Omega$, откуда в силу того, что $\mathbb{Q}_p$ – вполне несвязное пространство, следует, что $\Psi(t, \omega; C) \in \mathcal{C}(\mathbb{Q}_p)$ почти для всех $\omega \in \Omega$.

Теорема 6.2 доказана.

Из теорем 6.1 и 6.2 вытекает следующее

СЛЕДСТВИЕ. *Функция $\Psi(t, \omega)$, заданная формулой*

$$\Psi(t, \omega) = \begin{cases} \sum_{k \in I \setminus \{0\}} \frac{\xi(k, \omega)}{|k|_p} (\chi(-kt) - 1), & t \in \mathbb{Z}_p, \\ -\xi(0, \omega) \left(\frac{p-1}{p \ln p} \ln |t|_p + \frac{1}{p} \right) - \sum_{k \in I \setminus \{0\}} \frac{\xi(k, \omega)}{|k|_p}, & t \in \mathbb{Q}_p \setminus \mathbb{Z}_p, \end{cases} \quad (6.5)$$

является обобщенным решением стохастического псевдодифференциального уравнения (6.1) в классе непрерывных функций $\mathcal{C}(\mathbb{Q}_p)$ с начальным условием $\Psi(0, \omega) = 0$ для почти всех $\omega \in \Omega$.

§7. Построение p -адической меры Винера

Теперь перейдем к конструктивному построению p -адической меры Винера. Для этого применительно к нашему случаю используем метод Пэли–Винера (см. [8], [10]), который дает возможность прямого построения гауссовских счетно-аддитивных мер в гильбертовых пространствах. Схема метода такова:

1. Рассмотрим сепарабельное гильбертово пространство $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z}_p, dt)$ квадратично интегрируемых по мере Хаара dt комплекснозначных функций p -адического аргумента $t \in \mathbb{Z}_p$ с ортонормированным базисом $\{\chi(kt), k \in I\}$ (см. [1]). Каждая функция $\psi \in L^2_{\mathbb{C}}$ может быть задана последовательностью чисел $\tilde{\psi}_k = \int_{\mathbb{Z}_p} \psi(t) \chi(kt) dt$ с $\sum_{k \in I} |\tilde{\psi}_k|^2 < \infty$ ($L^2_{\mathbb{C}}$ изоморфно $l^2_{\mathbb{C}}$).

2. Фиксируем последовательность $\{\lambda_k\}$, $k \in I$, положительных чисел $\lambda_k \in \mathbb{R}_+$ и поставим в соответствие каждой точке из $L^2_{\mathbb{C}}$ точку $Z_k = \lambda_k \tilde{\psi}_k$ из Π . Это отображение $L^2_{\mathbb{C}} \rightarrow \Pi$ инъективно.

3. Заимствуем меру $\mathbf{m}$ цилиндрических множеств в $L^2_{\mathbb{C}}$ из Π по правилу

$$\begin{aligned} \mathcal{W} \{ \psi \in L^2_{\mathbb{C}} : r_k < |\tilde{\psi}_k| \leq R_k, \quad \alpha_k < \theta_k \leq \beta_k, \quad k \in I^{(n)} \} \\ = \mathbf{m} \{ Z \in \Pi : r_k \lambda_k < |Z_k| \leq R_k \lambda_k, \quad \alpha_k < \theta_k \leq \beta_k, \quad k \in I^{(n)} \}. \end{aligned}$$

Полученная мера $\mathcal{W}$ на $L^2_{\mathbb{C}}$ будет счетно-аддитивной, если образ $L^2_{\mathbb{C}}$ в Π будет заполнять множество полной меры. Этот образ есть множество всех тех $Z \in \Pi$, для которых сходится ряд

$$\sum_{k \in I} \frac{|Z_k|^2}{\lambda_k^2} = \sum_{k \in I} |\tilde{\psi}_k|^2.$$

В силу признака Колмогорова–Хинчина это множество имеет полную меру при сходимости ряда $\sum_{k \in I} \frac{1}{\lambda_k^2}$.

Предполагая для λ_k это условие выполненным, мы можем построить в $L^2_{\mathbb{C}}$ большое количество гауссовских мер. Каждая отдельная мера зависит от выбора базиса и постоянных λ_k , т.е. от мономорфизма $\mathcal{Z}: L^2_{\mathbb{C}} \rightarrow \Pi$.

Чтобы получить вполне определенный вероятностный процесс, нужно однозначно выбрать мономорфизм $\mathcal{Z}$. Так как базис в $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z}_p, dt)$ мы уже зафиксировали, произвол остается в выборе последовательности положительных чисел $\{\lambda_k\}$.

Для того чтобы фиксировать последовательность $\{\lambda_k\}$, потребуем выполнение условия: пусть искомый случайный процесс на $\mathbb{Z}_p$ совпадает с решением (6.5) стохастического уравнения (6.1); тогда $\lambda_k = |k|_p$, $\lambda_0 = p$.

Покажем, что $\sum_{k \in I \setminus \{0\}} \frac{1}{|k|_p^2} < \infty$. Действительно,

$$\begin{aligned} \sum_{k \in I \setminus \{0\}} \frac{1}{|k|_p^2} &= \sum_{\gamma, k_0, \dots, k_{\gamma-1}} p^{-2\gamma} |k_0 + k_1 p + \dots + k_{\gamma-1} p^{\gamma-1}|_p \\ &= \sum_{k_0=1}^{p-1} p^{-2} + \sum_{k_0=1}^{p-1} \sum_{k_1=0}^{p-1} p^{-2 \cdot 2} + \dots + \sum_{k_0=1}^{p-1} \sum_{k_1=0}^{p-1} \dots \sum_{k_n=0}^{p-1} p^{-2(n+1)} + \dots \\ &= \frac{p-1}{p^2} \sum_{n=0}^{\infty} p^{-n} = \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

Тогда в силу признака Колмогорова–Хинчина индуцированная из пространства последовательностей Π мера $\mathcal{W}$ будет счетно-аддитивной на $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z}_p, dt)$.

Таким образом, мы прямым построением доказали существование случайного p -адического процесса $\{\Psi(t, \omega), t \in \mathbb{Z}_p\}$, почти все траектории которого оказались непрерывными функциями, представимыми в виде сумм рядов Фурье

$$\Psi(t, \omega) = \sum_{k \in I \setminus \{0\}} \frac{\xi(k, \omega)}{|k|_p} (\chi(-kt) - 1), \quad t \in \mathbb{Z}_p. \quad (7.1)$$

Другими словами, мы имеем вероятностное пространство $(\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p), \Sigma_{\mathcal{C}}, \mathcal{W})$.

ТЕОРЕМА 7.1. *p -адический случайный процесс $\{\psi(t, \omega), t \in \mathbb{Z}_p\}$, где*

$$\psi(t, \omega) = \frac{p}{\sqrt{2(p+1)}} \Psi(t, \omega),$$

определяет p -адическое броуновское движение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойства 1) и 2) определения 3.1 следуют из построения гауссовского p -адического случайного процесса.

Докажем свойство 3). Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\psi(t)] &= \mathbf{E}\left[\frac{p}{\sqrt{2(p+1)}} \sum_{k \in I \setminus \{0\}} \frac{\xi(k, \omega)}{|k|_p} (\chi(-kt) - 1)\right] \\ &= \frac{p}{\sqrt{2(p+1)}} \sum_{k \in I \setminus \{0\}} \frac{(\chi(-kt) - 1)}{|k|_p} \mathbf{E}[\xi(k, \omega)] = 0. \end{aligned}$$

И наконец, перейдем к доказательству свойства 4):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\psi(s)\overline{\psi(t)}] &= \mathbf{E}\left[\frac{p^2}{2(p+1)} \sum_{k, l \in I \setminus \{0\}} \frac{\xi(k, \omega)\overline{\xi(l, \omega)}}{|k|_p|l|_p} (\chi(-ks) - 1)\overline{(\chi(-lt) - 1)}\right] \\ &= \frac{p^2}{2(p+1)} \sum_{k, l \in I \setminus \{0\}} \frac{(\chi(-ks) - 1)\overline{(\chi(-lt) - 1)}}{|k|_p|l|_p} \mathbf{E}[\xi(k, \omega)\overline{\xi(l, \omega)}] \\ &= \frac{p^2}{2(p+1)} \sum_{k \in I \setminus \{0\}} \frac{(\chi(-ks) - 1)\overline{(\chi(-kt) - 1)}}{|k|_p^2}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Для того чтобы подсчитать эту сумму, докажем сначала следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.1. *Если функция $f(x)$ удовлетворяет условию*

$$\int_{\mathbb{Z}_p} f(x+k) dx = f(k), \quad k \in \mathbb{Q}_p, \quad |k|_p > 1,$$

то верна формула

$$\sum_{k \in I \setminus \{0\}} f(k) = \int_{\mathbb{Q}_p} f(x) dx - \int_{\mathbb{Z}_p} f(x) dx.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{Q}_p} f(x) dx &= \int_{\mathbb{Q}_p \setminus \mathbb{Z}_p} f(x) dx + \int_{\mathbb{Z}_p} f(x) dx \\ &= \sum_{k \in I \setminus \{0\}} \int_{\mathbb{Z}_p} f(k + \xi) d\xi + \int_{\mathbb{Z}_p} f(\xi) d\xi = \sum_{k \in I \setminus \{0\}} f(k) + \int_{\mathbb{Z}_p} f(x) dx. \end{aligned}$$

Функция $\frac{\chi(kt)}{|k|_p^2}$ удовлетворяет условию предложения. Действительно,

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \frac{\chi((k + \xi)t)}{|k + \xi|_p^2} d\xi = \frac{\chi(kt)}{|k|_p^2} \int_{\mathbb{Z}_p} \chi(\xi t) d\xi = \frac{\chi(kt)}{|k|_p^2} \int_{\mathbb{Z}_p} d\xi = \frac{\chi(kt)}{|k|_p^2}$$

в силу того, что $\chi(\xi t) \equiv 1$, так как ξ и $t \in \mathbb{Z}_p$. Тогда сумма в (7.2) есть

$$\begin{aligned} &\frac{p^2}{2(p+1)} \sum_{k \in I \setminus \{0\}} \frac{(\chi(-ks) - 1) \overline{(\chi(-kt) - 1)}}{|k|_p^2} \\ &= \frac{p^2}{2(p+1)} \int_{\mathbb{Q}_p \setminus \mathbb{Z}_p} \frac{(\chi(-ks) - 1) \overline{(\chi(-kt) - 1)}}{|k|_p^2} dk \\ &= \frac{p^2}{2(p+1)} \left[\int_{\mathbb{Q}_p \setminus \mathbb{Z}_p} \frac{\chi(-k(s-t))}{|k|_p^2} dk - \int_{\mathbb{Q}_p \setminus \mathbb{Z}_p} \frac{\chi(-ks)}{|k|_p^2} dk \right. \\ &\quad \left. - \int_{\mathbb{Q}_p \setminus \mathbb{Z}_p} \frac{\overline{\chi(-kt)}}{|k|_p^2} dk + \int_{\mathbb{Q}_p \setminus \mathbb{Z}_p} \frac{dk}{|k|_p^2} \right]. \end{aligned} \tag{7.3}$$

Вычислим интегралы:

- 1) $\int_{\mathbb{Q}_p \setminus \mathbb{Z}_p} \frac{\chi(kt)}{|k|_p^2} dk = \left(1 - \frac{1}{p}\right) \frac{1 - |t|_p}{p - 1} - p^{-2} |t|_p;$
- 2) $\int_{\mathbb{Q}_p \setminus \mathbb{Z}_p} \frac{dk}{|k|_p^2} = \frac{1}{p}.$

Подставляя полученные результаты в (7.3), имеем

$$\mathbf{E}[\psi(s) \overline{\psi(t)}] = \frac{1}{2} (|s|_p + |t|_p - |s - t|_p),$$

что и требовалось доказать.

§8. Свойства траекторий p -адического броуновского движения

В предыдущем параграфе мы убедились в непрерывности для почти всех ω выборочных функций $\psi(t, \omega)$, $t \in \mathbb{Z}_p$, броуновского движения. Здесь мы рассмотрим более тонкие свойства броуновских траекторий.

В дальнейшем нам будет удобно пользоваться естественным представлением для p -адического броуновского движения $\{\psi(t, \omega), t \in \mathbb{Z}_p\} = \{v(t), t \in \mathbb{Z}_p\}$, где $v(t) = \psi(t, v)$, определенного на вероятностном пространстве $(\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p), \Sigma_{\mathcal{C}}, \mathcal{W})$. Нам известно из §7, что траектории броуновского движения представляются в виде

$$v(t) = \frac{p}{\sqrt{2(p+1)}} \sum_{k \in I \setminus \{0\}} \frac{Z_k}{|k|_p} (\chi(-kt) - 1),$$

где $\{Z_k, k \in I\}$ – последовательность, определенная на вероятностном пространстве $(\Pi, \Sigma_{\Pi}, \mathbf{m})$.

В §7 было показано, что p -адический винеровский процесс сосредоточен на пространстве непрерывных функций $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p)$. Здесь мы сформулируем и докажем теорему, которая уточняет носитель меры $\mathcal{W}$. Для того чтобы определить действие оператора Владимирова, мы будем предполагать, что функции, заданные на $\mathbb{Z}_p$, продолжаются нулем на все $\mathbb{Q}_p$. Оператор Владимирова степени α (для $\alpha > 0$) определяется на основных функциях $\varphi(t)$ из $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$ формулой (см. [7], [1])

$$\mathbf{D}^\alpha \varphi(t) = \frac{p^\alpha - 1}{1 - p^{-(\alpha+1)}} \int_{\mathbb{Q}_p} \frac{\varphi(t) - \varphi(\tau)}{|t - \tau|_p^{\alpha+1}} d\tau.$$

ТЕОРЕМА 8.1. *Рассмотрим множество*

$$H^{(\alpha)} = \{v(t) \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p) : \mathbf{D}_t^{(\alpha)} v(t) \in L_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{Z}_p, dt)\}.$$

Тогда

$$\mathcal{W}(H^{(\alpha)}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha < 1/2, \\ 0, & \text{если } \alpha \geq 1/2, \end{cases}$$

где $\mathbf{D}_t^{(\alpha)}$ – оператор Владимирова степени α .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим множество

$$H_1^{(\alpha)} = \{\varphi(t) \in L_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{Z}_p, dt) : \varphi(t) = \mathbf{D}_t^{(\alpha)} v(t)\};$$

тогда любая функция $\varphi(t) \in H_1^{(\alpha)}$ с точностью до константы представляется рядом

$$\varphi(t) = \frac{p}{\sqrt{2(p+1)}} \sum_{k \in I \setminus \{0\}} \frac{Z_k}{|k|_p^{1-\alpha}} \chi(-kt).$$

Поставим вопрос о мере множества $H_1^{(\alpha)}$. Пусть $\mathcal{Z}$ – мономорфизм $H_1^{(\alpha)} \rightarrow E_{\langle |k|_p^{1-\alpha} \rangle} \subset \Pi$, $\varphi \rightarrow \{Z_k\}$, $Z_k = |k|_p^{1-\alpha} \tilde{\varphi}_k$, где $\tilde{\varphi}_k = \int_{\mathbb{Z}_p} \varphi(t) \chi(kt) dt$. Тогда в силу признака Колмогорова–Хинчина имеем

$$\mathbf{m}(E_{\langle |k|_p^{1-\alpha} \rangle}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha < 1/2, \\ 0, & \text{если } \alpha \geq 1/2. \end{cases}$$

Так как мера $\mathcal{W}$ индуцирована мерой $\mathbf{m}$, то

$$\mathcal{W}(H_1^{(\alpha)}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha < 1/2, \\ 0, & \text{если } \alpha \geq 1/2. \end{cases}$$

И, наконец, множество $H^{(\alpha)}$ отличается от множества $H_1^{(\alpha)}$ на множество постоянных функций, мера которого равна нулю, т.е.

$$\mathcal{W}(H^{(\alpha)}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha < 1/2, \\ 0, & \text{если } \alpha \geq 1/2, \end{cases}$$

что и требовалось доказать.

Список литературы

1. Владимиров В. С., Волович И. В., Зеленов Е. И. p -адический анализ и математическая физика. М.: Наука, 1994.
2. Гихман И. И., Скороход А. В. Теория случайных процессов. Т. 1. М.: Наука, 1971.
3. Хренников А. Ю. Обобщенные функции и гауссовские континуальные интегралы по неархимедовым функциональным пространствам // Изв. АН. Сер. матем. 1991. Т. 55. № 4. С. 780–814.
4. Кочубей А. Н. Гауссовы интегралы и спектральная теория над локальным полем // Изв. АН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 6. С. 69–78.
5. Evans S. N. Continuity properties of gaussian stochastic processes indexed by a local field // Proc. Math. Soc. 1988. V. 56. Part 2. P. 380–416.
6. Evans S. N. Sample path properties of gaussian stochastic processes indexed by a local field // Proc. Math. Soc. 1988. V. 56. Part 3. P. 580–624.
7. Владимиров В. С. Обобщенные функции над полем p -адических чисел // УМН. 1988. Т. 43. № 5. С. 17–53.
8. Шилов Г. Е., Фан Дык Тинь. Интеграл, мера и производная на линейных пространствах. М.: Наука, 1967.
9. Смолянов О. Г. Об измеримости и неизмеримости подмножеств некоторых функциональных пространств с мерой // Вестн. МГУ. Серия 1. 1966. № 4. С. 72–85.
10. Худа Т. Броуновское движение. М.: Наука, 1987.
11. Albeverio S., Karwowski W. A random walk on p -adics: the generator and its spectrum // Stoch. Proc. Appl. 1994. V. 53. P. 1–22.
12. Бикүлов А. Х. Исследование p -адической функции Грина // ТМФ. 1991. Т. 87. № 3. С. 376–390.

Российская Федерация, 445667 г. Тольятти,
ул. Белорусская, 14.
Тольяттинский политехнический институт,
кафедра высшей математики.
Российская Федерация, 117966 г. Москва,
ул. Губкина, 8. Математический институт,
отдел математической физики, тел. 135-14-49

Поступило в редакцию
17.X.1996