Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Назаров, М. В. Олюшин, Приближение гладких контуров многоугольными.
Парадоксы в задачах для системы Ламе, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1997, том 61,
выпуск 3, 159–186

DOI: <https://doi.org/10.4213/im129>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 17:56:26

УДК 517.946

С. А. Назаров, М. В. Олюшин

Приближение гладких контуров многоугольными. Парадоксы в задачах для системы Ламе

При различных краевых условиях исследуется сходимость решений краевых задач для системы Ламе при аппроксимации гладкого контура многоугольным. Выясняется, в каких случаях возникает парадокс, аналогичный парадоксу Сапонджяна–Бабушки. Приводится формальный асимптотический анализ, содержащий построение пограничных слоев около быстро осциллирующей границы и асимптотических поправок вблизи угловых точек. Приводится обоснование построенной асимптотики.

Библиография: 39 наименований.

§ 1. Постановка задачи, описание и обсуждение результатов

1. Область и основная краевая задача. Известно (см. [1], [2]), что продольная деформация тонкой, однородной, трехмерной пластины описывается решением двумерной задачи об обобщенном плоском напряженном состоянии. Далее при различных краевых условиях исследуется сходимость решений таких краевых задач при аппроксимации гладкого контура многоугольным и выясняется, при каких условиях возникает парадокс Сапонджяна–Бабушки (см. [3], [4] для случая изгиба пластины).

Сначала сформулируем упомянутую задачу в области с гладкой границей; при этом назовем те краевые условия, которым в работе уделяется наибольшее внимание, и назовем полученную задачу *основной*.

Пусть Ω – двумерная область на плоскости $\mathbb{R}^2$, ограниченная гладкими, простыми, замкнутыми, выпуклыми контурами Γ_0 и Γ_D . Не ограничивая общности, длину контура Γ_0 считаем единичной. Вектор смещений $u = (u_1, u_2)$ удовлетворяет системе Ламе

$$L(\nabla_x)u(x) \equiv -\mu \nabla_x \cdot \nabla_x u(x) - (\lambda + \mu) \nabla_x \nabla_x \cdot u(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (1.1)$$

где $x = (x_1, x_2)$ – декартовы координаты, $\nabla_x = \text{grad}$, $\mu > 0$, $\lambda \geq 0$ – коэффициенты Ламе, точкой обозначено скалярное произведение, а $f = (f_1, f_2)$ – вектор массовых сил.

Декартовы компоненты тензоров деформаций $\varepsilon(u)$ и напряжений $\sigma(u)$ определяются формулами

$$\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad \sigma_{ij}(u) = 2\mu \varepsilon_{ij}(u) + \delta_{i,j} \lambda (\varepsilon_{11}(u) + \varepsilon_{22}(u)).$$

Здесь $i, j = 1, 2$, а $\delta_{i,j}$ – символ Кронекера. В окрестности $\mathcal{U}$ контура Γ_0 введем естественные координаты (n, s) , где $s \in [0, 1]$ – длина дуги вдоль Γ_0 , а n – расстояние

до Γ_0 по нормали, причем $n > 0$ в $\mathcal{U} \cap \Omega$. Пусть еще $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ и $\mathbf{s} = (n_2, -n_1)$ – нормальный и касательный векторы к границе Γ_0 .

Назначим следующие краевые условия:

$$u(x) = 0, \quad x \in \Gamma_D; \quad (1.2)$$

$$u_n(x) = 0, \quad \sigma_{ns}(u; x) = 0, \quad x \in \Gamma_0. \quad (1.3)$$

В (1.3) u_n и σ_{ns} – компоненты вектора смещений и тензора напряжений в координатах (n, s) ,

$$\begin{aligned} u_n &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}, & u_s &= \mathbf{s} \cdot \mathbf{u}, \\ \sigma_{ns}(u) &= \mathbf{n} \cdot \sigma(u) \mathbf{s}, & \sigma_{nn}(u) &= \mathbf{n} \cdot \sigma(u) \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Условие (1.2) означает жесткое защемление контура Γ_D , а (1.3) – условие идеального (без трения и отрыва) контакта боковой поверхности пластины с абсолютно жестким профилем Γ_0 .

Известно (см., например, [5], [6]), что при $f \in L_2(\Omega)$ существует единственное обобщенное решение $u \in W_2^1(\Omega)$ задачи (1.1)–(1.3). Если $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$, то такое решение оказывается гладким в $\bar{\Omega}$.

Опишем аппроксимацию контура Γ_0 . Пусть N – большое натуральное число и $P^1, \dots, P^{N-1}$, $P^N \equiv P^0$ – точки на контуре Γ_0 , разбивающие его на N дуг с длинами $\varepsilon = N^{-1}$. Соединим точки P^k и P^{k+1} прямолинейными отрезками и обозначим Γ_N построенную ломаную. В области Ω_N , ограниченной контурами Γ_N и Γ_D , рассмотрим краевую задачу

$$L(\nabla_x)v^N(x) = f(x), \quad x \in \Omega_N, \quad (1.5)$$

$$v^N(x) = 0, \quad x \in \Gamma_D, \quad (1.6)$$

$$v_\nu^N(x) = 0, \quad \sigma_{\nu\tau}(v^N; x) = 0, \quad x \in \Gamma_N \setminus \mathcal{P}. \quad (1.7)$$

Здесь $\mathcal{P} \equiv \{P^1, \dots, P^N\}$, ν и τ – нормальная и касательная координаты, отнесенные к звеньям ломаной Γ_N , а v_ν^N и $\sigma_{\nu\tau}(v^N)$ определены аналогично (1.4).

Одной из целей работы является построение асимптотики решения задачи (1.5)–(1.7) при $N \rightarrow \infty$ ($\varepsilon \rightarrow 0$).

2. Обсуждение. В [7] (см. также книгу [3]) было обнаружено значительное расхождение в результатах решений задач об изгибе круглой пластины со свободно опертым краем и аппроксимирующей ее многоугольной пластины при тех же краевых условиях на N сторонах многоугольника, вписанного в круг. В [4] этот факт нашел теоретическое обоснование: оказывается, решение задачи о многоугольной пластине при $N \rightarrow \infty$ сходится к решению задачи в круге с крайевыми условиями, отличающимися от условия свободного опирания. В [8] установлено, что эти предельные условия зависят от знака кривизны гладкого контура – в случае многоугольного отверстия ответ получился иным.

Поскольку устойчивость решения по отношению к малой вариации границы считается необходимым свойством математической модели, то обнаруженные в [3], [4], [7], [8] факты рассматриваются как парадоксальные. Их механическому истолкованию посвящено большое число исследований (см. [9]–[14] и др.). По мнению авторов, одну из причин следует искать в асимптотической природе двумерных уравнений теории пластин – они получаются (см. [1], [2], [6] и др.) в результате

асимптотического интегрирования трехмерных уравнений теории упругости при интерпретации относительной толщины h пластины как малого параметра. Наличие двух параметров, N и h , требует аккуратного обращения с предельными переходами (при $N^{-1} \ll h$ правомочность использования уравнений и краевых условий двумерной теории пластин Кирхгофа вызывает сомнения).

При изучении трехмерной задачи об изгибе пластины (многоугольной призме $\Omega_N \times (-h/2, h/2)$ малой высоты h) в [15] установлено, что появление парадокса зависит от того, какие краевые условия выставляются на боковой поверхности. Именно, условия

$$u_3(x) = 0, \quad \sigma_{\nu\tau}(u; x) = 0, \quad \sigma_{\nu\nu}(u; x) = 0, \quad x \in \Gamma_N \times (-h/2, h/2), \quad (1.8)$$

допускают предельный переход, а условия

$$u_3(x) = 0, \quad u_\tau(x) = 0, \quad \sigma_{\nu\nu}(u; x) = 0, \quad x \in \Gamma_N \times (-h/2, h/2), \quad (1.9)$$

его не допускают (здесь вектор смещений и тензор напряжений трехмерные, ось Ox_3 перпендикулярна основанию пластины, а остальные обозначения – те же, что и в п. 1). Соотношения (1.8) называются *условиями свободного опирания* (simple support), а (1.9) – *условиями жесткого опирания* (hard support). Важным моментом оказывается то, что в двумерной теории пластин Кирхгофа краевые условия (1.8) и (1.9) не различаются – обе группы условий в результате асимптотического интегрирования (при $h \rightarrow 0$) порождают классические условия свободного опирания.

Другой вывод работы [15] представляется авторам спорным. В [15] отмечается, что в задаче для системы уравнений пластин Рейснера [16], [17] равенства (1.8) и (1.9) порождают различные краевые условия, которые наследуют возможность предельных переходов при $N \rightarrow \infty$ от трехмерной задачи. На основании этого утверждается, что модель Рейснера является более точной, чем модель Кирхгофа. В то же время известно (см. [18], [19] и др.), что асимптотические погрешности теорий пластин Кирхгофа и Рейснера одинаковы по порядку малого параметра h . Вероятнее всего, упомянутое совпадение возможностей предельных переходов случайно или вызвано иными причинами не асимптотического характера.

3. Предварительное описание результатов. Для изотропных пластин состояние изгиба и плоской деформации разделяются, т.е. находятся при решении несвязанных задач (бигармоническое уравнение и двумерная система Ламе). Предельные переходы в задачах для системы Ламе не изучались – настоящая статья восполняет этот пробел. Рассматриваются четыре типа краевых условий. Как уже говорилось, основное внимание уделяется краевым условиям (1.7) – на сторонах многоугольника фиксируются нормальное смещение и касательное напряжение. В этом случае возникает парадокс, аналогичный парадоксу Сапонджяна–Бабушки [3], [4]: предел v решений v' задач (1.5)–(1.7) удовлетворяет уравне-

НИЯМ

$$L(\nabla_x)v(x) = f(x), \quad x \in \Omega_N, \quad (1.10)$$

$$v(x) = 0, \quad x \in \Gamma_D, \quad (1.11)$$

$$v_n(x) = 0, \quad x \in \Gamma_0, \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ns}(v; x) = & \pm \frac{1}{2} v_s(x) k(s) \left[\lambda \left(1 - \frac{1}{\varkappa} \right) (1 \mp 1) + 2\mu \right. \\ & \left. + \mu \left(1 - \frac{1}{\varkappa} \pm \left(1 + \frac{1}{\varkappa} \right) \right) \right], \quad x \in \Gamma_0 \end{aligned} \quad (1.13)$$

($\varkappa = (\lambda + 3\mu)/(\lambda + \mu)$), причем, как и в [8], предельные условия (1.13) различаются в случаях внешнего (+) или внутреннего (−) положения контура Γ_0 . Формальный асимптотический анализ, содержащий построение пограничных слоев около быстро осциллирующей границы Γ_N и асимптотических поправок в непосредственной близости от угловых точек P^k , приведен в § 2. Обоснованию асимптотики посвящен § 3 (в частности, там доказывается независимость от N константы в неравенстве Корна для области Ω_N).

В § 4 кратко обсуждаются оставшиеся три типа краевых условий: Дирихле (жестко заземленный край), Неймана (свободный край) и смешанные условия (на Γ_N фиксируются касательные смещения и нормальные напряжения). Как и следовало ожидать, в первых двух случаях после предельных переходов возникают соответственно условия Дирихле и Неймана на Γ_0 . Третьему случаю присущи те же аномалии, что и при условии (1.7) – в качестве предельных выступают условия типа упругой заделки.

Отметим напоследок, что соотношениям (1.8) в трехмерной задаче отвечают условия Неймана в задаче о продольной деформации пластины Ω_N , а условиям (1.9) – условия

$$v_\tau^N(x) = 0, \quad \sigma_{\nu\nu}(v^N; x) = 0, \quad x \in \Gamma_N. \quad (1.14)$$

Асимптотические свойства решений этих задач, обсуждаемые в § 4, показывают, что и для плоского напряженного состояния пластины характерны эффекты, обнаруженные в [15] для пластин Рейснера. Такая аналогия побуждает взять условия (1.14) в качестве основных и уделить им наибольшее внимание, однако механическая интерпретация условий (1.7) ясна (контакт без трения с абсолютно жестким профилем), а как реализовать практически условия (1.14), авторы не знают.

§ 2. Формальная асимптотика

1. Пограничный слой около Γ_0 . В качестве главного члена асимптотики решения v^N задачи (1.5)–(1.7) возьмем гладкую в $\bar{\Omega}$ функцию v , удовлетворяющую системе уравнений (1.1) и краевым условиям (1.2) на Γ_D . Краевые условия на Γ_D можно найти только после построения пограничного слоя около осциллирующей границы Γ_N (см. [20]–[24] и др.). Этот пограничный слой описывается при помощи быстрых переменных

$$\xi = (\xi_1, \xi_2), \quad \xi_1 = \varepsilon^{-1}s, \quad \xi_2 = \varepsilon^{-1}n, \quad (2.1)$$

и имеет вид

$$\varepsilon w(s, \xi) + \dots, \quad (2.2)$$

где $w = (w_s, w_n)$, а функции w_n, w_s , зависящие гладко от переменной, являются периодическими по ξ_1 (с единичным периодом) и экспоненциально затухают при $\xi_2 \rightarrow \infty$. Будем считать, что длина дуги s отмеряется от точки P^0 . Если формально положить $\varepsilon = 0$ ($N = \infty$) и учесть периодическую структуру границы Γ_N , то область изменения переменной ξ естественно назначить полуполосу $\Pi = (-1/2, 1/2) \times (0, +\infty)$, причем на ее боковых сторонах $\pi_{\pm}$ нужно поставить условие периодичности

$$\frac{\partial^k w}{\partial \xi_1^k} \left(s, -\frac{1}{2}, \xi_2 \right) = \frac{\partial^k w}{\partial \xi_1^k} \left(s, +\frac{1}{2}, \xi_2 \right), \quad \xi_2 > 0, \quad k = 0, 1. \quad (2.3)$$

Найдем систему уравнений для вектор-функции w . С этой целью запишем в $\Omega \cap U$ однородную (правая часть f компенсирована решением v) систему (1.1) при помощи координат (s, n) :

$$\begin{aligned} & \mu \left\{ \partial_n^2 u_n + (\partial_n u_n) K(n, s) \partial_n K^{-1}(n, s) + K(n, s) \partial_s (K(n, s) \partial_s u_n) \right. \\ & \quad + \partial_s (K^{-1}(n, s) u_s) \partial_n K^2(n, s) + u_n \partial_n (K(n, s) \partial_n K^{-1}(n, s)) \\ & \quad + K^{-1}(n, s) u_s \partial_n (K(n, s) \partial_s K(n, s)) \left. \right\} \\ & \quad + (\lambda + \mu) \partial_n \{ K(n, s) \partial_n (K^{-1}(n, s) u_n) + K(n, s) \partial_s u_s \} = 0, \\ & \mu \left\{ \partial_n (K(n, s) \partial_n (K^{-1}(n, s) u_s)) + \partial_s (K^3(n, s) \partial_s (K^{-1}(n, s) u_s)) \right. \\ & \quad + K(n, s) u_n \partial_s (K(n, s) \partial_n K^{-1}(n, s)) - K^{-1}(n, s) (\partial_s u_n) \partial_n K^2(n, s) \\ & \quad + u_s \partial_s (K(n, s) \partial_s K(n, s)) \left. \right\} \\ & \quad + (\lambda + \mu) K(n, s) \partial_s \{ K(n, s) \partial_n (K^{-1}(n, s) u_n) + K(n, s) \partial_s u_s \} = 0. \quad (2.4) \end{aligned}$$

Здесь $K(n, s) = (1 + n\kappa(s))^{-1}$, $\kappa(s)$ – кривизна (положительная в том случае, когда Γ_0 – внешний контур, и отрицательная, если он внутренний), $\partial_s = \partial/\partial s$, $\partial_n = \partial/\partial n$, v_n и v_s определены в (1.4).

Переходя к быстрым переменным (2.2), выделяем главную часть $\varepsilon^{-2} L(\nabla_{\xi})$ оператора системы (2.4). Таким образом, главный член пограничного слоя обязан удовлетворять уравнению

$$-L(\nabla_{\xi})w(s, \xi) = 0, \quad \xi \in \Pi. \quad (2.5)$$

Подчеркнем, что здесь компонента w_s объявляется первой, а w_n – второй; может быть, несколько вольно, пишем $w_1 = w_s$, $w_2 = w_n$, т.е. интерпретируем криволинейные координаты (s, n) как декартовы.

Осталось найти краевое условие для w на торце $\pi_0 = \{\xi : \xi_2 = 0, |\xi_1| < 1/2\}$ полуполосы. Прежде всего отметим, что краевое условие (1.12) очевидно (см. также пояснение в замечании 2.1). Поэтому, раскладывая функции в ряд Тейлора по переменной n , получаем

$$\begin{aligned} v_n(s, n) &= nV_n^1(s) + O(n^2), \\ v_s(s, n) &= V_s^0(s) + nV_s^1(s) + O(n^2), \\ \sigma_{ns}(v; s, n) &= \Sigma_{ns}^0(s) + O(n). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Вычислим теперь главные части невязок, оставляемые v в краевых условиях (1.7).

Каждая из вершин ломаной Γ_N попадает в центр $\xi = 0$ торца π_0 . Выберем одну из вершин, для определенности P^0 . Уравнения двух звеньев $\gamma^\pm$ ломаной, исходящих из P^0 , имеют вид

$$n = \frac{1}{\mathbb{k}} - \frac{1}{\mathbb{k}} \frac{\cos[\mathbb{k}/(2N)]}{\cos[\mathbb{k}(|s| - 1/(2N))]}, \quad \mathbb{k} = \mathbb{k}(0). \quad (2.7)$$

В координатах (ξ_1, ξ_2) уравнение границы $\gamma^\pm$ записывается следующим образом:

$$\xi_2 = -\varepsilon \mathbb{k} \frac{1}{2} \left[\left(|\xi_1| - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \right] + O(\varepsilon^2).$$

Кроме того, компоненты $\nu_n^\pm$ и $\nu_s^\pm$ вектора нормали к $\gamma^\pm$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \nu_n^\pm(\xi) &= 1 + O(\varepsilon^2), \\ \nu_s^\pm(\xi) &= \varepsilon \mathbb{k}(\xi_1 \mp 1/2) + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Согласно первым двум формулам в (2.6), а также представлениям (2.7) и (2.8) получаем, что на $\gamma^\pm$

$$\begin{aligned} v_{\nu^\pm}(s, n) &= v_n(s, n) \nu_n^\pm(\xi) + v_s(s, n) \nu_s^\pm(\xi) = [\varepsilon \xi_2 V_n^1 + O(\varepsilon^2 \xi_2^2)] [1 + O(\varepsilon^2)] \\ &\quad + [V_s^0 + O(\varepsilon \xi_2)] [\varepsilon \mathbb{k}(\xi_1 \mp 1/2) + O(\varepsilon^2)] \\ &= \varepsilon \mathbb{k} \left\{ V_s^0 \left(\xi_1 \mp \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \left[\left(|\xi_1| - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \right] V_n^1 \right\} + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Кроме того, в силу (2.6), (2.8) и (1.4)

$$\sigma_{\nu\tau}(v; x) = \Sigma_{ns}^0 + O(\varepsilon). \quad (2.10)$$

Пограничный слой εw из (2.2) должен компенсировать члены $O(\varepsilon)$ и $O(1)$ соответственно в (2.9) и в (2.10), т.е. краевые условия на торце π_0 полуполосы выглядят так:

$$\begin{aligned} w_2(s, \xi_1, 0) &= -\mathbb{k}(s) \left\{ V_s^0(s) \left(\xi_1 - \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\xi_1) \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} V_n^1(s) \left[\left(|\xi_1| - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\mu \left(\frac{\partial w_2}{\partial \xi_1}(s, \xi_1, 0) + \frac{\partial w_1}{\partial \xi_2}(s, \xi_1, 0) \right) = -\Sigma_{ns}^0(s), \quad |\xi_1| < \frac{1}{2}. \quad (2.12)$$

Заметим, что правая часть условия (2.11) обладает разрывом первого рода в точке $\xi_1 = 0$. Задача (2.5), (2.3), (2.11), (2.12) имеет ограниченное решение, однако из-за особенностей $O(|\xi|^{-1})$ производных в точке $\xi = 0$ это решение не попадает в $W_{2,\text{loc}}^1(\Pi)$. Более того, как будет показано далее, в формировании пограничного слоя участвуют иррегулярные решения

$$w(s, \xi) = O(\ln |\xi|), \quad |\xi| \rightarrow 0. \quad (2.13)$$

Условие (2.13) уже не гарантирует единственность решения. С целью его уточнения в следующем разделе изучается поведение v^N вблизи угловых точек границы Γ_N .

2. Специальное решение в угловой области. Пусть (r, φ) – полярные координаты на плоскости, $\xi_1 = -r \sin \varphi$, $\xi_2 = r \cos \varphi$ и $K = \{x : r > 0, |\varphi| < \alpha\}$ – угол с вершиной 0; считаем, что его полураствор α мало отличается от $\pi/2$. Далее рассматриваются случаи $\alpha = \pi/2$ (полуплоскость) и

$$\alpha = \mp \delta + \pi/2; \quad (2.14)$$

здесь δ – малый положительный параметр. Согласно (2.8) полураствор α_j угла с вершиной $P^j \in \Gamma_N$ удовлетворяет соотношению

$$\alpha_j = \frac{\pi}{2} - \varepsilon \mathbb{k}(P^j) + O(\varepsilon^2). \quad (2.15)$$

При этом если Γ_N – внешний контур, то $\mathbb{k}(P^j) > 0$ и, значит, в (2.14) берется знак “–”. В случае внутреннего контура Γ_N в (2.14) выбирается “+”, так как $\mathbb{k}(P^j) < 0$.

Подчеркнем, что на протяжении всего параграфа приходится различать эти два случая – им отвечают разные предельные краевые условия на Γ_0 .

В соответствии с общими результатами [25] (см. также [26], [27]) для описания поведения v^N около P^j необходимо перечислить степенные решения

$$r^\Lambda \Phi(\varphi, \ln r) \quad (2.16)$$

однородной системы Ламе в K с краевыми условиями (1.3) на ∂K (в (2.16) Φ – полином переменной $\ln r$; ср. с (2.21)). Нас интересуют главные члены разложения v^N , и потому мы указываем только такие решения, которые имеют малый показатель Λ :

$$r^{-1+\pi/(2\alpha)} \Phi^+(\varphi), \quad r^{1-\pi/(2\alpha)} \Phi^-(\varphi). \quad (2.17)$$

Угловые части $\Phi^\pm$ задаются формулами

$$\begin{aligned} \Phi_r^+(\varphi) &= \sin \frac{\pi\varphi}{2\alpha}, & \Phi_\varphi^+(\varphi) &= \cos \frac{\pi\varphi}{2\alpha}; \\ \Phi_r^-(\varphi) &= \left(\varkappa - 1 + \frac{\pi}{2\alpha}\right) \sin \frac{\pi\varphi}{2\alpha}, & \Phi_\varphi^-(\varphi) &= \left(\varkappa + 1 - \frac{\pi}{2\alpha}\right) \cos \frac{\pi\varphi}{2\alpha} \end{aligned}$$

(ср. с [28, §3.8]). Здесь $\varkappa = (\lambda + 3\mu)(\lambda + \mu)^{-1}$, Φ_r и Φ_φ – полярные компоненты,

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \Phi_r \sin \varphi + \Phi_\varphi \cos \varphi, & \Phi_2 &= \Phi_r \cos \varphi - \Phi_\varphi \sin \varphi; \\ \Phi_r &= \Phi_1 \sin \varphi + \Phi_2 \cos \varphi, & \Phi_\varphi &= \Phi_1 \cos \varphi - \Phi_2 \sin \varphi. \end{aligned}$$

Поскольку решение v^N принадлежит $W_2^1(\Omega_N)$, то его разложение может содержать только тот из векторов (2.17), у которого показатель степени положителен. Таким образом, в случае $\alpha < \pi/2$ выбираем $r^{-1+\pi/(2\alpha)} \Phi^+(\varphi)$, а в случае $\alpha > \pi/2$ выбираем $r^{1-\pi/(2\alpha)} \Phi^-(\varphi)$.

Наконец, для $\alpha = \pi/2$ имеются такие решения:

$$r^0 \Phi^0(\varphi), \quad r^0 \Phi^1(\varphi, \ln r); \quad (2.18)$$

здесь

$$\begin{aligned}\Phi_r^0(\varphi) &= \sin \varphi, & \Phi_\varphi^0(\varphi) &= \cos \varphi; \\ \Phi_r^1(\varphi, \ln r) &= [\ln r - (2\kappa)^{-1}] \sin \varphi, & \Phi_\varphi^1(\varphi, \ln r) &= [\ln r + (2\kappa)^{-1}] \cos \varphi.\end{aligned}$$

Подчеркнем, что первый вектор в (2.18) является жестким поступательным смещением вдоль границы полуплоскости, а второй отвечает силе, сосредоточенной в начале координат и направленной вдоль луча $\varphi = \pi/2$.

В соответствии с (2.14) величины (2.17) зависят от малого параметра δ . Применим формулу Тейлора (по переменной δ):

$$\begin{aligned}r^{\mp 1 \pm \pi/(2\alpha)} \Phi^\pm(\varphi) &= \exp[\mp(1 - \pi/(2\alpha)) \ln r] \Phi^\pm(\varphi) \\ &= \Phi^0(\varphi) + 2\delta\pi^{-1} \Phi^1(\varphi, \ln r) \mp 2\delta\pi^{-1} \Psi(\varphi) + O(\delta^2 |\ln r|^2).\end{aligned}\tag{2.19}$$

При этом

$$\Psi_r(\varphi) = -\varphi \cos \varphi - (2\kappa)^{-1} \sin \varphi, \quad \Psi_\varphi(\varphi) = \varphi \sin \varphi + (2\kappa)^{-1} \cos \varphi.$$

Первые два слагаемые справа уже возникали в (2.18). Вектор Ψ удовлетворяет системе Ламе в полуплоскости, причем на ее границе напряжения $\sigma_{21}(\Psi)$ аннулируются и верны условия

$$\Psi_2(\pm\pi/2) = \mp \Psi_\varphi(\pm\pi/2) = \mp \pi/2.\tag{2.20}$$

Таким образом, за счет Ψ можно компенсировать скачок краевых условий в (2.11).

3. Асимптотические условия для w . Рассуждения в этом пункте формальны (они будут обоснованы в §3), и все остатки в асимптотических формулах обозначаются многоточием.

Обращаясь к результатам [25] (см. также [27, §6.6]), замечаем, что согласно выкладкам из п. 2 вблизи каждой из вершин P^j ломаной Γ_N для решения v^N выполняется представление

$$v^N(x) = K_j(\varepsilon) r_j^{\mp 1 \pm \pi/(2\alpha_j)} \Phi^\pm(\varphi_j) + \dots$$

В (2.19) (r_j, φ_j) – полярные координаты с центром P^j , $|\varphi_j| < \alpha_j$, а $K_j(\varepsilon)$ – некоторый коэффициент, определяемый данными задачи в целом. Предполагая зависимость K_j от ε гладкой и обращаясь к (2.19), (2.15) и (2.16), выводим

$$\begin{aligned}v^N(x) &= K_j(0) \Phi^0(\varphi_j) \\ &+ \varepsilon \{ \pi^{-1} K_j(0) \mathbb{k}(P^j) [\pm \Phi^1(\varphi_j, \ln r_j) - \Psi(\varphi_j)] + \partial_\varepsilon K_j(0) \Phi^0(\varphi_j) \} + \dots\end{aligned}\tag{2.21}$$

Асимптотика решения $v^N(x)$ ищется в виде суммы $v(x) + \varepsilon w(s, \xi)$. Согласно (2.6)

$$v(x) + \varepsilon w(s, \xi) = V_s^0(P^j) \Phi^0(\varphi_j) + \varepsilon \{ w(P^j, \xi) + \xi_2 V_s^1(s) \} + \dots$$

Сравнивая (2.21) с последней формулой, видим, что, во-первых,

$$K_j(0) = V_s^0(P^j)\tag{2.22}$$

и, во-вторых,

$$w(s, \xi) = \pi^{-1} V_s^0(P^j) \mathbb{k}(P^j) [\pm \Phi^1(\varphi_j, \ln r_j) - \Psi(\varphi_j)] + \partial_\varepsilon K_j(0) \Phi^0(\varphi_j) + \dots \quad (2.23)$$

Итак, условие (2.13) расшифровывается следующим образом:

$$w(s, \xi) = \pi^{-1} V_s^0(s) \mathbb{k}(s) [\pm \Phi^1(\varphi, \ln r) - \Psi(\varphi)] + C(s) \Phi^0(\varphi) + O(r |\ln r|), \quad r = |\xi| \rightarrow 0. \quad (2.24)$$

Отметим, что слагаемое $\xi_2 V_s^1(s) = O(r)$ не принималось во внимание и что связь $C(s)$ с $K_j(\varepsilon)$ далее не понадобится. Кроме того, в силу (2.18) член асимптотики, введенный в (2.24), учитывает скачок в краевом условии (2.11). Наконец, вид остатка в (2.24) согласован с полным асимптотическим разложением решения w , вытекающим из результатов [25].

4. Условие затухания пограничного слоя. Основным свойством пограничного слоя является его исчезновение на бесконечности с экспоненциальной скоростью. Решение задачи (2.5), (2.3), (2.11), (2.12) обладает этим свойством лишь при дополнительном условии, связывающем коэффициенты разложений (2.6). Именно благодаря этой связи появляется второе предельное краевое условие (1.13).

ТЕОРЕМА 2.1. *Решение задачи (2.5), (2.3), (2.11), (2.12), дополненной требованием не более чем степенного роста при $\xi_2 \rightarrow +\infty$, определено с точностью до слагаемого $c_1 e^1 + c_2 \xi_2 e^2$ (где e^i — орт оси ξ_i , c_i — произвольные константы); оно бесконечно дифференцируемо всюду в $\bar{\Pi}$, за исключением точки $\xi = 0$, и допускает разложение*

$$w(s, \xi) = c_1 e^1 + c_2 \xi_2 e^2 + a_1 \xi_2 e^1 + a_2 e^2 + O(\exp(-\rho \xi_2)), \quad \xi_2 \rightarrow +\infty, \quad (2.25)$$

где ρ — некоторое положительное число. Формулу (2.25) можно дифференцировать с сохранением остатка. Коэффициенты a_i определены равенствами

$$a_1 = -\frac{1}{\mu} \Sigma_{ns}^0(s) \pm \frac{\mathbb{k}(s)}{2\mu} V_s^0(s) \left\{ \lambda \left(1 - \frac{1}{\varkappa} \right) (1 \mp 1) + 2\mu + \mu \left[1 - \frac{1}{\varkappa} \pm \left(1 + \frac{1}{\varkappa} \right) \right] \right\}, \quad (2.26)$$

$$a_2 = -\frac{\mathbb{k}(s)}{12} V_n^1(s). \quad (2.27)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обратим внимание на два факта. Во-первых, периодическое продолжение правой части $f(\xi_1)$ краевого условия (2.11) является бесконечно дифференцируемым в точках $\xi_1 = \pm 1/2$. Во-вторых, f отличается от функции класса $C^2[-1/2, 1/2]$ слагаемым

$$\frac{1}{2} \mathbb{k}(s) \{ \operatorname{sgn}(\xi_1) V_s^0(s) - |\xi| V_n^1(s) \}.$$

Скачок в точке $\xi = 0$ учитывается построенной ранее вектор-функцией Ψ . При помощи общей процедуры (см. [25]–[27]) можно найти решение $r\psi(\varphi, \ln r)$, обладающее теми же свойствами, что и Ψ , но компенсирующее скачок производной $\partial f / \partial \xi_1$, т.е. удовлетворяющее соотношению

$$r\psi_2(\pm\pi/2, \ln r) = \pi r/2$$

вместо (2.20). Подчеркнем, что $\frac{\partial}{\partial \xi_1} [r\psi(\varphi, \ln r)] = \Psi(\varphi)$.

Теперь решение w ищем в виде

$$w(\xi) = w^0(\xi) + \chi(r)\pi^{-1}\mathbb{k}(s)[V_s^0(s)(\pm\Phi^1(\varphi, \ln r) - \Psi(\varphi)) - V_n^1(s)r\psi(\varphi, \ln r)], \quad (2.28)$$

где $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ – срезающая функция, $\chi(t) = 0$ при $|t| > 1/3$ и $\chi(t) = 1$ при $|t| < 1/6$. Заметим, что периодическая вектор-функция w^0 удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} L(\nabla_\xi)w^0(\xi) &= F(\xi), \quad \xi \in \Pi, \\ \mu \left(\frac{\partial w_1^0}{\partial \xi_2}(\xi_1, 0) + \frac{\partial w_2^0}{\partial \xi_1}(\xi_1, 0) \right) &= G_2(\xi_1), \\ w_2^0(\xi_1, 0) &= G_1(\xi_1), \quad \xi \in \pi_0, \end{aligned} \quad (2.29)$$

в которых $G_2 \in C^\infty[-1/2, 1/2]$, $G_1 \in C[-1/2, 1/2]$, $F \in C_0^\infty(\bar{\Pi})$, причем периодическое продолжение сохраняет класс гладкости. Таким образом, можно воспользоваться теоремами 5.1.4 (1,3), 5.4.11 из [27], утверждающими, что задача (2.29) имеет решение в классе функций, растущих на бесконечности не более чем степенным образом. (Ссылку на результаты [27] можно заменить исследованием разрешимости задачи (2.29) в классе вектор-функций с конечным интегралом упругой энергии; ср. с [31], [32].) По теореме о локальном повышении гладкости решений эллиптических задач [31], [32] заключаем, что w^0 (а значит, и w) бесконечно дифференцируемо всюду в $\bar{\Pi}$, кроме точки $\xi = 0$. Помимо этого, согласно теоремам 5.1.4 (2), 5.4.2 из [27] справедливо асимптотическое представление (2.24) с некоторыми константами a_i , c_i (нетрудно проверить, что существуют только четыре линейно независимых полиномиальных решения однородной системы Ламе в полосе, подчиненных условиям периодичности (2.3) – все они указаны в (2.25)).

Непосредственно проверяется, что $c_1 e^1$ и $c_2 \xi_2 e^2$ удовлетворяют однородной задаче (2.5), (2.3), (2.11), (2.12); согласно результатам [27, § 5.4] линейными комбинациями этих векторов исчерпывается произвол в выборе w^0 (и w).

Осталось вычислить множители a_i в (2.25). С этой целью воспользуемся методом [26]. Удалим из длинного прямоугольника $\Pi_t = (-1/2, 1/2) \times (0, t)$ полукруг с центром $\xi = 0$ и малым радиусом d . В формулу Грина (тождество Бетти) для полученной области $\Pi_{t,d}$ подставим векторы w и e^1 . Двумерный интеграл исчезнет в силу уравнения (2.5). Интегралы по боковым сторонам сокращаются ввиду условия периодичности. Таким образом, выполняется равенство

$$\begin{aligned} 0 = I_1^{(t)} + I_2^{(0)} + I_3^{(d)} &\equiv \int_{-1/2}^{1/2} \sigma_{12}(w; \xi_1, t) d\xi_1 + \int_{(-1/2, -d) \cup (d, 1/2)} \sigma_{12}(w; \xi_1, 0) d\xi_1 \\ &+ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin \varphi \sigma_{rr}(w; r, \varphi) + \cos \varphi \sigma_{r\varphi}(w; r, \varphi)) r \Big|_{r=d} d\varphi, \end{aligned} \quad (2.30)$$

где $\sigma_{rr}(w)$ и $\sigma_{r\varphi}(w)$ – полярные компоненты тензора напряжений (см., например, [28, с. 313]).

Для вычисления интегралов $I_1^{(t)}$ и $I_3^{(d)}$ по верхнему основанию $\Pi_{t,d}$ и по границе полукруга применяем асимптотические формулы (2.25) и (2.28) соответственно.

Интеграл по нижнему основанию находим, используя краевое условие (2.12). Произведем необходимые выкладки и получим

$$\begin{aligned} I_1^{(t)} &= \mu a_1 + O(\exp(-\rho t)), \quad t \rightarrow +\infty, \\ I_2^{(0)} &= -\Sigma_{ns}^0(s) + o(1), \\ I_3^{(d)} &= \frac{1}{2} \left[\lambda \left(1 - \frac{1}{\varkappa} \right) (1 \mp 1) + 2\mu \right. \\ &\quad \left. + \mu \left(1 - \frac{1}{\varkappa} \pm \left(1 + \frac{1}{\varkappa} \right) \right) \right] V_s^{(0)}(s) \mathbb{k}(s) + o(1), \quad d \rightarrow +0. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Выполняя предельные переходы $t \rightarrow +\infty$ и $d \rightarrow +0$, выводим из (2.30) и (2.31) искомое равенство (2.26). Наконец, выражение (2.27) для a_2 получается аналогично, если в формулу Грина подставить w и $\xi_2 e^2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Перед формулой (2.6) мы постулировали условие $v_n = 0$ на Γ_0 . Теорема 2.1 позволяет подтвердить это предположение. В самом деле, заменив величину (2.2) суммой $w^0(s, \xi) + \varepsilon w^1(s, \xi) + \dots$, получим для нового главного члена w^0 пограничного слоя однородные уравнения (2.5), (2.3), (2.12) и краевое условие

$$w_n^0(s, \xi_1, 0) = -v_n(s, 0), \quad |\xi_1| < 1/2.$$

Решением полученной задачи служит вектор $v_n(s, 0)e^2$, который убывает на бесконечности только при выполнении названного краевого условия на Γ_0 .

Нетрудно видеть, что в силу (2.26) и (2.6) предельные краевые условия (1.13;+) или (1.13;-) обеспечивают равенство нулю коэффициента a_1 в разложении (2.25). Так как константы c_1 и c_2 можно взять произвольными (пусть они нулевые), то теорема 2.1 доставляет ограниченное на бесконечности решение w , допускающее представление

$$w(s, \xi) = a_2(s)e^2 + O(\exp(-\rho\xi_2)), \quad (2.32)$$

где a_2 – величина (2.27).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. После постановки условий (1.13;+) или (1.13;-) и выбора констант c_1, c_2 в (2.24) равными нулю мы получили решение w , допускающее разложение (2.24), в котором величина $C(s)$ фиксирована.

Нам не удалось соблюсти условие экспоненциального затухания пограничного слоя (2.2). Причина состоит в том, что был рассмотрен лишь главный член решения гладкого типа: если вместо v взять сумму $v + \varepsilon v^1$, то в правой части (2.11) появится дополнительное слагаемое $v_n^1(s, 0)$, позволяющее уничтожить a_2 за счет выбора значений $v_n^1(s, 0)$ на Γ_0 (ср. с замечанием 2.2). Подчеркнем, что член $a_2 e^2$ не мешает нам в следующем параграфе оценить разность $v - v^N$.

§ 3. Обоснование асимптотики

1. Глобальное асимптотическое приближение. В § 2 построены асимптотические приближения к решению v^N в разных зонах. “Склеим” их в глобальное приближение, пригодное всюду в Ω_N .

Пусть χ – срезающая функция, введенная после формулы (2.28). Выберем число $\rho > 0$ настолько малым, что функция χ_ρ , определенная равенством $\chi_\rho(x) = \chi(\rho^{-1}x)$, обращается в нуль около границы окрестности $\mathcal{U}$, где введены координаты (s, n) . Положим еще

$$\chi^j(\varepsilon, x) = \chi(\varepsilon^{-2}|x - P^j|), \quad X(\varepsilon, x) = 1 - \sum_{j=1}^N \chi^j(\varepsilon, x). \quad (3.1)$$

Срезка χ_ρ используется для локализации пограничного слоя, а разбиение единицы (3.1) применяется для сращивания со степенными решениями

$$K_j(\varepsilon) r_j^{\mp 1 \pm \pi / (2\alpha_j)} \Phi^\pm(\varphi_j) \quad (3.2)$$

около угловых точек P^j .

В качестве глобального приближения возьмем вектор-функцию

$$\begin{aligned} U^N(x) = X(\varepsilon, x) \{ v(x) + \varepsilon \chi_\rho(x) w(s, \varepsilon^{-1}s, \varepsilon^{-1}n) \} \\ + \sum_{j=1}^N \chi^j(\varepsilon, x) [v_s(P^j) + \varepsilon C(P^j)] r_j^{\mp 1 \pm \pi / (2\alpha_j)} \Phi^\pm(\varphi_j). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь v и w – решения задач (1.10)–(1.13) и (2.5), (2.3), (2.11), (2.12). В сумме по $j = 1, \dots, N$ коэффициенты $K_j(\varepsilon)$ из (3.2) заменяем выражением $V_s^0(P^j) + \varepsilon C(P^j)$, действуя в соответствии с формулами (2.22)–(2.24) (см. также замечание 2.3). Для того чтобы вектор-функция U^N была определена всюду в Ω_N , необходимо в случае вогнутого контура продолжить v с Ω и w с Π на более широкие множества. Возможность продолжения решения v на $\Omega \cap \mathcal{U}$ через гладкую границу с сохранением дифференциальных свойств сомнений не вызывает. Благодаря геометрической структуре области Ω_N решение w достаточно распространить на “угловую окрестность” точки 0. Поэтому в (3.3) фигурирует такое продолжение w с полуполосы Π на полосу $\{\xi : |\xi_1| < 1/2\}$ с разрезом $\{\xi : \xi_1 = 0, \xi_2 \leq 0\}$, что, во-первых, остается справедливым асимптотическое представление (2.24) и, во-вторых, вне любой окрестности точки $\xi = 0$ сохраняется гладкость.

Для обоснования асимптотики мы собираемся подставить U^N в краевую задачу (1.5)–(1.7), вычислить возникающие в ней невязки, а затем оценить норму разности $v^N - U^N$ в “энергетическом” пространстве при помощи вариантов неравенств Корна и Харди. В промежуточных выкладках нам понадобятся весовые классы Кондратьева. Упомянутые неравенства и весовые классы составляют предмет следующих двух, вспомогательных, пунктов.

2. Неравенства Корна и Харди. Известно (см. [33]–[35]), что для любой вектор-функции v , подчиненной условию (1.2), выполняется соотношение

$$\mathcal{E}(v; \Omega_N) \geq c(\Omega_N) \|v; W_2^1(\Omega_N)\|^2, \quad (3.4)$$

где левая часть – функционал упругой энергии

$$\mathcal{E}(v; \Xi) = \frac{1}{2} \int_{\Xi} \sum_{i,j=1}^2 \sigma_{ij}(v) \varepsilon_{ij}(v) dx \geq \mu \int_{\Xi} \sum_{i,j=1}^2 \varepsilon_{ij}(v)^2 dx, \quad (3.5)$$

а множитель $c(\Omega_N)$ в правой части зависит от области Ω_N , но не от v . Ближайшая цель – проверить, что величину $c(\Omega_N)$ в (3.4) можно считать не зависящей от параметра N .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *При любом N справедливо неравенство $c(\Omega_N) > c$, где c – положительная постоянная, обусловленная только формой контуров Γ_0 и Γ_D .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала применим неравенство Корна

$$\mathcal{E}(v; \Omega \setminus \mathcal{U}_1) \geq c(\Omega \setminus \mathcal{U}_1) \|v; W_2^1(\Omega \setminus \mathcal{U}_1)\|^2 \quad (3.6)$$

в области $\Omega \setminus \mathcal{U}_1$, где $\mathcal{U}_1$ – (фиксированная) окрестность контура Γ_0 , причем $\overline{\mathcal{U}_1} \subset \mathcal{U}$ и $\mathcal{U}_1 \supset \Gamma_N$ при $N > N_0$ (отметим, что отсутствие вычитаемого $\text{const} \|v; L_2(\Omega \setminus \mathcal{U}_1)\|$ в (3.6) обусловлено соотношениями (1.2)). Множитель $c(\Omega \setminus \mathcal{U}_1)$, разумеется, не зависит от N . Осталось исследовать пограничную полосу $\Omega_N \cap \mathcal{U}_1$.

Пусть Γ_0 – внутренний контур. Разобьем его точками $P_0^1, \dots, P_0^{2N_0}$ на $2N_0$ дуг равной длины. Выбирая N_0 большим, добиваемся, чтобы угол $\beta^{i,i+2}$ между внутренними нормальными к Γ_0 в точках P_0^i и P_0^{i+2} удовлетворял условию

$$0 < \beta^{i,i+2} < \frac{\pi}{2} - \delta, \quad (3.7)$$

где δ – положительное число.

Из точек P_0^i и P_0^{i+2} проведем лучи вдоль внутренних нормалей, а также касательные к контуру. Так как область, ограниченная Γ_0 , является выпуклой и $\beta^{i,i+2} < \pi/2$, то луч, проведенный по внутренней нормали в точке P_0^i , и касательная в точке P_0^{i+2} пересекаются (то же самое верно по отношению к P_0^{i+2} и P_0^i соответственно).

Фиксируем какой-либо номер i и не будем писать для краткости индексы $i, i+2$ у всех объектов, кроме точек P_0^i и P_0^{i+2} . Построим угол с вершиной P_0^i и раствором α : $\beta < \alpha < \pi/2$; одна из сторон угла совпадает с лучом, направленным вдоль внутренней нормали, а другая пересекает луч, проведенный из P_0^{i+2} по нормали. Выполним аналогичные построения для точки P_0^{i+2} . Продолжим нормали к Γ_0 в точках P_0^i и P_0^{i+2} за границу области и обозначим точку их пересечения O . Выберем из точек P_0^i и P_0^{i+2} ту, для которой расстояние до O максимально. Впишем в угол с этой вершиной и угол с вершиной O , образованный нормальными, круг B_α . Поскольку углы имеют общую сторону, это можно сделать. По построению область D_α , ограниченная кругом B_α , дугой Γ_0 и нормальными в точках P_0^i и P_0^{i+2} , является

звездной относительно круга B_α . Подчеркнем, что любая область D_α^m , ограниченная построенными прямыми, кругом B_α и произвольной ломаной m , имеющей концы P_0^i и P_0^{i+2} , также является звездной относительно круга B_α . Ясно, что при уменьшении угла α круг B_α удаляется от Γ_0 , и можно поместить его вовне окрестности $\mathcal{U}_1$.

Вспомогательные построения окончены, и мы, ссылаясь на результаты [28], [29], вправе заключить, что справедлив такой вариант неравенства Корна:

$$\|v; W_2^1(D_\alpha^m)\|^2 \leq c_1 \mathcal{E}(v; D_\alpha^m) + c_2 \|v; W_2^1(B_\alpha)\|^2. \quad (3.8)$$

Подчеркнем, что c_1 и c_2 не зависят от m .

Пусть теперь Γ_M – произвольная, вписанная в Γ_0 ломаная, причем множество ее вершин $P^1, \dots, P^M \supset P^1, \dots, P^{2N_0}$. Ввиду конечности покрытия окрестности $\mathcal{U}_1 \cap \Omega_{N_0}$ множествами D_α (перебираются все пары точек P_0^i и P_0^{i+2}) неравенство (3.8) переносится на множество $\mathcal{U}_\tau$, полученное удалением из $\mathcal{U}_1$ точек, лежащих внутри Γ_M , т.е. при учете (3.6) оказывается верным соотношение

$$\|v; W_2^1(\mathcal{U}_\tau)\|^2 \leq c \{ \mathcal{E}(v; \mathcal{U}_\tau) + \mathcal{E}(v; \Omega \setminus \mathcal{U}_1) \}. \quad (3.9)$$

Обратимся теперь к области Ω_N . Ясно, что при достаточно большом N можно выбирать точки $P_0^1, \dots, P_0^{2N_0}$ среди вершин ломаной Γ_N . Это обстоятельство заканчивает доказательство для случая многоугольного отверстия. Если же Γ_0 – внешний контур, то все рассуждения только упрощаются.

Следующее утверждение является следствием неравенства (3.4) и вложения $W_2^1(\Omega_N)$ в $L_2(\Gamma_N)$ (независимость постоянной от N вытекает, например, из самого способа доказательства теоремы 1.6.6 из [38]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *Для любой $v \in W_2^1(\Omega_N)$, удовлетворяющей (1.2), справедливо неравенство*

$$\mathcal{E}(v; \Omega_N) \geq c \|v; L_2(\Gamma_N)\|^2, \quad (3.10)$$

где постоянная c не зависит от v и N .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. *Для любой $v \in W_2^1(\Omega_N)$, удовлетворяющей (1.2), выполняется неравенство*

$$\mathcal{E}(v; \Omega_N) \geq c \|\mathcal{R}v; L_2(\Omega_N)\|^2, \quad (3.11)$$

где постоянная c не зависит от v и $N = 1/\varepsilon$, весовой множитель $\mathcal{R}$ равен 1 вне объединения окрестностей $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}_D$ контуров Γ_N и Γ_D ,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(x) &= \text{dist}(x, \Gamma_D)^{-1}, & x \in \mathcal{U}_D \cap \Omega; \\ \mathcal{R}(x) &= (n + d\varepsilon)^{-1/2} (1 + |\ln(n + d\varepsilon)|)^{-1}, & x \in \mathcal{U} \cap \Omega_N, \end{aligned}$$

причем число $d \geq 0$ выбрано так, чтобы $n + d\varepsilon > 0$ в $\Omega_N \cap \mathcal{U}$ при всех натуральных N (если контур Γ_0 внешний, то можно взять $d = 0$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку норма $\|v; L_2(\Omega_N)\|$ уже оценена (предложение 3.2), то умножением на подходящие срезающие функции дело сводится к следующим двум ситуациям: $\text{supp } v \subset \mathcal{U}_D$ или $\text{supp } v \subset \mathcal{U}$. В первом случае проверка (3.11) достигается интегрированием вдоль границы известного одномерного неравенства Харди:

$$4 \int_0^d \left| \frac{dV}{dn}(n) \right|^2 dn \geq \int_0^d n^{-2} V(n)^2 dn \quad \forall V \in C_0^\infty(0, d] \quad (3.12)$$

(разумеется, сначала нужно предположить, что $v_1, v_2 \in C_0^\infty(\mathcal{U}_D \cap \Omega_N)$, а затем замкнуть полученную оценку по норме пространства $W_2^1(\mathcal{U}_D \cap \Omega_N)$).

Рассмотрим второй случай (отметим, что в задаче (1.5)–(1.7) не все компоненты решения v_D обращаются в нуль, т.е. применить (3.12) не удастся). Установим вспомогательное одномерное неравенство, играющее роль (3.12). Пусть $V \in C_0^\infty[0, d]$ (теперь функция в точке $n = d$ аннулируется; здесь уместно вспомнить про умножение v на срезку). Имеем

$$V(t)^2 = -2 \int_t^d V(\tau) \frac{dV}{d\tau}(\tau) d\tau.$$

Умножим обе части равенства на $(t + \alpha)^{-1} |\ln(t + \alpha)|^{-2}$, где $\alpha > 0$ – малое число, и проинтегрируем его по $t \in (0, d)$. Переставляя пределы интегрирования в повторном интеграле, получаем

$$\begin{aligned} & \int_0^d (t + \alpha)^{-1} |\ln(t + \alpha)|^{-2} V(t)^2 dt \\ & \leq 2 \int_0^d \int_t^d (t + \alpha)^{-1} |\ln(t + \alpha)|^{-2} \left| V(\tau) \frac{dV}{d\tau}(\tau) \right| dt d\tau \\ & \leq 2 \int_0^d d\tau \left| V(\tau) \frac{dV}{d\tau}(\tau) \right| \int_0^\tau (t + \alpha)^{-1} |\ln(t + \alpha)|^{-2} dt \\ & = 2 \int_0^d \{ [\ln \alpha]^{-1} - [\ln(\tau + \alpha)]^{-1} \} \left| V(\tau) \frac{dV}{d\tau}(\tau) \right| d\tau. \end{aligned}$$

Выражение в фигурных скобках при $d + \alpha < 1$ не превосходит $|\ln(\tau + \alpha)|^{-1} \times (\tau + \alpha)^{-1/2}$. Значит,

$$\int_0^d (t + \alpha)^{-1} |\ln(t + \alpha)|^{-2} V(t)^2 dt \leq 2 \int_0^d (\tau + \alpha)^{-1/2} |\ln(\tau + \alpha)|^{-1} \left| V(\tau) \frac{dV}{d\tau}(\tau) \right| d\tau$$

и, разделив на корень из левой части, приходим к нужному неравенству

$$\int_0^d (t + \alpha)^{-1} |\ln(t + \alpha)|^{-2} V(t)^2 dt \leq 4 \int_0^d \left| \frac{dV}{dt}(t) \right|^2 dt. \quad (3.13)$$

Осталось повторить ту же процедуру, что и в случае (3.11); при этом следует учесть, что постоянная в (3.11) не зависит от малого $\alpha > 0$, и положить $t = n - \varepsilon d(s)$ и $\alpha = \varepsilon(d + d(s))$, где $n = \varepsilon d(s)$ – уравнение границы Γ_N , а $d > -d(s)$ при всех s .

3. Весовые пространства Кондратьева. В пп. 4 и 2 § 2 нам пришлось решать краевую задачу с правой частью, теряющей гладкость в одной из точек границы, и обсуждать поведение решений около угловых точек. Наиболее приспособленными для этих целей являются весовые классы, введенные В. А. Кондратьевым [25] (см. также [26], [27]); мы уклонились от их использования лишь для упрощения изложения построений (формальных!) в § 2 и сейчас восполним этот пробел.

Пусть Ξ – область с кусочно гладкой границей; выделенные на $\partial\Xi$ точки $O^1, \dots, O^J$, составляющие множество $\mathcal{O}$, разбивают контур $\partial\Xi$ на гладкие дуги, которые встречаются под ненулевыми углами (углы измеряются со стороны Ξ). Через $V_\beta^l(\Xi; \mathcal{O})$ обозначается пространство, полученное пополнением $C_0^\infty(\Xi \setminus \mathcal{O})$ по норме

$$\|w; V_\beta^l(\Xi; \mathcal{O})\| = \left(\sum_{k=0}^l \|\text{dist}(x, \mathcal{O})^{\beta-l+k} \nabla_x^k w; L_2(\Xi)\|^2 \right)^{1/2}, \quad (3.14)$$

в которой $l = 0, 1, \dots$; $\beta \in \mathbb{R}$ и $\nabla_x^k w$ – набор производных порядка k функций w . При $l \geq 1$ следовое пространство $V_\beta^{l-1/2}(\partial\Xi; \mathcal{O})$ снабжается нормой

$$\|v; V_\beta^{l-1/2}(\partial\Xi; \mathcal{O})\| = \inf \{ \|w; V_\beta^l(\Xi; \mathcal{O})\| \mid v = w \text{ на } \partial\Xi \setminus \mathcal{O} \}. \quad (3.15)$$

Для каждого элемента $v \in V_\beta^{l-1/2}(\partial\Xi; \mathcal{O})$, конечно же, имеется продолжение $w \in V_\beta^l(\Xi; \mathcal{O})$, подчиненное условию

$$\|w; V_\beta^l(\Xi; \mathcal{O})\| \leq 2 \|v; V_\beta^{l-1/2}(\partial\Xi; \mathcal{O})\|. \quad (3.16)$$

При оценке последней нормы удобно применять неравенство

$$\|v; V_\beta^{l-1/2}(\partial\Xi; \mathcal{O})\| \leq c \|v; V_{\beta+1/2}^l(\partial\Xi; \mathcal{O})\|, \quad (3.17)$$

причем норма в $V_\beta^l(\partial\Xi; \mathcal{O})$ получается простой заменой в (3.14) области Ξ ее границей $\partial\Xi$. (По поводу всех определений и сформулированных фактов см. [25] или [27].)

Приведем дополнительно теорему 3.4 о разрешимости задачи (2.5), (2.3), (2.11), (2.12) в весовых классах. Первая ее часть по существу уже использовалась при проверке утверждения 2.1 – в ней применяются пространства с экспоненциальными весовыми множителями, обслуживающими бесконечно удаленную точку (уместно заметить, что заменой $\xi_2 \mapsto \rho = \exp(-\xi_2)$ полуполоса $\Pi = \{\xi : \xi_2 > 0, |\xi_1| < 1/2\}$ переводится в сектор, а соответствующий весовой класс становится кондратьевским). Во второй части точка $\xi = 0$ рассматривается как угловая, и потому в нормах функциональных пространств возникают те же весовые множители, что и в (3.14). Доказательство теоремы получается прямыми ссылками на общие результаты [27, утверждения 5.1.4, 5.4.12, 6.1.7, 5.4.4].

Укажем список нужных функциональных пространств: $\mathcal{W}_\gamma^l(\Pi; \infty)$ – пополнение линейала $\mathcal{C}_0^\infty(\bar{\Pi})$ функций из $C_0^\infty(\bar{\Pi})$, подчиненных условиям периодичности на боковых сторонах $\pi_\pm$ полуполосы Π , по норме

$$\|w; \mathcal{W}_\gamma^l(\Pi; \infty)\| = \left(\sum_{k=0}^l \|\exp(\gamma \xi_2) \nabla_\xi^k w; L_2(\Pi)\|^2 \right)^{1/2};$$

$\mathcal{V}_{\gamma,\beta}^l(\Pi; \infty, 0)$ – пополнение $\mathcal{C}_0^\infty(\bar{\Pi})$ по норме

$$\|w; \mathcal{V}_{\gamma,\beta}^l(\Pi; \infty, 0)\| = \left(\sum_{k=0}^l \left\| \min\{1, |\xi|\}^{\beta-l+k} \exp(\gamma \xi_2) \nabla_\xi^k w; L_2(\Pi) \right\|^2 \right)^{1/2};$$

$\mathcal{V}_{\gamma,\beta}^{l+1,1}(\Pi; \infty, 0)$ имеет следующую норму:

$$\left(\|w; \mathcal{V}_{\gamma,\beta-l}^0(\Pi; \infty, 0)\|^2 + \|\nabla_\xi w; \mathcal{V}_{\gamma,\beta}^l(\Pi; \infty, 0)\|^2 \right)^{1/2};$$

соответствующие следовые пространства наделяются естественной нормой (ср. с (3.15)); при этом присутствие весового множителя на бесконечности, управляемого индексом γ , никак не сказывается на определении следа функции на торце полуполосы.

ТЕОРЕМА 3.4. Пусть $l = 1, 2, \dots$ и γ – малое положительное число.

1) Операторы A_+ и A_- задачи (2.5), (2.3), (2.11), (2.12),

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\pm\gamma}^{l+1}(\Pi; \infty)^2 \ni w \mapsto A_\pm w &= \left\{ -Lw, w_2|_{\pi_0}, \mu \left(\frac{\partial w_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial w_2}{\partial \xi_1} \right) \Big|_{\pi_0} \right\} \\ &\in \mathcal{W}_{\pm\gamma}^{l-1}(\Pi; \infty)^2 \times \mathcal{W}_{\pm\gamma}^{l+1/2}(\pi_0; \infty) \times \mathcal{W}_{\pm\gamma}^{l-1/2}(\pi_0; \infty), \end{aligned} \quad (3.18)$$

являются соответственно мономорфизмом и эпиморфизмом, причем

$$\begin{aligned} \ker A_- &= \{c_1 e^1 + c_2 \xi_2 e^2 : c_i \in \mathbb{R}\}, \\ \operatorname{coker} A_+ &= \{(v, -\sigma_{22}(v), v_1) : v \in \ker A_-\}. \end{aligned}$$

2) Если $\beta \in (l-1, l)$, то все сказанное в п. 1) об операторах (3.18) остается в силе и для операторов

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{\pm\gamma,\beta}^{l+1,1}(\Pi; \infty, 0) \times \mathcal{V}_{\pm\gamma,\beta}^{l+1}(\Pi; \infty, 0) \ni w = (w_1, w_2) \\ \mapsto A_\pm w &= \left\{ -Lw, w_2|_{\pi_0}, \mu \left(\frac{\partial w_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial w_2}{\partial \xi_1} \right) \Big|_{\pi_0} \right\} \\ &\in \mathcal{V}_{\pm\gamma,\beta}^{l-1}(\Pi; \infty, 0)^2 \times \mathcal{V}_{\pm\gamma,\beta}^{l+1/2}(\pi_0; \infty, 0) \times \mathcal{V}_{\pm\gamma,\beta}^{l-1/2}(\pi_0; \infty, 0). \end{aligned}$$

Сведений, перечисленных в теореме 3.4, достаточно для того, чтобы сделать все необходимые заключения о свойствах пограничного слоя, однако, по мнению авторов, в § 2 был избран более конструктивный и наглядный путь.

4. Невязка в первом из условий (1.7). Найдем правые части уравнений (1.5)–(1.7), которым удовлетворяет разность $v^N - U^N$. Начнем с краевых условий. По построению (см. (1.9) и (3.3), (3.1)) $U^N = 0$ на Γ_D , и потому в силу (1.2)

$$v^N(x) - U^N(x) = 0, \quad x \in \Gamma_D. \quad (3.19)$$

Обратимся теперь к краевым условиям на ломаной Γ_N . Пусть γ^{01} – ее звено, соединяющее точки P^0 и P^1 . Достаточно рассматривать часть γ_0 звена, примыкающую к P^0 (с другой частью γ_1 , равно как и с остальными звеньями, поступаем аналогично).

Согласно определениям угловых частей в (2.17) $\Phi_{\varphi}^{\pm}(\alpha_j) = 0$ и, значит, на γ_0 выполняется равенство

$$U^N(x) \cdot \nu(x) = X(\varepsilon, x) \{v(x) \cdot \nu(x) + \varepsilon w(s, \varepsilon^{-1}s, \varepsilon^{-1}n) \cdot \nu(x)\}, \quad (3.20)$$

где ν – нормаль к γ . Перейдем в (3.20) к быстрым переменным (2.1) – для обозначения этого перехода будем писать знак “ $\sim$ ” над символами γ , ν , v и т.п. В силу (2.6) и (2.8) заключаем, что символ $O(\varepsilon)$, оканчивающий формулу (2.9), можно истолковывать как соотношение

$$\|\tilde{v} \cdot \tilde{\nu} + \varepsilon f; V_{1+\delta}^{3/2}(\tilde{\gamma}_0; \tilde{P}^0)\| \leq c_{\delta} \varepsilon^2, \quad (3.21)$$

где δ – произвольное положительное число, а $f(\xi_1)$ – правая часть (2.11). Кроме того, учитывая (2.7), (2.8) и (2.11), а также сказанное в конце п. 1 о продолжении решения w , приходим к оценке

$$\|\tilde{w} \cdot \tilde{\nu} - f; V_{1+\delta}^{3/2}(\tilde{\gamma}_0; \tilde{P}^0)\| \leq c_{\delta} \varepsilon |\ln \varepsilon|. \quad (3.22)$$

Подчеркнем, что при выводе (3.20) и (3.21) мы использовали неравенство (3.17) при $l = 2$, $\beta = 1 + \delta$ и имели дело с пространствами, снабженными целыми индексами l .

Итак, в соответствии со сказанным в п. 3 существует продолжение $\tilde{g}_{\nu}^0$ в классе $V_{1+\delta}^2$ выражения, выделенного фигурными скобками в (3.20). Это продолжение необходимо умножить на $\tilde{X}$ (ср. с левой частью (3.20)). С целью согласовать построения, проводимые около вершины P^0 на части звена γ_0 , с рассмотрением других звеньев и вершины ломаной Γ_N добавим еще два множителя: $\chi(\pi^{-1}\varphi_0 + 1/2)$ и $1 - \chi(|\xi|/2)$; здесь φ_0 – угловая переменная, введенная в начале п. 3 § 2, а χ – срезающая функция, описанная после формулы (2.28). В результате оказывается, что носитель нового продолжения (обозначим его $\tilde{Y}_{\nu}^0$) содержится в секторе

$$\tilde{K}^0 = \{\xi : |\xi| < 2/3, \quad \varphi_0 \in [-\pi/2, -\pi/6]\}.$$

Так как $\chi(\pi^{-1}\varphi_0 + 1/2) = 1$ при $\varphi_0 \in [-\pi/2, -\pi/3]$, то след $\tilde{Y}_{\nu}^0$ равен $\tilde{X}\tilde{g}_{\nu}^0(1 - \chi)$, причем благодаря множителю $1 - \chi(|\xi|/2)$ продолжение $\tilde{Y}_{\nu}^0$ можно гладко “склеить” с продолжением $\tilde{Y}_{\nu}^1$, обслуживающим другую часть γ_1 того же звена (и вершину P^1). Кроме того,

$$\begin{aligned} \|\tilde{Y}_{\nu}^0; V_{1+\delta}^2(\tilde{K}^0; \tilde{P}^0)\| &\leq c \|\tilde{g}_{\nu}^0; V_{1+\delta}^2(\tilde{K}^0; \tilde{P}^0)\| \\ &\leq c \left\{ \|\tilde{v} \cdot \tilde{\nu} + \varepsilon f; V_{1+\delta}^{3/2}(\tilde{\gamma}_0; \tilde{P}^0)\| + \varepsilon \|\tilde{w} \cdot \tilde{\nu} - f; V_{1+\delta}^{3/2}(\tilde{\gamma}_0; \tilde{P}^0)\| \right\} \leq c_{\delta} \varepsilon^2 |\ln \varepsilon|. \end{aligned} \quad (3.23)$$

В пояснении нуждается только первое из указанных неравенств – остальные суть следствия соотношений (3.15) и (3.21), (3.22). Функция $\tilde{Y}_{\nu}^0$ отличается от $\tilde{g}_{\nu}^0$ лишь срезками. Так как $1 - \chi(|\xi|/2) = 0$ вблизи вершины $\tilde{P}^0$, то умножение на такую срезку прибавляет к норме выражение, мажорируемое величиной

$$c \|\tilde{g}_{\nu}^0; W_2^1(\{\xi \in \tilde{K}^0 : |\xi| > 1/3\})\|,$$

которая, конечно же, допускает нужную оценку. Учитывая очевидные неравенства

$$|\nabla_{\xi}^k \chi(\pi^{-1}\varphi_0 + 1/2)| \leq c_k |\xi|^{-k}$$

и распределение степеней весовых множителей в (3.14), заключаем, что срезающая функция, зависящая только от угловой переменной, является мультипликатором в $V_{1+\delta}^2$, т.е. неравенство (3.23) нарушиться не может. Наконец, согласно определениям (3.1)

$$\text{supp}(\nabla_{\xi}(1 - \tilde{\chi}^0)) \subset \{\xi : \varepsilon \leq |\xi| \leq \varepsilon/3\}, \quad |\nabla_{\xi}^k(1 - \tilde{\chi}^0)| \leq c_k \varepsilon^{-k}$$

и, следовательно, верна формула $|\nabla_{\xi}^k(1 - \tilde{\chi}^0)| \leq c_k |\xi|^{-k}$, сохраняющая предыдущую аргументацию при рассмотрении множителя $\tilde{X}$.

Продолжим преобразования. Поскольку $\tilde{Y}_{\nu}^0 = 0$ при $|\xi| < \varepsilon/6$, то, отщипив от весового множителя в норме пространства $V_{1+\delta}^2$ выражение $\text{dist}(\xi, \tilde{P}^0)^{\delta} = |\xi|^{\delta}$, большее $c\varepsilon^{\delta}$ на $\text{supp } \tilde{Y}_{\nu}^0$, получаем

$$\|\tilde{Y}_{\nu}^0; V_{1+\delta}^2(\tilde{K}^0; \tilde{P}^0)\| \geq c\varepsilon^{\delta} \|\tilde{Y}_{\nu}^0; V_1^2(\tilde{K}^0; \tilde{P}^0)\|$$

(отметим, что $V_1^2(\tilde{K}^0; \tilde{P}^0) \subset W_2^1(\tilde{K}^0)$ в соответствии с (3.14)). Таким образом, загрузив (3.23), приходим к оценке

$$\|\tilde{Y}_{\nu}^0; V_1^2(\tilde{K}^0; \tilde{P}^0)\| \leq c\varepsilon^{2(1-\delta)}.$$

Вернемся к исходным, медленным, переменным (в принятых обозначениях это равносильно снятию символа “ $\sim$ ”). Несложные вычисления, использующие (3.14), показывают, что норма в V_1^2 инвариантна относительно растяжения координат (удачное согласование индексов β и l с размерностью области). Значит,

$$\|Y_{\nu}^0; V_1^2(K^0; P^0)\| \leq c\varepsilon^{2(1-\delta)}. \quad (3.24)$$

Подобное неравенство выполняется и для Y_{ν}^1 . След суммы $Y_{\nu}^{01} = Y_{\nu}^0 + Y_{\nu}^1$ на звене γ^{01} , соединяющем P^0 и P^1 , совпадает со следом величины (3.20), а носитель расположен в тупоугольном равнобедренном треугольнике с основанием γ^{01} , причем $Y_{\nu}^{01} = 0$ на боковых сторонах и в $c\varepsilon^2$ -окрестностях вершин P^0 и P^1 (см. пояснения, предшествовавшие (3.23)).

Определим теперь векторное поле $Y^{01} = (Y_1^{01}, Y_2^{01})$ так, чтобы

$$Y^{01} \cdot \nu = Y_1^{01}\nu_1 + Y_2^{01}\nu_2 = Y_{\nu}^{01}, \quad Y_1^{01}\nu_2 - Y_2^{01}\nu_1 = 0,$$

и продолжим его нулем с треугольника на всю область Ω_N . Из (3.24) и аналогичного неравенства для Y_{ν}^1 выводим

$$\|Y^{01}; V_1^2(\Omega_N; \mathcal{P})\|^2 \leq c_{\delta} \varepsilon^{4(1-\delta)}. \quad (3.25)$$

Повторим проведенные построения для звеньев $\gamma^{12}, \dots, \gamma^{N-1,0}$. Найдены продолжения $Y^{01}, Y^{12}, \dots, Y^{N-1,0}$, сумма которых компенсирует невязку функции U^N в первом из краевых условий (1.7) (обращаем внимание на то, что их носители попарно дизъюнкты). Для каждой из вектор-функций $Y^{j,j+1}$ справедливо неравенство типа (3.25), их количество равно N , и потому

$$\|Y; V_1^2(\Omega_N; \mathcal{P})\| \leq c_{\delta} \varepsilon^{(3-4\delta)/2}. \quad (3.26)$$

Отметим еще, что, как уже упоминалось, $Y \in W_2^1(\Omega_N)$ и

$$\|Y; W_2^1(\Omega_N)\| \leq c \|Y; V_1^2(\Omega_N; \mathcal{P})\| \leq c_{\delta} \varepsilon^{(3-4\delta)/2}. \quad (3.27)$$

5. Невязка во втором из условий (1.7). Как и п. 4, нас будет интересовать часть γ_0 звена γ^{01} . Согласно (2.6), (2.10) и (2.8)

$$\|\sigma_{\nu\tau}(v) - \Sigma_{ns}^0; L_2(\gamma_0)\| \leq c\varepsilon^{3/2},$$

причем лишний множитель $\varepsilon^{1/2}$ появился в связи с малостью длины γ_0 . В (3.3) решение v умножается на срезающую функцию X , и при вычислении $\sigma_{\nu\tau}(Xv)$ ее нужно дифференцировать. Так как координаты (ν, τ) декартовы (дуга γ_0 прямолинейна) и X вблизи P^0 зависит только от r_0 , то на γ_0

$$\sigma_{\nu\tau}(Xv) = X\mu \left(\frac{\partial v_\nu}{\partial \tau} + \frac{\partial v_\tau}{\partial \nu} \right) + \mu v_\nu \frac{\partial X}{\partial \tau} = X\sigma_{\nu\tau}(v) - \mu v_\nu \frac{\partial \chi^0}{\partial r_0} \quad (3.28)$$

(ср. с формулами для σ_{ij} в п. 1 § 1 и см. (3.1)). На носителе $\partial\chi^0/\partial r_0$ имеем $n = O(\varepsilon^2)$ и $|\xi| = O(\varepsilon)$, т.е. в силу (2.8)

$$\nu_n(x) = 1 + O(\varepsilon), \quad \nu_s(x) = -\frac{\varepsilon}{2}\mathbb{k}(P^0) + O(\varepsilon^2).$$

Таким образом, вспоминая (2.6), получаем соотношения

$$v_\nu(x) = v_n(x)\nu_n(x) + v_s(x)\nu_s(x) = -\frac{\varepsilon}{2}\mathbb{k}(P^0)v_s(P^0) + O(\varepsilon^2).$$

Поэтому в соответствии с (3.1)

$$\left\| \frac{\partial \chi^0}{\partial r_0} \left[v_\nu + \frac{\varepsilon}{2}\mathbb{k}(P^0)v_s(P^0) \right]; L_2(\gamma_0) \right\|^2 \leq c \int_{c\varepsilon^2}^{C\varepsilon^2} \left| \varepsilon^2 \frac{1}{\varepsilon^2} \right|^2 d\tau = c\varepsilon^2 \quad (3.29)$$

(при использовании весовых классов можно получить асимптотически точную оценку, но нас устроит и (3.29); ср. далее с замечанием 3.5). Окончательно

$$\left\| \sigma_{\nu\tau}(Xv) - X\Sigma_{ns}^0 - \mu \frac{\varepsilon}{2}\mathbb{k}(P^0)v_s(P^0) \frac{\partial \chi^0}{\partial r_0}; L_2(\gamma_0) \right\|^2 \leq c\varepsilon^2. \quad (3.30)$$

Аналогичные преобразования нужно проделать и с пограничным слоем (2.2). Согласно (2.23) (или (2.28)) вблизи P^0 запишем w в виде

$$w(s, \xi) = W^0(r_0, \varphi_0) + W(s, \xi), \quad (3.31)$$

где

$$\begin{aligned} W(s, \xi) &= O(|\xi|[1 + |\ln |\xi|||]), \quad |\nabla_\xi W(s, \xi)| = O(1 + |\ln |\xi|||), \\ W^0(r, \varphi) &= \pi^{-1}\mathbb{k}(P^0)v_s(P^0)[\pm\Phi^1(\varphi, \ln r) - \Psi(\varphi)] + \varepsilon C(P^0)\Phi^0(\varphi). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Используя (2.7), (2.8), (2.12) и формулу вида (3.28), заключаем, что

$$\left\| \varepsilon\sigma_{\nu\tau}(Xv) + X\Sigma_{ns}^0 + \mu\varepsilon w_\nu \frac{\partial \chi^0}{\partial r_0}; L_2(\gamma_0) \right\| \leq c\varepsilon^{3/2}|\ln \varepsilon|.$$

Приведенные оценки для остатка в представлении (3.31) показывают, что

$$\mu\varepsilon \left\| (w_\nu - W_\nu^0) \frac{\partial \chi^0}{\partial r_0}; L_2(\gamma_0) \right\|^2 \leq c\varepsilon^2 |\ln \varepsilon|.$$

Кроме того, принимая во внимание явные выражения для угловых частей Φ^i и Ψ (см. п. 2 § 2), находим

$$\begin{aligned} -W_\nu^0(r_0, -\alpha_0) &= W_\varphi^0(r_0, -\alpha_0) \\ &= \pi^{-1} \mathbb{k}(P^0) v_s(P^0) [\pm \Phi_\varphi^1(-\alpha_0, \ln r) - \Psi_\varphi(-\alpha_0)] + \varepsilon C(P^0) \Phi_\varphi^0(-\alpha_0) \\ &= -\pi^{-1} \mathbb{k}(P^0) v_s(P^0) \alpha_0 \sin \alpha_0 + O(\varepsilon), \end{aligned}$$

т.е. после учета (2.15)

$$W_\nu^0(r_0, \alpha_0) = v_s(P^0) \mathbb{k}(P^0)/2 + O(\varepsilon).$$

Следовательно,

$$\left\| \varepsilon \sigma_{\nu\tau}(Xw) + X \Sigma_{ns}^0 + \mu \frac{\varepsilon}{2} \mathbb{k}(P^0) v_s(P^0) \frac{\partial \chi^0}{\partial r_0}; L_2(\gamma_0) \right\| \leq c\varepsilon^2 |\ln \varepsilon|^2. \quad (3.33)$$

Наконец, в силу формул для специальных решений (2.17) напряжения

$$\sigma_{\nu\tau}(\chi^0(\varepsilon^{-2}r_0)r_0^{\mp 1 \pm \pi/(2\alpha_0)}\Phi^\pm(\varphi_0))$$

аннулируются при $\varphi_0 = -\alpha_0$. Подводя итог, напомним, что согласно (3.30) и (3.33)

$$\left\| \sigma_{\nu\tau}(U^N); L_2(\gamma_0) \right\|^2 \leq c\varepsilon^2 |\ln \varepsilon|^2.$$

Получив аналогичные неравенства для γ_1 и для остальных звеньев ломаной, придем к требуемой оценке

$$\left\| \sigma_{\nu\tau}(U^N); L_2(\Gamma_N) \right\|^2 \leq cN\varepsilon^2 |\ln \varepsilon|^2 = c\varepsilon |\ln \varepsilon|^2. \quad (3.34)$$

6. Невязка в уравнении (1.5). Используя равенство (1.8) и тот факт, что векторы (2.17) суть решения однородной системы Ламе, получаем соотношение

$$\begin{aligned} LU^N - f &= - \sum_{j=1}^N \chi^j f - \sum_{j=1}^N [L, \chi^j] \{v - (v_s(P^j) \\ &\quad + \varepsilon C(P^j)) r_j^{\mp 1 \pm \pi/(2\alpha_j)} \Phi^\pm(\varphi_j)\} + \varepsilon L X \chi_\rho w, \end{aligned} \quad (3.35)$$

в котором $[A, B] = AB - BA$ – коммутатор операторов A и B .

Рассмотрим последнее слагаемое в (3.35). Согласно (2.32) запишем решение типа пограничного слоя в виде

$$w(s, \xi) = \mathbf{n}a_2(s) + w^0(s, \xi), \quad (3.36)$$

где a_2 – гладкая функция переменной s , а решение $w^0(s, \xi)$ системы (2.5) экспоненциально затухает при $\xi_2 \rightarrow +\infty$. (В связи с новой записью слагаемого в (3.36)

напомним, что в § 2 были приняты специальные обозначения для w_s и w_n ; см. комментарии к (2.5). Вынесем срезающую функцию χ_ρ за оператор L и заметим, что согласно ее определению носители коэффициентов коммутатора $[L, \chi_\rho]$ удалены на расстояние $\rho/6$ от контура Γ_0 . Поэтому невязка, возникающая из-за составляющей w^0 , экспоненциально мала, и верна оценка

$$\varepsilon \|[L, \chi_\rho]Xw; L_2(\Omega_N)\| = \varepsilon \|[L, \chi_\rho]w; L_2(\Omega_N)\| \leq c\varepsilon.$$

Далее имеем

$$\varepsilon \chi_\rho L X w = \varepsilon \chi_\rho X L w - \varepsilon \sum_{j=1}^N [L, \chi^j] w.$$

Опять-таки

$$\varepsilon \|\chi_\rho X L n a_2; L_2(\Omega_N)\| \leq c\varepsilon,$$

т.е. нужно обработать величину $\varepsilon \chi_\rho X L w^0$. В п. 1 § 2 при выводе уравнений (2.5) из системы Ламе (2.4), записанной в криволинейных координатах, были учтены все выражения, содержащие вторые производные $\partial^2/\partial \xi_i \partial \xi_j$ с коэффициентами, ограниченными при $n \rightarrow 0$. Значит, разделяя быстрые и медленные переменные, выводим представление

$$L(\nabla_x)w(s, \xi) = \mathfrak{L}(s, n, \nabla_\xi, \partial_s)w^0(s, \xi),$$

где $\mathfrak{L}$ – оператор, содержащий следующие дифференциальные выражения с ограниченными коэффициентами:

$$n\partial^2/\partial \xi_i \partial \xi_j, \quad \partial/\partial \xi_i, \quad 1, \quad \partial^2/\partial s^2, \quad \partial/\partial s.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \varepsilon \|n^{1/2}(1 + |\ln |n||)\chi_\rho X L w^0; L_2(\Omega_N)\| \\ & \leq c\varepsilon \left[\sum_{i=0}^2 \varepsilon^{-2i} \int_{c\varepsilon}^\infty n^{1+2\delta_{i,2}} (1 + |\ln |n||)^2 e^{-\delta n/\varepsilon} dn \right]^{1/2} \leq c\varepsilon |\ln \varepsilon|. \end{aligned}$$

Подчеркнем, что здесь весовой множитель взят в соответствии с неравенством Харди (3.11). Поскольку $n = O(\varepsilon^2)$ на $\text{supp } \chi^j$ (см. (3.1)), то этот же вес позволяет получить приемлемую оценку для первой суммы справа в (3.35):

$$\left\| n^{1/2}(1 + |\ln |n||) \sum_{j=1}^N \chi^j f; L_2(\Omega_N) \right\| \leq c\varepsilon |\ln \varepsilon| \times \|f; L_2(\Omega_N)\|.$$

Итак, осталось рассмотреть выражения

$$\begin{aligned} \Upsilon^j &= [L, \chi^j] \{v + \varepsilon w - [v_s(P^j) + C(P^j)] r^{\mp 1 \pm \pi/(2\alpha_j)} \Phi^\pm(\varphi_j)\}, \\ & j = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (3.37)$$

носители которых расположены в кольцах $\{x : \varepsilon^2/6 \leq r_j \leq \varepsilon^2/3\}$. Сначала заменим в (3.37) v на $v_s(P^j)$ и εw на $\varepsilon W^0(P^j, r_j, \varphi_j)$ (см. (3.32)); при этом ввиду малости остатков в асимптотических представлениях (2.6) и (3.31) мы совершим ошибку

$O(\varepsilon |\ln \varepsilon|)$. Затем применим разложения (2.19) и аналогичные разложения градиентов степенных решений (2.17) (последние можно получить формальным дифференцированием (2.19)); при этом согласно (2.14) и (2.15) величина δ в (2.19) равна $\varepsilon |\mathbb{k}(P^j)|$. В результате оказывается, что основные члены асимптотики взаимно уничтожаются, а преобразованное выражение (3.37) после выполнения дифференцирований, предписанных коммутатором $[L(\nabla_x), \chi^j]$, становится равным

$$O(\varepsilon^2 |\ln r|^2 \{\varepsilon^{-2} r^{-1} + \varepsilon^{-4}\})$$

(отметим, что каждое дифференцирование срезки χ^j приводит к появлению множителя ε^{-2} ; см. (3.1)). Окончательно

$$\begin{aligned} \left\| n^{1/2} (1 + |\ln |n||) \sum_{j=1}^N \Upsilon^j; L_2(\Omega_N) \right\|^2 &= \sum_{j=1}^N \left\| n^{1/2} (1 + |\ln |n||) \Upsilon^j; L_2(\Omega_N) \right\|^2 \\ &\leq c \sum_{j=1}^N \varepsilon^{-4} \int_{c\varepsilon^2}^{C\varepsilon^2} r (1 + |\ln r|)^2 |\ln r|^4 [1 + \varepsilon^2 r^{-2}]^2 r dr \\ &\leq c \sum_{j=1}^N \varepsilon^2 |\ln \varepsilon|^6 \leq c\varepsilon |\ln \varepsilon|^6. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Собирая полученные оценки, приходим к искомому неравенству

$$\|\mathcal{R}^{-1}(LU^N - f); L_2(\Omega_N)\| \leq c\varepsilon^{1/2} |\ln \varepsilon|^3; \quad (3.39)$$

здесь $\mathcal{R}$ – весовой множитель, введенный в предложении 3.2.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.5. Порядок мажоранты в (3.39) определяется самой грубой из оценок слагаемых в (3.35). В данном пункте таковой оказалась оценка (3.38). Этого и следовало ожидать, поскольку применялся стандартный, но неточный прием сращивания разложений в “промежуточной” зоне – при помощи разбиения единицы (3.1). Его можно усовершенствовать (см. [39, § 2.1]) и заменить правую часть (3.38) величиной $c\varepsilon^2 |\ln \varepsilon|^6$, однако для основных целей статьи такое улучшение необязательно, и мы отдаем предпочтение простоте асимптотической конструкции.

7. Оправдание асимптотики. В настоящем пункте будет установлено следующее утверждение, обосновывающее асимптотические построения.

ТЕОРЕМА 3.6. *При выполнении условий, перечисленных в п. 1 § 1, для решения v^N задачи (1.5)–(1.7) справедливо неравенство*

$$\|v^N - U^N; W_2^1(\Omega_N)\| \leq c_\delta \varepsilon^{(1-2\delta)/2}, \quad (3.40)$$

в котором U^N – глобальное асимптотическое приближение, определенное формулой (3.3) по решениям v и w задач (1.8)–(1.11) и (2.5), (2.3), (2.11), (2.12) (см. § 2), δ – произвольное положительное число, а величина c_δ зависит от δ , но не от $\varepsilon = 1/N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду оценки (3.27) проверку соотношения (3.40) можно заменить проверкой соотношения

$$\|R^N; W_2^1(\Omega_N)\| \leq c_\delta \varepsilon^{(1-2\delta)/2}, \quad (3.41)$$

где $R^N = v^N - U^N + Y$. Согласно построению поля Y (см. п. 4) и благодаря (3.19) R^N удовлетворяет условиям

$$R^N(x) = 0, \quad x \in \Gamma_D; \quad R_\nu^N(x), \quad x \in \Gamma_N. \quad (3.42)$$

Кроме того,

$$L(\nabla_x)R^N(x) = f(x) - L(\nabla_x)U^N(x) + L(\nabla_x)Y(x), \quad x \in \Omega_N, \quad (3.43)$$

$$\sigma_{\nu\tau}(R^N; x) = -\sigma_{\nu\tau}(U^N; x) + \sigma_{\nu\tau}(Y; x), \quad x \in \Gamma_N. \quad (3.44)$$

Умножим скалярно уравнение (3.43) на R^N и проинтегрируем по частям при учете краевых условий (3.42), (3.44). Получим равенство

$$\begin{aligned} 2\mathcal{E}(R^N; \Omega_N) &= \int_{\Omega_N} R^N \cdot (f - LU^N) dx - \int_{\Gamma_N} R_\tau^N \sigma_{\nu\tau}(U^N) ds_x \\ &\quad + \int_{\Omega_N} R^N \cdot LY dx + \int_{\Gamma_N} R_\tau^N \sigma_{\nu\tau}(U^N) ds_x = I_1 - I_2 + I_3 + I_4. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Оценим интегралы I_i . В соответствии с (3.39) и (3.44) имеем

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq c\varepsilon^{1/2} |\ln \varepsilon|^3 \|\mathcal{R}R^N; L_2(\Omega_N)\|, \\ |I_2| &\leq c\varepsilon^{1/2} |\ln \varepsilon| \times \|\mathcal{R}R^N; L_2(\Omega_N)\|. \end{aligned}$$

Пользуясь (3.26), заключаем, что

$$\|LY; V_1^0(\Omega_N; \mathcal{P})\| \leq c \|Y; V_1^2(\Omega_N; \mathcal{P})\| \leq c_\delta \varepsilon^{(3-4\delta)/2}.$$

Так как поле Y , а значит, и поле LY равны нулю в $c\varepsilon^2$ -окрестностях точек $P^1, \dots, P^N$ (см. текст после (3.24)), то

$$\begin{aligned} &\|\mathcal{R}^{-1}LY; L_2(\Omega_N)\| \\ &\leq c \sup\{\mathcal{R}(x)^{-1} \text{dist}(x, \mathcal{P})^{-1} \mid x \in \text{supp } LY\} \times \|LY; V_1^0(\Omega_N; \mathcal{P})\| \\ &\leq c\varepsilon^{-1} |\ln \varepsilon| \times \|LY; V_1^0(\Omega_N; \mathcal{P})\| \leq c_\delta \varepsilon^{(1-6\delta)/2} \end{aligned}$$

и

$$|I_3| \leq c_\delta \varepsilon^{(1-6\delta)/2} \|\mathcal{R}R^N; L_2(\Omega_N)\|.$$

Поскольку согласно свойствам пространств Кондратьева

$$\begin{aligned} \|\sigma_{\nu\tau}(Y); L_2(\Gamma_N)\| &\leq c \|Y; V_0^1(\Gamma_N; \mathcal{P})\| \\ &\leq c \|Y; V_{1/2}^{3/2}(\Gamma_N; \mathcal{P})\| \leq c \|Y; V_{1/2}^2(\Omega_N; \mathcal{P})\| \\ &\leq c \sup\{\text{dist}(x, \mathcal{P})^{-1/2} \mid x \in \text{supp } Y\} \times \|Y; V_1^2(\Omega_N)\| \\ &\leq c\varepsilon^{-1} \|Y; V_1^2(\Omega_N)\| \leq c\varepsilon^{(1-4\delta)/2}, \end{aligned}$$

то аналогично предыдущему

$$|I_4| \leq c \|\sigma_{\nu\tau}(Y); L_2(\Gamma_N)\| \times \|R^N; L_2(\Gamma_N)\| \leq c\varepsilon^{(1-4\delta)/2} \|R^N; L_2(\Gamma_N)\|.$$

Указанные неравенства для $|I_i|$ доставляют мажоранту правой части (3.45). В силу предложений 3.1–3.3

$$\mathcal{E}(R^N; \Omega_N) \geq c \|R^N; W_2^1(\Omega_N)\| \times \left\{ \|\mathcal{R}R^N; L_2(\Omega_N)\| + \|R^N; L_2(\Gamma_N)\| \right\}. \quad (3.46)$$

Сокращая в полученном из (3.45) неравенстве слева и справа нормы, выделенные в (3.46) фигурными скобками, выводим соотношение (3.41) (не должен смущать тот факт, что вычитаемые в показателях степеней различаются: число $\delta > 0$ – произвольно).

8. Теоремы о сходимости. При малом ε вне любой фиксированной окрестности $\mathcal{V}$ контура Γ_0 срезающие функции X и χ^j равны соответственно 1 и 0, слагаемое εw типа пограничного слоя мало (например, благодаря представлению (3.36)). Поэтому из теоремы 3.6 и формулы (3.3) для глобального приближения вытекает следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3.7. *Решение v^N задачи (1.5)–(1.7) сходится при $N \rightarrow \infty$ по метрике пространства $W_2^1(\Omega \setminus \mathcal{V})$ к решению v задачи (1.8)–(1.11); здесь $\mathcal{V}$ – произвольная окрестность контура Γ_0 .*

§ 4. Другие типы краевых условий

1. Краевые условия Дирихле и Неймана. Дополним уравнения (1.5), (1.6) условиями Дирихле

$$v^N(x) = 0, \quad x \in \Gamma_N \quad (4.1)$$

(граница Γ_N жестко зашлепена), или условиями Неймана

$$\sigma_{\nu\nu}(v^N; x) = \sigma_{\nu\tau}(v^N; x) = 0, \quad x \in \Gamma_N \quad (4.2)$$

(граница Γ_N свободна от напряжений). Краевые условия (4.1), (4.2) устойчивы относительно предельного перехода $N \rightarrow \infty$ в том смысле, что в задаче для v к уравнениям (1.10), (1.11) присоединяются соответствующие краевые условия

$$v(x) = 0, \quad x \in \Gamma_0, \quad (4.3)$$

или

$$\sigma_{ns}(v; x) = \sigma_{nn}(v; x) = 0, \quad x \in \Gamma_0. \quad (4.4)$$

Иными словами, парадокс, обсуждаемый в статье, отсутствует. Этот факт проверяется, например, при помощи подхода, развитого в [15]. Разумеется, то же самое можно показать, построив асимптотическое представление решения задачи (1.5), (1.6), (4.1) или (1.5), (1.6), (4.2). Заметим, что все неприятности с предельным переходом $N \rightarrow \infty$ вызваны наличием степенных решений (2.16) с малым показателем Λ (см. (2.17)). Для задачи Дирихле таких решений вообще нет ($|\Lambda| > 1/2$ для любого угла; см. [28]). Это обстоятельство изымает из асимптотической схемы перераспределения (2.19) и поправки (3.2) вблизи угловых точек. Таким образом, вывод предельных условий (4.3) становится совсем простым.

Если вектор (2.16) – степенное решение задачи Неймана в каком-либо угле и $|\Lambda| < 1/2$, то $\Lambda = 0$ и (2.16) – линейная комбинация жестких поступательных смещений $r^0\Phi^{10}(\varphi)$, $r^0\Phi^{20}(\varphi)$, $r^0\Phi^{11}(\varphi, \ln r)$, $r^0\Phi^{21}(\varphi, \ln r)$ и полей, порожденных сосредоточенными силами (см. [28] и ср. с (2.18)). Нетрудно убедиться в том, что при построении асимптотики Φ^{i1} не появляются, а жесткие смещения Φ^{i0} , будучи гладкими функциями, не нуждаются в поправках типа (3.2). Опять-таки, повторяя (с упомянутыми упрощениями) рассуждения из предыдущих параграфов, приходим к краевым условиям (4.4).

2. Краевые условия (1.14). Обратимся к задаче (1.5), (1.6), (1.14) (на контуре фиксируются касательные смещения и нормальные напряжения). Как и основная задача (1.5)–(1.7), предел решения v^N не удовлетворяет ожидаемому граничному условию

$$v_s(x) = 0, \quad \sigma_{nn}(v; x) = 0, \quad x \in \Gamma_0.$$

Вместо него появляется краевое условие

$$\begin{aligned} v_s(x) &= 0, \\ \sigma_{nn}(v; x) &= \pm \frac{1}{2} v_n(x) \mathbb{k}(s) \left[\lambda \left(1 - \frac{1}{\varkappa} \right) (1 \mp 1) + 2\mu \right. \\ &\quad \left. + \mu \left(1 - \frac{1}{\varkappa} \pm \left(1 + \frac{1}{\varkappa} \right) \right) \right], \quad x \in \Gamma_0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Этот факт устанавливается прямым повторением рассуждений из §2, 3, и мы ограничимся перечислением тех формул и утверждений, которые нужно модифицировать.

В качестве главного члена разложения задачи (1.5), (1.6), (1.14) выбирается гладкая в $\bar{\Omega}$ функция v , удовлетворяющая условиям (1.5), (1.6). Соответствующий пограничный слой $\varepsilon w^0(x)$ должен компенсировать главные части невязок, остающиеся v на Γ_N ,

$$\begin{aligned} w_1^0(s, \xi_1, 0) &= \mathbb{k}(s) \left\{ V_n^0(s) \left(\xi_1 - \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\xi_1) \right) - \frac{1}{2} V_s^1(s) \left[\left(|\xi_1| - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \right] \right\}, \\ 2\mu \frac{\partial w_2^0}{\partial \xi_2} + \lambda \left(\frac{\partial w_2^0}{\partial \xi_2} + \frac{\partial w_1^0}{\partial \xi_1} \right) &= -\Sigma_{nn}(s). \end{aligned}$$

Специальные решения в угле с раствором α принимают в полярных координатах вид (2.7), а угловые части задаются равенствами

$$\begin{aligned} \Phi_r^+(\varphi) &= \cos \frac{\pi\varphi}{2\alpha}, & \Phi_\varphi^+(\varphi) &= -\sin \frac{\pi\varphi}{2\alpha}; \\ \Phi_r^-(\varphi) &= \left(\varkappa - 1 + \frac{\pi}{2\alpha} \right) \cos \frac{\pi\varphi}{2\alpha}, & \Phi_\varphi^-(\varphi) &= -\left(\varkappa + 1 - \frac{\pi}{2\alpha} \right) \sin \frac{\pi\varphi}{2\alpha}. \end{aligned}$$

Для полуплоскости ($\alpha = \pi/2$) имеются решения (2.18), причем

$$\begin{aligned} \Phi_r^0(\varphi) &= \cos \varphi, & \Phi_\varphi^0(\varphi) &= -\sin \varphi; \\ \Phi_r^1(\varphi, \ln r) &= \ln r \cos \varphi - (2\varkappa)^{-1} \cos \varphi, & \Phi_\varphi^1(\varphi, \ln r) &= -\ln r \sin \varphi - (2\varkappa)^{-1} \sin \varphi. \end{aligned}$$

Разложение (2.19) заменяется следующим:

$$r^{\mp 1 \pm \pi/(2\alpha)} \Phi^{\pm}(\varphi) = \Phi^0(\varphi) + 2\pi^{-1} \delta [\Phi^1(\varphi, \ln r) \pm \Psi(\varphi)] + O(\delta^2 |\ln r|^2);$$

здесь

$$\begin{aligned}\Psi_r(\varphi) &= -\varphi \sin \varphi + (2\kappa)^{-1} \cos \varphi, \\ \Psi_{\varphi}(\varphi) &= -\varphi \cos \varphi + (2\kappa)^{-1} \sin \varphi.\end{aligned}$$

Теперь асимптотическое условие (2.24) выглядит так:

$$\begin{aligned}w(s, \xi) &= \pi^{-1} \mathbb{k}(s) V_n^0(s) [\pm \Phi^1(\varphi, \ln r) + \Psi(\varphi)] \\ &+ C(s) \Phi^0(\varphi) + O(r |\ln r|), \quad r = |\xi| \rightarrow 0.\end{aligned}$$

Наконец, простая переформулировка теоремы 2.1 (со ссылками на общие результаты [27]) и соблюдение условий отсутствия роста решения типа пограничного слоя приводят к предельному условию (4.5).

Список литературы

1. Гольденвейзер А. Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // Прикладная матем. и механика. 1962. Т. 27. № 6. С. 1057–1074.
2. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М.: ГИТТЛ, 1957.
3. Сапонджян О. М. Изгиб тонких упругих плит. Ереван: Айастан, 1975.
4. Бабушка И. Устойчивость области определения по отношению к возмущению границы основных задач теории дифференциальных уравнений в частных производных, главным образом в связи с теорией упругости. 1 // Чехословацкий матем. журн. 1961. Т. II. № 1. С. 76–105; 2 // Чехословацкий матем. журн. 1961. Т. II. № 2. С. 165–203.
5. Фикера Г. Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974.
6. Charlet P. G. Plates junctions in elastic microstructures. Paris–N.Y.: MASSON, 1980.
7. Сапонджян О. М. Изгиб свободно опертой полигональной плиты // Изв. АН АрмССР. 1952. Т. 5. № 2. С. 29–46.
8. Мазья В. Г., Назаров С. А. Парадоксы предельного перехода в решениях краевых задач при аппроксимации гладких контуров многоугольными // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1986. Т. 50. № 6. С. 1156–1177.
9. Rajaiah K., Rao A. K. Effect of Boundary Conditions Description on Convergence of Solution in a Boundary-Value Problem // J. of Computational Physics. 1968. V. 3. № 2. P. 190–201.
10. Hanuska A. Zu den Theorien der Plattenbiegung // Beton-und-Stahlbetonbau. 1969. V. 9. P. 214–217.
11. Rieder G. Eingrenzungen in der Elastizitäts- und Potentialtheorie // ZAMM. 1972. Bd. 52. № 10. S. 340–347.
12. Murray N. W. The Polygone-Circle Paradox and Convergence in Thin Plate Theory // Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1973. V. 73. P. 279–283.
13. Rieder G. On the Plate Paradox of Sapondzhyan and Babuska // Mech. Res. Comm. 1974. V. 1. P. 51–53.
14. Rajaiah K., Rao A. K. On the Polygone-Circle Paradox // J. of Applied Mechanics. 1981. V. 48. P. 195–196.
15. Babuska I., Pitkaranta J. The plate paradox for hard and soft simple support // SIAM J. Math. Anal. 1990. V. 21. № 3. P. 551–576.
16. Reissner E. On the bending of elastic plates // Quart. Appl. Math. 1947. V. 5. № 1.
17. Гильмошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. М.: Физматгиз, 1963.

18. Шойхет Б. А. Одно энергетическое тождество в физически нелинейной теории упругости и оценки погрешностей уравнений плит // Прикл. матем. и механика. 1976. Т. 40. № 2. С. 317–326.
19. Зорин И. С., Назаров С. А. Краевой эффект при изгибе тонкой трехмерной пластины // Прикл. матем. и механика. 1989. Т. 53. № 4. С. 642–650.
20. Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G. Asymptotic analysis for periodic structures. Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1978.
21. Батвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984.
22. Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984.
23. Олейник О. А., Иосифьян Г. А., Шамаев А. С. Математические задачи теории сильно неоднородных сред. М.: Изд-во МГУ, 1990.
24. Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А. Усреднение дифференциальных операторов. М.: Наука, 1993.
25. Кондратьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Моск. матем. об-ва. 1967. Т. 16. С. 209–298.
26. Мазья В. Г., Пламеневский Б. А. О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в областях с коническими точками // Math. Nachr. 1977. Bd. 76. S. 29–60.
27. Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей. М.: Наука, 1991.
28. Партон В. З., Перлин П. И. Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981.
29. Олейник О. А., Иосифьян Г. А. О поведении на бесконечности решений уравнений второго порядка в области с некомпактной границей // Матем. сб. 1980. Т. 112. № 4. С. 588–610.
30. Oleinik O. A., Yosifian G. A. On the asymptotic behavior at infinity of solutions in linear elasticity // Arch. Rat. Mech. Anal. 1982. V. 78. № 1. P. 29–53.
31. Agmon S., Douglis A., Nirenberg L. Estimates near the boundary for solutions of elliptic differential equations satisfying general boundary conditions // Comm. Pure Appl. Math. 1964. V. 17. P. 35–92.
32. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1966.
33. Friedrichs K. O. On the boundary value problems of the theorie of elasticity and Korn's inequality // Ann. Math. 1947. V. 48. P. 447–471.
34. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980.
35. Кондратьев В. А., Олейник О. А. Краевые задачи для системы теории упругости в неограниченных областях. Неравенство Корна // УМН. 1988. Т. 43. № 5. С. 55–98.
36. Кондратьев В. А., Олейник О. А. О зависимости констант в неравенстве Корна от параметра, характеризующего геометрию области // УМН. 1989. Т. 44. № 6. С. 157–158.
37. Kondratiev V. A., Oleinik O. A. Hardy's and Korn's type inequalities and their applications // Rendiconti di Matematica. Ser. VII. Roma. 1990. V. 10. P. 641–666.
38. Ладьженская О. А. Краевые задачи в математической физике. М.: Наука, 1973.
39. Mazja W. G., Nazarov S. A., Plamenevski B. A. Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singular gestorten Gebieten. Berlin: Akademie-Verlag, 1991. Bd. 1, 2.