Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Г. Мерзляков, О замкнутости образа разностного оператора, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1997, том 61, выпуск 3, 133–158

DOI: <https://doi.org/10.4213/im128>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 14:35:52

УДК 517.5

С. Г. Мерзляков

О замкнутости образа разностного оператора

В статье исследуются разностные операторы с переменными разностями, лежащими на одной прямой, в пространствах голоморфных функций одной переменной. Получены необходимые и достаточные условия замкнутости образа таких операторов в терминах нулей его крайних коэффициентов. Для широкого класса областей эти условия дают простой критерий замкнутости образа разностного оператора.

Библиография: 7 наименований.

Введение

Для произвольной области G комплексной плоскости через $H(G)$ будем обозначать пространство голоморфных функций в этой области с топологией равномерной сходимости на компактах.

Пусть область $U \subset \mathbb{C}$ и числа $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_r < \infty$ таковы, что множество

$$D := \bigcap_{j=0}^r (U - is_j)$$

непусто и связно. Через i всюду в дальнейшем будет обозначаться мнимая единица.

Для заданных функций $g_0, g_1, \dots, g_r \in H(D)$,

$$g_0 \not\equiv 0 \not\equiv g_r, \quad (1)$$

рассмотрим разностный оператор из пространства $H(U)$ в $H(D)$, действующий по формуле

$$(\mathcal{A}f)(z) = \sum_{j=0}^r g_j(z)f(z + is_j), \quad f \in H(U).$$

Ясно, что это – линейный непрерывный оператор.

В данной статье будут получены необходимые и достаточные условия замкнутости образа оператора $\mathcal{A}$ в терминах нулей его крайних коэффициентов – g_0 и g_r . Для широкого класса областей эти условия дадут простой критерий замкнутости образа оператора $\mathcal{A}$.

Мы будем предполагать, что функции $g_0, \dots, g_r$ не имеют общих нулей. Как несложно показать, это условие не ограничивает общности.

Результаты статьи были анонсированы в работе автора [1].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 93-011-259).

§ 1. Предварительные результаты

Для односвязной области G через $H^*(G)$ обозначим сильное сопряженное пространство к пространству $H(G)$.

Как известно, каждому функционалу S из пространства $H^*(G)$ однозначно соответствует такая голоморфная вне некоторого компакта $K \subset G$ функция $\gamma(z)$, $\gamma(\infty) = 0$, что для любого замкнутого контура C в области G , охватывающего компакт K , и любой функции $f \in H(G)$ имеем

$$\langle S, f \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_C \gamma(t) f(t) dt$$

(см. [2]). Функцию γ назовем *преобразованием Коши* функционала S .

Эта функция $\gamma(z)$ будет голоморфна в неограниченной связной компоненте дополнения некоторого компакта $K_1 \subset G$ тогда и только тогда, когда для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $c > 0$ такое, что для любой функции $f \in H(G)$ выполнено неравенство

$$|\langle S, f \rangle| \leq c \max_{z \in K_1^\varepsilon} |f(z)|,$$

где K_1^ε — ε -вздутие компакта K_1 (см. [2]). Такой компакт K_1 называется *определяющим множеством* функционала S .

Рассмотрим оператор $\mathcal{A}^*$, сопряженный к оператору $\mathcal{A}$, отображающий пространство $H^*(D)$ в $H^*(U)$.

Из сказанного выше ясно, что если функция $\gamma(z)$, являющаяся преобразованием Коши функционала $S \in H^*(D)$, голоморфна вне компакта $k \subset D$, то преобразование Коши $\eta(z)$ функционала $\mathcal{A}^*S$ будет голоморфно в неограниченной связной компоненте дополнения компакта

$$\bigcup_{j=0}^r (k + is_j).$$

Для изучения обратной связи между функциями $\eta(z)$ и $\gamma(z)$ нам понадобится следующий результат.

ЛЕММА 1. *В окрестности бесконечности имеет место представление*

$$\eta(z) = \sum_{j=0}^r \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\gamma(t) g_j(t)}{z - t - is_j} dt, \quad (2)$$

где контур $C \subset D$ охватывает все особенности функции $\gamma(z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть контур $\Gamma \subset U$ охватывает все особенности функции $\eta(z)$. Из определения сопряженного оператора получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \eta(t) f(t) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_C \gamma(t) \left[\sum_{j=0}^r g_j(t) f(t + is_j) \right] dt, \quad f \in H(U).$$

Если точка z принадлежит неограниченной связной компоненте дополнения компакта

$$\Gamma \cup \bigcup_{j=0}^r (C + is_j),$$

то ядро Коши $(z - t)^{-1}$ можно сколь угодно точно аппроксимировать по переменной t на этом компакте функциями пространства $H(U)$.

Для таких точек z из последнего равенства по непрерывности следует

$$\eta(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\eta(z)}{z - t} dt = \sum_{j=0}^r \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\gamma(t) g_j(t)}{z - t - i s_j} dt,$$

что и требовалось доказать.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Назовем множество $M \subset \mathbb{C}$ *i -выпуклым*, если его пересечение с любой прямой, параллельной мнимой оси, связно.

Как несложно показать, i -выпуклые области будут обязательно односвязными, а i -выпуклые компакты имеют связное дополнение.

Отныне будем считать нашу область U i -выпуклой. В таком случае и область D , очевидно, также i -выпукла.

ЛЕММА 2. Пусть $S \in H^*(D)$, функции $\gamma(z)$ и $\eta(z)$ являются преобразованиями Коши соответственно функционалов S и $\mathcal{A}^*S$. Пусть, далее, функция $\eta(z)$ голоморфна на лучах

$$\{h_0 + iy : y < 0\}, \quad \{h_1 + iy : y > 0\}$$

для некоторых точек $h_0, h_1 \in \mathbb{C}$ таких, что $h_0, (h_1 - i s_r) \in D$.

Тогда функция γ будет мероморфно продолжаться из бесконечности по лучам

$$\{h_0 + iy : y < 0\}, \quad \{h_1 + iy - i s_r : y > 0\},$$

причем полюсов на этих лучах будет конечное множество и самые дальние от начал лучей полюса будут нулями соответственно функций $g_0(z)$ и $g_r(z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ограничимся случаем луча, уходящего вниз.

Функция $\gamma(z)$ голоморфна вне некоторого компакта области D , следовательно, найдется число $a \in \mathbb{R}$ такое, что на луче $\{h_0 + iy + ia : y < 0\}$ у этой функции нет особенностей.

Если число a неотрицательно, то доказывать нечего, поэтому предположим, что $a < 0$ и точка $(h_0 + ia)$ особая для функции $\gamma(z)$, и обозначим через b точную верхнюю грань чисел $c \leq 0$, для которых на луче

$$\{h_0 + iy : y < c\}$$

у функции $\gamma(z)$ нет других особенностей, кроме полюсов.

Как показано в статье автора [3, с. 1247], в области D существует кусочно гладкий контур C , охватывающий все особенности функции γ и пересекающийся с любой вертикальной прямой не более чем в двух точках. Деформируя контур C в представлении (2), найдем, что все слагаемые в правой части этого равенства, начиная со второго, будут голоморфны на луче

$$\{h_0 + iy : y < a + s_1\},$$

а на луче

$$\{h_0 + iy : y < b + \varepsilon\},$$

где $0 < \varepsilon < s_1$, имеют конечное число полюсов.

В таком случае и первое слагаемое будет голоморфно на луче

$$\{h_0 + iy : y < \min(a + s_1, 0)\},$$

а на луче

$$\{h_0 + iy : y < \min(b + \varepsilon, 0)\}$$

имеет ограниченное по ε число полюсов. Из формулы Сохоцкого–Племеля заключаем, что этим же свойством будет обладать и функция $\gamma(z)g_0(z)$.

Следовательно, в точке $(h_0 + ia)$ у функции $\gamma(z)$ будет полюс, у функции $g_0(z)$ – корень, а на луче

$$\{h_0 + iy : y < \min(b + \varepsilon, 0)\}$$

у функции $\gamma(z)$ конечное число полюсов, ибо на отрезке $[h_0, h_0 + ia]$ функция $g_0(z)$ голоморфна. Из определения числа b и произвольности числа ε , $0 < \varepsilon < s_1$, заключаем, что $b = 0$. Лемма полностью доказана.

Для множества $M \subset \mathbb{C}$ будем полагать

$$M^- = \inf\{\operatorname{Re} z : z \in M\}, \quad M^+ = \sup\{\operatorname{Re} z : z \in M\}.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть в условиях леммы 2 функция $\eta(z)$ голоморфна вне i -выпуклого компакта $K \subset U$, i -выпуклый компакт $k \subset D$ связан и

$$k \supset K \cap (K - is_r).$$

Тогда функция $\gamma(z)$ будет мероморфна с конечным числом полюсов вне компакта k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Установим вначале, что функция $\gamma(z)$ мероморфна в полуплоскостях

$$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < k^-\}, \quad \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > k^+\}.$$

Ограничимся случаем правой полуплоскости и обозначим через σ точную нижнюю грань чисел $c \geq k^+$, для которых функция $\gamma(z)$ мероморфна в полуплоскости

$$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > c\}.$$

Предположим, что $\sigma > k^+$.

В таком случае, как несложно показать, прямая

$$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = \sigma\} \tag{3}$$

будет пересекаться с областью D по непустому интервалу, а пересечение компакта K с этой прямой будет иметь длину, меньшую s_r , поэтому, очевидно, найдутся числа $a, b, a_1, b_1 \in \mathbb{R}$, для которых выполнены соотношения

$$b - a > s_r, \quad a < a_1 \leq b_1 < b - s_r, \quad b_1 - a_1 < s_r,$$

и лучи

$$\{\sigma + iy : y < a_1\}, \quad \{\sigma + iy : y > b_1\}$$

не пересекаются с компактом K .

Элементарными рассуждениями можно теперь показать существование чисел $a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ таких, что лучи

$$\{\sigma + iy : y < a_2\}, \quad \{\sigma + iy : y > b_2\}$$

не пересекаются с компактом K , $\sigma + ia_2, \sigma + i(b_2 - s_r) \in D$, и $b_2 - a_2 < s_r$, поэтому по лемме 2 функция $\gamma(z)$ будет мероморфно продолжаться из бесконечности по лучам

$$\{\sigma + iy : y < a_2\}, \quad \{\sigma + iy : y > b_2 - s_r\}.$$

Неравенство $(b_2 - a_2) < s_r$ обеспечивает пересечение этих лучей, а мероморфность функции $\gamma(z)$ в полуплоскости

$$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \sigma\}$$

гарантирует однозначность функции $\gamma(z)$ на прямой (3).

Но функция $\gamma(z)$ голоморфна вне некоторого компакта, поэтому найдется число $\varepsilon > 0$ такое, что эта функция будет мероморфна в полуплоскости

$$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \sigma - \varepsilon\}.$$

Противоречие с предположением. Равенство $\sigma = k^+$ доказано.

Рассмотрим теперь произвольную точку $z_0 \notin k$, $z_0 = x_0 + iy_0$, $k^- \leq x_0 \leq k^+$. Так как компакт k связан, то его проекция на вещественную ось совпадает с отрезком $[k^-, k^+]$, поэтому прямая $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = x_0\}$ пересекается с компактом k по некоторому отрезку

$$[x_0 + iy_1, x_0 + iy_2],$$

$y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, $y_1 \leq y_2$, а пересечение компакта K с этой прямой будет содержаться в отрезке

$$[x_0 + iy_1, x_0 + iy_2 + is_r].$$

Будем считать, что для точки z_0 выполнено неравенство $y_0 < y_1$.

По условию функция $\eta(z)$ голоморфна на луче $\{x_0 + iy : y < y_1\}$ и по лемме 2 функция $\gamma(z)$ будет мероморфно продолжаться из бесконечности по лучу $\{x_0 + iy : y \leq y_0\}$. Отсюда следует существование выпуклой вертикальной полуполосы, уходящей вниз и содержащей точку z_0 , в которой функция $\gamma(z)$ мероморфна.

Аналогично для любой точки, указанной выше, компакта k найдется содержащая ее выпуклая вертикальная полуполоса, уходящая вверх, в которой функция $\gamma(z)$ мероморфна.

Несложно показать, что если две такие полуполосы пересекаются, то они обязательно направлены в одну сторону. Отсюда следует совпадение значений функции $\gamma(z)$ в общей части полуполос, и мероморфность функции $\gamma(z)$ вне компакта k показана.

Допустим теперь, что у функции $\gamma(z)$ бесконечное число полюсов вне компакта k . Принимая во внимание лемму 2, без ограничения общности можно считать, что найдется последовательность

$$\{z_n \in D : n \in \mathbb{N}\} \quad (4)$$

ее различных полюсов, для которых функция $\gamma(z)$ голоморфна на лучах

$$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} z_n, \operatorname{Im} z < \operatorname{Im} z_n\},$$

$n \in \mathbb{N}$. Множество (4), очевидно, компактно лежит в области D , и по лемме 2 функция $g_0(z)$ обращается на нем в нуль. Теорема единственности влечет за собой тождественное равенство этой функции нулю. Противоречие с соотношениями (1). Утверждение полностью доказано.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть в условиях утверждения 1 компакт K связан и $k = K \cap (K - is_r)$. Тогда найдется такой функционал $S_1 \in H^*(D)$ с преобразованием Коши $\gamma_1(z)$, что $\mathcal{A}^*S_1 = \mathcal{A}^*S$, а функция $\gamma_1(z)$ голоморфна вне полосы

$$\{z \in \mathbb{C} : K^- \leq \operatorname{Re} z \leq K^+\}. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, так как $k \subset K$, то из утверждения 1 вытекает, что функцию $\gamma(z)$ можно представить в виде

$$\gamma(z) = \gamma_1(z) + \gamma_2(z),$$

где функция $\gamma_1(z)$ голоморфна вне полосы (5), а функция $\gamma_2(z)$ рациональна и голоморфна на ней, $\gamma_1(\infty) = \gamma_2(\infty) = 0$. Ясно, что особенности этих функций будут лежать во множестве особенностей функции $\gamma(z)$.

Обозначим через S_1 и S_2 линейные непрерывные функционалы, преобразование Коши которых совпадает соответственно с функциями $\gamma_1(z)$ и $\gamma_2(z)$. Понятно, что $S_1, S_2 \in H^*(D)$.

Преобразование Коши $\eta_2(z)$ функционала $\mathcal{A}^*S_2$ будет рациональной функцией, голоморфной в полосе (5). С другой стороны, из равенства

$$\mathcal{A}^*S_2 = \mathcal{A}^*S - \mathcal{A}^*S_1$$

следует, что все особенности функции $\eta_2(z)$ должны лежать в этой полосе. Таким образом, функция $\eta_2(z)$ тождественно равна нулю и, следовательно, $\mathcal{A}^*S_2 = 0$, поэтому функционал S_1 искомый.

§ 2. Необходимые условия

В данном параграфе мы найдем необходимые условия замкнутости образа оператора $\mathcal{A}$.

ЛЕММА 3. Пусть образ оператора $\mathcal{A}$ замкнут, интервал

$$I = \{h_0 + iy : 0 < y < y_0\}$$

лежит в области U , $y_0 \leq s_r$, и на множестве

$$\{h_0 + iy : y \in \mathbb{R}\} \cap D \quad (6)$$

функция $g_0(z)g_r(z)$ не имеет нулей.

Тогда ядро оператора $\mathcal{A}$ плотно в пространстве $C(I)$.

Здесь через $C(I)$ обозначено пространство непрерывных комплекснозначных функций на интервале I с топологией равномерной сходимости на компактах.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как пространства функций, голоморфных в области, очевидно, являются пространствами Фреше, то замкнутость образа оператора $\mathcal{A}$ эквивалентна замкнутости образа сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ (см. [4, с. 712]).

Рассмотрим произвольный линейный непрерывный функционал T на пространстве $C(I)$, аннулирующий ядро оператора $\mathcal{A}$. Ясно, что этот функционал будет непрерывен на пространстве $H(U)$, поэтому из замкнутости образа оператора $\mathcal{A}^*$ вытекает существование функционала $S \in H^*(D)$ со свойством

$$T = \mathcal{A}^* S$$

(см. [4, с. 705]).

Обозначим через $\gamma(z)$ и $\eta(z)$ преобразования Коши функционалов S и T . Легко видеть, что функция $\eta(z)$ будет голоморфна вне некоторого отрезка $K \subset I$.

Так как $K \cap (K - is_r) = \emptyset$, то из утверждения 1 вытекает, что функция $\gamma(z)$ рациональна, и по лемме 2 на прямой

$$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} h_0\}$$

у нее полюсов нет, следовательно, у функции $\eta(z)$ также не будет особенностей на этой прямой.

В таком случае, очевидно, функция $\eta(z)$ голоморфна всюду и, значит, она тождественно равна нулю, следовательно, функционал T нулевой, и теорема Хана–Банаха влечет за собой искомое.

ЛЕММА 4. Пусть образ оператора $\mathcal{A}$ замкнут и для чисел $z_0 \in \mathbb{C}$, $m, n \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq m \leq n \leq r$, $n - m < r$, выполнены соотношения

$$z_0 + is_m, z_0 + is_n \in U.$$

Тогда в ядре оператора $\mathcal{A}$ найдутся такие функции $f_1, \dots, f_{n-m+1} \in H(U)$, что определитель

$$\begin{vmatrix} f_1(z + is_m) & f_1(z + is_{m+1}) & \dots & f_1(z + is_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n-m+1}(z + is_m) & f_{n-m+1}(z + is_{m+1}) & \dots & f_{n-m+1}(z + is_n) \end{vmatrix} \quad (7)$$

отличен от тождественного нуля в окрестности точки z_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Точка z_0 принадлежит открытому множеству

$$(U - is_m) \cap (U - is_n).$$

В содержащей точку z_0 связной компоненте этого множества, как легко видеть, найдется точка h_0 , для которой множество (6) не содержит нулей функции $g_0(z)g_r(z)$.

В таком случае из леммы 3 и теоремы Хана–Банаха вытекает, что в ядре оператора $\mathcal{A}$ существует функция f_1 , для которой

$$f_1(h_0 + is_m) \neq 0.$$

Рассмотрим функционал $T \in C^*([is_m, is_n])$, определенный по формуле

$$\langle T, f \rangle = \begin{vmatrix} f_1(h_0 + is_m) & f_1(h_0 + is_{m+1}) \\ f(h_0 + is_m) & f(h_0 + is_{m+1}) \end{vmatrix}.$$

Это, очевидно, ненулевой функционал, и длина его носителя меньше s_r .

Из леммы 3 и теоремы Хана–Банаха заключаем, что в ядре оператора $\mathcal{A}$ найдется функция f_2 , для которой

$$\begin{vmatrix} f_1(h_0 + is_m) & f_1(h_0 + is_{m+1}) \\ f_2(h_0 + is_m) & f_2(h_0 + is_{m+1}) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Проведя подобные рассуждения несколько раз, найдем функции $f_1, \dots, f_{n-m+1} \in \text{Ker } \mathcal{A}$, для которых определитель (7) отличен от нуля в точке h_0 . Ясно, что эти функции искомые.

Приведем теперь основное утверждение данного параграфа.

ТЕОРЕМА 1. *Для замкнутости образа оператора $\mathcal{A}$ необходимы следующие условия:*

а) *любая точка множеств*

$$\partial D \cap (U - is_1) \cap (U - is_r), \quad \partial D \cap U \cap (U - is_{r-1})$$

обладает окрестностью с конечным числом нулей соответственно функций $g_0(z)$ и $g_r(z)$;

б) *любая точка множества*

$$\partial D \cap (U - is_1) \cap (U - is_{r-1})$$

обладает окрестностью с конечным числом общих нулей функций $g_0(z)$ и $g_r(z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что утверждение не верно, и найдется, например, последовательность точек $\{z_n \in D : n \in \mathbb{N}\}$, сходящаяся к точке z_0 , причем

$$z_0 \in (U - is_1) \cap (U - is_r), \quad g_0(z_n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

В таком случае для любых функций $f_1, \dots, f_r \in \text{Ker } \mathcal{A}$ имеем

$$\sum_{j=1}^r g_j(z_n) f_k(z_n + is_j) = 0, \quad k = 1, \dots, r, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Числа $g_1(z_n), \dots, g_r(z_n)$ одновременно в нуль не обращаются, поэтому из последних равенств заключаем

$$\begin{vmatrix} f_1(z_n + is_1) & \dots & f_1(z_n + is_r) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_r(z_n + is_1) & \dots & f_r(z_n + is_r) \end{vmatrix} = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Но функция

$$\begin{vmatrix} f_1(z_n + is_1) & \dots & f_1(z_n + is_r) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_r(z_n + is_1) & \dots & f_r(z_n + is_r) \end{vmatrix}$$

голоморфна в точке z_0 и, следовательно, будет тождественно равна нулю в некоторой окрестности этой точки, что противоречит лемме 4.

Аналогичные рассуждения можно провести и для оставшихся двух множеств. Теорема доказана.

§ 3. Достаточные условия

В данном параграфе мы найдем условия, при которых образ оператора $\mathcal{A}$ будет замкнут.

ЛЕММА 5. Пусть функции $g_0(z)$ и $g_r(z)$ имеют конечное число нулей в области D , а множество

$$\bigcup_{j=1}^{r-1} (D + is_j) \quad (8)$$

компактно лежит в области U .

Тогда образ оператора $\mathcal{A}$ замкнут и имеет конечную коразмерность в пространстве $H(D)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разберем вначале несколько частных случаев.

Допустим, что оператор $\mathcal{A}_1$ определен по формуле

$$(\mathcal{A}_1 f)(z) = f(z + is_r) - f(z), \quad f \in H(U),$$

и установим эпиморфность этого оператора.

Как хорошо известно в теории операторов свертки, оператор $\mathcal{A}_1$ будет эпиморфен, если имеет место импликация

$$(S \in H^*(\mathbb{C}), \mathcal{A}_1^* S \in H^*(U)) \Rightarrow S \in H^*(D).$$

Пусть компакт $K \subset U$ содержит все особенности преобразования Коши $\eta(z)$ функционала $\mathcal{A}_1^* S$. Воспользовавшись леммой 2 статьи автора [3], найдем такие гладкие вещественные функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ на некотором отрезке $[a_0, b_0]$, что i -выпуклый компакт

$$K_1 = \{x + iy : \alpha(x) \leq y \leq \beta(x), x \in [a_0, b_0]\}$$

удовлетворяет соотношениям

$$K \subset K_1 \subset U,$$

а компакт

$$k = K_1 \cap (K_1 - is_r)$$

связан и, очевидно, лежит в области D .

В таком случае утверждение 1 и лемма 2 гарантируют голоморфность преобразования Коши функционала S вне компакта k . Но это и означает, что $S \in H^*(D)$, и эпиморфность оператора $\mathcal{A}_1$ показана.

Рассмотри теперь оператор $\mathcal{A}_2$, определенный по формуле

$$(\mathcal{A}_2 f)(z) = g_0(z)f(z) + g_r(z)f(z + is_r), \quad f \in H(U),$$

и докажем существование в ядре этого оператора функции $F \in H(U)$ с конечным числом нулей в области D .

Если функции $f_1, f_2 \in H(U)$ удовлетворяют уравнениям

$$p_l(z)f_l(z) + q_l(z)f_l(z + is_r) = 0, \quad l = 1, 2,$$

для некоторых функций $p_l, q_l \in H(D)$, $l = 1, 2$, то, как легко видеть, функция

$$f(z) = e^{\pi s_r^{-1} z} f_1(z) f_2(z)$$

будет решением уравнения

$$p_1(z)p_2(z)f(z) + q_1(z)q_2(z)f(z + is_r) = 0.$$

Эти соображения вместе с условием конечности числа нулей функций $g_0(z)$ и $g_r(z)$ показывают, что для построения функции $F(z)$ достаточно найти голоморфные в области U с конечным числом корней в области D решения уравнений

$$\begin{aligned} (z + z_1)f(z) + f(z + is_r) &= 0, \\ f(z) + (z + z_2)f(z + is_r) &= 0, \\ e^{\varphi(z)}f(z) + f(z + is_r) &= 0, \end{aligned} \tag{9}$$

где $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $\varphi \in H(D)$.

Для первых двух уравнений несложно подобрать целые решения вида

$$\frac{e^{cz}}{\Gamma(az + b)},$$

$a, b, c \in \mathbb{C}$. Так как множество (8) по условию ограничено, эти функции действительно будут иметь конечное число нулей в области D .

Займемся теперь уравнением (9). Из эпиморфности оператора $\mathcal{A}_1$ вытекает, что найдется функция $C(z) \in H(U)$, удовлетворяющая уравнению

$$C(z + is_r) - C(z) = \pi i + \varphi(z).$$

В таком случае, очевидно, функция $\exp C(z)$ будет решением уравнения (9), не имеющим нулей, поэтому существование искомой функции $F(z)$ установлено.

Для произвольной функции $f \in H(U)$ имеем

$$g_0(z)f(z)F(z) + g_r(z)f(z + is_r)F(z + is_r) = g_0(z)F(z)[f(z) - f(z + is_r)].$$

Это соотношение вместе с эпиморфностью оператора $\mathcal{A}_1$ означает, что образ оператора $\mathcal{A}_2$ содержит пространство голоморфных функций в области D , которые делятся на функцию $g_0(z)F(z)$. Но эта функция имеет конечное число нулей в области D , поэтому указанное пространство является замкнутым подпространством конечной коразмерности в $H(D)$.

В таком случае, как легко видеть, образ оператора $\mathcal{A}_2$ будет равен сумме этого замкнутого подпространства конечной коразмерности и некоторого конечномерного подпространства $H(D)$, поэтому образ замкнут (см. [5, с. 41]) и, очевидно, конечной коразмерности в пространстве $H(D)$.

Рассмотрим теперь оператор

$$\mathcal{B}: H(U) \rightarrow H(D),$$

определенный по формуле

$$(\mathcal{B}f)(z) = \sum_{j=1}^{r-1} g_j(z) f(z + is_j), \quad f \in H(U),$$

и докажем его компактность.

Действительно, совокупность всех функций пространства $H(U)$, модуль которых не превосходит единицы на множестве (8), будет окрестностью нуля, а образ этой совокупности при отображении $\mathcal{B}$, очевидно, будет предкомпактом в пространстве $H(D)$.

В таком случае из леммы 1 статьи автора [6] вытекает, что образ оператора $(\mathcal{A}_2 + \mathcal{B})$ будет замкнут и конечной коразмерности в пространстве $H(D)$. Лемма полностью доказана.

ЛЕММА 6. Пусть для любого связного компакта $K \subset U$ и последовательности функционалов $\{R_n \in H^*(D) : n \in \mathbb{N}\}$ таких, что компакт K является определяющим множеством функционала $\mathcal{A}^* R_n$, а преобразование Коши функционала R_n голоморфно вне полосы (5), $n \in \mathbb{N}$, найдется компакт $k \subset D$, являющийся определяющим множеством функционалов R_n , $n \in \mathbb{N}$.

Тогда образ оператора $\mathcal{A}$ замкнут в пространстве $H(D)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как уже отмечалось, замкнутость образа оператора $\mathcal{A}$ эквивалентна замкнутости образа сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$. Пространство $H^*(U)$ есть LN^* -пространство, поэтому замкнутость его подпространств эквивалентна их секвенциальной замкнутости (см. [7]).

В таком случае рассмотрим последовательность $\{R_n : n \in \mathbb{N}\}$ функционалов пространства $H^*(D)$ такую, что для некоторого функционала $T \in H^*(U)$

$$\mathcal{A}^* R_n \rightarrow T$$

в топологии пространства $H^*(U)$. Как несложно показать, найдутся связный компакт $K \subset U$ и число $c > 0$, обеспечивающие неравенства

$$|\langle \mathcal{A}^* R_n, f \rangle| \leq c \max_{t \in K} |f(t)|, \quad f \in H(U), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Из этих неравенств следует, что компакт K является определяющим множеством функционалов $\mathcal{A}^* R_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Принимая во внимание следствие утверждения 1, преобразование Коши функционала R_n можно считать голоморфным вне полосы (5), $n \in \mathbb{N}$.

По условию существует компакт $k \subset D$, являющийся определяющим множеством функционалов R_n , $n \in \mathbb{N}$. Положим

$$K_1 = K \cup (k + [0, is_r]).$$

Как несложно убедиться, компакт K_1 лежит в области U и удовлетворяет соотношению

$$K_1 \cap (K_1 - is_r) \supset k.$$

Из упомянутой выше леммы 2 статьи [3] вытекает существование гладких функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ на некотором отрезке $[a_0, b_0]$ со свойствами:

$$\begin{aligned} U &\supset \{x + iy : \alpha(x) \leq y \leq \beta(x), \quad x \in (a_0, b_0)\}, \\ K_1 &\subset \{x + iy : \alpha(x) < y < \beta(x), \quad x \in [a_0, b_0]\}, \\ \{x \in [a_0, b_0] : \alpha(x) + js_r < \beta(x)\} &= (a_j, b_j), \quad j = 0, 1, \end{aligned}$$

где $a_0 < a_1 < b_1 < b_0$.

Из этих соотношений заключаем, что множество

$$U_1 = \{x + iy : \alpha(x) < y < \beta(x), \quad x \in (a_0, b_0)\}$$

является областью, компактно лежащей в области U , $K_1 \subset U_1$, множество

$$D_1 = U_1 \cap (U_1 - is_r)$$

связно и компактно лежит в области D . Область U_1 , очевидно, i -выпукла.

Как несложно показать, для области D_1 имеет место представление

$$D_1 = \{x + iy : \alpha(x) < y < \beta(x) - s_r, \quad x \in (a_1, b_1)\},$$

поэтому замыкание области $D_1 + is_j$ совпадает с множеством

$$\{x + iy : \alpha(x) + s_j \leq y \leq \beta(x) - s_r + s_j, \quad x \in [a_1, b_1]\},$$

$j = 1, \dots, r-1$.

Эти представления показывают, что множество

$$\bigcup_{j=1}^{r-1} (D_1 + is_j)$$

компактно лежит в области U_1 .

Оператор $\mathcal{A}$, очевидно, продолжается по непрерывности до оператора

$$\mathcal{A}_1 : H(U_1) \rightarrow H(D_1),$$

определенного той же формулой, а функции $g_0(z)$ и $g_r(z)$ имеют в области D_1 конечное число нулей. Из леммы 5 следует, что у оператора $\mathcal{A}_1$ и, значит, у $\mathcal{A}_1^*$ образ замкнут.

Как легко убедиться, функционалы R_n будут принадлежать пространству $H^*(D_1)$, $n \in \mathbb{N}$, и $\mathcal{A}_1^* R_n \rightarrow T$ в топологии пространства $H^*(U_1)$. Из вышесказанного заключаем, что найдется функционал $R \in H^*(D_1)$, для которого

$$\mathcal{A}_1^* R = T.$$

Но, очевидно, $\mathcal{A}_1^* R = \mathcal{A}^* R$, что и доказывает искомое.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть для любого компакта $K \subset U$ и последовательности функционалов $S_n \in H^*(D)$ с преобразованиями Коши $\gamma_n(z)$, $n \in \mathbb{N}$, таких, что компакты K и $k = K \cap (K - is_r)$ i -выпуклы и связны, компакт K является определяющим множеством всех функционалов $\mathcal{A}^*S_n$, а функции $\gamma_n(z)$ рациональны с полюсами на одной прямой

$$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = x_n\}, \quad (10)$$

$n \in \mathbb{N}$, причем эти прямые лежат в полосе (5), найдется компакт области D , содержащий полюса всех функций $\gamma_n(z)$.

Тогда образ оператора $\mathcal{A}$ замкнут.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим компакт $K \subset U$ и последовательность функционалов $R_n \in H^*(D)$ с преобразованиями Коши $\chi_n(z)$, для которых выполнены условия леммы 6, $n \in \mathbb{N}$. Можно считать, что компакты K и $k = K \cap (K - is_r)$ i -выпуклы и связны.

Используя утверждение 1, несложно представить функцию $\chi_n(z)$ в виде

$$\chi_n(z) = \chi_n^1(z) + \chi_n^2(z),$$

где функция χ_n^1 голоморфна вне компакта k , а функция χ_n^2 рациональна с полюсами в полосе (5), $\chi_n^1(\infty) = \chi_n^2(\infty) = 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Обозначим через R_n^1 и R_n^2 линейные непрерывные функционалы, преобразования Коши которых совпадают соответственно с функциями $\chi_n^1(z)$ и $\chi_n^2(z)$, $n \in \mathbb{N}$. Ясно, что $R_n^1, R_n^2 \in H^*(D)$, поэтому определены функционалы $\mathcal{A}^*R_n^1$ и $\mathcal{A}^*R_n^2$, чьи преобразования Коши обозначим через $\mu_n^1(z)$ и $\mu_n^2(z)$, $n \in \mathbb{N}$.

Как несложно убедиться, имеют место включения

$$k + is_j \subset K, \quad j = 0, \dots, r,$$

и, следовательно, функция $\mu_n^1(z)$ будет голоморфна вне компакта K , что влечет за собой и голоморфность функции $\mu_n^2(z)$ вне этого компакта, $n \in \mathbb{N}$.

Пусть $\chi(z)$ – рациональная функция, построенная по всем полюсам некоторой функции $\chi_n^2(z)$, лежащим на одной вертикальной прямой, $\chi(\infty) = 0$, а $R \in H^*(D)$ – функционал с преобразованием Коши $\chi(z)$. Нетрудно убедиться, что преобразование Коши функционала $\mathcal{A}^*R$ будет голоморфно вне компакта K , а всего таких функционалов R не более счетного множества. В таком случае по условию найдется компакт $k_1 \subset D$, содержащий особенности всех функций χ_n^2 .

Суммируя вышесказанное, получим, что компакт $(k \cup k_1)$ является определяющим множеством функционала R_n , $n \in \mathbb{N}$, и искомое следует из леммы 6.

Сформулируем теперь основной результат данного параграфа.

ТЕОРЕМА 2. Пусть для любого числа $c \in (U^-, U^+) \cap \{D^-, D^+\}$ найдутся числа $y_0 \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ со свойствами:

- а) лучи $\{c + iy : y \leq y_0\}$, $\{c + iy + is_r : y \geq y_0\}$ не пересекаются с областью U ;
- б) множества

$$\begin{aligned} &\{x + iy : |x - c| < \varepsilon, \quad y \leq y_0\} \cap D, \\ &\{x + iy : |x - c| < \varepsilon, \quad y \geq y_0\} \cap D \end{aligned}$$

не содержат нулей соответственно функций $g_0(z)$ и $g_r(z)$.

Пусть, далее, для любого компакта $k \subset D$ множества

$$D \cap \bigcup_{y \leq 0} (k + iy), \quad D \cap \bigcup_{y \geq 0} (k + iy) \quad (11)$$

содержат конечное число нулей соответственно функций $g_0(z)$ и $g_r(z)$.

Тогда образ оператора $\mathcal{A}$ замкнут.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим компакт $K \subset U$ и последовательность функционалов $\{S_n \in H^*(D) : n \in \mathbb{N}\}$, удовлетворяющие условиям утверждения 2, и установим существование чисел $a, b \in \mathbb{R}$, $D^- < a < b < D^+$, таких, что $a \leq x_n \leq b$, $n \in \mathbb{N}$.

Действительно, в противном случае без ограничения общности можно считать выполненными соотношения $x_n > k^+$, $n \in \mathbb{N}$, и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = D^+.$$

Как несложно видеть, это равенство обеспечивает неравенство $D^+ \leq K^+$ и, следовательно,

$$D^+ \in (U^-, U^+).$$

Обозначим через $z_n = x_n + iy_n$ самый нижний полюс функции $\gamma_n(z)$ на прямой (10), а через $(z_n + it_n)$ – самый верхний, $n \in \mathbb{N}$. В силу неравенства $x_n > k^+$ пересечение компакта K с указанной прямой имеет длину, меньшую s_r , поэтому один из лучей

$$\{z_n + iy : y \leq 0\}, \quad \{z_n + iy + is_r : y \geq 0\}$$

не пересекается с этим компактом, $n \in \mathbb{N}$. Для определенности будем считать, что для всех $n \in \mathbb{N}$ этим свойством обладает первый луч, и по лемме 2

$$g_0(z_n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (12)$$

По условию для числа $c = D^+$ найдутся числа $y_0 \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ со свойствами а) и б). Мы можем считать, что $|x_n - c| < \varepsilon$, $n \in \mathbb{N}$. В таком случае из свойства б) вытекает неравенство $y_n > y_0$, $n \in \mathbb{N}$, поэтому, используя свойство а), несложно показать, что второй из вышеприведенных лучей не будет пересекаться с компактом K для достаточно больших n .

Следовательно, по лемме 2

$$g_r(z_n + it_n) = 0, \quad n \geq n_0.$$

Противоречие со свойством а) и неравенством $y_n > y_0$, $n \in \mathbb{N}$. Наличие искомым чисел a и b установлено.

Очевидно, в области D найдется связный компакт $k_1 \supset k$, проекция которого на вещественную ось совпадает с отрезком $[a, b]$. Так как у функций $g_0(z)$ и $g_r(z)$ конечное число нулей соответственно ниже и выше компакта k_1 , то, соединив эти нули с компактом k_1 вертикальными отрезками, получим компакт $k_2 \subset D$.

Из леммы 2 следует, что полюса всех функций $\gamma_n(z)$ будут лежать в компакте k_2 , и искомое вытекает из утверждения 2.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть

$$U = D + [0, is_r],$$

а множества (11) содержат конечное число нулей соответственно функций $g_0(z)$ и $g_r(z)$.

Тогда образ оператора $\mathcal{A}$ замкнут.

Действительно, в данном случае, очевидно, $D^\pm = U^\pm$, поэтому множество

$$(U^-, U^+) \cap \{D^-, D^+\}$$

пустое, и искомое вытекает из теоремы 2.

§ 4. Необходимые и достаточные условия

В данном параграфе мы опишем класс областей комплексной плоскости, для которых имеется критерий замкнутости образа оператора $\mathcal{A}$ в терминах нулей его крайних коэффициентов.

Для множества $M \subset \mathbb{C}$ введем следующие функции:

$$\begin{aligned}\alpha(x, M) &:= \inf\{y \in \mathbb{R} : x + iy \in M\}, \\ \beta(x, M) &:= \sup\{y \in \mathbb{R} : x + iy \in M\}.\end{aligned}$$

Если $M \subset \mathbb{C}$ — область, то легко показать, что функции $\alpha(x, M)$ и $\beta(x, M)$ будут полунепрерывны соответственно сверху и снизу в каждой точке интервала (M^-, M^+) .

i -выпуклая область $U \subset \mathbb{C}$, очевидно, представляется в виде

$$U = \{x + iy : \alpha(x, U) < y < \beta(x, U), \quad x \in (U^-, U^+)\},$$

а область D запишется в виде

$$D = \{x + iy : \alpha(x, U) < y < \beta(x, U) - s_r, \quad x \in (D^-, D^+)\}.$$

Сформулируем основной результат данного параграфа.

ТЕОРЕМА 3. Пусть для любой точки $x_0 \in [D^-, D^+] \cap (U^-, U^+)$ имеют место соотношения

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0, x \in (D^-, D^+)} \alpha(x, U) &> \alpha(x_0, U) - s_1, \\ \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0, x \in (D^-, D^+)} \beta(x, U) &< \beta(x_0, U) + s_r - s_{r-1}.\end{aligned}$$

Тогда замкнутость образа оператора $\mathcal{A}$ эквивалентна выполнению условий а) и б) теоремы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Принимая во внимание теорему 1, нам надо показать, что из условий а) и б) этой теоремы вытекает замкнутость образа оператора $\mathcal{A}$.

Начало наших рассуждений будет таким же, как при доказательстве теоремы 2 до равенства (12). Далее продолжаем с этого момента.

Точки z_n и $z_n + it_n$ лежат в области D , поэтому

$$\alpha(x_n, U) < y_n < \beta(x_n, U) - s_r, \quad \alpha(x_n, U) < y_n + t_n < \beta(x_n, U) - s_r,$$

и из условий на функции $\alpha(x, U)$ и $\beta(x, U)$ заключаем, что

$$\alpha(D^+, U) - s_1 < \lim_{n \rightarrow \infty} y_n, \\ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (y_n + t_n) < \beta(D^+, U) - s_{r-1}.$$

Так как $t_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, то из последних неравенств вытекает ограниченность последовательностей $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ и $\{t_n : n \in \mathbb{N}\}$. Можно считать их сходящимися:

$$y_n \rightarrow y_0, \quad t_n \rightarrow t_0,$$

и, следовательно,

$$\alpha(D^+, U) - s_1 < y_0, \tag{13}$$

$$y_0 + t_0 < \beta(D^+, U) - s_{r-1}. \tag{14}$$

Точка $z_0 = D^+ + iy_0$ является предельной для нулей функции $g_0(z)$, поэтому из условия а) получаем

$$z_0 \notin (U - is_1) \cap (U - is_r). \tag{15}$$

Как легко показать, последнее множество запишется в виде

$$\{x + iy : \alpha(x, U) - s_1 < y < \beta(x, U) - s_r\},$$

и из соотношений (13) и (15) вытекает неравенство

$$y_0 + s_r \geq \beta(D^+, U). \tag{16}$$

Используя представление из леммы 1

$$\eta_n(z) = \sum_{j=0}^r \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\gamma_n(t) g_j(t)}{z - t - is_j} dt,$$

несложно показать, что на прямой (10) последнее слагаемое правой части голоморфно вне отрезка

$$[z_n + is_r, z_n + it_n + is_r], \tag{17}$$

а остальные слагаемые голоморфны вне отрезка

$$[z_n, z_n + it_n + is_{r-1}], \tag{18}$$

$n \in \mathbb{N}$.

Из неравенства (16) следует, что точка $(z_0 + is_r)$ лежит выше области U , поэтому, начиная с некоторого номера $n \in \mathbb{N}$, точки $(z_n + is_r)$ будут лежать выше компакта K , и, значит, отрезок (17) не пересекается с компактом K для таких n , и, следовательно, функция $\eta_n(z)$ будет голоморфной на этом отрезке.

Из неравенств (14) и (16) заключаем, что для достаточно больших n отрезки (17) и (18) не пересекаются, поэтому последнее слагаемое в правой части представления функции $\eta_n(z)$ будет голоморфно на отрезке (17) для таких n .

Воспользовавшись формулой Сохоцкого–Племеля, несложно показать, что функция $\gamma_n(z)g_r(z)$ будет голоморфна на отрезке $[z_n, z_n + it_n]$, и, значит, $g_r(z_n) = 0$, начиная с некоторого момента.

Таким образом, точка z_0 является предельной для общих нулей функций $g_0(z)$ и $g_r(z)$. Но неравенства (13) и (14) обеспечивают включение

$$z_0 \in (U - is_1) \cap (U - is_{r-1}),$$

что противоречит условию б), и существование чисел $a, b \in \mathbb{R}$ с нужными свойствами установлено.

Как несложно убедиться, найдется связный i -выпуклый компакт $k_1 \subset D$, $k \subset k_1$, проекция которого на вещественную ось совпадает с отрезком $[a, b]$. Докажем, что множества

$$D \cap \bigcup_{t \leq 0} (k_1 + it), \quad D \cap \bigcap_{t \geq 0} (k_1 + it)$$

содержат конечное число нулей соответственно функций $g_0(z)$ и $g_r(z)$.

Действительно, допустим, что существует последовательность

$$w_n \in D \cap \bigcup_{t \leq 0} (k_1 + it)$$

различных нулей функции $g_0(z)$, $w_n = \zeta_n + i\tau_n$, где $\zeta_n \in k_1$, $\tau_n \leq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Последовательность $\{\zeta_n : n \in \mathbb{N}\}$ можно считать сходящейся:

$$\zeta_n \rightarrow \zeta_0 = x_0 + iy_0, \quad x_0, y_0 \in \mathbb{R}.$$

Ясно, что $\zeta_0 \in D$.

Как и выше, из условия на функцию $\alpha(x, U)$ найдем

$$\alpha(x_0, U) - s_1 < y_0 + \varliminf_{n \rightarrow \infty} \tau_n,$$

и, значит, последовательность $\{\tau_n\}$ ограничена, и ее можно считать сходящейся:

$$\tau_n \rightarrow \tau_0,$$

так что

$$\alpha(x_0, U) - s_1 < y_0 + \tau_0.$$

Из включения $\zeta_0 \in D$ вытекает неравенство

$$y_0 < \beta(x_0, U) - s_r,$$

поэтому и

$$y_0 + \tau_0 < \beta(x_0, U) - s_r.$$

Суммируя вышесказанное, получим, что точка $\zeta_0 + i\tau_0$ является предельной для нулей функции $g_0(z)$ и

$$\zeta_0 + i\tau_0 \in (U - is_1) \cap (U - is_r).$$

Противоречие с условием а). Конечность числа интересующих нас нулей установлена.

Окончание доказательства будет таким же, как и в теореме 2.

Докажем теперь, что условия теоремы 3 нельзя ослабить.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *Зафиксируем числа $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$, $a + b < c$, и предположим, что для любого числа $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 3$, произвольный разностный оператор $\mathcal{A}$, удовлетворяющий условиям а) и б) теоремы 1 и соотношениям*

$$s_1 \geq a, \quad s_r - s_{r-1} \geq b, \quad s_r = c,$$

имеет замкнутый образ в пространстве $H(D)$.

Тогда для области U будут выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0, x \in (D^-, D^+)} \alpha(x, U) &> \alpha(x_0, U) - a, \\ \lim_{x \rightarrow x_0, x \in (D^-, D^+)} \beta(x, U) &< \beta(x_0, U) + b. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что это не верно, и в некоторой точке $x_0 \in (U^-, U^+) \cap [D^-, D^+]$ имеет место, скажем, соотношение

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x \in (D^-, D^+)} \alpha(x, U) \leq \alpha(x_0, U) - a.$$

Разберем вначале случай

$$\alpha(x_0, U) = -\infty.$$

В этой ситуации, очевидно, существует точка $z_0 = x_0 + iy_0$ такая, что луч $\{z_0 + it : t \leq 0\}$ целиком лежит в области D . Как несложно убедиться, найдутся числа $k, m, n \in \mathbb{N}$, для которых выполнены неравенства

$$\frac{kc}{n} > a, \quad c - \frac{mc}{n} > b, \quad k < m.$$

Положим

$$\begin{aligned} r = 3, \quad s_1 = \frac{kc}{n}, \quad s_2 = \frac{mc}{n}, \quad s_3 = c, \\ g_0(z) = g_1(z) = g_2(z) = \sin\left(\frac{\pi in(z - z_0)}{c}\right), \quad g_3(z) = 1. \end{aligned}$$

Ясно, что для оператора

$$(\mathcal{A}f)(z) = \sum_{j=0}^3 g_j(z)f(z + is_j), \quad f \in H(U),$$

будут выполнены все необходимые условия. Докажем, что образ этого оператора не замкнут.

Действительно, если $f \in \text{Ker } \mathcal{A}$, то, очевидно,

$$f\left(z_0 + \frac{ilc}{n}\right) = 0, \quad l \in \mathbb{Z}, \quad l \leq n.$$

Так как $k, m < n$, то, дифференцируя тождество $(\mathcal{A}f)(z) = 0$ и подставляя значения $z = z_0 + ilc/n$, $l \in \mathbb{Z}$, $l \leq n$, найдем

$$f'\left(z_0 + \frac{ilc}{n}\right) = 0, \quad l \in \mathbb{Z}, \quad l \leq n.$$

Рассуждая подобным образом дальше, получим тождественное равенство нулю функции f . В таком случае из леммы 4 вытекает, что образ оператора $\mathcal{A}$ не замкнут.

Пусть теперь

$$\alpha(x_0, U) > -\infty.$$

Как несложно показать, в этой ситуации найдется последовательность точек $z_n = x_n + iy_n \in D$, для которой

$$x_n \rightarrow x_0, \quad y_n \rightarrow y_0 = \alpha(x_0, U) - a.$$

Ясно, что точки $z_0 = x_0 + iy_0$ и $z_0 + ia$ лежат на границе областей U и D .

Из определения числа $\alpha(x_0, U)$ следует существование числа ε , $0 < \varepsilon < c - a - b$, для которого имеет место включение

$$x_0 + i\alpha(x_0, U) + i\varepsilon \in U.$$

Пусть $r = 4$, $s_1 = a$, $s_2 = a + \varepsilon$, $s_3 = c - b$, $s_4 = c$, функции $g_0, g_1, g_3, g_4 \in H(D)$ обращаются в нуль только в точках z_n , $n \in \mathbb{N}$, а функция g_2 в них отлична от нуля.

Точка z_0 не принадлежит ни одному из множеств условий а) и б) теоремы 1, поэтому для оператора

$$(\mathcal{A}f)(z) = \sum_{j=0}^4 g_j(z)f(z + is_j), \quad f \in H(D),$$

будут выполнены все необходимые требования.

Для функции $f \in \text{Ker } \mathcal{A}$ имеем

$$f(z_n + is_2) = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Но точка $z_0 + is_2$ лежит в области U , поэтому $f \equiv 0$, и образ оператора $\mathcal{A}$ не замкнут. Утверждение полностью доказано.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть число $c > 0$ и область U таковы, что любой разностный оператор из пространства $H(U)$ в $H(D)$, для которого выполнены условия а) и б) теоремы 1 и $s_r = c$, имеет замкнутый образ в пространстве D .

Тогда сужения функций $\alpha(x, U)$ и $\beta(x, U)$ на множество $(U^-, U^+) \cap [D^-, D^+]$ будут непрерывны.

Действительно, из утверждения 3 имеем неравенства

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0, x \in (D^-, D^+)} \alpha(x, U) &> \alpha(x_0, U), \\ \lim_{x \rightarrow x_0, x \in (D^-, D^+)} \beta(x, U) &< \beta(x_0, U), \end{aligned}$$

а обратные неравенства вытекают из полунепрерывности этих функций.

В теореме 3 мы нашли условия на область U , при которых замкнутость образа оператора $\mathcal{A}$ эквивалентна замкнутости образа разностного оператора

$$\mathcal{A}': H(U) \rightarrow H(D),$$

образованного крайними коэффициентами оператора $\mathcal{A}$.

Покажем существенность этих условий для подобной связи между операторами $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}'$. В нижеследующих примерах число r будет равно двум.

ПРИМЕР 1. Пусть

$$U = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} z < 6\} \setminus [0, 2i], \quad D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} z < 4\} \setminus [0, 2i].$$

Рассмотрим функции $g_0, g_2 \in H(D)$ такие, что функция g_0 обращается в нуль только в точках последовательности $\{z_n \in D : |z_n| < 1, n \in \mathbb{N}\}$, все эти нули простые и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0,$$

а функция $g_2(z)$ обращается в нуль только в точках $z_n + 2i, n \in \mathbb{N}$.

Докажем, что оператор

$$(\mathcal{A}'f)(z) = g_0(z)f(z) + g_2(z)f(z + 2i), \quad f \in H(U),$$

имеет замкнутый образ.

Действительно, пусть функция $G \in H(D)$ принадлежит замыканию образа оператора $\mathcal{A}'$, т.е. для некоторой последовательности $f_m \in H(U)$, $m \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{A}'f_m = G$$

в топологии пространства $H(D)$. В таком случае, очевидно,

$$g_0(z_n + 2i)G(z_n) = g_2(z_n)G(z_n + 2i), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (19)$$

Обозначим через U_1 и D_1 соответственно области

$$U \setminus \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\} \quad \text{и} \quad D \setminus \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}.$$

Оператор $\mathcal{A}'$, очевидно, отображает пространство $H(U_1)$ в $H(D_1)$ и удовлетворяет условиям теоремы 2. Так как функция $G(z)$ принадлежит замыканию образа этого оператора, то найдется функция $f \in H(U_1)$, для которой

$$g_0(z)f(z) + g_2(z)f(z + 2i) = G(z), \quad z \in D_1. \quad (20)$$

Функции $g_0(z)$, $g_2(z)f(z + 2i)$ и $G(z)$ голоморфны на множестве

$$U \cap \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\},$$

поэтому и функция $g_0(z)f(z)$ будет на нем голоморфна, а для голоморфности функции $f(z)$ на этом множестве достаточно выполнения равенств

$$G(z_n) = g_2(z_n)f(z_n + 2i), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (21)$$

Из равенства (20) получим

$$g_0(z_n + 2i)f(z_n + 2i) = G(z_n + 2i), \quad n \in \mathbb{N},$$

что вместе с равенствами (19) и неравенствами $g_2(z_n) \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, даст соотношение (21).

Итак, функция f принадлежит $H(U)$, поэтому

$$(\mathcal{A}'f)(z) = G(z), \quad z \in D,$$

и, следовательно, образ оператора $\mathcal{A}'$ замкнут.

Рассмотрим теперь функцию $g_1 \in H(D)$, $g_1(z_n) = 0 \neq g_1(z_n + 2i)$, $n \in \mathbb{N}$, и докажем, что образ оператора

$$(\mathcal{A}f)(z) = g_0(z)f(z) + g_1(z)f(z + i) + g_2(z)f(z + 2i), \quad f \in H(U),$$

не замкнут.

Действительно, для функции $f \in \text{Ker } \mathcal{A}$, как несложно видеть, выполнены равенства

$$f(z_n + 3i) = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Но точка $3i$ лежит в области U , и, следовательно, $f \equiv 0$. Из леммы 4 заключаем, что образ оператора $\mathcal{A}$ не замкнут.

ПРИМЕР 2. Пусть

$$U = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \text{Im } z < 8\} \setminus [0, 2i], \quad D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \text{Im } z < 4\} \setminus [0, 2i].$$

Рассмотрим функции $g_0, g_2 \in H(D)$ такие, что функция $g_0(z)$ обращается в нуль только в точках $\{z_n \in D : |z_n| < 1, n \in \mathbb{N}\}$, все эти нули простые и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0,$$

а функция $g_2(z)$ обращается в нуль только в точках $z_n + 2i$, $n \in \mathbb{N}$.

Положим

$$g_1(z) = g_0(z) + g_2(z), \quad z \in D,$$

и докажем, что образ оператора

$$(\mathcal{A}f)(z) = g_0(z)f(z) + g_1(z)f(z + 2i) + g_2(z)f(z + 4i)$$

замкнут.

Действительно,

$$(\mathcal{A}f)(z) = g_0(z)[f(z) + f(z + 2i)] + g_2(z)[f(z + 2i) + f(z + 4i)],$$

так что оператор $\mathcal{A}$ представляется в виде суперпозиции двух разностных операторов,

$$(\mathcal{A}_1 f_1)(z) = f_1(z) + f_1(z + 2i), \quad f_1 \in H(U),$$

и

$$(\mathcal{A}_2 f_2)(z) = g_0(z)f_2(z) + g_2(z)f_2(z + 2i), \quad f_2 \in H(U \cap (U - 2i)).$$

Первый оператор, как отмечалось в лемме 5, эпиморфен, а второй, как показано в предыдущем примере, имеет замкнутый образ, поэтому и оператор $\mathcal{A}$ имеет замкнутый образ.

Оператор же

$$(\mathcal{A}'f)(z) = g_0(z)f(z) + g_2(z)f(z + 4i), \quad f \in H(U),$$

имеет незамкнутый образ, ибо, как легко показать, ядро этого оператора нулевое.

Покажем теперь, что аналогичная ситуация имеет место и для разностных операторов в пространстве целых функций.

ПРИМЕР 3. Пусть $U = D = \mathbb{C}$, целые функции g_0 и g_2 имеют корни только соответственно в точках $3ni$ и $(3ni + 2i)$, $n \in \mathbb{Z}$, и все эти корни простые. Как и в примере 1, можно показать, что у оператора

$$(\mathcal{A}'f)(z) = g_0(z)f(z) + g_2(z)f(z + 2i)$$

замкнутый образ.

Пусть теперь функция $g_1 \in H(\mathbb{C})$ удовлетворяет соотношениям

$$g_1(3ni) = 0 \neq g_1(3ni + 2i), \quad n \in \mathbb{N}.$$

В таком случае оператор

$$(\mathcal{A}f)(z) = g_0(z)f(z) + g_1(z)f(z + i) + g_2(z)f(z + 2i)$$

имеет незамкнутый образ.

Действительно, если $f \in \text{Ker } \mathcal{A}$, то несложно показать, что $f(ni) = 0$, $n \in \mathbb{Z}$, и поэтому функция

$$f_1(z) = \frac{f(z)}{e^{2\pi iz} - 1}$$

также будет лежать в ядре оператора $\mathcal{A}$. Ясно, что такое возможно лишь в случае тождественного равенства нулю функции $f(z)$, и из леммы 4 убеждаемся в незамкнутости образа этого оператора.

ПРИМЕР 4. Пусть $U = D = \mathbb{C}$, целые функции g_0 и g_2 имеют корни только соответственно в точках $2ni$ и $(2ni + i)$, $n \in \mathbb{Z}$, и все эти корни простые.

Так же, как в примере 2, можно показать, что оператор

$$(\mathcal{A}f)(z) = g_0(z)f(z) + g_1(z)f(z + i) + g_2(z)f(z + 2i), \quad f \in H(\mathbb{C}),$$

где $g_1(z) = g_0(z) + g_2(z)$, имеет замкнутый образ.

Образ же оператора

$$(\mathcal{A}'f)(z) = g_0(z)f(z) + g_2(z)f(z + 2i), \quad f \in H(\mathbb{C}),$$

не замкнут, ибо его ядро нулевое.

§ 5. Разностные операторы с замкнутым образом

В данном параграфе мы приведем некоторые свойства разностных операторов с замкнутым образом.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Пусть образ оператора $\mathcal{A}$ замкнут, область $U_1 \subset U$, причем множество

$$D_1 = U_1 \cap (U_1 - is_r)$$

связно и для любых точек $x_1 + iy_1, x_2 + iy_2 \in D$ таких, что

$$x_1, x_2 \in (U_1^-, U_1^+), \quad y_1 \leq \alpha(x_1, U_1), \quad y_2 + s_r \geq \beta(x_2, U_1), \\ g_0(x_1 + iy_1) = 0 = g_r(x_2 + iy_2),$$

выполнены условия:

- 1) $y_1 + s_r \geq \beta(x_1, U_1), \quad y_2 \leq \alpha(x_2, U_1);$
- 2) на множествах

$$\{x_1 + iy \in D : y \geq y_1\}, \quad \{x_2 + iy \in D : y \leq y_2\}$$

соответственно функции $g_r(z)$ и $g_0(z)$ не обращаются в нуль.

Тогда:

- а) если $D_1 = \emptyset$, то пространство $\text{Ker } \mathcal{A}$ плотно в пространстве $H(U_1)$;
- б) если $D_1 \neq \emptyset$, то пространство $\text{Ker } \mathcal{A}$ плотно в пространстве $\text{Ker } \mathcal{A}_1$, где оператор

$$\mathcal{A}_1: H(U_1) \rightarrow H(D_1)$$

определен по той же формуле, что и оператор $\mathcal{A}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функционал $T \in H^*(U_1)$, аннулирующий пространство $\text{Ker } \mathcal{A}$.

Как указывалось выше, замкнутость образа оператора $\mathcal{A}$ влечет за собой существование функционала $S \in H^*(D)$ такого, что

$$\mathcal{A}^* S = T.$$

Обозначим через $\eta(z)$ и $\gamma(z)$ преобразования Коши функционалов T и S . Найдется связный i -выпуклый компакт $K \subset U_1$, содержащий все особенности функции $\eta(z)$, такой, что компакт $k = K \cap (K - is_r)$ связан.

По утверждению 1 функция $\gamma(z)$ будет мероморфна вне компакта k с конечным числом полюсов, и согласно следствию этого утверждения можно считать, что вне полосы (5) у этой функции нет особенностей.

Допустим, что для некоторого числа $c \in \mathbb{R}$ на множестве

$$\{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z = c\} \setminus D_1 \tag{22}$$

у функции $\gamma(z)$ имеются полюса, $c + it_1$ — самый нижний, а $c + it_2$ — самый верхний, $t_1 \leq t_2$. В таком случае, очевидно, $U_1^- < c < U_1^+$.

Один из лучей

$$\{c + it : t \leq t_1\}, \quad \{c + it : t \geq t_2 + s_r\}$$

не будет пересекаться с областью U_1 , иначе, как несложно показать, точки $c + it_1$, $c + it_2$ принадлежат D_1 . Пусть этим свойством обладает первый луч.

Лемма 2 влечет за собой равенство $g_0(c + it_1) = 0$, поэтому в силу условия 1) второй луч также не пересекается с областью U_1 , и, значит, $g_r(c + it_2) = 0$.

Но это равенство противоречит условию 2), и, следовательно, у функции $\gamma(z)$ не может быть особенностей на множестве (22).

Так как вне компакта $k \subset D_1$ у функции $\gamma(z)$ лишь конечное число полюсов, то, выходит, все они лежат на множестве D_1 .

Если $D_1 = \emptyset$, то у функции $\gamma(z)$ нет особенностей и, следовательно, функционалы S и T нулевые, тогда п. а) вытекает из теоремы Хана–Банаха.

Если же $D_1 \neq \emptyset$, то $S \in H^*(D_1)$, и в силу полноты пространства $H(U)$ в $H(U_1)$ имеем

$$\mathcal{A}_1^* S = T.$$

В таком случае для любой функции $f \in \text{Ker } \mathcal{A}_1$

$$\langle T, f \rangle = \langle \mathcal{A}_1^* S, f \rangle = \langle S, \mathcal{A}_1 f \rangle = 0,$$

что и доказывает утверждение.

Покажем теперь точность результата.

ПРИМЕР 5. Для оператора

$$\begin{aligned} \mathcal{A}: H(\mathbb{C}) &\rightarrow H(\mathbb{C}), \\ (\mathcal{A}f)(z) &= \sin \pi i z f(z) + f(z + i) \end{aligned}$$

и области

$$U_1 = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z > 0\}$$

выполнены условия утверждения 4, кроме замкнутости образа оператора $\mathcal{A}$.

Как и в примере 3, можно показать, что ядро оператора $\mathcal{A}$ нулевое, а по теореме 2 и лемме 4 $\text{Ker } \mathcal{A}_1 \neq \{0\}$, так что полноты не будет.

ПРИМЕР 6. Пусть

$$\begin{aligned} \mathcal{A}: H(\mathbb{C}) &\rightarrow H(\mathbb{C}), \\ (\mathcal{A}f)(z) &= izf(z) - f(z + i), \\ U_1 &= \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}. \end{aligned}$$

По теореме 2 образ оператора $\mathcal{A}$ замкнут, и, очевидно, выполнены все условия утверждения 4, кроме 1).

Здесь имеем

$$\forall f \in \text{Ker } \mathcal{A} \quad f(i) = 0,$$

а в ядре оператора $\mathcal{A}_1$ имеется функция

$$\sin \pi i z \Gamma(-iz),$$

не имеющая нулей в области U_1 , так что и здесь полноты нет.

ПРИМЕР 7. Для оператора

$$\begin{aligned}\mathcal{A}: H(\mathbb{C}) &\rightarrow H(\mathbb{C}), \\ (\mathcal{A}f)(z) &= zf(z) + f(z+i) + zf(z+2i)\end{aligned}$$

и области

$$U_1 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} z < 2\} \cup \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$$

выполнены все условия утверждения 4, кроме 2).

Для любой функции $f \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}$ $f(i) = 0$, а для пространства $\operatorname{Ker} \mathcal{A}_1$, как это следует из теоремы 2 и леммы 3, это не имеет места.

В случае $D_1 = \emptyset$ несложно построить аналогичные примеры.

Приведем теперь достаточные условия эпиморфности оператора $\mathcal{A}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. Пусть образ оператора $\mathcal{A}$ замкнут и для любых точек $z_1, z_2 \in D$ таких, что

$$\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2, \quad g_0(z_1) = 0 = g_r(z_2),$$

имеют место неравенства

$$\operatorname{Re}(z_2 - z_1) < s_{j+1} - s_j, \quad j = 0, \dots, r-1.$$

Тогда образ оператора $\mathcal{A}$ совпадает со всем пространством $H(D)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функционал $S \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}^*$ и обозначим через $\gamma(z)$ его преобразование Коши. Согласно утверждению 1 эта функция будет рациональной.

Допустим, что функция $\gamma(z)$ отлична от тождественного нуля, и представим ее в виде

$$\gamma(z) = \sum_{m=1}^n \gamma_m(z),$$

где функция $\gamma_m(z)$ рациональная, ненулевая с единственным полюсом в точке $z_m \in D$, $\gamma_m(\infty) = 0$, $m = 1, \dots, n$, и полюсы различных функций не совпадают. Без ограничения общности можно считать, что все эти полюсы лежат на одной прямой:

$$z_m = c + iy_m, \quad m = 1, \dots, n, \quad y_1 < y_2 < \dots < y_n.$$

В таком случае по лемме 2 $g_0(z_1) = 0 = g_r(z_n)$, и, следовательно, выполнены неравенства

$$\operatorname{Re}(z_n - z_1) < s_{j+1} - s_j, \quad j = 0, \dots, r-1. \quad (23)$$

По лемме 1 имеем

$$\sum_{j=0}^r \sum_{m=1}^n \int_C \frac{\gamma_m(t) g_j(t)}{z - t - is_j} dt = 0,$$

где контур C охватывает все полюсы функции $\gamma(z)$, а точка z лежит достаточно далеко от начала координат.

Функция

$$\int_C \frac{\gamma_m(t) g_j(t)}{z - t - is_j} dt, \quad (24)$$

очевидно, рациональна с единственной особой точкой $(z_m + is_j)$, $m = 1, \dots, n$, $j = 0, \dots, r$. Неравенства (23), как несложно показать, обеспечивают несовпадение этих точек, и, следовательно, все функции (24) равны нулю, что может быть лишь в случае равенств

$$g_j(z_m) = 0, \quad m = 1, \dots, n, \quad j = 0, \dots, r.$$

Но у функций $g_0, \dots, g_r$ нет общих нулей, и, значит, функция $\gamma(z)$ тождественно равна нулю.

Итак, ядро оператора $\mathcal{A}^*$ нулевое, и искомое следует из замкнутости образа оператора $\mathcal{A}$ (см. [4, с. 705]).

Покажем теперь, что условие на нули в этом результате нельзя ослабить.

ПРИМЕР 8. Рассмотрим оператор

$$\begin{aligned} \mathcal{A} : H(\mathbb{C}) &\rightarrow H(\mathbb{C}), \\ (\mathcal{A}f)(z) &= zf(z) + (z - i)f(z + i). \end{aligned}$$

По теореме 2 оператор $\mathcal{A}$ имеет замкнутый образ и для любой функции F из этого образа, очевидно, выполнено равенство

$$F(0) + F(i) = 0,$$

так что

$$\mathcal{A}(H(\mathbb{C})) \neq H(\mathbb{C}).$$

Список литературы

1. Мерзляков С.Г. О замкнутости образа разностного оператора // ДАН. 1993. Т. 328. № 2. С. 141–142.
2. Köthe G. Dualität in der Functionentheorie // J. reine und angew. Math. 1953. В. 191. № 1–2. S. 30–49.
3. Мерзляков С.Г. Инвариантные подпространства оператора единичного сдвига // Изв. РАН. Сер. матем. 1992. Т. 56. № 6. С. 1244–1272.
4. Эдвардс Р. Функциональный анализ. М.: Мир, 1969.
5. Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.
6. Мерзляков С.Г. О возмущении линейных операторов в пространствах голоморфных функций // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 3. С. 103–130.
7. Себастьян-и-Сильва Ж. О некоторых классах локально выпуклых пространств, важных в приложениях // Математика. 1957. Т. 1. № 1. С. 60–77.

Поступило в редакцию
29.VIII.1995