Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Ф. Коробейник, Представляющие системы экспонент и задача Коши для уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1997, том 61, выпуск 3, 91–132

DOI: <https://doi.org/10.4213/im127>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 16:28:41

УДК 517.95

Ю. Ф. Коробейник

Представляющие системы экспонент и задача Коши для уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами

Рассматривается задача Коши по z_2 для однородного линейного уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами и двумя независимыми переменными $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Показывается, что характер сравнительной гладкости по z_1 и z_2 аналитических и ультродифференцируемых решений задачи Коши существенно зависит от величины ρ_2 и, как правило, полностью ею определяется. Получены также довольно общие теоремы единственности и указаны условия, при выполнении которых построенное частное решение зависит от начальных функций и непрерывно и линейно.

Библиография: 38 наименований.

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение в частных производных с двумя независимыми комплексными переменными

$$Mw := \sum_{j=0}^m \sum_{s=0}^{l_j} a_{s,j} \frac{\partial^{s+j} w(z_1, z_2)}{\partial z_1^s \partial z_2^j} = 0. \quad (1)$$

Здесь $a_{s,j} \in \mathbb{C}$, $0 \leq l_j < +\infty$ и суммирование ведется по тем $j \leq m$, для которых $a_{l_j,j} \neq 0$ (т.е. по тем j , для которых $a_{s,j} \neq 0$ хотя бы для одного номера $s \geq 0$). При этом $a_{l_m,m} \neq 0$.

Пусть при $l = 1, 2$ $\mathcal{F}_l$ – плотное в себе подмножество $\mathbb{C}$ и $C^\infty(\mathcal{F}_l)$ – пространство всех комплекснозначных определенных на $\mathcal{F}_l$ функций, имеющих производные всех порядков. При этом функция $y(z)$ дифференцируема в точке $z_0 \in \mathcal{F}_l$, если существует конечный предел $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{y(z) - y(z_0)}{z - z_0}$. Всюду далее $0 \in \mathcal{F}_2$.

Пусть при тех же l $\mathcal{E}_l(\mathcal{F}_l)$ – полное отделимое локально выпуклое пространство (ПОЛВП) такое, что $\mathcal{E}_l(\mathcal{F}_l) \subseteq C^\infty(\mathcal{F}_l)$, и если $y_n \in \mathcal{E}_l(\mathcal{F}_l) \quad \forall n \geq 1$, $y \in \mathcal{E}_l(\mathcal{F}_l)$, $y_n \rightarrow y$ при $n \rightarrow \infty$ в $\mathcal{E}_l(\mathcal{F}_l)$, то $\forall s \geq 0$ последовательность $\{y_n^{(s)}(z)\}_{n=0}^\infty$ сходится к $y^{(s)}(z)$ равномерно на каждом компакте из $\mathcal{F}_l$.

Обозначим символом $(\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_1); \mathcal{E}_2(\mathcal{F}_2))$ множество функций $u(z_1, z_2)$, определенных на $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ и таких, что $\forall z_1 \in \mathcal{F}_1 \quad u(z_1, z_2) \in \mathcal{E}_2(\mathcal{F}_2)$ (как функция от z_2) и $\forall z_2 \in \mathcal{F}_2 \quad u(z_1, z_2) \in \mathcal{E}_1(\mathcal{F}_1)$ (как функция от z_1).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов № 93-011-242 и 96-01-01041).

Для уравнения (1) ставится задача Коши (з.к.) по z_2 : найти решение $w(z_1, z_2)$ уравнения (1) из $(\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_1); \mathcal{E}_2(\mathcal{F}_2))$ такое, что

$$\left. \frac{\partial^k w(z_1, z_2)}{\partial z_2^k} \right|_{z_2=0} = \varphi_k(z_1), \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (2)$$

где $\varphi_k(z_1)$ – заданные функции из $\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_1)$.

Введем характеристику уравнения (1), которая является основной для всего последующего изложения. Именно, назовем *коррелирующим индексом (кор. инд.) уравнения (1) по переменной z_2* величину

$$\rho_2 = \rho(z_2) := \max \left\{ \frac{l_j - l_m}{m - j} : 0 \leq j < m, a_{l_j, j} \neq 0 \right\}.$$

Образуем еще множества

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_0 &= \{j : 0 \leq j < m; a_{l_j, j} \neq 0; l_j - l_m = \rho_2(m - j)\}, \quad \mathcal{N}_2 = \{m\} \cup \mathcal{N}_0, \\ \mathcal{N}_1 &= \{j : 0 \leq j < m; a_{l_j, j} \neq 0; l_j - l_m < \rho_2(m - j)\}. \end{aligned}$$

Заметим, что $\rho_2 \leq 1 \iff l_j + j \leq l_m + m$ для всех j , $0 \leq j \leq m$, для которых $a_{l_j, j} \neq 0$. В частности, для уравнения

$$\frac{\partial^m w(z_1, z_2)}{\partial z_2^m} + \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{s=0}^{l_j} a_{s, j} \frac{\partial^{s+j} w(z_1, z_2)}{\partial z_1^s \partial z_2^j} = 0 \quad (3)$$

условие $\rho_2 \leq 1$ равносильно тому, что $l_j + j \leq m$ для всех $j \leq m-1$. Иначе говоря, для уравнения (3) $\rho_2 \leq 1$ тогда и только тогда, когда оно является уравнением класса Ковалевской (см. [1, с. 286]). Будем говорить, что *уравнение (1) принадлежит обобщенному классу Ковалевской*, если $\rho_2 \leq 1$, т.е. если $l_m + m \geq l_j + j$ для всех $j \leq m-1$ таких, что $a_{l_j, j} \neq 0$.

В настоящей работе с помощью рядов экспонент строится частное решение з.к. (1), (2) и показывается, что характер гладкости этого решения по переменным z_1 и z_2 существенно зависит от величины кор. инд. ρ_2 . При этом, что весьма важно, условие $l_m = 0$ не предполагается.

В следующем параграфе излагаются необходимые для дальнейшего сведения об асимптотическом поведении ветвей алгебраической функции, определяемой уравнением $Q(x, y) = 0$, где $Q(x, y) := \sum_{j=0}^m y^j \sum_{s=0}^{l_j} a_{s, j} x^s$ – характеристический многочлен уравнения (1). Метод, применяемый в настоящей статье, описывается в § 3, и там же получены в самой общей ситуации оценки коэффициентов представления решения з.к. (1), (2) в виде ряда экспонент, через коэффициенты разложений начальных функций. В § 4–7 и § 9 изучаются свойства (характер гладкости) частного (представленного в виде ряда экспонент) решения з.к. (1), (2) при различных значениях кор. инд. ρ_2 . В § 8 излагаются некоторые дополнительные сведения о кор. индексах, необходимые для рассмотрения случая $\rho_2 > 1$. В § 10 исследуются вопросы существования решения з.к. (1), (2), зависящего от начальных данных непрерывно, а в § 11 – непрерывно и линейно.

§ 2. Некоторые сведения о характеристическом многочлене

Пусть $Q(\lambda, \mu) = Q_1^{r_1}(\lambda, \mu) \dots Q_q^{r_q}(\lambda, \mu)$ – разложение характеристического многочлена $Q(\lambda, \mu)$ на неприводимые многочлены Q_s . В дальнейшем предполагается, что ни один из многочленов Q_s не вырождается в многочлен от одной переменной (λ или μ). Каждое уравнение $Q_s^{r_s}(\lambda, \mu) = 0$ в окрестности бесконечно удаленной точки определяет n_s различных ветвей $\mu_{j,s}(\lambda)$ кратности r_s соответствующей алгебраической функции, причем $\sum_{s=1}^q n_s r_s = m$, и при $|\lambda| \geq R_0$ $\mu_{j,s}(\lambda) = \sum_{k=\alpha}^{\infty} c_{j,s,k} \lambda^{-\frac{k}{\nu}}$, где ν – натуральное число, α – целое число, $\nu = \nu(j, s)$, $\alpha = \alpha(j, s)$ (см., например, [2, с. 535–537]). Отсюда легко получить, что если $\mu_j(\lambda)$ и $\mu_s(\lambda)$ – две различные ветви, соответствующие одному многочлену Q_r или разным многочленам Q_{m_1}, Q_{m_2} , то найдутся натуральное число M и число $d > 0$ такие, что при $|\lambda| \geq R_1$

$$|\mu_j(\lambda) - \mu_s(\lambda)| \geq d|\lambda|^{-M}. \quad (4)$$

Пусть $\mu(\lambda)$ – любая из ветвей алгебраической функции, соответствующей какому-либо неприводимому многочлену Q_s . Как показано в [3, § 2] и в [4, § 2], всегда существует конечный предел $\tau_\mu = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \mu(\lambda) \lambda^{-\rho_2}$. При этом число τ_μ является одним из корней многочлена $P(x) := \sum_{k \in \mathcal{N}_2} a_{l_k, k} x^k$. Разным ветвям μ , вообще говоря, не обязательно соответствуют разные τ_μ .

Положим $\alpha_\mu(\lambda) = \mu(\lambda) - \lambda^{\rho_2} \tau_\mu$. Очевидно, что $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \alpha_\mu(\lambda) \lambda^{-\rho_2} = 0$, и если $\rho_2 \leq 0$, то $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \alpha_\mu(\lambda) = 0$. Пусть теперь $\rho_2 > 0$. Будем говорить, что уравнение $Q(\lambda, \mu) = 0$ допускает сильную асимптотику (по λ), если любая ветвь $\mu(\lambda)$ имеет представление $\mu(\lambda) = \lambda^{\rho_2} \tau_\mu + \alpha_\mu(\lambda)$, где $\sup_{|\lambda| \geq R_0} |\alpha_\mu(\lambda)| < \infty$. В работах [3, § 2] и [4, § 2] получены следующие достаточные условия наличия сильной асимптотики по λ .

Предположим, что выполняются два условия:

а) все корни многочлена $P(x)$ простые;

б) $0 < \rho_2 \leq 1$;

а также одно из таких двух:

с₁) $\forall j \in \mathcal{N}_1: (l_j - l_m) \leq \rho_2(m - j - 1)$ или

с₂) $\delta k_0 \geq \rho_2$, где $k_0 = m - \max\{l : l \in \mathcal{N}_1\}$, а $\delta = \rho_2 - \max\{(l_j - l_m)/(m - j) : j \in \mathcal{N}_1\}$.

Тогда уравнение $Q(\lambda, \mu) = 0$ допускает сильную асимптотику по λ (см. [3], [4]).

Заметим, что если $\rho_2 = \frac{1}{M}$, где $M = 1, 2, \dots$, то условие с₁) выполняется автоматически: если бы оно было нарушено, то $\forall k \in \mathcal{N}_1$ $M(l_k - l_m) < (m - k)$ и $\exists k_0 \in \mathcal{N}_1$ $M(l_{k_0} - l_m) > (m - k_0 - 1)$, откуда $m - k_0 - 1 < M(l_{k_0} - l_m) < m - k_0$, что невозможно. В частности, если $\rho_2 = 1$ и все корни многочлена $P(x)$ простые, то уравнение $Q(\lambda, \mu) = 0$ имеет сильную асимптотику по λ .

В работах [3] и [4] приведено также достаточное условие наличия сильной асимптотики для случая, когда $P(x)$ может иметь и кратные корни.

§ 3. Формальное построение решения задачи Коши и оценка коэффициентов из его представления

Всюду далее предполагается, что пространства $\mathcal{E}_j(\mathcal{F}_j)$, $j = 1, 2$, кроме указанных выше свойств, обладают еще инвариантностью относительно дифференци-

рования в том смысле, что оператор дифференцирования непрерывен в каждом из этих пространств.

Далее, предполагается, что множества $\Lambda_j := \{\alpha \in \mathbb{C} : \exp \alpha z_j \in \mathcal{E}_j(\mathcal{F}_j)\}$ непусты при $j = 1, 2$.

Наконец, считаем, что пространство $\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_1)$ имеет хотя бы одну абсолютно представляющую систему вида $\mathcal{E}_\Lambda := (\exp \lambda_k z_1)_{k=1}^\infty$, $\lambda_k \in \Lambda_1$, $k = 1, 2, \dots$, и $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \infty$.

Напомним [5], что последовательность элементов $(x_k)_{k=1}^\infty$ отделимого локально выпуклого пространства H с набором преднорм $\mathcal{P} = \{p\}$ называется *абсолютно представляющей системой* (АПС) в H , если любой элемент x из H можно представить в виде ряда $x = \sum_{k=1}^\infty c_k x_k$, абсолютно сходящегося в H :

$$\sum_{k=1}^\infty |c_k| p(x_k) < \infty \quad \forall p \in \mathcal{P}.$$

Будем считать, что все показатели λ_k достаточно велики по модулю: $|\lambda_k| \geq R_0$, где число R_0 взято настолько большим, что в области $|\lambda| \geq R_0$ определены все описанные выше ветви $(\mu_j(\lambda))_{j=1}^N$, порожденные уравнением $Q(\lambda, \mu) = 0$.

Пусть p_j – кратность ветви $\mu_j(\lambda)$. Тогда $\sum_{j=1}^N p_j = m$. Имеем $Q(\lambda, \mu) = \sum_{k=0}^m \mu^k R_k(\lambda)$, где R_k – многочлен степени l_k , $k = 1, 2, \dots, m-1$: $R_k(\lambda) = \sum_{s=0}^{l_k} a_{s,k} \lambda^s$.

Уравнение (1) обладает хорошо известным набором частных решений, играющих важную роль в дальнейшем изложении. Именно, если λ_0 – произвольное зафиксированное комплексное число, а μ – корень уравнения $Q(\lambda_0, \mu) = 0$ кратности l , то функция $z_2^s \exp(\lambda_0 z_1 + \mu z_2)$ удовлетворяет уравнению (1) в $\mathbb{C}^2$, если $s \leq l-1$. Выберем последовательность $(\lambda_k)_{k=1}^\infty$, где $\lambda_k \rightarrow \infty$, и $R_m(\lambda_k) \neq 0$, $k = 1, 2, \dots$. Тогда для каждого λ_k найдется m корней $\mu_{j,k}$ (с учетом их кратностей) уравнения $Q(\lambda_k, \mu) = 0$. Будем предполагать, что числа λ_k достаточно велики по модулю: $|\lambda_k| \geq R_0$. Тогда $\mu_{j,k} = \mu_j(\lambda_k)$, где μ_j – одна из $N = \sum_{s=1}^q n_s$ различных ветвей кратности p_j , так что $\sum_{j=1}^N p_j = m$. Искомое решение з.к. (1), (2) будем искать в виде (пока формально записанного) ряда

$$w_0(z_1, z_2) = \sum_{j=1}^N \sum_{s=0}^{p_j-1} \sum_{k=1}^\infty a_{j,s}^{(k)}(z_2)^s \exp[\lambda_k z_1 + \mu_{j,k} z_2]. \quad (5)$$

При этом предполагается, что $\lambda_k \in \Lambda_1$ и $z_2^s \exp \mu_{j,k} z_2 \in \mathcal{E}_2(\mathcal{F}_2) \quad \forall s \leq p_j - 1$, $k \geq 1$. Будем считать, что каждый ряд $\sum_{k=1}^\infty a_{j,s}^{(k)}(z_2)^s \exp[\lambda_k z_1 + \mu_{j,k} z_2]$ сходится абсолютно в $\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_1)$ при любом фиксированном $z_2 \in \mathcal{F}_2$ и в $\mathcal{E}_2(\mathcal{F}_2)$ при любом фиксированном $z_1 \in \mathcal{F}_1$ (при $s = 0, 1, \dots, p_j - 1$; $j = 1, 2, \dots, N$). В этом случае будем говорить, что ряд (5) сходится абсолютно в $(\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_1); \mathcal{E}_2(\mathcal{F}_2))$.

При этих предположениях, учитывая, что каждое слагаемое

$$a_{j,s}^{(k)}(z_2)^s \exp[\lambda_k z_1 + \mu_{j,k} z_2]$$

удовлетворяет уравнению (1), а оператор дифференцирования непрерывен в каждом пространстве $\mathcal{E}_l(\mathcal{F}_l)$, $l = 1, 2$, получаем, что функция w_0 из $(\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_1); \mathcal{E}_2(\mathcal{F}_2))$ удовлетворяет уравнению (1) на множестве $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$. При этом $\forall z_2 \in \mathcal{F}_2$, $\forall n \leq m - 1$

$$\frac{\partial^n w_0(z_1, z_2)}{\partial z_2^n} = \sum_{j=1}^N \sum_{s=0}^{p_j-1} \sum_{k=1}^{\infty} a_{j,s}^{(k)} (z_2^s \exp \mu_{j,k} z_2)^{(n)} \exp \lambda_k z_1,$$

откуда для тех же n и z_1

$$\left. \frac{\partial^n w_0(z_1, z_2)}{\partial z_2^n} \right|_{z_2=0} = \sum_{j=1}^N \sum_{s=0}^{q_j(n)} \sum_{k=1}^{\infty} a_{j,s}^{(k)} s! C_n^s \mu_{j,k}^{n-s} \exp \lambda_k z_1,$$

где $\mu_{j,k} = \mu_j(\lambda_k)$, $q_j(n) = \min\{n, p_j - 1\}$.

Предположим теперь, что $(\exp \lambda_k z_1)_{k=1}^{\infty}$ – АПС в $\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_1)$, и разложим начальные функции $\varphi_n(z_1)$ в абсолютно сходящиеся в $\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_1)$ ряды:

$$\varphi_n(z_1) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{k,n} \exp \lambda_k z_1, \quad n = 0, 1, \dots, m - 1. \quad (6)$$

Допустим, что числа $a_{j,s}^{(k)}$ можно выбрать так, чтобы при любом фиксированном $k \geq 1$ они удовлетворяли соотношениям

$$b_{k,n} = \sum_{j=1}^N \sum_{s=0}^{q_j(n)} a_{j,s}^{(k)} s! C_n^s \mu_{j,k}^{n-s}, \quad n = 0, 1, \dots, m - 1. \quad (7)$$

Тогда $\forall n \leq m - 1$ $\left. \frac{\partial^n w_0(z_1, z_2)}{\partial z_2^n} \right|_{z_2=0} = \varphi_n(z_1)$ и w_0 – искомое решение з.К. (1), (2).

Обоснуем прежде всего возможность указанного выбора чисел $a_{j,s}^{(k)}$. Легко проверить, что при фиксированном $k \geq 1$ равенства (7) образуют систему m линейных уравнений относительно m неизвестных $a_{j,s}^{(k)}$. Эта система уже встречалась в работе [6] при исследовании задачи Коши для аналитических решений одного частного подкласса уравнения (1).

В этой работе (см. также [3, § 1] или [4, § 3]) показано, что определитель системы (7) равен $\prod_{j=1}^N (1! 2! \dots (p_j - 1)! \prod_{r>j} (\mu_{r,k} - \mu_{j,k})^{p_r \cdot p_j})$. По формулам Крамера имеем при $j = 1, 2, \dots, N$; $s = 0, 1, \dots, p_j - 1$; $k = 1, 2, \dots$

$$a_{j,s}^{(k)} = \frac{1}{\Delta_k} \sum_{n=0}^{m-1} (-1)^{n+\beta} b_{k,n} \Delta_{k,n}^{(\beta)}. \quad (8)$$

Здесь $\Delta_{k,n}^{(\beta)}$ – определитель, полученный из Δ_k вычеркиванием его n -й строки и столбца с номером β , где β равно s при $j = 1$ и $\beta = s + \sum_{i=1}^{j-1} p_i$, если $j > 1$. Учитывая, что $\forall j \leq N$

$$|\mu_j(\lambda)| = O(|\lambda|^{\rho_2}),$$

и принимая во внимание еще и оценки (4), получаем из (8) важные неравенства

$$|a_{j,s}^{(k)}| \leq D |\lambda_k|^T \sum_{n=0}^{m-1} |b_{k,n}|, \quad (9)$$

в которых конечные числа D , T от j , s и k не зависят. Оценки (9) позволяют во всех рассмотренных далее случаях, исходя из абсолютной сходимости в $\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_1)$ рядов (6), установить абсолютную сходимость в $(\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_1); \mathcal{E}_2(\mathcal{F}_2))$ ряда (5). При этом, как будет показано ниже, характер гладкости по z_1 и по z_2 решения $w_0(z_1, z_2)$ будет определяться величиной кор. инд. ρ_2 .

В заключение этого параграфа приведем результат, согласно которому в широком классе пространств, имеющих АПС экспонент $(\exp \lambda_k z_1)_{k=1}^\infty$ такую, что $\lim_k |\lambda_k| = \infty$, можно всегда считать, что $\forall k \geq 1 \quad |\lambda_k| \geq R_1$, где число R_1 можно брать как угодно большим.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $\mathcal{E}$ – ПОЛВП функций одного переменного z , инвариантное относительно дифференцирования и имеющее хотя бы одну АПС $(\exp \lambda_k z)_{k=1}^\infty$, для которой $\lim_k |\lambda_k| = \infty$.

Тогда следующие утверждения равносильны:

- 1) в $\mathcal{E}$ существует АПС $(\exp \nu_k z)_{k=1}^\infty$, для которой $\lim_k |\nu_k| = \infty$, и которая остается АПС в $\mathcal{E}$ после удаления из нее любого конечного числа ее элементов;
- 2) каждая АПС $(\exp \tau_k z)_{k=1}^\infty$ в $\mathcal{E}$, для которой $\lim_k |\tau_k| = \infty$, остается АПС в $\mathcal{E}$ после удаления любого конечного числа ее элементов;
- 3) каждый отличный от тождественного нуля линейный дифференциальный оператор конечного порядка с постоянными коэффициентами сюръективен в $\mathcal{E}$;
- 4) $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ оператор $y' - \alpha y$ – эпиморфизм $\mathcal{E}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликации 2) $\implies$ 1), 3) $\iff$ 4) очевидны, и нам остается установить соотношения 1) $\implies$ 4), 3) $\implies$ 2).

1. Пусть справедливо утверждение 3), и пусть $(\exp \tau_k z)_{k=1}^\infty$ – произвольная АПС в $\mathcal{E}$ такая, что $\lim_k |\tau_k| = \infty$. Покажем, что для любого натурального M последовательность $(\exp \tau_k z)_{k=M+1}^\infty$ будет АПС в $\mathcal{E}$. Положим

$$a(z) = \prod_{k=0}^M (z - \tau_k) = \sum_{l=0}^M b_l z^l, \quad a(D)y = \sum_{l=0}^M b_l y^{(l)}(z).$$

Пусть f – любой элемент $\mathcal{E}$. Выберем $v \in \mathcal{E}$ так, чтобы $f = a(D)v$, и разложим v в абсолютно сходящийся в $\mathcal{E}$ ряд по АПС $(\exp \tau_k z)_{k=1}^\infty$: $v(z) = \sum_{k=1}^\infty d_k \exp \tau_k z$. Отсюда

$$f(z) = (a(D)v)(z) = \sum_{k=M+1}^\infty d_k a(\tau_k) \exp \tau_k z,$$

причем ряд сходится абсолютно в $\mathcal{E}$.

2. Пусть в $\mathcal{E}$ имеется АПС $\mathcal{E}_\nu(\exp \nu_k z)_{k=1}^\infty$ со свойствами, указанными в утверждении 1), и пусть $Ly = y' - \alpha y$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Выберем M настолько большим, чтобы

$|\nu_k| > |\alpha| \quad \forall k \geq M$, возьмем любой элемент f из $\mathcal{E}$ и разложим его в абсолютно сходящийся в $\mathcal{E}$ ряд по АПС $\mathcal{E}_\nu(\exp \nu_k z)_{k=M+1}^\infty$:

$$f(z) = \sum_{k=M+1}^{\infty} a_k \exp \nu_k z.$$

Положим $b(\lambda) = \lambda - \alpha$ и рассмотрим ряд

$$u(z) = \sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{a_k}{b(\nu_k)} \exp \nu_k z.$$

Так как $b(\nu_k) \neq 0$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} |b(\nu_k)| = \infty$, то этот ряд сходится абсолютно в $\mathcal{E}$, причем $u'(z) - \alpha u(z) = f(z)$ и L – эпиморфизм $\mathcal{E}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если пространство $\mathcal{E}$ инвариантно относительно умножения на любую экспоненту $\exp \alpha z \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$, то, как легко убедиться, условие 4) равносильно тому, что оператор дифференцирования сюръективен в $\mathcal{E}$.

Будем называть ряд (5), построенный по разложениям (6) начальных функций по АПС $\mathcal{E}_\Lambda(\exp \lambda_k z)_{k=1}^\infty$, *каноническим $\mathcal{E}_\Lambda$ -рядом* (к. $\mathcal{E}_\Lambda$ -рядом), а его сумму – *каноническим $\mathcal{E}_\Lambda$ -решением* (к. $\mathcal{E}_\Lambda$ -решением) з.К. (1), (2).

Основное содержание остальной части данной работы составляет выяснение условий сходимости к. $\mathcal{E}_\Lambda$ -ряда и степени гладкости к. $\mathcal{E}_\Lambda$ -решения з.К. (1), (2).

§ 4. Случай $\rho_2 \leq 0$

Так как для любой ветви функции $\mu(\lambda)$ существует конечный предел $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \mu(\lambda) \lambda^{-\rho_2}$, то в случае, когда $\rho_2 \leq 0$, имеем $\nu := \sup\{|\mu_j(\lambda_k)| : k \geq 1, 1 \leq j \leq N\} < +\infty$. Положим $\beta = \max\{(p_l - 1) : 1 \leq l \leq N\}$ и введем банахово пространство $\mathcal{E}_2(\nu, \beta)$ целых функций $y(z_2)$ таких, что

$$\|y\|_2 := \sup_{z_2 \in \mathbb{C}} \frac{|y(z_2)| \exp(-\nu|z_2|)}{|z_2|^\beta + 1} < +\infty.$$

Нетрудно проверить, что оператор дифференцирования определен и непрерывен в $\mathcal{E}_2(\nu, \beta)$. Кроме того, $z_2^n \exp \alpha z_2 \in \mathcal{E}_2(\nu, \beta)$ при любом целом $n \geq 0$, если $|\alpha| < \nu$, и при $n \leq \beta$, если $|\alpha| = \nu$. Пусть $\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_1)$ – ПОЛВП функций, обладающих указанными выше (в § 1, 3) свойствами, и пусть $\mathcal{P} = \{p\}$ – определяющий топологию в $\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_1)$ набор преднорм. Введем пространство $\{\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_1), \mathcal{E}_2(\nu, \beta)\}$ отображений $f(z_1, z_2) : \mathcal{F}_1 \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ таких, что:

- 1) $\forall z_1 \in \mathcal{F}_1 \quad f(z_1, z_2) \in \mathcal{E}_2(\nu, \beta)$;
- 2) $\forall z_2 \in \mathbb{C} \quad f(z_1, z_2) \in \mathcal{E}_1(\mathcal{F}_1)$;
- 3) $\forall p \in \mathcal{P} \quad (p)f(z_1, z_2) := \sup_{z_2 \in \mathbb{C}} \frac{p(f(z_1, z_2)) \exp(-\nu|z_2|)}{|z_2|^\beta + 1} < \infty$.

Ясно, что $\{\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_1), \mathcal{E}_2(\nu, \beta)\} \subset (\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_1); \mathcal{E}_2(\nu, \beta))$.

Если определить топологию в $\{\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_1), \mathcal{E}_2(\nu, \beta)\}$ набором преднорм $(\mathcal{P}) = \{(p)\}_{p \in \mathcal{P}}$, то можно убедиться в том, что $\{\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_1), \mathcal{E}_2(\nu, \beta)\}$ – ПОЛВП.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\rho_2 \leq 0$, $\mathcal{F}_1 \subset \mathbb{C}$, $\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_1)$ – ПОЛВП такое, что $\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_1) \hookrightarrow C^\infty(\mathcal{F}_1)$, $\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_1)$ инвариантно относительно дифференцирования и $\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_1)$ обладает АПС $\mathcal{E}_\Lambda = (\exp \lambda_k z_1)_{k=1}^\infty$, где $\lim_k \lambda_k = \infty$. Пусть еще $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ $y' - \alpha y$ – автоморфизм $\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_1)$.

Тогда для любых начальных функций $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{m-1}$ из $\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_1)$ существует к. $\mathcal{E}_\Lambda$ -решение (5) з.К. (1), (2) из $\{\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_1), \mathcal{E}_2(\nu, \beta)\}$. Коэффициенты $a_{j,s}^{(k)}$ ряда (5) определяются из системы (7) по коэффициентам $b_{k,n}$ разложений начальных функций в абсолютно сходящиеся в $\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_1)$ ряды (6) по АПС $\mathcal{E}_\Lambda$, а сам ряд (5) сходится абсолютно в $\{\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_1), \mathcal{E}_2(\nu, \beta)\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{E}_\Lambda = \{\exp \lambda_k z_1\}_{k=1}^\infty$ – АПС в $\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_1)$ такая, что $\lim_k \lambda_k = \infty$. Пусть, далее, $\varphi_j(z_1)$, $0 \leq j \leq m-1$, – набор любых m функций из $\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_1)$, и пусть (6) – какие-либо разложения этих функций в абсолютно сходящиеся в $\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_1)$ ряды по $\mathcal{E}_\Lambda$. Из непрерывности оператора дифференцирования в $\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_1)$ следует, что $\forall l = 0, 1, \dots, \forall p \in \mathcal{P}, \forall j \leq m-1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_{k,j}| |\lambda_k|^l p(\exp \lambda_k z_1) < \infty.$$

Далее, $\forall z_2 \in \mathbb{C}, \forall k \geq 1, \forall s \leq p_j - 1, \forall j \leq N$

$$|z_2|^s |\exp \mu_j(\lambda_k) z_2| \leq (|z_2|^\beta + 1) \exp \nu |z_2|.$$

С учетом (9) имеем $\forall p \in \mathcal{P}$

$$\begin{aligned} p \left(a_{j,s}^{(k)} z_2^s \exp [\lambda_k z_1 + \mu_j(\lambda_k) z_2] \right) &= |a_{j,s}^{(k)}| |z_2|^s |\exp \mu_j(\lambda_k) z_2| p(\exp \lambda_k z_1) \\ &\leq (|z_2|^\beta + 1) (\exp \nu |z_2|) p(\exp \lambda_k z_1) \cdot D |\lambda_k|^T \sum_{k=0}^{m-1} |b_{k,n}|. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что ряд (5) при любом фиксированном $z_2 \in \mathbb{C}$ сходится абсолютно в $\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_1)$, и потому $w_0(z_1, z_2) \in \mathcal{E}_1(\mathcal{F}_1)$. Более того, из приведенных оценок следует, что ряд (5) сходится абсолютно в $\{\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_1), \mathcal{E}_2(\nu, \beta)\}$. Так как топология в $\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_1)$ мажорирует топологию поточечной сходимости на $\mathcal{F}_1$, то при любом фиксированном $z_1 \in \mathcal{F}_1$ ряд (5) сходится абсолютно в $\mathcal{E}_2(\nu, \beta)$, и потому $w_0(z_1, z_2) \in \mathcal{E}_2(\nu, \beta)$.

Заметим еще, что $z_2^s \exp \mu_j(\lambda_k) z_2 \in \mathcal{E}_2(\mathcal{F}_2) = \mathcal{E}_2(\nu, \beta)$, если $s \leq p_l - 1$, $l = 1, 2, \dots, N$. Итак, все предположения, при которых в § 3 было построено решение з.К. (1), (2), имеют место, и доказательство закончено.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Допустим, что з.К. (1), (2) имеет решение, представимое абсолютно сходящимся в $\{\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_1), \mathcal{E}_2(\nu, \beta)\}$ рядом (5). Тогда, как показано в § 3, $\forall z_1 \in \mathcal{F}_1$ и при $n = 0, 1, \dots, m-1$

$$\left. \frac{\partial^n w(z_1, z_2)}{\partial z_2^n} \right|_{z_2=0} = \sum_{j=1}^N \sum_{s=0}^{q_j(n)} \sum_{k=1}^{\infty} a_{j,s}^{(k)} s! C_n^s(\mu_{j,k})^{n-s} \exp \lambda_k z_1. \quad (10)$$

Так как $\sup\{|\mu_{j,k}| : 1 \leq j \leq N, k \geq 1\} < +\infty$, то из абсолютной сходимости в $\{\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_1), \mathcal{E}_2(\nu, \beta)\}$ ряда (5) легко получить, что ряд (10) сходится абсолютно в $\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_1)$, и потому его сумма принадлежит $\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_1)$. Таким образом, справедливо

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\rho_2 \leq 0$, $\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_1)$ – то же пространство, что и в теореме 1, и пусть $\varphi_k \in C^\infty(\mathcal{F}_1)$, $k = 0, 1, \dots, m-1$.

Тогда равносильны такие утверждения:

- 1) начальные функции $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{m-1}$ принадлежат $\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_1)$;
- 2) существует к. $\mathcal{E}_\Lambda$ -ряд, абсолютно сходящийся в $\{\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_1), \mathcal{E}_2(\nu, \beta)\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Так как $\forall k \geq 1 \quad |\lambda_k| \geq R_0$, а число R_0 можно взять как угодно большим, то, зафиксировав сколь угодно малое $\varepsilon > 0$, можно в теореме 1 в качестве ν взять число $\delta + \varepsilon$, где $\delta = 0$, если $\rho_2 < 0$, и δ равно наибольшему из модулей корней уравнения

$$0 = P(x) \equiv a_{l_m, m} x^m + \sum_{\substack{0 \leq x \leq m-1 \\ l_k = l_m}} a_{l_k, k} x^k$$

в случае, когда $\rho_2 = 0$.

Теорема 1 и ее следствие показывают, что если $\rho_2 \leq 0$, то для широкого класса пространств $\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_1)$ из принадлежности начальных функций этому пространству следует существование очень гладкого по z_2 решения, принадлежащего очень “узкому” пространству $\mathcal{E}_2(\nu, \beta)$ – подпространству пространства $[1, \infty)$ всех целых функций экспоненциального типа (ц.ф.э.т.). При этом пространство $\mathcal{E}_2(\nu, \beta)$ определяется параметрами ν и β , которые находятся по уравнению (1) и не зависят от выбора пространства $\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_1)$, удовлетворяющего указанным выше условиям. Так как $\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_1)$ содержит АПС экспонент $(\exp \lambda_k z)_{k=1}^\infty$, $\lim \lambda_k = \infty$, то, вообще говоря, $[1, \infty) \subseteq \mathcal{E}_1(\mathcal{F}_1)$. Таким образом, решение “более гладко” по z_2 (принадлежит более “узкому” подпространству), чем по z_1 , и степень гладкости решения з.К. (1), (2) не зависит от его гладкости по z_1 . Интересно отметить, что в предельном случае, когда $l_j = 0$, $j = 0, 1, \dots, m$, т.е. для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\sum_{k=0}^m a_k \frac{d^k w(z_2)}{dz_2^k} = 0, \quad w^{(j)}(0) = c_j, \quad j = 0, 1, \dots, m-1,$$

имеем $\rho_2 = 0$; параметр ν равен наибольшему из модулей корней уравнения $0 = P(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k$, а $\beta + 1$ – наибольшей кратности этих корней. Нетрудно видеть, что решения з.К. для этого уравнения с любыми начальными условиями (числами) c_j принадлежит пространству $\mathcal{E}_2(\nu, \beta)$. При этом решения з.К. не могут находиться (сразу все) в пространстве $\mathcal{E}_2(\gamma, \delta)$, если $\gamma < \nu$ или если $\gamma = \nu$, но $\delta < \beta$.

Естественно говорить, что в случае $\rho_2 \leq 0$ решение з.К. (1), (2) абсолютно гладко по z_2 .

Заметим еще, что теорема 1 точна в том смысле, что пространство $\mathcal{E}_2(\nu, \beta)$ является “минимальным” (в шкале таких пространств) из содержащих решение з.К. (1), (2).

Приведем примеры пространств $\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_1)$.

1. Положим $\mathcal{F}_1 = (-R, R)$, $0 < R \leq +\infty$; $\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_1) = C^\infty(-R, R)$ – пространство Фреше всех бесконечно дифференцируемых на $(-R, R)$ функций с топологией, определенной набором норм

$$\|y\|_n = \max\{|y^{(k)}(x)| : 0 \leq k \leq n-1, x \in [-R_n, R_n]\}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где $0 < R_n \uparrow R$. Здесь $\Lambda = \mathbb{C}$, так как $\exp \alpha z \in C^\infty(-R, R) \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$. Из результатов работ [7], [5], [8] следует, что в $C^\infty(-R, R)$ имеется АПС $(\exp \lambda_k z)_{k=1}^\infty$, где $\limsup \frac{|\lambda_k|}{k} < +\infty$, $\liminf \frac{|\lambda_k|}{k} > 0$. Очевидно, что оператор дифференцирования $Dy = y'$ непрерывен в $C^\infty(-R, R)$. При этом $\forall \alpha \in \mathbb{C} \quad y' - \alpha y$ – эпиморфизм $C^\infty(-R, R)$. Поэтому теорема 1 и ее следствие применимы к $C^\infty(-R, R)$.

2. Пусть $\mathcal{F}_1 = \mathcal{G}$ – выпуклая область, отличная от всей комплексной плоскости, и $\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_1) = \mathcal{H}(\mathcal{G})$ – пространство Фреше всех аналитических в области $\mathcal{G}$ функций с топологией равномерной сходимости на компактах $\mathcal{G}$. Как впервые показано А. Ф. Леонтьевым [9] для любой ограниченной области и позднее автором [10] для любой неограниченной выпуклой области $\mathcal{G}$, в $\mathcal{H}(\mathcal{G})$ имеется АПС $(\exp \lambda_k z)$ такая, что $\limsup \frac{\ln k}{|\lambda_k|} = 0$ (в случае, если область $\mathcal{G}$ ограничена, выполнено более сильное условие $\limsup \frac{n}{|\lambda_n|} < \infty$). Оператор дифференцирования непрерывен в $\mathcal{H}(\mathcal{G})$, и применимы теорема 1 и ее следствие.

3. Пусть $\mathcal{F}_1 = \mathbb{C}$ и $\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_1) = [\rho, \sigma]$, где $1 < \rho < \infty$, $0 \leq \sigma < \infty$ и $[\rho, \sigma]$ – пространство всех целых функций роста не выше, чем типа σ при порядке ρ , с набором норм

$$\|y\|_n = \sup_{z \in \mathcal{G}} |y(z)| \exp \left[- \left(\sigma + \frac{1}{n} \right) |z|^\rho \right], \quad n = 1, 2, \dots$$

Как известно (см., например, [11, с. 1061]), в $[\rho, \sigma]$ имеется АПС $\mathcal{E}_\Lambda = (\exp \lambda_k z)_{k=1}^\infty$ такая, что $\limsup k |\lambda_k|^{-\rho_1} < \infty$, где $\rho_1 = \frac{\rho}{\rho-1}$. И здесь применимы теорема 1 и ее следствия.

4. Аналогично показывается, что в качестве $\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_1)$ можно взять такие индуктивные пределы (положив $\mathcal{F}_1 = \mathbb{C}$):

$$[\rho, \sigma) = \text{ind}_n H_n,$$

$$H_n = \{y(z) \in (\mathbb{C}) \mid \|y\|_n = \sup |y(z)| \exp(-\sigma_n |z|^\rho) < \infty\},$$

где $0 < \rho < \infty$, $0 < \sigma \leq \infty$, $0 < \sigma_n \uparrow \sigma$;

$$F_\rho = \text{ind}_n H_n,$$

$$H_n = \{y(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) \mid \|y\|_n := \sup_{z \in \mathbb{C}} |y(z)| \exp(-|z|^{\rho_n}) < \infty\},$$

где $0 < \rho < \infty$, $0 < \rho_n \uparrow \rho$;

$$M = \text{ind}_n H_n,$$

$$H_n = \left\{ y(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) \mid \|y\|_n := \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|y(z)|}{\exp |z|^n} < \infty \right\}$$

(пространство всех целых функций конечного порядка) и т.д.

5. Пусть $1 < \alpha < \infty$, $0 \leq \sigma < \infty$, F – выпуклый компакт в $\mathbb{C}$ и $\mathcal{F}(\alpha, \sigma)$ – множество всех отображений $F \rightarrow \mathbb{C}$, аналитических в области (возможно, пустой) $\text{Int } F$, бесконечно дифференцируемых на $\mathcal{F}$ и таких, что

$$\forall n \geq 1 \quad |y|_n := \sup \left\{ |y^{(k)}(z)| (k!)^{-\alpha} \left(\sigma + \frac{1}{n} \right)^{-k} : z \in F, \quad k = 0, 1, \dots \right\} < \infty.$$

Легко убедиться, что $\mathcal{F}(\alpha, \sigma)$ – пространство Фреше, инвариантное относительно дифференцирования, причем множество $\text{span}\{\exp \lambda z : \lambda \in \mathbb{C}\}$ плотно в $\mathcal{F}(\alpha, \sigma)$.

Пусть $h_F(\varphi) := \max\{\text{Re } z e^{-i\varphi} : z \in F\}$ – опорная функция компакта F . Применяя традиционную технику, основанную на использовании теорем типа Пелли–Винера–Шварца, можно показать, что отображение $\forall \varphi \in (\mathcal{F}(\alpha, \sigma))' \mapsto \varphi(e^{\lambda z})$ устанавливает топологический изоморфизм между сильным сопряженным к $\mathcal{F}(\alpha, \sigma)$ пространством и пространством $E = \text{ind}_n E_n$, где $\forall n \geq 1$

$$E_n = \left\{ x(z) \in A(\mathbb{C}) \mid \|x\|_n := \sup_{\lambda \in \mathbb{C}} \frac{|x(\lambda)|}{d_n(\lambda)} < \infty \right\},$$

$$d_n(\lambda) = |e^{\lambda z}|_n = \exp[|\lambda| h_F(-\arg \lambda)] \cdot \sup_{k \geq 0} (k!)^{-\alpha} \left(\sigma + \frac{1}{n} \right)^{-k} |\lambda|^k.$$

Иначе говоря, сильное сопряженное пространство $(\mathcal{F}(\alpha, \sigma))'_\beta$ допускает $\exp$ -описание (см. [12, с. 562]). Такое представление пространства $(\mathcal{F}(\alpha, \sigma))'_\beta$ было получено в Ростовском университете дипломных работах Н. В. Новиковой для случая, когда $\text{Int } F \neq \emptyset$, и Е. В. Тищенко для случая, когда F – замкнутый отрезок.

Легко проверить, что пространство E изоморфно топологически пространству $\mathcal{E} = \text{ind}_n \mathcal{E}_n$, где $\mathcal{E}_n$ – B -пространство целых функций $x(z)$ таких, что

$$\|\widehat{x}\|_n := \sup_{\lambda \in \mathbb{C}} \left[|x(\lambda)| \exp \left(-|\lambda| h_F(-\arg \lambda) - \left(\sigma + \frac{1}{n} \right)^{-1} |\lambda|^{\frac{1}{\alpha}} \right) \right] < \infty.$$

Очевидно, что множество $\mathbb{C}$ слабо достаточно для пространства $\mathcal{E} = \text{ind}_n \mathcal{E}_n$ (определение слабо достаточного множества см., например, в [12, § 1]). Согласно [13] можно построить дискретное подмножество $\Lambda = \{\lambda_n : n = 1, 2, \dots\}$ множества $\mathbb{C}$ такое, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$ и Λ слабо достаточно для $\mathcal{E}$. Из теоремы К (см. [12, с. 563]) следует, что $\mathcal{E}_\Lambda := (\exp \lambda_k z)_{k=1}^\infty$ – АПС в $\mathcal{F}(\alpha, \sigma)$. В данном случае $Q_1 = F$, $\mathcal{E}_1(Q_1) = \mathcal{F}(\alpha, \sigma)$ и применима теорема 1.

§ 5. Случай, когда $0 < \rho_2 < 1$

Рассмотрение 3.К. (1), (2) в этой ситуации начнем с одного модельного случая, который используется ниже, в § 7. Пусть $0 < R < \infty$, $K_R = \{z : |z| < R\}$ и $\mathcal{E}_\Lambda = (\exp \lambda_k z)_{k=1}^\infty$ – АПС в пространстве Фреше $\mathcal{H}(K_R)$, для которой $\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{|\lambda_k|} < \infty$ (как отмечалось выше, такая АПС всегда существует). Пусть, далее, $\varphi_j(z_1)$ ($0 \leq j \leq m-1$) – произвольные функции из $\mathcal{H}(K_R)$ и (6) – какие-либо их разложения в абсолютно сходящиеся в $\mathcal{H}(K_R)$ ряды по системе $\mathcal{E}_\Lambda$. Согласно критерию абсолютной сходимости таких рядов в $\mathcal{H}(K_R)$ (см., например, более общий результат работы [10, с. 333–334], в котором следует положить $h(\theta) \equiv R$) имеем $\limsup_{k \rightarrow \infty} [|\lambda_k|^{-1} \ln |b_{k,j}| + R] \leq 0$, $j = 0, 1, \dots, m-1$. Учитывая оценки (9), получаем

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{|\lambda_k|} \ln |a_{j,s}^{(k)}| + R \right] \leq 0, \quad j = 1, \dots, N, \quad s = 0, 1, \dots, p_j - 1. \quad (11)$$

Зафиксируем $j \leq N$, $s \leq p_j - 1$ и $r < R$. Положим

$$\mu_{j,k} = \mu_j(\lambda_k), \quad d_{j,s}^{(k)} = a_{j,s}^{(k)} \exp |\lambda_k| r, \quad k = 1, 2, \dots$$

Пусть сначала $\tau_j \neq 0$, где, как и выше, $\tau_j = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^{-\rho_2} \mu_j(\lambda)$. Тогда если $|z| \leq r$, то

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} |\mu_{j,k}|^{-1/\rho_2} \ln |d_{j,s}^{(k)}| + |\tau_j|^{-1/\rho_2} (R - r) \leq 0.$$

По лемме работы [14, с. 509] ряд $\sum_{k=1}^{\infty} d_{j,s}^{(k)} \exp \mu_j(\lambda_k) z_2$ сходится абсолютно в пространстве $\left[\frac{1}{1-\rho_2}, \sigma_j \right]$, где

$$\sigma_j = (1 - \rho_2) \rho_2^{\frac{\rho_2}{1-\rho_2}} |\tau_j|^{\frac{1}{1-\rho_2}} (R - r)^{\frac{\rho_2}{\rho_2-1}}. \quad (12)$$

Если же $\tau_j = 0$, то из (9), (11) в этом случае получаем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\mu_{j,k}|^{-1/\rho_2} \ln |d_{j,s}^{(k)}| = -\infty,$$

и соответствующий ряд $\sum_{k=1}^{\infty} d_{j,s}^{(k)} \exp \mu_j(\lambda_k) z_2$ сходится абсолютно в $\left[\frac{1}{1-\rho_2}, 0 \right]$. Положим $\sigma(r) = \max\{\sigma_j : 1 \leq j \leq N\}$, где σ_j определяются по формулам (12) в случае $\tau_j \neq 0$, и $\sigma_j = 0$, если $\tau_j = 0$. Мы получили, что при любом $r < R$ и при любом фиксированном z_1 из $\overline{K_r}$ ряд (5) сходится абсолютно в пространстве $\left[\frac{1}{1-\rho_2}, \sigma(r) \right]$, и, следовательно, его сумма $w_0(z_1, z_2)$ принадлежит (как функция от z_2) этому пространству.

Пусть теперь z_2 – любое фиксированное число, и положим $c_{j,s}^{(k)} = a_{j,s}^{(k)} \exp |\mu_{j,k}| \times |z_2|$. Тогда из (11) следует, что $\limsup_{k \rightarrow \infty} [|\lambda_k|^{-1} \ln |c_{j,s}^{(k)}| + R] \leq 0$ и ряд (5) сходится абсолютно в $\mathcal{H}(K_R)$. Поэтому $w_0(z_1, z_2) \in \mathcal{H}(K_R) \quad \forall z_2 \in \mathbb{C}$. По теореме Гартогса $w_0(z_1, z_2) \in \mathcal{H}(K_R \times \mathbb{C})$.

Введем пространство $\mathcal{E}(\rho_2, R)$ функций $y(z_1, z_2)$ из $\mathcal{H}(K_R \times \mathbb{C})$ таких, что $\forall r \in [0, R)$, $\forall n \geq 1$

$$|y|_{r,n} := \sup_{|z_1| \leq r, z_2 \in \mathbb{C}} |y(z_1, z_2)| \exp \left[- \left(\sigma(r) + \frac{1}{n} \right) |z_2|^{\frac{1}{1-\rho_2}} \right] < \infty.$$

Нетрудно убедиться, что $\mathcal{E}(\rho_2, R)$ – пространство Фреше со счетным набором норм $\|y\|_n := |y|_{R(1-\frac{1}{n}), n}$, $n = 2, 3, \dots$. Из приведенных выше выкладок легко вывести, что если φ_j ($j = 0, 1, \dots, m-1$) – произвольные функции из $\mathcal{H}(K_R)$ и (11) – какие-либо абсолютно сходящиеся в $\mathcal{H}(K_R)$ их разложения по АПС $\mathcal{E}_\Lambda$, то построенный по коэффициентам этих разложений ряд (5) сходится абсолютно в $\mathcal{E}(\rho_2, R)$. Его сумма принадлежит $\mathcal{E}(\rho_2, R)$ и по-прежнему пространству $\left(\mathcal{H}(K_R); \left[\frac{1}{1-\rho_2}, \infty \right) \right)$. Обратно, пусть начальные функции φ_j ($j = 0, 1, \dots, m-1$) аналитичны в окрестности начала координат, и пусть существует решение з.к. (1), (2) из $\mathcal{H}(K_R \times \mathbb{C})$. Тогда $\forall j \geq 0 \quad \frac{\partial^j w(z_1, z_2)}{\partial z_2^j} \in \mathcal{H}(K_R \times \mathbb{C})$, и потому $\frac{\partial^j w(z_1, z_2)}{\partial z_2^j} \Big|_{z_2=0} \in \mathcal{H}(K_R)$.

Сформулируем полученный результат.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $0 < \rho_2 < 1$, $0 < R < \infty$, и пусть функции $\varphi_j(z_1)$ аналитичны в окрестности начала координат ($0 \leq j \leq m-1$).

Тогда следующие утверждения равносильны:

- 1) $\varphi_j \in \mathcal{H}(K_R)$, $j = 0, 1, \dots, m-1$;
- 2) существует решение з.к. (1), (2) из $\mathcal{H}(K_R \times \mathbb{C})$;
- 3) существует решение з.к. (1), (2) из $\mathcal{E}(\rho_2, R)$;
- 4) существует к.э.л.-ряд, абсолютно сходящийся в $\mathcal{E}(\rho_2, R)$.

Заметим, что из абсолютной сходимости ряда (5) в $\mathcal{E}(\rho_2, R)$ следует, что при любом фиксированном $z_2 \in \mathbb{C}$ он сходится абсолютно в $\mathcal{H}(K_R)$, а при любом фиксированном $z_1 \in K_R$ — в $\left[\frac{1}{1-\rho_2}, \sigma(|z_1|)\right]$.

Тем же методом (но более простыми выкладками) доказывается

ТЕОРЕМА 3. Пусть $0 < \rho_2 < 1$, и пусть начальные функции $\varphi_j(z_1)$ ($0 \leq j \leq m-1$) аналитичны в окрестности начала координат.

Тогда следующие утверждения равносильны:

- 1) $\varphi_j \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, $j = 0, 1, \dots, m-1$;
- 2) существует решение з.к. (1), (2) из $\mathcal{H}(\mathbb{C}^2)$;
- 3) существует решение з.к. (1), (2) из $\left(\mathcal{H}(\mathbb{C}); \left[\frac{1}{1-\rho_2}, 0\right]\right)$;
- 4) существует решение з.к. (1), (2), представимое в виде к. э.л.-ряда (5), абсолютно сходящегося в пространстве Фреше $\mathcal{E}(\rho_2, \infty)$ всех функций $y(z_1, z_2)$ из $\mathcal{H}(\mathbb{C}^2)$ таких, что $\forall n \geq 1$

$$\|y(z_1, z_2)\|_n := \sup \left\{ |y(z_1, z_2)| \exp \left(-\frac{|z_2|^{\frac{1}{1-\rho_2}}}{n} \right) : |z_1| \leq n, z_2 \in \mathbb{C} \right\} < \infty.$$

Пусть, далее, $\delta > 1$, $0 \leq \sigma < \infty$, $\tau = \max\{\tau_j : 1 \leq j \leq m\}$. Полагая $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = \mathbb{C}$, $\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_1) = [\delta, \sigma]$, $\mathcal{E}_2(\mathcal{F}_2) = [\delta_0, \sigma_0]$, где $\delta_0(\delta - \delta\rho_2 + \rho_2) = \delta$, $(\delta_0\sigma_0)^{1/\delta_0} \cdot (\delta\sigma)^{-\rho_2/\delta} = \tau(\rho_2)^{\frac{\rho_2(\delta-1)}{\delta}}$, и используя те же рассуждения, что и при доказательстве теоремы 2, приходим к такому результату.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $0 < \rho_2 < 1$, $\delta > 1$, $0 \leq \sigma < \infty$, $\varphi_j(z_1) \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, $j = 0, 1, \dots, m-1$. Тогда следующие утверждения равносильны:

- 1) $\varphi_j \in [\delta, \sigma]$, $j = 0, 1, \dots, m-1$;
- 2) существует решение з.к. (1), (2) из $([\delta, \sigma]; \mathcal{H}(\mathbb{C}))$;
- 3) существует решение з.к. (1), (2), представимое в виде к. э.л.-ряда (5), абсолютно сходящегося в пространстве $\mathcal{E}(\delta, \sigma; \delta_0, \sigma_0)$ всех целых функций $y(z_1, z_2)$ из $\mathcal{H}(\mathbb{C}^2)$ таких, что $\forall n \geq 1$

$$\|y(z_1, z_2)\|_n := \sup_{z_1, z_2 \in \mathbb{C}} |y(z_1, z_2)| \exp \left[-\left(\sigma + \frac{1}{n} \right) |z_1|^\delta - \left(\sigma_0 + \frac{1}{n} \right) |z_2|^{\delta_0} \right] < \infty.$$

Наконец, для введенного в § 4 (пример 5) пространства $\mathcal{F}(\alpha, \sigma)$ ультрадифференцируемых на выпуклых компактах F в $\mathbb{C}$ функций аналогичными рассуждениями получается такой результат.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $0 < \rho_2 < 1$, $0 \leq \sigma < \infty$, $0 \leq \alpha < \frac{1}{\rho_2}$, и пусть F — произвольный выпуклый компакт в $\mathbb{C}$. Тогда для любых начальных функций $\varphi_n(z_1)$ ($n = 0, 1, \dots, m-1$) из $\mathcal{F}(\alpha, \sigma)$ существует решение з.к. (1), (2) из

$\left(\mathcal{F}(\alpha, \sigma); \left[\frac{1}{1-\alpha\rho_2}, \sigma_0\right]\right)$, где $\sigma_0 = (1 - \alpha\rho_2)(\sigma\rho_2)^{\frac{\alpha\rho_2}{1-\alpha\rho_2}}$. Это решение представляется в виде к. $\mathcal{E}_\Lambda$ -ряда (5), абсолютно сходящегося в $\left\{\mathcal{F}(\alpha, \sigma); \left[\frac{1}{1-\alpha\rho_2}, \sigma_0\right]\right\}$.

В [4, § 5] получен также аналогичный (но более сложно формулируемый) результат, относящийся к случаю $\alpha = \frac{1}{\rho_2}$, $F = \{z : |z| \leq R\}$, $0 < R < \infty$.

Из теорем 2–6 видно, что в случае $0 < \rho_2 < 1$ характер гладкости решения з.К. (1), (2) по переменной z_2 зависит, вообще говоря, от пространства $\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_1)$, к которому должны принадлежать начальные функции φ_j , но каждый раз гладкость в случае аналитических или ультрадифференцируемых начальных данных по z_2 выше, чем по z_1 (в том смысле, что $\mathcal{E}_2 \hookrightarrow \mathcal{E}_1$). Поэтому естественно говорить при $\rho_2 \in (0, 1)$, что в этом случае имеет место усиленная (“улучшенная”) гладкость по z_2 решения з.К.

§ 6. Случай $\rho_2 = 1$

Рассмотрение этой ситуации начнем со случая, когда начальные функции φ_j аналитичны в некоторой области. Пусть $\mathcal{G}_0$ – выпуклая (не обязательно ограниченная), содержащая начало координат область в $\mathbb{C}$ с опорной функцией $g(-\varphi)$; $\{g_n(\varphi)\}_{n=1}^\infty$ – последовательность 2π -периодических ограниченных тригонометрически выпуклых (см. [15, с. 75]) функций со следующими свойствами:

- 1) $\forall n \geq 1, \forall \theta \in [0, 2\pi] \ g(\theta) > g_n(\theta); \min_{\theta} (g_{n+1}(\theta) - g_n(\theta)) > 0$;
- 2) если $h(\theta)$ – любая 2π -периодическая тригонометрически выпуклая функция, для которой $h(\theta) < g(\theta) \ \forall \theta \in [0, 2\pi]$, то $\exists N \geq 1: \forall n \geq N, \forall \theta \ g_n(\theta) > h(\theta)$.

Как известно [16], такая последовательность всегда найдется. Если $\mathcal{G}_n$ – выпуклое замкнутое множество с опорной функцией $g_n(-\theta)$, то $\mathcal{G}_n$ – компакт области $\mathcal{G}_0$, и топологию Фреше в $\mathcal{H}(\mathcal{G}_0)$ можно задать набором преднорм $|y|_n := \max\{|y(z)| : z \in \mathcal{G}_n\}$. Всегда можно считать, что $0 \in \mathcal{G}_n$, $n = 1, 2, \dots$

Для любой точки $\tau \in \mathbb{C}$ положим

$$(\mathcal{G}_0)_\tau = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : z_1 + \tau z_2 \in \mathcal{G}_0\}.$$

Пусть $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m$ – все корни многочлена $P(x) = \sum_{k \in N_2} a_{l_k, k} x^k$ (они не обязательно различны). Положим $\mathcal{P}\mathcal{G}_0 = \bigcap_{k=1}^m (\mathcal{G}_0)_{\tau_k}$. Очевидно, что $\mathcal{P}\mathcal{G}_0$ – выпуклая область в $\mathbb{C}^2$, содержащая множество $\mathcal{G}_0 \times \{0\}$.

ТЕОРЕМА 6. *Если φ_k , $k = 0, 1, \dots, m-1$, – любые функции из $\mathcal{H}(\mathcal{G}_0)$, то решение з.К. (1), (2) в $\mathcal{H}(\mathcal{P}\mathcal{G}_0)$ существует. При этом если $\mathcal{E}_\Lambda = (\exp \lambda_k z)_{k=1}^\infty$ – любая АПС в $\mathcal{H}(\mathcal{G}_0)$, для которой $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln k}{\lambda_k} = 0$, а (6) – какие-либо разложения начальных функций φ_k в абсолютно сходящиеся в $\mathcal{H}(\mathcal{G}_0)$ ряды по системе $\mathcal{E}_\Lambda$, то в качестве решения з.К. (1), (2) можно взять сумму $w_0(z_1, z_2)$ к. $\mathcal{E}_\Lambda$ -ряда (5), который сходится абсолютно в пространстве $\mathcal{H}(\mathcal{P}\mathcal{G}_0)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема будет доказана, если мы покажем, что при любых j и s таких, что $1 \leq j \leq N$, $0 \leq s_j \leq p_j - 1$, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{j,s}^{(k)}(z_2)^s \exp(\lambda_k z_1 + \mu_j(\lambda_k) z_2) \quad (13)$$

сходится абсолютно в $\mathcal{H}(\mathcal{P}\mathcal{G}_0)$.

Пусть F – любой компакт области $\mathcal{P}\mathcal{G}_0$. Тогда множество $F_1 = \bigcup_{j=1}^m \{z_1 + \tau_j z_2 : (z_1, z_2) \in F\}$ будет компактом в $\mathcal{G}_0$. Следовательно, $\exists K: F_1 \subset \mathcal{G}_K$. Положим $M = \sup\{|z_2| : (z_1, z_2) \in F\}$. Тогда $M < \infty$ и при $k = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} \max\{\operatorname{Re} \lambda_k(z_1 + \tau_j z_2) : (z_1, z_2) \in F\} &\leq \max\{\operatorname{Re} \lambda_k v : v \in \mathcal{G}_K\}; \\ \max\{\operatorname{Re}(\lambda_k z_1 + \mu_j(\lambda_k) z_2) : (z_1, z_2) \in F\} \\ &\leq \max\{\operatorname{Re}(\lambda_k(z_1 + \tau_j z_2)) : (z_1, z_2) \in F\} \\ &\quad + \max\{\operatorname{Re} \lambda_k \varepsilon_k z_2 : (z_1, z_2) \in F\} \\ &\leq \max\{\operatorname{Re} \lambda_k v : v \in \mathcal{G}_K\} + \operatorname{Re} |\lambda_k| \varepsilon_k M, \end{aligned}$$

где $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0$.

Далее, если $s \leq \sum_{j=1}^N p_j$, то $\max\{|z_2|^s : (z_1, z_2) \in F\} \leq (M+1)^m$. Отсюда с учетом (9) получаем для любого $k \geq 1$

$$\begin{aligned} \gamma_{j,s}^{(k)} &:= |a_{j,s}^{(k)}| \max\{|z_2|^s \exp \operatorname{Re}(\lambda_k z_1 + \mu_j(\lambda_k) z_2) : (z_1, z_2) \in F\} \\ &\leq (M+1)^m \exp\{\max(\operatorname{Re} \lambda_k v : v \in \mathcal{G}_K) + \operatorname{Re} M |\lambda_k| \varepsilon_k\} \\ &\quad \times D \sum_{n=0}^{m-1} |b_{k,n}| \cdot |\lambda_k|^T. \end{aligned}$$

Если $k \geq k_0$, то

$$\begin{aligned} \gamma_{j,s}^{(k)} &\leq D_1 \sum_{n=0}^{m-1} |b_{k,n}| \exp |\lambda_k| h_{K+1}(\arg \lambda_k) \\ &= D_1 \sum_{n=0}^{m-1} |b_{k,n}| \exp(\max\{\operatorname{Re} \lambda_k v : v \in \mathcal{G}_{K+1}\}). \end{aligned} \quad (14)$$

Учитывая, что все ряды (6) сходятся абсолютно в $\mathcal{H}(\mathcal{G}_0)$, находим из (14), что ряд (5) сходится абсолютно в $\mathcal{H}(\mathcal{P}\mathcal{G}_0)$.

Выясним степень точности теоремы 6. Обозначим символом $(H)(0)$ сечение плоскостью $z_2 = 0$ любой выпуклой области $H \subset \mathbb{C}^2$. Область $\mathcal{P}\mathcal{G}_0$, в которой согласно теореме 6 гарантируется существование голоморфного решения з.К. (1), (2), обладает тем свойством, что $(\mathcal{P}\mathcal{G}_0)(0) = \mathcal{G}_0$. Обозначим символом B множество всех выпуклых областей $D \subset \mathbb{C}^2$ таких, что $(D)(0) \supseteq \mathcal{G}_0$ и з.К. (1), (2) разрешима в $\mathcal{H}(D)$ для любых функций φ_j из $\mathcal{H}(\mathcal{G}_0)$, $j = 0, 1, \dots, m-1$. Если в качестве φ_0 взять функцию, полная область существования которой совпадает с $\mathcal{G}_0$, то получим, что соответствующее решение з.К. (1), (2), в случае его существования, не может быть аналитическим в любой выпуклой области $T \subset \mathbb{C}^2$ такой, что $(T)(0) \supseteq \mathcal{G}_0$ и $(T)(0)$ содержит хотя бы одну граничную точку $\mathcal{G}_0$. Таким образом, если $T \in B$, то $(T)(0) = \mathcal{G}_0$, и в теореме 6 область $\mathcal{P}\mathcal{G}_0$ нельзя заменить выпуклой областью $T \subset \mathbb{C}^2$ такой, что $(T)(0) \supseteq \mathcal{G}_0$ и $(T)(0) \cap \partial \mathcal{G}_0 \neq \emptyset$.

Заметим еще, что если $\mathcal{G}_0$ – любая выпуклая область в $\mathbb{C}$, $\mathcal{G} = \mathcal{P}\mathcal{G}_0$ и если начальные функции φ_k аналитичны в окрестности начала координат, то из существования голоморфного в $\mathcal{P}\mathcal{G}_0$ решения $w(z_1, z_2)$ з.К. (1), (2) следует, что при $k = 0, 1, \dots, m-1$

$$\varphi_k(z_1) = \frac{\partial^k w(z_1, z_2)}{\partial z_2^k} \Big|_{z_2=0} \in \mathcal{H}(\mathcal{G}_0).$$

Таким образом, справедлива

ТЕОРЕМА 7. Пусть $\rho_2 = 1$ и начальные функции $\varphi_j(z_1)$ аналитичны в окрестности начала координат. Тогда следующие утверждения равносильны:

- а) существует решение з.К. (1), (2) из $\mathcal{H}(\mathcal{P}\mathcal{G}_0)$;
- б) начальные функции φ_j допускают аналитическое продолжение во всю область $\mathcal{G}_0$;
- в) существует к. $\mathcal{E}_\Lambda$ -решение з.К. (1), (2) из $\mathcal{H}(\mathcal{P}\mathcal{G}_0)$.

Как и в рассмотренных случаях $\rho_2 \leq 0$, $0 < \rho_2 < 1$, метод данной работы позволяет и в случае $\rho_2 = 1$ получить решение з.К. (1), (2) при различных пространствах $\mathcal{E}_\Lambda(\mathcal{F}_1)$ начальных заданий, обладающих указанными в § 1–3 свойствами. Приведем примеры таких пространств.

Положим $\mathcal{F}_1 = \mathbb{C}$, $\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_1) = [\delta, \sigma]$, где $1 < \delta < \infty$, $0 \leq \sigma < \infty$. Пусть $\mathcal{E}_\Lambda := \{\exp \lambda_k z_1\}_{k=1}^\infty$ – какая-либо АПС в $[\delta, \sigma]$ такая, что $\limsup_n n |\lambda_n|^{-\delta} < \infty$.

Положим $\tau_0 = \max\{|\tau_j|^\delta : j = 1, \dots, m\}$ и введем пространство Фреше $\mathcal{E}[\delta, \sigma; \tau_0]$ всех целых функций $y(z_1, z_2)$ таких, что $\forall n \geq 1$

$$\|y\|_n := \sup_{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2} \frac{|y(z_1, z_2)|}{\exp[(\sigma + \frac{1}{n})|z_1|^\delta + (\sigma\tau_0 + \frac{1}{n})|z_2|^\delta]} < \infty.$$

Стандартными для данной работы рассуждениями доказывается

ТЕОРЕМА 8. Пусть $\rho_2 = 1$, $1 < \delta < \infty$, $0 \leq \sigma < \infty$, $\varphi_j \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, $j = 0, \dots, m-1$. Тогда следующие утверждения равносильны:

- 1) $\varphi_j \in [\delta, \sigma]$, $j = 0, \dots, m-1$;
- 2) существует решение з.К. (1), (2) из $\mathcal{E}[\delta, \sigma; \tau_0]$;
- 3) существует к. $\mathcal{E}_\Lambda$ -ряд (5), абсолютно сходящийся в $\mathcal{E}[\delta, \sigma; \tau_0]$.

Пусть теперь $1 < \delta < \infty$, $0 < \sigma \leq \infty$ и $[\delta, \sigma) = \text{ind}[\delta, \sigma_n]$, $0 < \sigma_n \uparrow \sigma$.

Обозначим символом $\mathcal{E}(\delta, \sigma; \tau_0)$ пространство всех целых функций $y(z_1, z_2)$ таких, что $\forall z_1 \in \mathbb{C}$ $y(z_1, z_2) \in [\delta, \sigma\tau_0]$ и $\forall z_2 \in \mathbb{C}$ $y(z_1, z_2) \in [\delta, \sigma)$. Рассуждениями, аналогичными вышеизложенным, нетрудно показать, что если $\rho_2 = 1$, то следующие утверждения равносильны:

- 1) $\varphi_j \in [\delta, \sigma)$, $j = 0, \dots, m-1$;
- 2) существует решение з.К. (1), (2) из $\mathcal{E}(\delta, \sigma; \tau_0)$.

В качестве последнего примера рассмотрим уже знакомое пространство $C^\infty(-R, R)$ всех бесконечно дифференцируемых на интервале $(-R, R)$ функций, где $0 < R < \infty$, и топология задается набором преднорм

$$\|y\|_n := \max \left\{ |y^{(k)}(x)| : 0 \leq k \leq n, x \in [-R_n, R_n] \right\},$$

$0 < R_n \uparrow R$, $n = 1, 2, \dots$ Очевидно, что $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\forall n \geq 1$

$$\|\exp \lambda x\|_n = \max\{|\lambda|^n, 1\} \exp |\lambda| R_n |\cos \arg \lambda|.$$

Согласно [7] в $C^\infty(-R, R)$ имеется АПС $\mathcal{E}_\Lambda$ экспонент вида

$$\left\{ \exp \frac{ik\pi x}{R}, \exp mx : k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; m = \pm 1, \pm 2, \dots \right\}.$$

При этом каждый из рядов по системе $\mathcal{E}_\Lambda$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp \frac{ik\pi x}{R} + \sum_{m=1}^{\infty} d_m \exp mx + \sum_{m=1}^{\infty} d_{-m} \exp(-mx)$$

сходится абсолютно в $C^\infty(-R, R)$ тогда и только тогда, когда $\forall n \geq 1$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |k|^n |c_k| + \sum_{m=1}^{\infty} |d_m| \exp mR_n + \sum_{m=1}^{\infty} |d_{-m}| \exp mR_n < \infty.$$

Положим $\lambda_{0,1} = 0$, $\lambda_{2k,1} = -\frac{k\pi i}{R}$, $\lambda_{2k-1,1} = \frac{k\pi i}{R}$, $\lambda_{2k,2} = -k$, $\lambda_{2k-1,2} = k$, $k = 1, 2, \dots$ Тогда начальные функции из $C^\infty(-R, R)$ можно представить в виде абсолютно сходящихся рядов

$$\varphi_j(x_1) = \sum_{k=0}^{\infty} C_{k,j} \exp \lambda_{k,1} x_1 + \sum_{k=1}^{\infty} D_{k,j} \exp \lambda_{k,2} x_1, \quad (15)$$

где $j = 0, \dots, m-1$, $x_1 \in (-R, R)$.

Предположим, что все корни τ_k многочлена $P(x)$ простые и вещественные. Положим $\alpha = \max\{|\tau_k| : 1 \leq k \leq m\}$ и обозначим символом R_α внутренность ромба с вершинами в точках $(-R, 0)$, $(0, \frac{R}{\alpha})$, $(R, 0)$ и $(0, -\frac{R}{\alpha})$. Пусть $C^\infty(R_\alpha)$ – пространство Фреше комплекснозначных бесконечно дифференцируемых в R_α функций $g(x_1, x_2)$.

Имеем $\mu_j(\lambda_{k,i}) = \tau_j \lambda_{k,i} + \nu_j(\lambda_{k,i})$, где при $i = 1$ $k = 0, 1, 2, \dots$ и при $i = 2$ $k = 1, 2, \dots$ Так как в данном случае уравнение (1) обладает сильной асимптотикой, то

$$\sup_{z \in \mathbb{C}} |\nu_j(z)| < \infty, \quad j = 0, 1, \dots, m-1. \quad (16)$$

Если по разложениям (15) (т.е. разложениям (6)) составить вышеуказанным способом соответствующий ряд (5), в котором $z_1 = x_1$, $z_2 = x_2$, то, используя (16), легко установить, что его сумма $w_0(x_1, x_2)$ принадлежит пространству $C^\infty(R_\alpha)$. Обратно, если $w(x_1, x_2) \in C^\infty(R_\alpha)$, то

$$\forall j \leq m-1 \quad \left. \frac{\partial^j w(x_1, x_2)}{\partial x_2^j} \right|_{x_2=0} \in C^\infty(-R, R).$$

В итоге с помощью тех же рассуждений, как и выше, приходим к такому результату.

ТЕОРЕМА 9. Пусть $0 < R < \infty$. Пусть, далее, $\rho_2 = 1$, и пусть все корни многочлена $P(x)$ простые и вещественные. Тогда следующие утверждения равносильны:

а) начальные функции φ_j ($0 \leq j \leq m-1$) принадлежат пространству $C^\infty(-R, R)$;

б) существует решение з.К. (1), (2), представимое в виде абсолютно сходящегося в любой точке R_α ряда вида

$$w_0(x_1, x_2) = \sum_{j=1}^N \sum_{s=0}^{p_j-1} \sum_{k=0}^{\infty} a_{j,s}^{(k)}(x_2)^s \exp[\lambda_{k,1}x_1 + \mu_j(\lambda_{k,1})x_2] \\ + \sum_{j=1}^N \sum_{s=0}^{p_j-1} \sum_{k=1}^{\infty} b_{j,s}^{(k)}(x_2)^s \exp[\lambda_{k,2}x_1 + \mu_j(\lambda_{k,2})x_2],$$

коэффициенты этого ряда определяются единственным образом по коэффициентам разложений начальных функций по системе (15), а его сумма $w(x_1, x_2)$ принадлежит $C^\infty(R_\alpha)$.

Нетрудно получить аналогичный результат для случая, когда все корни $P(x)$ простые и либо все чисто мнимые, либо аргументы любых двух корней совпадают или отличаются на π . В первом случае строится решение з.К. (1), (2) из пространства комплекснозначных функций, бесконечно дифференцируемых на многообразии R_α^i всех точек (x_1, iy) таких, что $(x_1, y) \in R_\alpha$.

В § 4–6 эффективно (в виде ряда (5)) строилось решение з.К. (1), (2) с определенными свойствами (определенной гладкостью по z_1 и z_2). При этом единственность решения з.К. (1), (2) в рассматриваемых классах, как правило, не предполагалась, и поэтому о свойствах других возможных решений ничего сказать было нельзя. Если же “нулевая” з.К. (1), (2) с $\varphi_j = 0$, $j = 0, \dots, m-1$, имеет только нулевое решение в рассматриваемом классе, то мы получаем описание свойств любого решения з.К. Например, когда $\rho_2 = 1$ и начальные данные φ_j аналитичны в выпуклой области $\mathcal{G}_0$, содержащей начало координат, дополнительное предположение о единственности “нулевой” з.К. в классе функций $v(z_1, z_2)$, аналитических в начале координат, приводит (с учетом того, что $(0, 0) \in \mathcal{P}\mathcal{G}_0$) к равносильности таких утверждений:

1) $\varphi_j \in \mathcal{H}(\mathcal{G}_0)$, $j = 0, 1, \dots, m-1$;

2) любое аналитическое в окрестности начала координат решение з.К. (1), (2) аналитично в $\mathcal{P}\mathcal{G}_0$.

Этот результат дополняет теорему 7.

В ситуации, рассмотренной в теореме 8, достаточно предположить, что “нулевая” з.К. для (1) имеет лишь нулевое решение в классе $\mathcal{H}(\mathbb{C}^2)$ всех целых функций, чтобы получить, что при этом предположении каждое из утверждений 1)–2) теоремы 8 равносильно такому:

3) любое решение з.К. (1), (2) из класса $\mathcal{H}(\mathbb{C}^2)$ принадлежит пространству $\mathcal{E}[\delta, \sigma; \tau_0]$.

Аналогичные дополнения можно сделать и к другим доказанным ранее теоремам из § 4–6.

В связи с этим представляет интерес выяснение, когда же з.К. для уравнения (1) с нулевыми начальными условиями

$$\left. \frac{\partial^j w(z_1, z_2)}{\partial z_2^j} \right|_{z_2=0} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, m-1, \quad (17)$$

имеет в том или ином классе функций $v(z_1, z_2)$ только нулевое решение.

Опишем простейший, но достаточно важный результат в этом направлении. Пусть в (1) $l_m = 0$, т.е. уравнение (1) имеет такой вид:

$$\frac{\partial^m w(z_1, z_2)}{\partial z_2^m} = - \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{s=0}^{l_j} a_{s,j} \frac{\partial^{s+j} w(z_1, z_2)}{\partial z_1^s \partial z_2^j} \quad (18)$$

(суммирование ведется по тем $j \leq m-1$, для которых $a_{l_j,j} \neq 0$).

Пусть $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathbb{C}$ и T – класс функций $u(z_1, z_2)$, имеющих непрерывные (по совокупности переменных) на $\mathcal{F}_1 \times K_r$ частные производные всех тех порядков, которые имеются в уравнении (1), и таких, что $\forall z_1 \in \mathcal{F}_1$ функция $u(z_1, z_2)$ аналитична по z_2 в K_r ($r = r(u)$). Используя метод, примененный в [17] при доказательстве леммы 1, получаем, что

$$\forall n \geq 0, \forall k \leq \beta = \max\{l_j : 0 \leq j \leq m-1\}, \forall z_2 \in K_r, \forall z_1 \in \mathcal{F}_1, \forall w \in T$$

$$\frac{\partial^{n+k} w(z_1, z_2)}{\partial z_1^k \partial z_2^n} = \frac{\partial^{n+k} w(z_1, z_2)}{\partial z_2^n \partial z_1^k}. \quad (19)$$

Полагая в (18) $z_2 = 0$, получаем, что $\left. \frac{\partial^m w(z_1, z_2)}{\partial z_2^m} \right|_{z_2=0} = 0$. Дифференцируя равенство (18) при $z \in \mathcal{F}_1$, $z_2 \in K_r$ по z_2 и полагая затем $z_2 = 0$, найдем, с учетом (19), что $\left. \frac{\partial^{m+1} w(z_1, z_2)}{\partial z_2^{m+1}} \right|_{z_2=0} = 0 \quad \forall z_1 \in \mathcal{F}_1$. Вообще, $\left. \frac{\partial^n w(z_1, z_2)}{\partial z_2^n} \right|_{z_2=0} = 0 \quad \forall n \geq 0$, $\forall z_1 \in \mathcal{F}_1$. Отсюда $w(z_1, z_2) \equiv 0$ в $\mathcal{F}_1 \times K_r$.

Заметим, что мы не предполагали выполнение условий $l_j + j \leq m$ при $0 \leq j \leq m-1$, т.е. уравнение (3) не обязательно является уравнением типа Ковалевской.

Отметим два важных примера уравнений вида (1), для которых $\rho_2 = 1$, а именно волновое уравнение $\frac{\partial^2 w}{\partial z_2^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial z_1^2} = 0$ и уравнение Лапласа $\frac{\partial^2 w}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z_2^2} = 0$. Читатель без труда сформулирует конкретные следствия о з.К. для этих уравнений, вытекающие из полученных в этом параграфе общих результатов (эти следствия приведены в [4, § 6]).

Приведенные в настоящем параграфе результаты показывают, что в случае $\rho_2 = 1$ характер гладкости решения з.К. (1), (2) по переменным z_1 и z_2 примерно один и тот же: решение при фиксированном значении одной переменной принадлежит (по второй переменной) функциональному пространству той же природы (шкалы пространств), что и по первой переменной (при фиксированной второй), например, согласно теореме 8 $[\delta, \sigma]$ и $[\delta, \sigma\tau_0]$ при $1 < \delta < \infty$, $0 \leq \sigma < \infty$ и т.д. Поэтому будем говорить, что в случае $\rho_2 = 1$ решение з.К. (1), (2) равногладко по обеим переменным.

§ 7. Случай, когда $\rho_2 > 1$

Рассмотрим последний возможный случай, когда $\rho_2 > 1$. Предположим, что начальные функции $\varphi_j(z_1)$, $j = 0, \dots, m-1$, принадлежат пространству $[\nu, \sigma]$, где $\nu = \frac{\rho_2}{\rho_2-1}$, $0 \leq \sigma < \infty$. Выберем в $[\nu, \sigma]$ АПС $\mathcal{E}_\Lambda := (\exp \lambda_k z_1)_{k=1}^\infty$ так, чтобы $\lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda_k|^{-1/\nu} \ln k = 0$.

Пусть (6) – абсолютно сходящиеся в $[\nu, \sigma]$ разложения начальных функций по системе $\mathcal{E}_\Lambda$. Тогда (см. начало § 5)

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} [|\lambda_k|^{-\rho_2} \ln |b_{k,j}| + \delta] \leq 0,$$

где $\delta(\rho_2)^{\rho_2}(\sigma)^{\rho_2-1} = (\rho_2 - 1)^{\rho_2-1}$, если $\sigma > 0$, и $\delta = +\infty$ при $\sigma = 0$.

Составим описанным в § 3 способом ряд (5). Из оценки (9) следует, что для коэффициентов этого ряда справедливо такое же неравенство

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} [|\lambda_k|^{-\rho_2} \ln |a_{j,s}^{(k)}| + \delta] \leq 0, \quad 0 \leq s \leq p_j - 1, \quad 1 \leq j \leq N.$$

Зафиксируем какие-либо $z_1 \in \mathbb{C}$, $j \leq N$, $s \leq p_j - 1$ и положим $d_{j,s}^{(k)} = a_{j,s}^{(k)} \exp \lambda_k z_1$. Имеем $\lim_{k \rightarrow \infty} |\mu_{j,k}| |\lambda_k|^{-\rho_2} = |\tau_j|$, где $\mu_{j,k} = \mu_j(\lambda_k)$. Тогда если $\tau_j \neq 0$, то

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} |\mu_{j,k}|^{-1} \ln |d_{j,s}^{(k)}| = \limsup_{k \rightarrow \infty} |\tau_j|^{-1} \ln |a_{j,s}^{(k)}| \cdot |\lambda_k|^{-\rho_2},$$

откуда

$$\limsup_k [\ln |d_{j,s}^{(k)}| \cdot |\mu_{j,k}|^{-1} + \delta |\tau_j|^{-1}] \leq 0.$$

Следовательно, при любом фиксированном $z_1 \in \mathbb{C}$ каждый ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{j,s}^{(k)} \exp \lambda_k z_1 \exp \mu_{j,k} z_2$$

сходится абсолютно в $\mathcal{H}(K_{\delta/|\tau_j|})$. Если же $\tau_j = 0$ или $\sigma = 0$, то $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln |d_{j,s}^{(k)}|}{|\mu_{j,k}|} = -\infty$, и каждый из этих рядов сходится абсолютно в $\mathcal{H}(\mathbb{C})$.

Зафиксируем теперь любое $r \in (0, +\infty)$, если $\tau_j = 0$ или если $\sigma = 0$, и любое r из $(0, \delta |\tau_j|^{-1})$, если $\tau_j \neq 0$, $\sigma \neq 0$. Положим $b_{j,s}^{(k)} = a_{j,s}^{(k)} \exp \mu_{j,s} z_2$. Имеем при $\sigma > 0$, $|z_2| \leq r$

$$\limsup_k |\lambda_k|^{-\rho_2} \ln |b_{j,s}^{(k)}| \leq -\delta + |z_2| |\tau_j| \leq -\delta + r\tau,$$

где $\tau = \max\{|\tau_j| : 1 \leq j \leq m\}$. Следовательно, если $|z_2| \leq r < \frac{\delta}{\tau}$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_{j,s}^{(k)} \exp \lambda_k z_1$ сходится абсолютно в $[\nu, \delta(r)]$, где $[\rho_2(\delta - r\tau)]^{1/\rho_2} = [\nu\delta(r)]^{-1/\nu}$, т.е. $\delta(r) = \frac{1}{\nu} [\rho_2(\delta - r\tau)]^{-\nu/\rho_2}$. Заметим, что $\delta(0) = \sigma$ (напомним, что $\delta\rho_2 = (\sigma\nu)^{1-\rho_2}$). Если же $\sigma = 0$, то

$$\begin{aligned} \limsup_k |\lambda_k|^{-\rho_2} \ln |b_{j,s}^{(k)}| &\leq \limsup_k |\lambda_k|^{-\rho_2} \ln |a_{j,s}^{(k)}| \\ &\quad + \limsup_k |\mu_{j,k}| |z_2| |\lambda_k|^{-\rho_2} = -\infty \end{aligned}$$

и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_{j,s}^{(k)} \exp \lambda_k z_1$ сходится абсолютно в $[\nu, 0]$. Положим $\eta(r) = \delta(r)$, если $\sigma > 0$; $\eta(r) = 0$, если $\sigma = 0$; $\eta = \delta$, если $\sigma > 0$; $\eta = +\infty$, если $\sigma = 0$. Сформулируем полученный результат.

ТЕОРЕМА 10. Пусть $\rho_2 > 1$, и пусть $\tau := \max\{|\tau_j| : 1 \leq j \leq m\}$, $\nu := \frac{\rho_2}{\rho_2-1}$, $\delta := \frac{1}{\rho_2}(\sigma\nu)^{1-\rho_2}$. Предположим, что $\varphi_j \in [\nu, \sigma]$ при некотором $\sigma \in [0, +\infty)$ и $j = 0, \dots, m-1$.

Тогда существует решение з.К. (1), (2) $w_0(z_1, z_2)$, представимое рядом (5), который сходится абсолютно (по z_2) в $\mathcal{H}(K_{\eta/\tau})$ при любом фиксированном $z_1 \in \mathbb{C}$ и сходится абсолютно в $[\nu, \eta(|z_2|)]$ при любом фиксированном $z_2 \in K_{\eta/\tau}$.

Введем пространство $\mathcal{E}[\nu, \sigma; \eta, \tau]$ функций $y(z_1, z_2)$ из $\mathcal{H}(\mathbb{C} \times K_{\eta/\tau})$ таких, что $\forall n \geq 1$

$$\|y\|_n = \sup \left\{ |y(z_1, z_2)| \exp \left[- \left(\eta(r_n) + \frac{1}{n} \right) |z_1|^\nu \right] : z_1 \in \mathbb{C}, |z_2| \leq r_n \right\} < \infty,$$

где $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ — произвольно зафиксированная последовательность положительных чисел такая, что $r_n \uparrow \frac{\eta}{\tau}$.

Используя примерно те же выкладки, что и при доказательстве теоремы 10, получаем, что в предположениях этой теоремы ряд (5), представляющий решение з.К. (1), (2), сходится абсолютно в пространстве Фреше $\mathcal{E}[\nu, \sigma; \eta, \tau]$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\rho_2, \tau, \nu, \eta, \delta$ — те же, что и в теореме 10, и пусть $\varphi \in [\nu, \sigma]$ при $j = 0, \dots, m-1$ и при некотором $\sigma \in [0, +\infty)$. Тогда существует решение з.К. (1), (2) из пространства $(\mathcal{H}(\mathbb{C}); \mathcal{H}(K_{\eta/\tau}))$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $\rho_2, \tau, \nu, \delta$ — те же, что и в теореме 10, и пусть $\varphi \in [\nu, \sigma]$ при $j = 0, \dots, m-1$ и при некотором $\sigma \in [0, +\infty)$. Тогда существует решение з.К. (1), (2) из пространства $\mathcal{E}[\nu, \sigma; \eta, \tau]$.

Из определения пространства $\mathcal{E}[\nu, \sigma; \eta, \tau]$ следует, что если $y(z_1, z_2) \in \mathcal{E}[\nu, \sigma; \eta, \tau]$, то $y \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \times K_{\eta/\tau})$; более того, если положить $r_1 = 0 < r_1 < \dots < r_n \uparrow \frac{\eta}{\tau}$ и учесть, что $\nu\eta(0) = \nu\delta(0) = (\rho_2\delta)^{\frac{1}{1-\rho_2}} = \nu\sigma$, то $y(z_1, 0) \in [\nu, \sigma]$. Далее, как легко показать, если $y \in \mathcal{E}[\nu, \sigma; \eta, \tau]$, то $\forall k > 1 \quad \frac{\partial^k y}{\partial z_2^k} \in \mathcal{E}[\nu, \sigma; \eta, \tau]$, откуда $\left. \frac{\partial^k y}{\partial z_2^k} \right|_{z_2=0} \in [\nu, \sigma]$, $k = 1, 2, \dots$.

Из следствия 2 получаем

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $\rho_2, \tau, \nu, \eta, \delta$ — те же, что и в теореме 10, и пусть $\varphi \in \mathcal{H}(\{0\})$, $j = 0, \dots, m-1$. Для того чтобы з.К. (1), (2) имела решение в $\mathcal{E}(\nu, \sigma; \eta, \tau)$, необходимо и достаточно, чтобы $\varphi_j \in [\nu, \sigma]$, $j = 0, \dots, m-1$.

Пусть теперь $1 < \beta < \nu = \rho_2/(\rho_2 - 1)$, а δ_2 определяется равенством $\delta_2(\beta - \beta\rho_2 + \rho_2) = \beta$. Введем пространство Фреше

$$\mathcal{E}_0[\delta_2, \beta]$$

$$= \left\{ y(z_1, z_2) \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^2) \mid \|y\|_n = \sup_{z_1, z_2 \in \mathbb{C}} |y(z_1, z_2)| \exp \left[-\frac{1}{n} (|z_2|^{\delta_2} + |z_1|^\beta) \right] < \infty, \right. \\ \left. n = 1, 2, \dots \right\}.$$

Используя те же рассуждения, как в случае теоремы 10, приходим к такому результату.

ТЕОРЕМА 11. Пусть $\rho_2 > 1$, $1 < \beta < \nu$, и пусть $\varphi_j \in [\beta, 0]$, $j = 0, \dots, m-1$. Тогда существует решение з.К. (1), (2), представимое в виде ряда (5), который сходится абсолютно в $([\beta, 0]; [\delta_2, 0])$. Более того, этот ряд сходится абсолютно в пространстве $\mathcal{E}_0[\delta_2, \beta]$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть ρ_2 , β , ν , δ_2 – те же, что и в теореме 11, и пусть $\varphi_j \in [\beta, 0]$, $j = 0, \dots, m-1$. Тогда существует решение $w(z_1, z_2)$ з.К. (1), (2) из пространства $([\beta, 0]; [\delta_2, 0])$.

СЛЕДСТВИЕ 2. В предположениях теоремы 11 з.К. (1), (2) разрешима в пространстве Фреше $\mathcal{E}_0[\delta_2, \beta]$.

Пусть $\mathcal{H}(\overline{\{0\}})$ – множество всех функций, аналитических в окрестности начала координат (своей для каждой функции).

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть ρ_2 , β , ν , δ_2 – те же, что и в теореме 11, и пусть $\varphi_j \in \mathcal{H}(\overline{\{0\}})$, $j = 0, \dots, m-1$. Для того чтобы з.К. (1), (2) была разрешима в пространстве $\mathcal{E}_0[\delta_2, \beta]$, необходимо и достаточно, чтобы $\varphi_j \in [\beta, 0]$, $j = 0, \dots, m-1$.

Покажем теперь, что полученные до сих пор результаты о разрешимости з.К. (1), (2) позволяют установить довольно общую теорему единственности. Предварительно обозначим символом $\mathcal{E}_b$ векторное пространство целых функций $f(z_1, z_2)$ таких, что при любом фиксированном $z_2 \in \mathbb{C}$ $f(z_1, z_2) \in [b, 0]$, а при любом $z_1 \in \mathbb{C}$ $f(z_1, z_2)$ – целая функция конечного порядка (по z_2).

ТЕОРЕМА 12. Следующие утверждения равносильны:

- 1) $l_m = 0$;
- 2) нулевая з.К. (1), (17) имеет только тривиальное решение в классе функций из $\mathcal{H}(\overline{(0, 0)})$;
- 3) з.К. (1), (17) имеет только тривиальное решение в $\mathcal{H}(\mathbb{C}^2)$;
- 4) з.К. (1), (17) имеет лишь нулевое решение в $\mathcal{E}_b$ при любом $b > 1$;
- 5) з.К. (1), (17) имеет только тривиальное решение в $\mathcal{E}_b$ при некотором $b > 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликации $2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 4) \Rightarrow 5)$ очевидны. Далее, импликация $1) \Rightarrow 2)$ была установлена в конце § 6. Нам осталось доказать импликацию $5) \Rightarrow 1)$. Допустим, что $l_m > 0$. Пусть α – какой-нибудь корень уравнения $P_m(x) := \sum_{s=0}^{l_m} a_{s,m} x^s$. Рассмотрим уравнение

$$0 = M_1 w, \quad \text{где} \quad M_1 w := M \frac{\partial w}{\partial z_2} = \sum_{j=0}^m \sum_{s=0}^{l_j} a_{s,j} \frac{\partial^{s+j+1}}{\partial z_1^s \partial z_2^{j+1}}. \quad (20)$$

Пусть $\tilde{\rho}_2$ – кор. инд. этого уравнения. Зададим такие начальные условия для уравнения (20):

$$\left. \frac{\partial^k w(z_1, z_2)}{\partial z_2^k} \right|_{z_2=0} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m-1; \quad \left. \frac{\partial^m w(z_1, z_2)}{\partial z_2^m} \right|_{z_2=0} = \exp(\alpha z_1). \quad (21)$$

Применяя теорему 1, если $\tilde{\rho}_2 \leq 0$, теорему 4, если $0 < \tilde{\rho}_2 < 1$, теорему 8 при $\tilde{\rho}_2 = 1$ и, наконец, теорему 11, если $\tilde{\rho}_2 > 1$, находим, что $\forall b > 1$ в $\mathcal{E}_b$ существует решение w_0 з.К. (20), (21). Тогда $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=0}^m \sum_{s=0}^{l_j} a_{s,j} \int_0^{z_2} \frac{\partial^{s+j+1} w_0(z_1, t)}{\partial z_1^s \partial t^{j+1}} dt \\ &= \sum_{j=0}^m \sum_{s=0}^{l_j} \left\{ a_{s,j} \frac{\partial^s}{\partial z_1^s} \left[\frac{\partial^j w_0(z_1, z_2)}{\partial z_2^j} \right] - \frac{\partial^s}{\partial z_1^s} \frac{\partial^j w_0(z_1, z_2)}{\partial z_2^j} \right\} \Big|_{z_2=0} \\ &= M w_0 - P_m(\alpha) \exp \alpha z_1 = M w_0. \end{aligned}$$

Таким образом, w_0 – нетривиальное решение з.К. (1), (17) из $\mathcal{E}_b$, и утверждение 5) не имеет места. Теорема доказана.

Возникает естественный вопрос о возможности обращения теорем 10, 11 и их первых следствий. Начнем с теоремы 11 и установим такое её частичное обращение.

ТЕОРЕМА 13. а) Пусть $\rho_2 > 1$, $\nu = \frac{\rho_2}{\rho_2-1}$, и пусть $\varphi_j \in \mathcal{H}(\{\bar{0}\})$, $j = 0, \dots, m-1$;

б) Пусть, далее, r_0 – радиус наибольшего круга с центром в начале координат, в котором аналитичны все начальные функции φ_j , и пусть $\mathcal{E}_\Lambda$ – АПС в $\mathcal{H}(K_{r_0})$ такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\lambda_n} = 0$.

в) Допустим, что существует к. $\mathcal{E}_\Lambda$ -ряд (5) такой, что при некотором фиксированном $z_1 \in \mathbb{C}$ он сходится абсолютно в $\mathcal{H}(K_R)$, $0 < R < \infty$.

Тогда $\varphi_j \in [\nu, \sigma]$, где $\sigma = (\rho_2 - 1)(\alpha R)^{\frac{1}{1-\rho_2}} \cdot (\rho_2)^{\frac{\rho_2}{1-\rho_2}}$ и $\alpha = \min\{|\tau_l| : 1 \leq l \leq m\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $d_{j,s}^{(k)} = a_{j,s}^{(k)} \exp \lambda_k z_1$, где $s = 0, 1, \dots, p_j - 1$; $j = 1, 2, \dots, N$. Из предположений теоремы следует, что каждый ряд $\sum_{k=1}^\infty d_{j,s}^{(k)} \times \exp \mu_{j,k} z_2$ сходится абсолютно в $\mathcal{H}(K_R)$. Отсюда при тех же s и j

$$\limsup_k [|\mu_{j,k}|^{-1} \ln |d_{j,s}^{(k)}| + R] \leq 0,$$

или, что все равно (в силу того, что $\lim_k |\mu_{j,k}| \cdot |\lambda_k|^{-\rho_2} = |\tau_j|$ и $\rho_2 > 1$),

$$\limsup_k [|\lambda_k|^{-\rho_2} \ln |a_{j,s}^{(k)}| + |\tau_j| R] \leq 0, \quad 0 \leq s \leq p_j - 1, \quad 1 \leq j \leq N.$$

Подавно для тех же s и j

$$\limsup_k [|\lambda_k|^{-\rho_2} \ln |a_{j,s}^{(k)}| + \alpha R] \leq 0.$$

Из равенств (12) получаем, что при $n = 0, 1, \dots, m-1$

$$\limsup_k [|\lambda_k|^{-\rho_2} \ln |b_{k,n}| + \alpha R] \leq 0.$$

Тогда $\forall n \leq m-1, \forall z \in K_{r_0} \varphi_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{k,n} \exp \lambda_k z$. Отсюда $\varphi_n(z) \in [\nu, \sigma]$, и теорема доказана.

Заметим, что если модули всех корней многочлена $P(x)$ одинаковы, то теорема 13 в этом случае является точным обращением теоремы 10.

Кроме того, аналогичными выкладками получаем такое точное обращение теоремы 10 в случае, когда $\sigma = 0$:

ТЕОРЕМА 14. *Допустим, что выполнены предположения а), б) теоремы 13, и пусть существует к. $\mathcal{E}_\Lambda$ -ряд (5) такой, что при некотором фиксированном $z_1 \in \mathbb{C}$ этот ряд сходится абсолютно в $\mathcal{H}(\mathbb{C})$. Тогда $\varphi_j \in [\nu, 0]$, $j = 0, 1, \dots, m-1$.*

Точно таким же методом можно получить обращение теоремы 11.

ТЕОРЕМА 15. *Пусть выполнены предположения а), б) теоремы 13. Пусть, далее, существует к. $\mathcal{E}_\Lambda$ -ряд (5) такой, что при некотором фиксированном $z_1 \in \mathbb{C}$ этот ряд сходится абсолютно в $[\gamma, 0]$, где $1 < \gamma < \infty$. Тогда $\varphi_j \in [\gamma_1, 0]$, где $\gamma_1(\rho_2\gamma - \gamma - 1) = \rho_2\gamma$.*

Что же касается первых следствий теорем 10, 11, то их обращение оказалось более трудным и потребовало довольно большой дополнительной информации о кор. инд., которая излагается в следующем параграфе. Причина трудностей, возникающих при обращении этих следствий, заключается в том, что мы предполагаем в них лишь наличие решения с определенной гладкостью по z_2 (при фиксированном z_1), но ничего не знаем о его структуре (например, возможности его представления в виде ряда (5)).

§ 8. Дополнительные сведения о кор. индексах

Напомним, что в уравнении (1) рассматриваются только те $j \leq m$, для которых $a_{l_j, j} \neq 0$. Обозначим символом $\mathcal{N}_2(P)$ множество всех точек с целочисленными координатами вида (j, k) , где $0 \leq j \leq l_k$, $0 \leq k \leq m$ и $a_{j, k} \neq 0$. В частности, $(l_m, m) \in \mathcal{N}_2(P)$ и $(l_k, k) \in \mathcal{N}_2(P)$, если $k \leq m$ и $a_{l_k, k} \neq 0$. Очевидно, что ордината точки (l_k, k) из $\mathcal{N}_2(P)$ принадлежит введенному в § 1 множеству $\mathcal{N}_0$ тогда и только тогда, когда эта точка лежит на прямой $L : x - l_m = -\rho_2(y - m)$. Всюду далее в этом параграфе предполагается, что $\rho_2 > 0$, т.е. $\exists k \leq m-1 : l_k > l_m$.

Проведем из точки (l_m, m) луч, проходящий через начало координат, и будем вращать его вокруг точки (l_m, m) против часовой стрелки до тех пор, пока на нем не окажется хотя бы одна точка (j, k) из $\mathcal{N}_2(P)$, отличная от (l_m, m) , а все остальные точки $\mathcal{N}_2(P)$ лежат на этом луче или ниже его. Нетрудно убедиться в том, что такое предельное положение луча проходит по прямой L . Пусть $k_0 = \min\{k \in N_0 : (l_k, k) \in L\}$. Тогда ниже точки (l_{k_0}, k_0) на L нет точек из $\mathcal{N}_2(P)$.

Перепишем характеристический многочлен уравнения (1):

$$Q(\lambda, \mu) = \sum_{j=0}^m \mu^j \sum_{s=0}^{l_j} a_{s,j} \lambda^s = \sum_{j=0}^m \sum_{s=0}^{l_j} a_{s,j} \mu^j \lambda^s,$$

где суммирование во втором представлении ведется по тем s и j , для которых $(s, j) \in \mathcal{N}_2(P)$, в таком виде:

$$Q(\lambda, \mu) = \sum_{s=0}^p \lambda^s \sum_{j=0}^{\nu_s} a_{s,j} \mu^j. \quad (22)$$

В равенстве (22) суммирование ведется по тем s , для которых $a_{s,\nu_s} \neq 0$. Очевидно, что

$$p = \max\{r : (r, s) \in \mathcal{N}_2(P)\} = \max\{l_k : 0 \leq k \leq m, (l_k, k) \in \mathcal{N}_2(P)\}.$$

При этом так как $\rho_2 > 0$, то $p = \max\{l_k : 0 \leq k < m, (l_k, k) \in \mathcal{N}_2(P)\}$.

Введем характеристику, аналогичную ρ_2 :

$$\rho_1 := \max\left\{\frac{\nu_s - \nu_p}{p - s} : 0 \leq s < p, a_{s,\nu_s} \neq 0\right\}.$$

Будем также называть ее *индексом корреляции* уравнения (1) по переменной z_1 (кор. индексом по z_1).

ТЕОРЕМА 16. *Если $\rho_2 > 0$, то $\rho_1 \rho_2 \geq 1$. При этом $\rho_1 = 1/\rho_2$ тогда и только тогда, когда правее самой нижней из лежащих на прямой L точек множества $\mathcal{N}_2(P)$ нет ни одной точки множества $\mathcal{N}_2(P)$.*

Заметим, что $l_m < p$ и $\nu_l = m$, откуда $\frac{m - \nu_p}{p - l_m} \leq \rho_1$. Далее, $l_{\nu_p} = p$, $\nu_p \leq m$. Допустим, что $\nu_p = m$. Но тогда $p = l_{\nu_p} = l_m$, что невозможно. Итак, $\nu_p < m$ и, следовательно, $\rho_2 \geq \frac{l_{\nu_p} - l_m}{m - \nu_p} = \frac{p - l_m}{m - \nu_p}$. Отсюда $\rho_1 \geq \frac{m - \nu_p}{p - l_m} \geq \frac{1}{\rho_2}$.

Пусть теперь правее прямой $h = l_{k_0}$ нет точек из $\mathcal{N}_2(P)$. Простое геометрическое рассмотрение показывает, что тогда $p = l_{k_0}$. Но так как $\nu_{l_k} = k$, то $\nu_p = k_0$. Далее, $\forall s < p$ $(s, \nu_s) \in \mathcal{N}_2(P) \iff a_{s,\nu_s} \neq 0$. Если (s, ν_s) из $\mathcal{N}_2(P)$ лежит ниже L , то $\frac{s - l_m}{m - \nu_s} < \rho_2$, откуда $\nu_s < m + \frac{l_m - s}{\rho_2}$. Но тогда

$$\frac{\nu_s - \nu_p}{p - s} = \frac{\nu_s - k_0}{l_{k_0} - s} < \frac{m \rho_2 + l_m - s - \rho_2 k_0}{\rho_2 (l_{k_0} - s)} = \frac{1}{\rho_2}.$$

Если же $(s, \nu_s) \in \mathcal{N}_2(P) \cap L$, то $\frac{\nu_s - \nu_p}{p - s} = \frac{m - k_0}{l_{k_0} - l_m} = \frac{1}{\rho_2}$. Следовательно, $\rho_1 \leq \frac{1}{\rho_2}$, откуда $\rho_1 \rho_2 = 1$.

Пусть, обратно, правее прямой $x = l_{k_0}$ (но, разумеется, ниже L) есть хотя бы одна точка из $\mathcal{N}_2(P)$. Тогда $p > l_{k_0}$ и $p = l_{k_1}$, где $0 \leq k_1 < k_0$, и $\nu_p = k_1$. Отсюда

$$\rho_1 \geq \frac{\nu_{l_{k_0}} - \nu_p}{p - l_{k_0}} = \frac{k_0 - k_1}{l_{k_1} - l_{k_0}} > \frac{1}{\rho_2}.$$

Возвращаясь к характеристическому многочлену $Q(\lambda, \mu)$, записанному в виде (22), заметим, что в окрестности бесконечно удаленной точки уравнение $Q(\lambda, \mu) = 0$ имеет p ветвей $\lambda = \lambda_k(\mu)$ ($k = 0, 1, \dots, p-1$) определяемой этим уравнением алгебраической функции, причем эти ветви не обязательно различны. Для любой такой ветви $\lambda(\mu)$ существует конечный $\lim_{\mu \rightarrow \infty} \mu^{-\rho_1} \lambda(\mu) = \nu$, где $\nu -$

один из корней многочлена $P_1(y) := \sum_{s \in \mathcal{N}_4} a_{s, \nu_s} y^s$ и $N_4 = \{p\} \cup \{s : 0 \leq s < p, \nu_s - \nu_p = \rho_1(p - s)\}$.

Нетрудно проверить, что если $\rho_1 = \frac{1}{\rho_2}$, то любой ненулевой корень y уравнения $P_1(y) = 0$ представим в виде $y = x^{-\frac{1}{\rho_2}}$, где $P(x) = 0$, и, наоборот, если $P(x) = 0$ и $x \neq 0$, то $x = y^{-\rho_2}$, где $P_1(y) = 0$. В частности, если все корни P равны по абсолютной величине, скажем, числу $A \neq 0$, то и все корни P_1 имеют одну и ту же абсолютную величину $A^{-\frac{1}{\rho_2}}$ (и наоборот).

В следующем параграфе нам понадобится описание одного подкласса уравнений (1).

ТЕОРЕМА 17. *Для уравнения (1) равносильны следующие утверждения:*

1) $\rho_2 > 1$, $\rho_1 = 1/\rho_2$ и з.К. для уравнения (1) по переменной z_1 :

$$\left. \frac{\partial^k w}{\partial z_1^k} \right|_{z_1=0} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, p-1, \quad (23)$$

имеет только нулевое решение в $\mathcal{H}((\overline{0}, 0))$;

2) $l_0 = p > l_k$, $k = 1, 2, \dots, m-1$; $p > l_m + m$; $p \geq \frac{ml_k - kl_m}{m-k}$, $k = 1, 2, \dots, m-1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала выполнены условия 1). По теореме 12 $\nu_p = 0$, что, очевидно, равносильно соотношениям $l_0 = p > l_k$, $k = 1, 2, \dots, m$. Как показано в начале доказательства теоремы 16, всегда $\rho_1 \geq \frac{m-\nu_p}{p-l_m} \geq \frac{1}{\rho_2}$. Так как $\nu_p = 0$ и $\rho_1 \rho_2 = 1$, то $l_m + m \rho_2 = m$. Отсюда $p > l_m + m$ и $\frac{p-l_m}{m} = \rho_2 \geq \frac{l_k-l_m}{m-k}$, $k = 1, 2, \dots, m-1$ (по определению ρ_2).

Пусть, наоборот, выполнены условия 2). Тогда $\forall k \leq m-1$

$$\frac{l_0 - l_m}{m} = \frac{p - l_m}{m} \geq \frac{l_k - l_m}{m - k}.$$

Тогда $\rho_2 = (p - l_m)/m$ и $\rho_2 > 1$. При этом $\{0\} \in \mathcal{N}_0$. Прямая L проходит через точки (l_m, m) и $(p, 0)$, а все остальные точки множества $\mathcal{N}_2(P)$ принадлежат (замкнутой) трапеции с вершинами в точках $(0, m)$, (l_m, m) , $(p, 0)$ и $(0, 0)$. Самой нижней из лежащих на L точек множества $\mathcal{N}_2(P)$ является точка $(p, 0)$, и правее ее точек из $\mathcal{N}_2(P)$ нет. По теореме 16 $\rho_1 = 1/\rho_2$. Наконец, из соотношений $l_0 = p > l_k$, $k = 1, 2, \dots, m-1$, и $l_0 = p > l_m + m$ следует, что $\nu_p = 0$, и по теореме 12 з.К. (1), (23) имеет только нулевое решение в $\mathcal{H}((\overline{0}, 0))$.

Заметим, что условия 2) теоремы 16 равносильны таким:

$$l_0 = p > l_m + m; \quad pt + kl_m \geq ml_k + kp, \quad k = 1, 2, \dots, m-1. \quad (24)$$

Действительно, последняя (третья) группа условий 2) равносильна последней (второй) группе условий (24). Поэтому условия (24) следуют из 2). Пусть, наоборот, выполнены условия (24). Тогда при $k = 1, 2, \dots, m-1$

$$pt + kl_m \geq ml_k + kp > ml_k + kl_m + km,$$

откуда $p > l_k + k$.

Попутно установлено, что условие 2) теоремы 17 равносильно также таким, по форме более сильным, условиям:

$$\begin{aligned} l_0 = p > l_k + k, \quad k = 1, 2, \dots, m; \\ pm + kl_m \geq ml_k + kp, \quad k = 1, 2, \dots, m-1. \end{aligned} \quad (25)$$

§ 9. Случай $\rho_2 > 1$ (продолжение)

Теперь уже можно заняться обращением первых следствий теорем 10, 11. Предварительно перепишем уравнение (1) в таком виде:

$$\sum_{s=0}^p, \sum_{j=0}^{\nu_s} a_{s,j} \frac{\partial^{s+j} w(z_1, z_2)}{\partial z_1^s \partial z_2^j} = 0, \quad (26)$$

где суммирование ведется по тем $s \leq p$, для которых $a_{s,\nu_s} \neq 0$; $p = \max\{l_j : j = 0, 1, \dots, m\}$; $\nu_s \leq m$, $s = 0, \dots, p$; $a_{p,\nu_p} \neq 0$.

Согласно теореме 12 условие $\nu_p = 0$ необходимо и достаточно для того, чтобы “нулевая” з.к. (23) для уравнения (26) по переменной z_1 имела в классе $\mathcal{H}((0, 0))$ только тривиальное решение $w(z_1, z_2) \equiv 0$. Всюду далее в этом параграфе предполагается, что $\nu_p = 0$.

Пусть $w_1(z_1, z_2)$ – любое решение з.к. (1), (2), аналитическое в окрестности начала координат: $\exists r_1 > 0, \exists r_2 > 0: w_1(z_1, z_2) \in \mathcal{H}(K_{r_1} \times K_{r_2})$. Тогда $\forall k \geq 0$

$$\psi_k(z_2) := \left. \frac{\partial^k w_1(z_1, z_2)}{\partial z_1^k} \right|_{z_1=0} \in \mathcal{H}(K_{r_2}).$$

Рассмотрим для уравнения (26) з.к. по z_1 с начальными условиями:

$$\left. \frac{\partial^k w(z_1, z_2)}{\partial z_1^k} \right|_{z_1=0} = \psi_k(z_2), \quad k = 0, 1, \dots, p-1. \quad (27)$$

Предположим еще, что $\rho_1 < 1$. Напомним, что $\rho_1 < 1$, если, в частности, выполнены условия (25) (тогда $\rho_2 = 1/\rho_1 > 1$). Применим теорему 2, предварительно поменяв в ней местами z_1 и z_2 . Согласно этой теореме существует решение $w_2(z_1, z_2)$ з.к. (26), (27), представимое в виде ряда

$$\sum_{j=1}^{N_1} \sum_{s=0}^{q_j-1} \sum_{k=1}^{\infty} a_{j,s}^{(k)}(z_1)^s \exp[\mu_k z_2 + \lambda_j(\mu_k) z_1], \quad (28)$$

где q_j – кратность ветви $\lambda_j(\mu)$, порожденной многочленом $Q(\lambda, \mu)$, и $(\exp \mu_k z_2)_{k=1}^{\infty}$ – АПС в $\mathcal{H}(K_{r_2})$, для которой $\lim_k \frac{\ln k}{|\mu_k|} = 0$. Ряд (28) сходится абсолютно в пространстве $\mathcal{E}(\rho_1, r_2)$ функций $y(z_1, z_2)$ из $\mathcal{H}(\mathbb{C} \times K_{r_2})$ таких, что

$$\begin{aligned} \forall r \in (0, r_2), \quad \forall n \geq 1 \\ |y|_{r,n} := \sup \left\{ \frac{|y(z_1, z_2)|}{\exp[\sigma(r) + \frac{1}{n}] |z|^{\frac{1}{1-\rho_1}}} \mid |z_2| \leq r, z_1 \in \mathbb{C} \right\} < \infty, \end{aligned}$$

где $\sigma(r) = (1 - \rho_1)(\rho_1)^{\frac{\rho_1}{1-\rho_1}} |\mu|^{\frac{1}{1-\rho_1}} (r_2 - r)^{\frac{\rho_1}{\rho_1-1}}$; $\mu = \max\{|\mu_l| : 0 \leq l \leq N_1\}$, μ_l – корни многочлена $P_1(y) := \sum_{s \in \mathcal{N}_4} a_{s, \nu_s} y^s$. В силу единственности решения з.К. (26), (27) $w_1(z_1, z_2) = w_2(z_1, z_2)$. Поэтому $\forall z_1 \in \mathbb{C}$ $w_1(z_1, z_2) \in \mathcal{H}(K_{r_2})$ и $\forall z_2 \in K_{r_2}$ $w_1(z_1, z_2) \in [\frac{1}{1-\rho_1}, \sigma(|z_2|)]$. Отсюда следует, что при $l = 0, 1, 2, \dots$ $\forall z_2 \in K_{r_2}$ $\frac{\partial^l w_1(z_1, z_2)}{\partial z_2^l} \in [\frac{1}{1-\rho_1}, \sigma(|z_2|)]$ и, в частности,

$$\left. \frac{\partial^l w_1(z_1, z_2)}{\partial z_2^l} \right|_{z_2=0} \in \left[\frac{1}{1-\rho_1}, \sigma(0) \right],$$

где $\sigma(0) = (1 - \rho_1)(\rho_1)^{\frac{\rho_1}{1-\rho_1}} |\mu|^{\frac{1}{1-\rho_1}} r_2^{\frac{\rho_1}{\rho_1-1}}$.

Мы получили такое частичное обращение первого следствия теоремы 10:

ТЕОРЕМА 18. Пусть $\rho_2 > 1$, $\rho_1 < 1$, $\nu_p = 0$. Предположим, что начальные функции $\varphi_j(z_1)$, $0 < j \leq m-1$, аналитичны в некотором круге $|z_1| < r_1$ и что существует решение $w(z_1, z_2)$ з.К. (1), (2) из $\mathcal{H}(K_{r_1} \times K_{r_2})$ при некотором $r_2 > 0$. Тогда при $j = 0, 1, \dots, m-1$ $\varphi_j(z_1) \in [\frac{1}{1-\rho_1}, \sigma]$, где $\sigma = \sigma(0)$.

Непосредственно из теоремы 18 и следствия теоремы 10 получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\rho_2 > 1$, $\rho_1 = 1/\rho_2$, $\nu_p = 0$. Тогда:

- 1) если начальные функции $\varphi_j(z_1)$ аналитичны в $|z_1| < r$ и существует решение з.К. (1), (2) из $\mathcal{H}(K_{r_1} \times K_{r_2})$, то $\varphi_j(z_1) \in [\frac{\rho_2}{\rho_2-1}, \sigma]$, где $\sigma = (\rho_2 - 1)(\rho_2)^{\frac{\rho_2}{1-\rho_2}} |\mu|^{\frac{\rho_2}{\rho_2-1}} r_2^{\frac{1}{1-\rho_2}}$ и μ – наибольший из модулей корней уравнения $\sum_{s \in \mathcal{N}_4} a_{s, \nu_s} y^s = 0$;
- 2) если $\varphi_j \in [\frac{\rho_2}{\rho_2-1}, \lambda]$, $0 < \lambda < \infty$, $j = 0, 1, \dots, m-1$, то существует решение з.К. (1), (2) из

$$\mathcal{E}\left[\frac{\rho_2}{\rho_2-1}, \sigma; \eta, \tau\right] \subseteq \left(\left[\frac{\rho_2}{\rho_2-1}, \lambda\right]; \mathcal{H}(K_{\eta/\tau})\right),$$

где $\eta = \left(\frac{\rho_2-1}{\rho_2}\right)^{\rho_2-1} \frac{\lambda^{1-\rho_2}}{\rho_2}$ и τ – наибольший из модулей корней уравнения $\sum_{k \in \mathcal{N}_2} a_{l_k, k} x^k = 0$.

Предположим, что все корни последнего уравнения имеют одинаковую абсолютную величину τ . Тогда из сказанного в § 7 (перед теоремой 17) следует, что в этом случае $\mu = \tau^{-1/\rho_2}$. В этом случае следствие 1 дает точный результат:

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $\rho_2 > 1$, $\rho_1 = 1/\rho_2$, $\nu_p = 0$ и $\mu = \tau^{-1/\rho_2}$. Пусть, далее, начальные функции φ_j ($0 \leq j \leq m-1$) аналитичны в начале координат. Тогда следующие утверждения равносильны:

- 1) $\exists \sigma \in (0, +\infty) : \varphi_j \in [\frac{\rho_2}{\rho_2-1}, \sigma]$, $j = 0, 1, \dots, m-1$;
- 2) существует решение з.К. (1), (2) из $\mathcal{H}(\mathbb{C} \times K_R)$, где

$$\tau R(\rho_2)^{\rho_2} \cdot (\sigma)^{\rho_2-1} = (\rho_2 - 1)^{\rho_2-1}; \quad (29)$$

3) существует решение з.К. (1), (2) из $\mathcal{E}[\frac{\rho_2}{\rho_2-1}, \sigma; R\tau, \sigma]$, где число R определяется из равенства (29);

4) при некотором $R_1 > 0$ существует решение з.К. (1), (2) из пространства $\mathcal{H}(K_{R_1} \times K_R)$.

Еще один точный результат получается, если предположить, что начальные функции φ_j , $0 \leq j \leq m-1$, целые. Тогда, выбирая в следствии 1 теоремы 10 число σ равным нулю, а в теореме 18 взяв τ_2 как угодно большим, приходим к такому результату:

ТЕОРЕМА 19. Пусть выполнены условия (25), и пусть $\varphi_j \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, $0 \leq j \leq m-1$. Тогда следующие утверждения равносильны:

- 1) $\varphi_j \in [\frac{\rho_2}{\rho_2-1}, 0]$, $j = 0, 1, \dots, m-1$;
- 2) существует решение з.К. (1), (2) из $\mathcal{H}(\mathbb{C}^2)$;
- 3) существует решение з.К. (1), (2) из $(\mathcal{H}(\mathbb{C}^2); [\frac{\rho_2}{\rho_2-1}, 0])$, представимое в виде ряда (5), который строится по ряду (6) и сходится абсолютно в пространстве Фреше $\mathcal{E}[\nu, 0; \infty]$ всех целых функций $y(z_1, z_2)$, для которых $\forall n \geq 1$

$$\|y\|_n := \sup \left\{ \frac{|y(z_1, z_2)|}{\exp(|z_1|^\nu/n)} \mid z_1 \in \mathbb{C}, |z_2| \leq n \right\} < \infty, \quad \nu = \frac{\rho_2}{\rho_2 - 1}.$$

Наконец, из следствия 1 без труда получаем еще один точный результат.

ТЕОРЕМА 20. Пусть выполнены условия (25), и пусть φ_j аналитичны в некотором круге $|z_1| < r_1$. Тогда следующие утверждения равносильны:

- 1) $\varphi_j \in [\frac{\rho_2}{\rho_2-1}, \infty)$, $j = 0, 1, \dots, m-1$;
- 2) существует решение з.К. (1), (2), аналитическое в бикруге $K_{r_1} \times K_{r_2}$ при некотором $r_2 > 0$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть выполнены условия (25), и пусть начальные функции φ_j аналитичны в начале координат. Для того чтобы в $\mathcal{H}((0, 0))$ существовало решение з.К. (1), (2), необходимо и достаточно, чтобы функции φ_j были целыми и имели конечный тип при порядке $\frac{\rho_2}{\rho_2-1}$.

Мы довольно подробно рассмотрели вопрос об обращении следствия 1 теоремы 10. Тем же методом можно получить аналогичные результаты для первого следствия теоремы 11.

ТЕОРЕМА 21. Пусть $1 < \delta < \frac{\rho_2}{\rho_2-1}$, и пусть выполнены условия (25). Тогда следующие утверждения равносильны:

- 1) $\varphi_j(z_1) \in [\delta, 0]$, $j = 0, 1, \dots, m-1$;
- 2) существует решение з.К. (1), (2) из $\mathcal{H}(\mathbb{C}^2)$;
- 3) существует решение з.К. (1), (2), представимое в виде ряда (5), который сходится абсолютно в $\mathcal{E}_0[\frac{\delta}{\delta-\rho_2+\rho_2}, \delta]$.

Рассмотрим в качестве примера уравнение Соболева–Гальперна:

$$\sum_{k=0}^{l_1} a_k \frac{\partial^{k+1} u(x_1, x_2)}{\partial x_1^k \partial x_2} = \sum_{s=0}^{l_0} b_s \frac{\partial^s u(x_1, x_2)}{\partial x_1^s},$$

где $a_{l_1} \cdot b_{l_0} \neq 0$. Как легко подсчитать, в данном случае $m = 1$, $l_m = l_1$, $\rho_2 = l_0 - l_1$ и кор. инд. ρ_2 – целое число. Если $\rho_2 \leq 0$, т.е. если $l_0 \leq l_1$, то применима

теорема 1 из § 4. Далее, если $\rho_2 > 0$, то $\rho_2 \geq 1$. При $\rho_2 = 1$, т.е. при $l_0 = l_1 + 1$, применимы все результаты из § 6, а именно теоремы 6–9. Пусть, наконец, $\rho_2 > 1$, т.е. $l_0 \geq l_1 + 2$. Легко проверить, что в этом случае в обозначениях § 8 $p = l_0$, $\nu_p = 0$, $\rho_1 = \frac{1}{l_0 - l_1}$, причем величина $\rho_1 = \max\{\frac{\nu_s}{l_0 - s} : 0 \leq s < l_0, a_{s, \nu_s} \neq 0\}$ достигается только при $s = l_1$. Для рассматриваемого уравнения $\rho_2 \rho_1 = 1$, а условие 2) теоремы 17 принимает вид $l_0 > l_1 + 1$, т.е. всегда выполняется при $\rho_2 > 1$. Далее, $P(x) = a_{l_1}x + b_{l_0}$, $P_1(y) = b_{l_0}y^{l_0} + a_{l_1}y^{l_1}$. Так как теорема 17 в данном случае применима, то для уравнения Соболева–Гальперна справедливы все результаты не только § 7, но и данного параграфа.

В заключение отметим, что в случае $\rho_2 > 1$ обращение всех следствий “прямых” теорем 10, 11 удалось осуществить, в отличие от ранее разобранных случаев, в которых $\rho_2 \leq 1$, только при определенных дополнительных предположениях. При этом остались нерешенными такие, на наш взгляд, довольно интересные задачи.

1) Когда $\rho_1 \neq \frac{1}{\rho_2}$, $\rho_1 < 1$, но $\nu_p = 0$ (т.е. единственность з.К. по z_1 имеется), дать точное описание пространства E целых функций такого, что в случае, если начальные функции φ_j принадлежат E (и только в этом случае), существует решение з.К. (1), (2) из $\mathcal{H}(K_{r_1} \times K_{r_2})$ при некоторых $r_1, r_2 > 0$.

Из теорем 10 и 18 следует, что $[\frac{\rho_2}{\rho_2 - 1}, \infty) \subset E \subset [\frac{1}{1 - \rho_1}, \infty)$.

2) Дать хотя бы частичное обращение теорем 10, 11 в случае, когда $\rho_2 > 1$, $\nu_p = 0$, но $\rho_1 \geq 1$.

Примененный в настоящем параграфе метод основан на предположении единственности решения в рассматриваемых классах вспомогательной з.К. (23), (26) по переменной z_1 , т.е. на предположении, что $\nu_p = 0$. Было бы весьма интересно, привлекая другие методы, получить обращение первых следствий теорем 10, 11, отказавшись от предположения $\nu_p = 0$.

§ 10. Свойства пространства начальных данных

Рассмотрим уравнение (1) в пространстве $A_{0,2} := \mathcal{H}(\overline{(0,0)}) = \text{ind}_n \mathcal{H}(K_{r_n} \times K_{r_n})$ ($r_n \downarrow 0$) аналитических ростков в начале координат. Пусть еще $\overline{A_0} = \text{ind} \mathcal{H}(K_{r_n})$. Как известно (см., например, [18]), $\overline{A_0}$ и $A_{0,2}$ – LN^* -пространства. Определим оператор T :

$$\forall w \in A_{0,2} \rightarrow Tw = \left\{ w(0, z_1), \frac{\partial w}{\partial z_2} \Big|_{z_2=0}, \dots, \frac{\partial^{m-1} w}{\partial z_2^{m-1}} \Big|_{z_2=0} \right\} \in \overline{A_0^m}.$$

Тогда T – линейный непрерывный оператор из $A_{0,2}$ в $\overline{A_0^m}$. Пусть $E := T(A_{0,2})$ – образ оператора T . Из полученных в § 4–6 результатов следует, в частности, что при $\rho_2 \leq 1$ $E = \overline{A_0^m}$. В настоящем параграфе мы опишем некоторые топологические свойства множества E в случае, когда $\rho_2 > 1$. Зададим в векторном пространстве E топологию λ , индуцированную из $\overline{A_0^m}$. Назовем з.К. (1), (2) λ -возвратно-ограниченной, если для любого подмножества Q пространства E , ограниченного в топологии λ , множество $T^{-1}(Q)$ ограничено в $A_{0,2}$.

Покажем, что если $\rho_2 > 1$, то з.К. (1), (2) не будет λ -возвратно-ограниченной. Допустим, что это не так. Положим, как выше, $\rho_0 = \frac{\rho_2}{\rho_2 - 1}$ и выберем при каком-либо $R \in (0, +\infty)$ АПС $\mathcal{E}_\Lambda := (\exp \lambda_k z_1)_{k=1}^\infty$ в $\mathcal{H}(K_R)$ так, чтобы $\limsup_k \frac{k}{|\lambda_k|} < \infty$. Возьмем любую функцию v из $\mathcal{H}(K_R) \setminus [\rho_0, \infty)$, т.е. любую

аналитическую в круге $|z_1| < R$ функцию, не являющуюся целой функцией конечного типа при порядке ρ_0 . Пусть

$$w(z_1) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \exp \lambda_k z_1$$

– какое-либо ее разложение в абсолютно сходящийся в $\mathcal{H}(K_R)$ ряд по АПС $\mathcal{E}_\Lambda$. Этот ряд сходится абсолютно в $\overline{A_0}$, и поэтому множество $\{c_k \exp \lambda_k z_1 : k = 1, 2, \dots\}$ ограничено в $\overline{A_0}$.

Пусть $\mu(\lambda)$ – ветвь, определяемая уравнением $Q(\lambda, \mu) = 0$. Тогда $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \mu(\lambda) \lambda^{-\rho_2} = \tau$, где τ – один из корней многочлена $P(x)$. Выберем этот корень так, чтобы $\tau \neq 0$, и рассмотрим в $\overline{A_0^m}$ семейство $\Phi = \{\mathcal{F}_k : k = 1, 2, \dots\}$, где $\forall k \geq 1$

$$\mathcal{F}_k = (c_k \exp \lambda_k z_1, c_k \mu_k \exp \lambda_k z_1, \dots, c_k \mu_k^{m-1} \exp \lambda_k z_1), \quad \mu_k = \mu(\lambda_k).$$

Так как оператор дифференцирования непрерывен в $\overline{A_0}$ и $\exists D < \infty : |\mu_k| \leq D |\lambda_k|^{\rho_2}$, $k = 1, 2, \dots$, то Φ – ограниченное множество в $\overline{A_0^m}$. Рассмотрим функцию

$$w_k(z_1, z_2) = c_k \exp(\lambda_k z_1 + \mu_k z_2), \quad k = 1, 2, \dots$$

Очевидно, что $\forall k \geq 1 \quad Tw_k = \mathcal{F}_k$. Пусть $\gamma = (w_k : k = 1, 2, \dots)$. Тогда $\gamma \subseteq T^{-1}(\Phi)$ и по допущению γ ограничено в $A_{0,2}$. Но так как $A_{0,2}$ – LN^* -пространство, то оно подаловно будет регулярным индуктивным пределом:

$$\begin{aligned} & \exists r > 0, \quad \exists M < \infty : \forall k \geq 1 \\ & |c_k| \max\{|\exp(\lambda_k z_1 + \mu_k z_2)| : |z_1| \leq r, |z_2| \leq r\} \leq M, \end{aligned}$$

т.е. $|c_k| \exp(|\lambda_k| + |\mu_k|)r \leq M$, $k = 1, 2, \dots$, и подаловно $\forall k \geq 1 \quad |c_k| \exp |\mu_k| r \leq M$. Отсюда $\limsup_k (|\mu_k|^{-1} \ln |c_k| + r) \leq 0$, т.е. $\limsup_k (|\lambda_k|^{-\rho_2} \ln |c_k| + \tau r) \leq 0$. Но тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \exp \lambda_k z_1$ сходится абсолютно в $[\rho_0, \sigma_0]$, где, как выше, $\rho_0 = \frac{\rho_2}{\rho_2 - 1}$, а σ_0 определяется из уравнения $(\rho_0 \sigma_0)^{1/\rho_0} \cdot (\rho_2 \tau r)^{1/\rho_2} = 1$. Его сумма, совпадающая с $v(z_1)$ в некоторой окрестности начала координат, принадлежит пространству целых функций $[\rho_0, \sigma_0] \subset [\rho_0, \infty)$, что невозможно.

Применим полученный результат к уравнению (1) с $l_m = 0$:

$$\frac{\partial^m w(z_1, z_2)}{\partial z_2^m} + \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{l_k} a_{j,k} \frac{\partial^{j+k} w(z_1, z_2)}{\partial z_1^j \partial z_2^k} = 0. \quad (30)$$

ТЕОРЕМА 22. Если для уравнения (30) $\rho_2 > 1$, то множество E незамкнуто в $\overline{A_0^m}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, рассуждая от противного, что E замкнуто. Тогда E в индуцированной из $\overline{A_0^m}$ топологии является, как известно, LN^* -пространством. Линейный оператор T отображает непрерывно и инъективно LN^* -пространство $A_{0,2}$ на такое же пространство E . По теореме Гротендика T – изоморфизм. Но тогда з.К. (30), (2) λ_0 -возвратно-ограничена, что невозможно.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для того чтобы кор. инд. ρ_2 уравнения (1) был больше единицы, достаточно, а в случае, если $l_m = 0$, и необходимо, чтобы $E = T(\mathcal{H}\{(0,0)\})$ было собственным незамкнутым подпространством $\overline{A_0^m}$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Для уравнения (30) равносильны такие утверждения:

- 1) $\rho_2 > 1$;
- 2) образ оператора T незамкнут в $\overline{A_0^m}$;
- 3) оператор $T: A_{0,2} \rightarrow \overline{A_0^m}$ не сюръективен;
- 4) $T(A_{0,2})$ – незамкнутое собственное подмножество в $\overline{A_0^m}$.

§ 11. О линейной непрерывной зависимости решения задачи Коши от начальных данных

Для того чтобы цели настоящего параграфа и методы их достижения были более прозрачными, дадим постановку задачи и приведем полученные в процессе ее решения результаты в одной довольно типичной для данной работы ситуации, которая уже встречалась в § 6. Пусть $\rho_2 = 1$ и $\mathcal{G}_0$ – выпуклая область в $\mathbb{C}$. Обозначим через T линейный оператор, ставящий в соответствие каждой функции $w(z_1, z_2)$ из $\mathcal{H}(\mathcal{P}\mathcal{G}_0)$ систему m функций от z_1 :

$$w(z_1, 0), \left. \frac{\partial w(z_1, z_2)}{\partial z_2} \right|_{z_2=0}, \dots, \left. \frac{\partial^{m-1} w(z_1, z_2)}{\partial z_2^{m-1}} \right|_{z_2=0},$$

т.е. элемент пространства $\mathcal{H}(\mathcal{G}_0)^m := \mathcal{H}(\mathcal{G}_0) \times \dots \times \mathcal{H}(\mathcal{G}_0)$. Если в $\mathcal{H}(\mathcal{P}\mathcal{G}_0)$ и в $\mathcal{H}(\mathcal{G}_0)^m$ ввести стандартные топологии, то T – линейный непрерывный оператор из $\mathcal{H}(\mathcal{P}\mathcal{G}_0)$ в $\mathcal{H}(\mathcal{G}_0)^m$.

Обратимся теперь к оператору M , стоящему в левой части уравнения (1). Очевидно, что M – линейный непрерывный оператор в $\mathcal{H}(\mathcal{P}\mathcal{G}_0)$. Тогда его ядро является замкнутым подпространством пространства Фреше $\mathcal{H}(\mathcal{P}\mathcal{G}_0)$, т.е. также пространством Фреше (в индуцированной из $\mathcal{H}(\mathcal{P}\mathcal{G}_0)$ топологии). Оператор T непрерывно действует из $M^{-1}(0)$ в $\mathcal{H}(\mathcal{G}_0)^m$ и по теореме 6 является эпиморфизмом. Согласно известной теореме Майкла [20] T имеет непрерывный правый обратный оператор $Q: M^{-1}(0) \rightarrow \mathcal{H}(\mathcal{G}_0)^m$,

$$\forall \varphi (\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{m-1}) \in (\mathcal{H}(\mathcal{G}_0))^m \quad TQ\varphi = \varphi.$$

Функция $Q\varphi$ из $M^{-1}(0)$ зависит непрерывно от начальных данных φ . Следовательно, в предположениях теоремы 6 всегда существует решение з.К. (1), (2), непрерывно зависящее от начальных данных. Однако оператор Q в общей ситуации нелинеен. В то же время в ряде случаев важно знать, что имеется решение з.К. (1), (2), зависящее от начальных данных не только непрерывно, но и линейно. Иными словами, важно знать, когда оператор T (точнее, его сужение T_M на $M^{-1}(0)$) имеет линейный непрерывный правый обратный (ЛНПО) Q .

Можно описать один простой случай, когда такой оператор Q имеется. Именно, если нулевая з.К. для уравнения (1) по z_2 :

$$\left. \frac{\partial^s w(z_1, z_2)}{\partial z_2^s} \right|_{z_2=0} = 0, \quad s = 0, 1, \dots, m-1, \quad (31)$$

имеет только тривиальное решение в $\mathcal{H}(\mathcal{P}\mathcal{G}_0)$, то оператор $T_M: M^{-1}(0) \rightarrow (\mathcal{H}(\mathcal{G}_0))^m$ инъективен и сюръективен, и по теореме Банаха T_M – изоморфизм.

Если же единственность решения з.К. (1), (31) в $\mathcal{H}(\mathcal{P}\mathcal{G}_0)$ не гарантируется, то вопрос о существовании ЛНПО у T_M становится довольно сложным. Согласно [21, § 1, п. 8] для существования такого оператора необходимо и достаточно, чтобы ядро $T_M^{-1}(0)$ оператора T_M , т.е. множество всех решений нулевой з.К. (1), (31) было дополнимо в $M^{-1}(0)$ – во множестве всех решений уравнения (1) из $\mathcal{H}(\mathcal{P}\mathcal{G}_0)$. Однако вопрос о дополнимости $T_M^{-1}(0)$ в $M^{-1}(0)$ тоже весьма сложен, и его решение должно быть объектом самостоятельного исследования.

Оставаясь в рамках методов, используемых в настоящей статье, мы покажем, что привлечение АПС экспонент дает возможность указать как условия достаточно общего характера для существования ЛНПО у T_M , так и способ его построения. Для этого нам понадобится оператор представления L , играющий важную роль в теории АПС (см., например, [5]). В рассматриваемой ситуации этот оператор определяется следующим образом. Пусть $\mathcal{E}_\Lambda = \{\exp \lambda_k z\}_{k=1}^\infty$ – какая-либо последовательность экспонент в $\mathcal{H}(\mathcal{G}_0)$ и $(\mathcal{G}_n)_{n=1}^\infty$ – возрастающая последовательность выпуклых компактов, аппроксимирующих изнутри область $\mathcal{G}_0$. Топология в $\mathcal{H}(\mathcal{G}_0)$ задается счетным набором преднорм $p_n(y) = \max\{|y(z)| : z \in \mathcal{G}_n\}$, $n = 1, 2, \dots$. Обозначим символом $A_2(\mathcal{E}_\Lambda)$ пространство всех числовых последовательностей $c = (c_k)_{k=1}^\infty$ таких, что

$$q_n(c) := \sum_{k=1}^\infty |c_k| p_n(\exp \lambda_k z_1) < \infty, \quad n = 1, 2, \dots$$

Пространство $A_2(\mathcal{E}_\Lambda)$ с набором преднорм $(q_n(c))_{k=1}^\infty$ является пространством Фреше (см. [5]). Оператор представления L ставит в соответствие каждой последовательности $c = (c_k)_{k=1}^\infty$ из $A_2(\mathcal{E}_\Lambda)$ функцию $Lc = \sum_{k=1}^\infty c_k \exp \lambda_k z_1$ из $\mathcal{H}(\mathcal{G}_0)$. Очевидно, что L непрерывен и что L является эпиморфизмом тогда и только тогда, когда $\mathcal{E}_\Lambda$ – АПС в $\mathcal{H}(\mathcal{G}_0)$. Будем далее предполагать, что $\mathcal{E}_\Lambda$ – АПС в $\mathcal{H}(\mathcal{G}_0)$. Тогда L – эпиморфизм $A_2(\mathcal{E}_\Lambda)$ на $\mathcal{H}(\mathcal{G}_0)$. Допустим, что он имеет ЛНПО $B: \mathcal{H}(\mathcal{G}_0) \rightarrow A_2(\mathcal{E}_\Lambda)$. Тогда любой набор начальных функций $(\varphi_j(z_1))_0^{m-1}$ из $(\mathcal{H}(\mathcal{G}_0))^m$ можно представить в виде абсолютно сходящихся в $\mathcal{H}(\mathcal{G}_0)$ рядов:

$$\varphi_j(z_1) = \sum_{k=1}^\infty (B\varphi_j)_k \exp \lambda_k z_1, \quad j = 0, \dots, m-1,$$

где $B\varphi = \{(B\varphi)_k\}_{k=1}^\infty \quad \forall \varphi \in \mathcal{H}(\mathcal{G}_0)$.

Рассмотрим систему (7), положив в ней $b_{k,n} = (B\varphi_n)_k$, $n = 0, 1, \dots, m-1$, $k = 1, 2, \dots$. Из этой системы определяем единственным образом (при любом фиксированном $k \geq 1$) величины $a_{j,s}^{(k)}$ по формулам Крамера:

$$a_{j,s}^{(k)} = A_{j,s,k}(F_k),$$

где

$$F_k = ((B\varphi_0)_k, (B\varphi_1)_k, \dots, (B\varphi_{m-1})_k) \in \mathbb{C}^m$$

и $A_{j,s,k}$ – линейный оператор в $\mathbb{C}^m$. Подставляя эти значения $a_{j,s}^{(k)}$ в (5), получим

$$w_0(z_1, z_2) = \sum_{j=1}^N \sum_{s=0}^{p_j-1} \sum_{k=1}^{\infty} A_{j,s,k}(F_k) z_2^s \exp[\lambda_k z_1 + \mu_j(\lambda_k) z_2]. \quad (32)$$

Очевидно, что правая часть равенства (32) зависит от начальных функций $(\varphi_j)_{j=0}^{m-1}$ линейно. Покажем, что эта зависимость и непрерывна. Пусть $\varphi(\varphi_0, \dots, \varphi_{m-1})$ – любой элемент из $(\mathcal{H}(\mathcal{G}_0))^m$, и пусть $\mathcal{F}$ – произвольный компакт в $\mathcal{P}\mathcal{G}_0$. Тогда $\mathcal{F}_1 := \bigcup_{j=1}^m \{z_1 + \tau_j z_2 : (z_1, z_2) \in \mathcal{F}\}$ – компакт в $\mathcal{G}_0$ и найдется номер $K \geq 1$ такой, что $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{G}_{K+1}$. Проведя те же оценки, что и в § 5, и учитывая, как и там, неравенства (9), приходим к оценке (14), в которой $b_{k,n}$ заменено на $(B\varphi_n)_k$: при $k \geq k_0$

$$\begin{aligned} \gamma_{j,s}^{(k)} &\leq D_1 \sum_{n=0}^{m-1} |(B\varphi_n)_k| \exp \max\{\operatorname{Re} \lambda_k v : v \in \mathcal{G}_{K+1}\} \\ &= D_1 \sum_{n=0}^{m-1} |(B\varphi_n)_k| p_{K+1}(\exp \lambda_k z) \end{aligned}$$

для всех $1 \leq j \leq N$, $0 \leq s \leq p_j - 1$. Увеличив, в случае необходимости, константу D_1 , можно добиться того, чтобы для тех же j , s и для всех $l \geq 1$ и любого φ из $(\mathcal{H}(\mathcal{G}_0))^m$

$$\gamma_{j,s}^{(l)} \leq D_1 \sum_{n=0}^{m-1} |(B\varphi_n)_k| p_{K+1}(\exp \lambda_l z).$$

Но тогда

$$\begin{aligned} \max\{|w_0(z_1, z_2)| : (z_1, z_2) \in \mathcal{F}\} &\leq \sum_{j=1}^N \sum_{s=0}^{p_j-1} \sum_{l=1}^{\infty} \gamma_{j,s}^{(l)} \\ &\leq D_1 \left(\sum_{j=1}^N p_j \right) \sum_{n=0}^{m-1} \sum_{l=1}^{\infty} |(B\varphi_n)_l| p_{K+1}(\exp \lambda_l z) = D_2 \sum_{n=0}^{m-1} q_{K+1}(B\varphi_n). \end{aligned}$$

Выберем по номеру K номер K_1 и постоянную D_3 такие, что $\forall f \in \mathcal{H}(\mathcal{G}_0)$ $q_{K+1}(Bf) \leq D_3 p_{K_1}(f)$. В итоге

$$\max\{|w_0(z_1, z_2)| : (z_1, z_2) \in \mathcal{F}\} \leq D_1 D_3 \sum_{n=0}^{m-1} p_{K_1}(\varphi_n).$$

Таким образом, правая часть равенства (32) является линейным непрерывным оператором из $(\mathcal{H}(\mathcal{G}_0))^m$ в $\mathcal{H}(\mathcal{P}\mathcal{G}_0)$, причем

$$T_M w_0 = \varphi := (\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{m-1}).$$

Следовательно, T_M имеет ЛНПО, представимый в виде (32).

Нам осталось указать условия, при которых оператор представления L имеет ЛНПО. Пусть $\psi(z)$ – какая-либо функция, конформно отображающая единичный круг $|z| < 1$ на область $\mathcal{G}_0$. Согласно [22] если область $\mathcal{G}_0$ ограничена и $\sup_{|z|<1} |\psi'(z)| < \infty$, то найдется АПС $\mathcal{E}_\lambda$ в $\mathcal{H}(\mathcal{G}_0)$ такая, что $\limsup_k \frac{k}{|\lambda_k|} < \infty$ и соответствующий оператор представления L имеет ЛНПО.

Мы установили такой результат:

ТЕОРЕМА 23. *Пусть для уравнения (1) $\rho_2 = 1$. Пусть, далее, $\mathcal{G}_0$ – выпуклая область в $\mathbb{C}$ и $\psi(z)$ – функция, конформно отображающая единичный круг на $\mathcal{G}_0$. Тогда:*

1) *оператор T_M имеет непрерывный правый обратный (и, таким образом, существует решение з.К. (1), (2), непрерывно зависящее от начальных данных);*

2) *если область $\mathcal{G}_0$ ограничена и $\sup_{|z|<1} |\psi'(z)| < \infty$, то оператор T_M имеет линейный непрерывный правый обратный (и, таким образом, существует решение з.К. (1), (2), зависящее от начальных данных и непрерывно, и линейно).*

В частности, T_M имеет ЛНПО, если граница ограниченной выпуклой области $\mathcal{G}_0$ принадлежит классу $C^{(2)}$.

Теорема 23 дает достаточные условия для существования ЛНПО у оператора T_M . Было бы интересно, на наш взгляд, получить критерий существования ЛНПО.

Использованные в настоящем параграфе соображения применимы и в других ситуациях – например, для пространств $[\rho, \sigma]$, $[\rho, \sigma)$, для случаев $\rho_2 < 1$ и $\rho_2 > 1$ и т.д. Важно лишь, чтобы в пространстве $\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_1)$, к которому принадлежат начальные функции, имелась АПС экспонент такая, что соответствующий оператор представления обладает ЛНПО. В этом случае точно так же, как в данном параграфе, можно указать достаточные условия существования ЛНПО у оператора T_M .

§ 12. Упрощение представления решения для невырожденного случая

Положим при любом фиксированном $\lambda \in \mathbb{C}$

$$T_\lambda(\mu) = Q(\lambda, \mu) = \sum_{k=0}^m \mu^k \mathcal{R}_k(\lambda).$$

Образует дискриминант многочлена (от μ) $T_\lambda(\mu)$. Ясно, что он будет некоторым многочленом $v(\lambda)$ от λ . Предположим, что многочлен $v(\lambda)$ отличен от тождественного нуля. Тогда $\exists R_1 \in (0, +\infty) : v(\lambda) \neq 0$, если $|\lambda| \geq R_1$.

Пусть, как раньше (см. § 3), $\mathcal{E}_\lambda = (\exp \lambda_k z)_{k=1}^\infty$ – АПС в $\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_1)$ и $\lim_k |\lambda_k| = \infty$.

Пусть, далее, $\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_1)$ инвариантно относительно дифференцирования, а оператор $y' - \alpha y$ при любом $\alpha \in \mathbb{C}$ является эпиморфизмом $\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_1)$. Тогда по предложению 1 из § 3 последовательность $(\exp \lambda_k z)_{k=N}^\infty$ будет АПС в $\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_1)$ при любом натуральном N . Пусть $R_2 \geq R_1$ и R_2 настолько велико, что $\mathcal{R}_m(\lambda) \neq 0$, когда $|\lambda| \geq R_2$. В области $|\lambda| > R_2$ уравнение $Q(\lambda, \mu) = 0$ имеет точно m простых ветвей $\mu_j(\lambda)$,

$j = 1, 2, \dots, m$, соответствующей алгебраической функции. Учитывая предложение 1, можно всегда считать, что если $\mathcal{E}_\Lambda$ – АПС в $\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_1)$, то $\forall k \geq 1 |\lambda_k| \geq R_2$. В этом случае решение з.К. (1), (2) можно искать в виде ряда

$$w_0(z_1, z_2) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{\infty} a_j^{(k)} \exp[\lambda_k z_1 + \mu_j(\lambda_k) z_2]. \quad (33)$$

Коэффициенты $a_j^{(k)}$ определяются при любом фиксированном $k \geq 1$ из следующих соотношений (более простых, чем (7)):

$$b_{k,n} = \sum_{j=1}^m a_j^{(k)} (\mu_{j,k})^n, \quad n = 0, 1, \dots, m-1, \quad \mu_{j,k} = \mu_j(\lambda_k). \quad (34)$$

Определитель системы (34) является определителем Вандермонда и отличен от нуля, так как все числа $\mu_{j,k}$, $j = 1, 2, \dots, m$, попарно различны. Как в § 3, получаем для коэффициентов $a_j^{(k)}$, определяемых единственным образом из системы (34), оценку вида (9):

$$|a_j^{(k)}| \leq D |\lambda_k|^T \sum_{n=0}^{m-1} |b_{k,n}|, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad k = 1, 2, \dots$$

Все дальнейшие рассуждения, уже изложенные выше, остаются в силе так же, как и результаты, полученные в обеих частях настоящей работы. Единственное различие заключается лишь в том, что решение з.К. имеет представление (33), более простое, чем (5).

Заметим, что если многочлен $Q(\lambda, \mu)$ неприводим, то его дискриминант $T_\lambda(\mu)$ всегда отличен от тождественного нуля и, следовательно, решение з.К. (1), (2) можно построить в виде ряда (33).

§ 13. Задача Коши в пространстве ростков бесконечно дифференцируемых функций

В настоящей работе рассматривалась з.К. (1), (2) в различных пространствах обычных функций – бесконечно дифференцируемых или аналитических. Единственным исключением был § 10, в котором исследованы свойства “пространства начальных данных” $E = T(A_{0,2})$ для з.К. (1), (2) в пространстве аналитических ростков в точке $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$.

Представляется естественным применить метод настоящей статьи к более общим классам решений з.К. (1), (2) из пространств ростков бесконечно дифференцируемых функций. Уточним прежде всего постановку задачи, дав предварительно несколько определений.

Пусть Q – произвольное непустое подмножество $\mathbb{C}$ и $v(Q)$ — некоторая произвольно зафиксированная совокупность содержащих Q плотных в себе (но не обязательно открытых) множеств T из $\mathbb{C}$ такая, что $\forall T_j \in v(Q) \ (j = 1, 2) \exists T_3 \in v(Q): T_3 \subseteq T_1 \cap T_2$.

Множества из $v(Q)$ называем *окрестностями* Q (из системы $v(Q)$).

Пусть $j = 1, 2$ и $T_j \in v(Q)$, где Q – произвольное подмножество $\mathbb{C}$. Две функции $f_j \in C^\infty(T_j)$ называются *эквивалентными* (по системе $v(Q)$), если $\exists T_3 \in v(Q)$: $T_3 \subseteq T_1 \cap T_2$ и $f_1|_{T_3} = f_2|_{T_3}$.

Класс эквивалентности, состоящий из всех эквивалентных друг другу функций, назовем $(C^\infty, v(Q))$ -*ростком*, а векторное пространство, составленное из всех таких ростков, обозначим символом $(Q; C^\infty; v(Q))$.

Приведем некоторые примеры пространств $(Q; C^\infty; v(Q))$, часть которых уже встречалась выше.

1. Q – область в $\mathbb{C}$; $v(Q)$ – одноэлементное множество: $v(Q) = \{Q\}$. В данном случае $(Q; C^\infty; \{Q\})$ отождествляется с пространством $A(Q)$ всех аналитических в области Q функций.

2. Q – континуум в $\mathbb{C}$, и $v(Q)$ – множество $D(Q)$ всех областей, содержащих Q . Пространство $(Q; C^\infty; D(Q))$ совпадает с пространством $\mathcal{H}(Q)$ всех аналитических ростков на Q , рассматривавшимся еще Гротендиком и Мартино.

3. Q – выпуклый компакт в $\mathbb{C}$, и $v(Q) = \{Q\}$. Тогда $(Q; C^\infty; \{Q\})$ совпадает с пространством $AC^\infty(Q)$ всех функций, аналитических в $\text{Int } Q$ и бесконечно дифференцируемых на Q . В частности, если $Q = [-R, +R]$, $0 < R < +\infty$, то $(Q; C^\infty; \{Q\})$ – пространство $C^\infty[-R, +R]$ всех функций, определенных и бесконечно дифференцируемых на $[-R, +R]$.

4. Более общим образом, если Q – любое выпуклое подмножество $\mathbb{R}$ (не обязательно ограниченное), т.е. интервал, сегмент или полуинтервал, а $v(Q) = \{Q\}$, то $(Q; C^\infty; \{Q\})$ совпадает с пространством $C^\infty(Q)$ всех бесконечно дифференцируемых в промежутке Q функций.

5. Если $Q = (-R, +R)$, где $0 < R < \infty$, и $v(Q) = D(Q)$ – множество всех областей, содержащих Q , то $(Q; C^\infty; D(Q))$ – пространство всех аналитических ростков на Q , называемое еще *пространством вещественно-аналитических функций на Q* .

Будем говорить, что *последовательность $(g_n)_{n=1}^\infty$ ростков из $(Q; C^\infty; v(Q))$ сходится в пространстве $(Q; C^\infty; v(Q))$ к элементу g из этого пространства*, если $\exists \mathcal{G} \in v(Q)$: $\forall s \geq 0$ последовательность $(\tilde{g}_n^{(s)})_{n=1}^\infty$ сходится к $\tilde{g}^{(s)}$ равномерно на каждом компакте из $\mathcal{G}$ (здесь $\tilde{g}_n$ и $\tilde{g}$ – представители соответственно ростков g_n и g , не зависящие от s).

Пусть $l = 1, 2$, $\mathcal{F}_l \subseteq \mathbb{C}$ и $v_l(\mathcal{F}_l)$ – фиксированная система окрестностей $\mathcal{F}_l$. Пусть, далее, $\mathcal{E}_l(\mathcal{F}_l)$ – ПОЛВП ростков, вложенное секвенциально непрерывно в $(\mathcal{F}_l; C^\infty; v_l(\mathcal{F}_l))$.

Обозначим символом $(\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_1); \mathcal{E}_2(\mathcal{F}_2))$ векторное пространство всех элементов $u(z_1, z_2)$ с такими свойствами: при $l = 1, 2 \exists T_l \in v_l(\mathcal{F}_l)$: $\forall z_l \in T_l \ u(z_1, z_2) \in \mathcal{E}_{3-l}(\mathcal{F}_{3-l})$.

Предположим, что $0 \in \mathcal{F}_2$, и поставим для уравнения (1) задачу Коши по переменной z_2 : найти решение уравнения (1) $w(z_1, z_2)$ из $(\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_1); \mathcal{E}_2(\mathcal{F}_2))$ такое, что выполнены соотношения (2), в которых φ_k – заданные ростки из $\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_1)$ ($k = 0, 1, \dots, m-1$).

При этом элемент $w(z_1, z_2)$ из $(\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_1); \mathcal{E}_2(\mathcal{F}_2))$ считается решением уравнения (1), если при $l = 1, 2 \exists T_l \in v_l(\mathcal{F}_l)$: $w(z_1, z_2) \in C^\infty(T_l)$ при каждом фиксированном z_{3-l} из T_{3-l} и если правая часть (1) тождественно равна нулю на $T_1 \times T_2$.

Формальное построение решения з.К. (1), (2) производится при тех же исход-

ных предположениях относительно пространств $\mathcal{E}_l(\mathcal{F}_l)$ ростков и так же, как это проделано выше, в § 3, для пространств функций. При этом считаем, что ряд (5) сходится абсолютно в $(\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_1); \mathcal{E}_2(\mathcal{F}_2))$, если существуют множества T_l из $v_l(\mathcal{F}_l)$ ($l = 1, 2$) такие, что при любом фиксированном z_l из T_l каждый ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{j,s}^{(k)} z_2^s \exp[\lambda_k z_1 + \mu_{j,k} z_2], \quad s = 0, 1, \dots, p_j - 1, \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

сходится абсолютно в $\mathcal{E}_{3-l}(\mathcal{F}_l)$.

Допустим, что ряд (5) сходится абсолютно в $(\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_1); \mathcal{E}_2(\mathcal{F}_2))$ и что это пространство секвенциально полно. Тогда сумма $w_0(z_1, z_2)$ ряда (5) принадлежит пространству $(\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_1); \mathcal{E}_2(\mathcal{F}_2))$. Учитывая еще, что каждое слагаемое $a_{j,s}^{(k)} z_2^s \times \exp[\lambda_k z_1 + \mu_{j,k} z_2]$ удовлетворяет уравнению (1) в $\mathbb{C}^2$, а оператор дифференцирования непрерывен в каждом пространстве $\mathcal{E}_l(\mathcal{F}_l)$, $l = 1, 2$, убеждаемся в наличии окрестностей D_l из $v_l(\mathcal{F}_l)$ таких, что $D_l \subseteq T_l$ и $w_0(z_1, z_2) \in C^\infty(D_l)$ при любом фиксированном z_{3-l} из D_{3-l} ($l = 1, 2$). Кроме того, при $w = w_0$ левая часть уравнения (1) тождественно равна нулю на $D_1 \times D_2$. Следовательно, w_0 – решение уравнения (1) в определенном выше смысле. Далее, $\forall z_2 \in \mathcal{F}_2, \forall z_1 \in D_1, \forall n \leq m - 1$

$$\frac{\partial^n w_0(z_1, z_2)}{\partial z_2^n} = \sum_{j=1}^N \sum_{s=0}^{p_j-1} \sum_{k=1}^{\infty} a_{j,s}^{(k)} (z_2^s \exp \mu_{j,k} z_2)^{(s)} \exp \lambda_k z_1,$$

откуда при тех же n и z_1

$$\left. \frac{\partial^n w_0(z_1, z_2)}{\partial z_2^n} \right|_{z_2=0} = \sum_{j=1}^N \sum_{s=0}^{q_j(n)} \sum_{k=1}^{\infty} a_{j,s}^{(k)} s! C_n^s \mu_{j,k}^{n-s} \exp \lambda_k z_1,$$

где, как выше, $\mu_{j,k} = \mu_j(\lambda_k)$, $q_j(n) = \min\{n, p_j - 1\}$.

Как и раньше, показываем, что числа $a_{j,s}^{(k)}$ можно выбрать так, чтобы при любом $k \geq 1$ выполнялись соотношения (7), в которых числа $b_{k,n}$ являются коэффициентами разложений (6) начальных ростков φ_n из $\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_1)$. При этом справедливы неравенства (9). Во всех тех случаях, когда из абсолютной сходимости рядов (6) можно вывести с помощью двух неравенств (9) абсолютную сходимость рядов (5) в $(\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_1); \mathcal{E}_2(\mathcal{F}_2))$, получаем, как выше, что сумма w_0 ряда (5) является решением з.к. (1), (2) из $(\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_1); \mathcal{E}_2(\mathcal{F}_2))$. Далее, предложение 1 остается справедливым и для ПОЛВП $(Q; C^\infty; v(Q))$ -ростков (а не функций, как раньше).

Все изложенные после § 3 результаты остаются в силе (с небольшими изменениями в доказательствах и формулировках) и для пространств $(Q; C^\infty; v(Q))$ -ростков. В частности, справедлива теорема 1 и ее следствие, в формулировке которых слово “функций” (теорема 1) и “функции” (следствие) следует заменить на соответственно “ $(Q; C^\infty; v(Q))$ -ростков” и “ $(Q; C^\infty; v(Q))$ -ростки”.

Это дает возможность рассмотреть новые примеры пространств $\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_1)$, кроме имеющихся в § 4. Приведем один из таких примеров.

Пусть $\mathcal{K}$ – выпуклый компакт в $\mathbb{C}$ и $\mathcal{H}(\mathcal{K})$ – пространство аналитических ростков на $\mathcal{K}$ с индуктивной топологией

$$\mathcal{H}(\mathcal{K}) = \operatorname{ind}_n AC(\mathcal{G}_n),$$

где $\mathcal{G}_n$ – последовательность ограниченных выпуклых областей, убывающих монотонно к $\mathcal{K}$ как к ядру: $\mathcal{G}_n \supseteq \mathcal{G}_{n+1} \supseteq \mathcal{K}$, $\mathcal{K} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \mathcal{G}_m$, и $AC(\mathcal{G}_n)$ – банахово пространство аналитических в области $\mathcal{G}_n$ и непрерывных на $\overline{\mathcal{G}_n}$ функций с нормой $\|y\|_n := \max\{|y(z)| : z \in \overline{\mathcal{G}_n}\}$. Как известно [18], $\mathcal{H}(\mathcal{K})$ – регулярный индуктивный предел B -пространств $AC(\mathcal{G}_n)$. Кроме того, $\mathcal{H}(\mathcal{K}) = \operatorname{ind}_n \mathcal{H}(\mathcal{G}_n)$. Из существования в $\mathcal{H}(\mathcal{G}_n)$ АПС с описанными в примере 2 из § 4 свойствами нетрудно вывести, что в $\mathcal{H}(\mathcal{K})$ имеется АПС экспонент $\mathcal{E}_\Lambda = (\exp \lambda_k z)_{k=1}^{\infty}$, для которой $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln k}{|\lambda_k|} = 0$. Более того, если $0 \in \mathcal{K}$ и $\operatorname{Int} \mathcal{K} \neq \emptyset$, то можно положить $\mathcal{G}_n = \operatorname{Int}(q_n \mathcal{G})$, где $q_n \searrow 1$. Если $\mathcal{E}_\Lambda$ – АПС в $\mathcal{H}(\mathcal{G}_1)$ со свойством $\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{|\lambda_k|} < \infty$, то согласно [23] $\mathcal{E}_\Lambda$ – АПС в $\mathcal{H}(\mathcal{G}_n) \quad \forall n \geq 1$, и подавно $\mathcal{E}_\Lambda$ – АПС в $\mathcal{H}(\mathcal{K})$. Следовательно, здесь применимы указанные аналоги теоремы 1 и ее следствия.

В частности, если $\mathcal{K} = \{0\}$, то $\mathcal{H}(\mathcal{K}) = \overline{A_0}$ – пространство всех аналитических ростков в начале координат с обычной индуктивной топологией. Из (обобщенной) теоремы 1 следует, что для любых аналитических в начале координат функций φ_j , $j = 0, 1, \dots, m-1$, существует решение з.К. (1), (2) из $\{\overline{A_0}, \mathcal{E}_2(\nu, \beta)\}$.

Аналогичные примеры можно привести и для значений $\rho_2 > 0$. Опишем один такой пример (см. начало § 6). Пусть $\mathcal{G}_0$ – ограниченная выпуклая область, содержащая начало координат, и $\mathcal{B}_0$ – ее замыкание в $\mathbb{C}$. Положим $\forall \tau \in \mathbb{C}$

$$(\mathcal{B}_0)_\tau = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : z_1 + \tau z_2 \in \mathcal{B}_0\}.$$

Пусть, как раньше, $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m$ – все корни многочлена $P(x) = \sum_{k \in \mathcal{N}_2} a_{l_k, k} x^k$ и $\mathcal{P}\mathcal{B}_0 = \prod_{k=1}^m (\mathcal{B}_0)_{\tau_k}$. Легко проверить, что $\mathcal{P}\mathcal{B}_0 = \overline{\mathcal{P}\mathcal{G}_0}$.

Так же, как теорема 6, доказывается

ТЕОРЕМА 24. *Если φ_k , $k = 0, 1, \dots, m-1$, – любые ростки из $\mathcal{H}(\mathcal{B}_0)$, то решение з.К. (1), (2) в $\mathcal{H}(\mathcal{P}\mathcal{B}_0)$ существует. При этом если $\mathcal{E}_\Lambda = (\exp \lambda_k z)_{k=1}^{\infty}$ – любая АПС в $\mathcal{H}(\mathcal{B}_0)$, для которой $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln k}{|\lambda_k|} = 0$, а (11) – какие-либо разложения (представителей) начальных ростков φ_k в абсолютно сходящиеся в $\mathcal{H}(\mathcal{B}_0)$ ряды по системе $\mathcal{E}_\Lambda$, то в качестве решения з.К. (1), (2) можно взять сумму $w_0(z_1, z_2)$ к. $\mathcal{E}_\Lambda$ -ряда (10), который сходится абсолютно в пространстве $\mathcal{H}(\mathcal{P}\mathcal{B}_0)$.*

§ 14. Заключительные замечания

1. Проанализировав исходные предположения, при которых получены вышеизложенные результаты, убеждаемся в том, что фактически была использована непрерывность оператора дифференцирования в пространствах $\mathcal{E}_l(\mathcal{F}_l)$ ($l = 1, 2$) и наличие в $\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_1)$ АПС, инвариантной относительно дифференцирования. Но эти

предположения могут выполняться и для “плохих” (негладких) решений при “плохих” начальных данных – например, при начальных данных, являющихся обобщенными функциями (распределениями). Однако применение изложенного метода решения з.К. в такой ситуации имеет уже ряд особенностей, начиная с перехода от классического решения к обобщенному и заканчивая проверкой наличия АПС с нужными свойствами в пространствах распределений. Так как построение таких (инвариантных относительно дифференцирования) АПС в различных пространствах обобщенных функций только начинается, то решение з.К. с помощью АПС в этой ситуации должно быть предметом отдельного исследования.

2. В данной работе показано, что характер гладкости аналитического или ультранидифференцируемого решения з.К. (1), (2) по переменным z_1 и z_2 определяется величиной кор. инд. ρ_2 . Следует отметить, что попытки ввести такой параметр, который бы находился эффективно по уравнению (1) и определял сравнительный характер гладкости решения з.К. (1), (2) по переменным z_1 и z_2 , предпринимались и ранее, в работах Г. С. Салехова и его сотрудников (см. [17], [24], [25]). Однако, на наш взгляд, введенные им параметры типа “веса” оказались не слишком удачными (более подробно этот вопрос проанализирован в [18, § 14]).

3. Будем говорить, что *уравнение (1) обобщенно нормально по Ковалевской*, если оно является уравнением обобщенного класса Ковалевской (см. § 1), т.е. если $\rho_2 \leq 1$, или, что все равно,

$$l_m + m \geq l_k + k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \quad (35)$$

В частном случае $l_m = 0$, т.е. для уравнения (3) условия (35) принимают вид

$$m \geq l_k + k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \quad (36)$$

Это условие указано С. В. Ковалевской в ее известном мемуаре от 1875 г., где доказаны существование и единственность решения з.К. (3), (2) в классе голоморфных в окрестности начала функций.

Из результатов § 4–6 следует, что условие (35) обеспечивает существование (но не единственность!) голоморфного в окрестности $(0, 0)$ решения з.К. (1), (2) для любых голоморфных в окрестности (0) начальных данных. Поэтому это условие можно рассматривать как естественное обобщение на уравнение (1) условия (36) нормальности по Ковалевской уравнения (3). Необходимо, однако, отметить, что в случае, когда $\rho_2 \leq 1$, но $l_m > 0$, единственности решения з.К. (1), (2) согласно теореме 12 нет даже в очень “узких” подклассах голоморфных решений, и методы С. В. Ковалевской и ее последователей здесь уже неприменимы.

4. Аналитические решения з.К. для различных частных типов уравнения (3) исследовались еще в давних работах Ле Ру, Хольмгрена, Жевре и других (см., например, [26]). В последнее десятилетие появился ряд интересных работ (см., например, [27]–[33]), в которых получены существенные результаты об аналитических и бесконечно дифференцируемых решениях з.К. для уравнений более общего вида, чем (3), в частности, для уравнений с переменными коэффициентами (но разрешенными относительно старшей производной). Имеются и работы о з.К. для уравнений, не разрешенных относительно производной (см., например, статью [34])

и библиографию к ней). Однако в этих работах, как правило, з.К. (1), (2) рассматривается в пространстве обобщенных решений, причем $z_1 = x \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $z_2 = t \geq 0$, а сами решения имеют степенной рост по t .

Результаты фундаментального характера о з.К. (3), (2) в различных классах обобщенных и классических решений получены И.Г. Петровским и его школой (см. [35] и имеющиеся там обзоры) для случая, когда $z_2 = t \geq 0$, а $z_1 = x \in \mathbb{R}^n$.

Не имея возможности останавливаться здесь на анализе работ [26]–[35] и прилегающих к ним, отметим лишь, что метод данной статьи отличается от методов, использованных в [26]–[35], а ее результаты не следуют из результатов этих работ.

Что же касается метода настоящей статьи, основанного на использовании АПС экспонент, то с его помощью з.К. для уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами и двумя независимыми переменными исследована в работе [14] для общего уравнения второго порядка ($m = 2$), в работах [36], [6] – для некоторых типов уравнения (1) произвольного порядка, отвечающих случаю $\rho_2 = 1$, а в статье [37] – случаю $\rho_2 < 1$. Однако понятие кор. инд., являющееся центральным в данной работе, появилось только в работах автора [3], [4], [38].

5. Метод данной статьи можно применить и к з.К. для систем линейных уравнений с зависящими от одномерной переменной z_2 коэффициентами и с многомерной независимой переменной $z_1 \in \mathbb{C}^p$, $p \geq 1$. Полученные на этом пути результаты, которые, к сожалению, не имеют такого же законченного характера, как в данной статье, предполагается изложить отдельно.

Список литературы

1. Мизогата С. Теория уравнений с частными производными. М.: Мир, 1977.
2. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. Т. 2. М.: Наука, 1968.
3. Коробейник Ю. Ф. О периодических решениях задачи Коши. I // Изв. ВУЗов. Математика. 1996. №3. С. 38–49.
4. Коробейник Ю. Ф. Представляющие системы экспонент и задача Коши для уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами. I. Ростов-на-Дону, 1996. Деп. в ВИНТИ 11.11.96, № 3289-B96.
5. Коробейник Ю. Ф. Представляющие системы // УМН. 1981. Т. 36. №1. С. 73–126.
6. Михайлов А. Б. Об аналитических решениях задачи Коши // Изв. ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 1993. №3–4. С. 55–60.
7. Напалков В. В. Достаточные множества в одном классе целых функций // Вопросы аппроксимации функций комплексного переменного. Уфа, 1980. С. 110–115.
8. Коробейник Ю. Ф., Абанин А. В. Абсолютно представляющие системы экспонент в пространстве бесконечно дифференцируемых функций и некоторые их применения: Тез. междунар. конференции памяти Н. В. Ефимова. Ростов-на-Дону, 1996. С. 115–116.
9. Леонтьев А. Ф. Ряды экспонент. М.: Наука, 1976.
10. Коробейник Ю. Ф. Представляющие системы // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1978. Т. 42. №2. С. 325–355.
11. Коробейник Ю. Ф. Описание общего вида нетривиальных разложений нуля по экспонентам. Приложения // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1991. Т. 55. №5. С. 1049–1069.
12. Коробейник Ю. Ф. Индуктивные и проективные топологии. Достаточные множества и представляющие системы // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1986. Т. 50. №3. С. 539–565.
13. Епифанов О. В. Вариации слабо достаточных множеств в пространствах аналитических функций // Изв. ВУЗов. Математика. 1986. №7. С. 50–56.
14. Коробейник Ю. Ф., Михайлов А. Б. Об аналитических решениях задачи Коши // Дифференц. уравн. 1991. Т. 27. №3. С. 503–510.

15. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М.: ГИТТЛ, 1956.
16. Каченко В. А. Уравнения типа свертки в пространствах аналитических функционалов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1977. Т. 41. № 2. С. 378–391.
17. Салехов Г. С. О задаче Коши–Ковалевской для одного класса линейных уравнений с частными производными в области сколь угодно гладких функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1950. Т. 14. № 4. С. 355–366.
18. Коробейник Ю. Ф. Представляющие системы экспонент и задача Коши для уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами. П. Ростов-на-Дону, 1996. Деп. в ВИНТИ 11.11.96. № 3290-B96.
19. Хавин В. П. Пространства аналитических функций // Итоги науки. Математический анализ. М.: ВИНТИ, 1966. С. 76–174.
20. Michael E. Continious Selections. I // Annals of Math. 1956. V. 63. № 2. P. 361–382.
21. Бурбаки Н. Топологические векторные пространства. М.: ИЛ, 1959.
22. Коробейник Ю. Ф., Мелихов С. Н. Линейный непрерывный правый обратный для оператора представления и конформные отображения // Докл. РАН 1992. Т. 323. № 5. С. 826–829.
23. Коробейник Ю. Ф., Мелихов С. Н. Линейный непрерывный правый обратный для оператора представления и приложения к операторам свертки // Сиб. матем. журн. 1993. Т. 34. № 1. С. 70–84.
24. Салехов Г. С. К проблеме Коши для линейных уравнений с частными производными в области бесконечно дифференцируемых функций // УМН. 1952. Т. 2. № 2. С. 226–228.
25. Салехов Г. С., Фридлендер В. Г. К вопросу о задаче, обратной задаче Коши–Ковалевской // УМН. 1952. Т. 3. № 2. С. 169–192.
26. Holmgren E. Sur l'équation de la propagation de la chaleur // Arkiv för Math. Astr. och Physik. 1908. V. 4. № 1–2, 3–4.
27. Bony J. M., Shapira P. Existence et prolongement des solutions holomorphes des équations aux dérivées partielles // Invention Math. 1972. V. 17. P. 95–105.
28. Hamada T., Leray J., Takeuchi A. Prolongment analytique de la solution du problème de Cauchy linéaire // J. de Math. Pures Appl. 1985. V. 64. № 3. P. 257–319.
29. D'Agnolo Andrea. Domain d'existence pour le problème de Cauchy en théorie des faisceaux // J. de Math. Pures Appl. 1993. V. 72. № 1. P. 1–13.
30. Дубинский Ю. А. О корректности задачи Коши в классах целых функций конечного порядка // ДАН СССР. 1988. Т. 301. № 6. С. 1305–1308.
31. Дубинский Ю. А. Задача Коши и псевдодифференциальные операторы в комплексной области // УМН. 1990. Т. 45. № 2. С. 115–142.
32. Дубинский Ю. А. Задача Коши в комплексной области. М.: Изд-во МЭИ, 1996.
33. Одинцов О. В. Дифференциальные операторы бесконечного порядка в некоторых пространствах целых функций // Изв. РАН. Сер. матем. 1993. Т. 57. № 5. С. 168–185.
34. Павлов А. Л. Задача Коши для уравнения типа Соболева–Гальперна в пространствах функций степенного роста // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 11. С. 3–20.
35. Петровский И. Г. Избранные труды. Системы уравнений с частными производными. М.: Наука, 1986.
36. Михайлов А. Б., Подпорин В. П. Определение области аналитичности решений задачи Коши // Изв. СКНЦ ВШ. Сер. естествен. наук. 1992. № 1–2. С. 20–24.
37. Коробейник Ю. Ф. Об аналитических решениях задачи Коши для уравнений параболического типа // Дифференц. уравн. 1994. Т. 30. № 10. С. 1774–1781.
38. Коробейник Ю. Ф. О задаче Коши для уравнения в частных производных с двумя независимыми переменными // Алгебра и анализ. Ч. 2. Теория функций и приближений, функциональный анализ, краевые задачи для дифференциальных уравнений в частных производных: Тез. междунар. научной конференции. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1994. С. 75–76.