Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Седлецкий, Преобразования Фурье быстро убывающих функций, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1997, том 61, выпуск 3, 187–202

DOI: <https://doi.org/10.4213/im130>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 16:20:21

УДК 517.5

А. М. Седлецкий

Преобразования Фурье быстро убывающих функций

Пусть $f \in L^p(\mathbb{R})$, $p \geq 2$. Тогда функция $F(z)$, являющаяся преобразованием Фурье функции $\exp(-a|t|^\alpha)f(t)$, $a > 0$, $\alpha > 1$, принадлежит пространству целых функций, интегрируемых по всей плоскости с p -й степенью и с вполне определенным весом. Наоборот, если целая функция $F(z)$ принадлежит такому пространству, где $1 \leq p \leq 2$, то она представима в виде преобразования Фурье функции указанного вида с $f \in L^p(\mathbb{R})$.

Библиография: 15 наименований.

1. Под *быстро убывающей функцией* условимся понимать функцию вида

$$\varphi(t) = \exp(-a|t|^\alpha)f(t), \quad a > 0, \quad \alpha > 1,$$

где множитель $f(t)$ в том или ином смысле относительно мал при больших значениях $|t|$, так что убывание функции $\varphi(t)$ на бесконечности в существенном определяется весом $\exp(-a|t|^\alpha)$. Рассматриваются преобразования Фурье таких функций, т.е. целые функции вида

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-izt) \exp(-a|t|^\alpha)f(t) dt, \quad a > 0, \quad \alpha > 1. \quad (1)$$

Функции такого вида встречаются в работах [1]–[4] и др.

В статьях [3], [4] рассмотрены классы целых быстро убывающих функций $\varphi(z)$, допускающих определенную мажоранту во всей плоскости, и описаны классы их преобразований Фурье.

В последнее время наблюдается новая волна интереса к функциям (1) (см. [5]–[10]), что, в частности, связано с приложениями аппроксимационного плана.

Поставим следующие вопросы.

1) Если $f(t) \in L^p(\mathbb{R})$, то какими интегральными свойствами во всей плоскости обладает функция (1)? (Прямая постановка.)

2) Какие интегральные свойства целой функции $F(z)$ влекут ее представимость в виде (1) с $f(t) \in L^p(\mathbb{R})$? (Обратная постановка.)

Всюду в дальнейшем $a > 0$, $\alpha, \beta > 1$, $1/\alpha + 1/\beta = 1$, $p \geq 1$, $1/p + 1/q = 1$, $K(\beta, a) = \beta^{-1}(\alpha a)^{-\beta/\alpha}$, $z = x + iy$.

В статье [9] доказаны следующие утверждения.

ТЕОРЕМА А. Пусть $1 \leq p \leq 2$. Если $f(t) \in L^p(\mathbb{R})$, то

$$\|F\|_{q,p} \stackrel{\text{df}}{=} \left(\int_{\mathbb{R}} |y|^{\beta/2-1} \exp(-pK(\beta, a)|y|^\beta) \|F_y\|_q^p dy \right)^{1/p} < \infty, \quad (2)$$

где $\|F\|_q$ – норма функции $F_y(x) = F(x + iy)$ в $L^q(\mathbb{R})$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 96-01-00877).

ТЕОРЕМА Б. Пусть $2 \leq p < \infty$. Предположим, что для целой функции $F(z)$ выполнено условие (2). Тогда

$$\exp(a|t|^\alpha)\widehat{F}(t) \in L^p(\mathbb{R}),$$

где $\widehat{F}(t)$ – преобразование Фурье функции $F(t)$.

Из теоремы Б следует, что в ее условиях функция $F(z)$ представима в виде (1) с $f(t) \in L^p(\mathbb{R})$.

В статье автора [10] теоремы А, Б распространены на пространства L^p со степенным весом.

Теоремы А, Б получены в [9] на основании асимптотических оценок для интегралов Лапласа и теоремы Хаусдорфа–Юнга; они с полным основанием могут рассматриваться как ее комплексные аналоги для преобразования (1). При этом, если по теореме Хаусдорфа–Юнга преобразование Фурье задает ограниченный оператор, действующий из L^p ($1 \leq p \leq 2$) в L^q , теорема А утверждает, что оператор (1) действует как ограниченный из пространства L^p (с тем же ограничением $1 \leq p \leq 2$) в пространство целых функций со “смешанной” (за исключением случая $p = q = 2$) нормой (2).

Нас в первую очередь интересуют не охваченные теоремами А и Б случаи: $p > 2$ в прямой постановке и $1 \leq p < 2$ в обратной постановке.

Обозначим через $A^p(\beta, a)$ пространство целых функций $F(z)$ с нормой

$$\left\| F(x + iy)(1 + |y|)^{(1-3/p)(1-\beta/2)} \exp(-K(\beta, a)|y|^\beta) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Тогда основные утверждения настоящей статьи в упрощенном виде могут быть сформулированы так:

- 1) при $2 \leq p \leq \infty$ оператор (1) действует как ограниченный из $L^p(\mathbb{R})$ в $A^p(\beta, a)$;
- 2) если $F(z) \in A^p(\beta, a)$, $1 \leq p \leq 2$, то функция $F(z)$ представима в виде (1), причем оператор $F(z) \rightarrow f(t)$ действует как ограниченный из $A^p(\beta, a)$ в $L^p(\mathbb{R})$.

Особенность этих утверждений состоит в сохранении показателя интегрируемости p . Норма в пространстве $A^p(\beta, a)$ задается двойным интегралом, что делает, на наш взгляд, утверждения 1), 2) более удобным инструментом, нежели теоремы А, Б. В отличие от теорем А, Б, сформулированные утверждения не имеют (при $p \neq 2$) прямых аналогов в теории преобразования Фурье.

Нами рассмотрены также случаи, когда интеграл в (1) берется вдоль полупрямой и когда полупрямыми $\mathbb{R}_+$ и $\mathbb{R}_-$ в (1) отвечают различные экспоненциальные веса, а функции $f(t)$ ($t \in \mathbb{R}_\pm$) берутся из разных пространств L^p . Насколько известно автору, эти случаи до сих пор в научной литературе не встречались. Для них в статье получены результаты, близкие по духу приведенным выше утверждениям 1), 2). Кроме того, исследован также не рассматривавшийся ранее вопрос об интегрируемости преобразований Фурье (во всех упомянутых случаях) на лучах $\arg z = \theta$ в комплексной плоскости. В конце статьи даны применения к теории аппроксимативных свойств систем экспонент с быстро убывающим весом в пространствах $L^p(\mathbb{R})$.

2. Сформулируем и докажем следующие вспомогательные предложения.

ЛЕММА 1 [9]. Пусть $\gamma > -1$, $p > 0$ и

$$I(t) = \int_0^\infty y^\gamma \exp(p(yt - K(\beta, a)y^\beta)) dy. \quad (3)$$

Тогда при $t \rightarrow +\infty$

$$I(t) \sim C t^{(\alpha/\beta)(\gamma+1)-\alpha/2} \exp(pat^\alpha), \quad C = C(p, \alpha, \gamma) > 0. \quad (4)$$

ЛЕММА 2. Пусть $\gamma > -1$, $p > 0$, $-\infty < b < +\infty$ и

$$J(t) = J_{b,p,\gamma}(t) = \int_b^\infty (1+y)^\gamma \exp(p(yt - K(\beta, a)y^\beta)) dy. \quad (5)$$

Тогда при $t \rightarrow +\infty$

$$J(t) \sim C t^{(\alpha/\beta)(\gamma+1)-\alpha/2} \exp(pat^\alpha), \quad C > 0. \quad (6)$$

Выведем лемму 2 из леммы 1. Фиксируем $A > \max(0, b)$. Части интегралов (3) и (5), распространенные соответственно на $(0, A)$ и (b, A) , имеют порядок $O(\exp(pAt))$. Значит, асимптотика (4) верна для части интеграла (3) (пусть $I_A(t)$), распространенной на (A, ∞) , и асимптотику (6) достаточно доказать для части интеграла (5) (пусть $J_A(t)$), распространенной на (A, ∞) . Так как $(1+y)^\gamma/y^\gamma = (1+1/y)^\gamma$, $y > 0$, то при $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} (1-\varepsilon)y^\gamma &< (1+y)^\gamma < (1+\varepsilon)y^\gamma, \quad y > A = A(\varepsilon), \\ 1-\varepsilon &< J_A(t)/I_A(t) < 1+\varepsilon, \end{aligned}$$

и в силу произвольности ε лемма 2 доказана.

Обозначим через $B^p(c, d)$ класс функций, аналитических в полосе $c < \operatorname{Im} z < d$ и таких, что

$$\iint_{c < y < d} |G(x + iy)|^p dx dy < \infty, \quad -\infty < c < d < +\infty.$$

ЛЕММА 3 [10]. Если $G(z) \in B^p(c, d)$, $1 \leq p < \infty$, то

$$G(x + iy) \in L^p(\mathbb{R}), \quad y \in (c, d).$$

ЛЕММА 4. Пусть функция $G(z)$ аналитична в полосе $|y| < c < \infty$ и $G(z) \in B^{p_1}(0, c) \cap B^{p_2}(-c, 0)$, $1 \leq p_1, p_2 < \infty$. Тогда

$$G(z) \rightarrow 0, \quad \operatorname{Re} z \rightarrow \pm\infty, \quad (7)$$

равномерно в каждой полосе $|\operatorname{Im} z| \leq c - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для определенности $p_1 \leq p_2$. Обозначим через $K(w)$ круг $|z - w| < \varepsilon$, $|\operatorname{Im} w| \leq c - \varepsilon$. Он принадлежит исходной полосе $|\operatorname{Im} z| < c$. Докажем сначала, что

$$\iint_{K(w)} |G(z)|^{p_1} dx dy \rightarrow 0, \quad \operatorname{Re} w \rightarrow \pm\infty, \quad (8)$$

равномерно в полосе $|\operatorname{Im} w| \leq c - \varepsilon$.

Предположим противное: для некоторой последовательности точек w_n

$$\iint_{K(w_n)} |G(z)|^{p_1} dx dy \geq \delta > 0, \quad K(w_n) \cap K(w_m) = \emptyset. \quad (9)$$

Обозначим через K_n^+ и K_n^- пересечения круга $K(w_n)$ с полуплоскостями $\operatorname{Im} z \geq 0$ соответственно. Тогда из (9) следует, что для некоторой подпоследовательности индексов выполняется одно из следующих условий:

$$\iint_{K_n^+} |G(z)|^{p_1} dx dy \geq \delta/2, \quad \iint_{K_n^-} |G(z)|^{p_1} dx dy \geq \delta/2.$$

Но первое из них противоречит условию $G(z) \in B^{p_1}(0, c)$. А второе вместе с вытекающим из неравенства Гёльдера неравенством

$$\left(\iint_K |G(z)|^{p_1} dx dy \right)^{p_2} \leq C \left(\iint_K |G(z)|^{p_2} dx dy \right)^{p_1}, \quad C = C(\varepsilon, p_1, p_2),$$

где $K = K_n^-$, противоречит предположению $G(z) \in B^{p_2}(-c, 0)$. Соотношение (8) доказано.

В силу субгармоничности функции $|G(z)|^{p_1}$ имеем

$$|G(w)|^{p_1} \leq \frac{1}{\pi\varepsilon^2} \iint_{K(w)} |G(z)|^{p_1} dx dy,$$

и утверждение леммы следует из (8). Лемма 4 доказана.

В качестве X, Y будем рассматривать подмножества в $\mathbb{R}^n$, $n = 1, 2$. Через σ обозначаем меру Лебега. Пусть μ — некоторая (неотрицательная, вполне аддитивная) мера на X . Если $1 \leq p < \infty$, то $L^p(X, d\mu)$ обозначает пространство измеримых (по отношению к μ) функций с нормой

$$\|f\|_p = \|f\|_{p, \mu} = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

Через $\|f\|_\infty = \|f\|_{\infty, \mu}$ обозначаем нижнюю грань таких постоянных M , что $|f| \leq M$, за исключением множества E , для которого $\mu(E) = 0$. Через $L^\infty(X, d\mu)$ обозначается пространство измеримых функций с нормой $\|f\|_{\infty, \mu}$. Вместо $L^p(X, d\sigma)$ будем писать $L^p(X)$.

Предположим, что $d\mu = h d\sigma$, где h — положительный, локально интегрируемый вес. Ясно, что

$$\mu(E) = \int_E d\mu = \int_E h d\sigma = 0$$

тогда и только тогда, когда $\sigma(E) = 0$. Значит, справедливо

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если $d\mu = h d\sigma$, где h – положительный локально интегрируемый вес, то

$$L^\infty(X, d\mu) = L^\infty(X), \quad \|f\|_{\infty, \mu} = \|f\|_{\infty, \sigma}.$$

Пусть B_1, B_2 – нормированные пространства. Запись $T: B_1 \rightarrow B_2$ будет означать, что T – ограниченный линейный оператор, действующий из B_1 в B_2 .

Мы будем применять интерполяционную теорему Рисса–Торина [11, с. 144] в следующем упрощенном виде.

ТЕОРЕМА (Рисса–Торина). Пусть $1 \leq p_0 < \infty$, и пусть μ, ν – меры на X и Y соответственно. Пусть

$$\begin{aligned} T: L^\infty(X, d\mu) &\rightarrow L^\infty(Y, d\nu), & \|T\| &\leq M_\infty, \\ T: L^{p_0}(X, d\mu) &\rightarrow L^{p_0}(Y, d\nu), & \|T\| &\leq M_0. \end{aligned}$$

Тогда для всех $p \in (p_0, \infty)$

$$T: L^p(X, d\mu) \rightarrow L^p(Y, d\nu), \quad \|T\| \leq M_\infty^{1-p_0/p} \cdot M_0^{p_0/p}.$$

3. Пусть $\mathbb{R}_+^2 = ((x, y): y > 0)$. Через $A_+^p(\beta, a)$ обозначаем пространство аналитических в верхней полуплоскости $\text{Im } z > 0$ функций $F(z)$ с нормой

$$\|F(x + iy)(1 + y)^{(1-3/p)(1-\beta/2)} \exp(-K(\beta, a)y^\beta)\|_{L^p(\mathbb{R}_+^2)}, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

По определению $F(z) \in A_-^p(\beta, a)$, если $F(-z) \in A_+^p(\beta, a)$; при этом под нормой $F(z)$ в $A_-^p(\beta, a)$ понимается норма $F(-z)$ в $A_+^p(\beta, a)$. Нормы в пространствах $A_+^p(\beta, a)$, $A_-^p(\beta, a)$, $A^p(\beta, a)$ (последнее определено в п. 1) обозначаем соответственно через

$$\|\cdot\|_{p, \beta, a, +}, \quad \|\cdot\|_{p, \beta, a, -}, \quad \|\cdot\|_{p, \beta, a}.$$

Под H_-^2 понимаем пространство аналитических в полуплоскости $\text{Im } z < 0$ функций, для которых

$$\sup_{y < 0} \int_{\mathbb{R}} |F(x + iy)|^2 dx dy < \infty.$$

Всюду в дальнейшем через $C, C(\theta)$ обозначаются постоянные, не зависящие от участвующих функций (g, f, G, F и т.д.).

Сначала мы рассматриваем преобразования Фурье быстро убывающих функций, сосредоточенных на полупрямой, т.е. функции

$$G(z) = \int_b^\infty \exp(-izt) \exp(-at^\alpha) g(t) dt, \quad -\infty < b < +\infty, \quad \alpha > 1, \quad a > 0. \quad (10)$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $2 \leq p \leq \infty$. Если $g(t) \in L^p(b, \infty)$, то функция (10) целая и:

- 1) $G(z) \in A_+^p(\beta, a)$, причем $\|G(z)\|_{p, \beta, a, +} \leq C \|g\|_p$;
- 2) $G(z) \exp(ibz) \in H_-^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из неравенства Гёльдера следует, что интеграл (10) существует при всех $z \in \mathbb{C}$. Интеграл от $G(z) dz$ по любому замкнутому контуру равен нулю, что следует из (10) после изменения порядка интегрирования и применения теоремы Коши к функции $\exp(-izt)$. По теореме Морера $G(z)$ – целая функция. Мы повторили рассуждение из [9]. В последующих теоремах не будем на этом останавливаться.

Из (10) и из предположения $g(t) \in L^p$, $p \geq 2$, следует, что функция $G(z) \exp(ibz)$ является преобразованием Фурье функции из L^2 , сосредоточенной на полупрямой $\mathbb{R}_+$. По теореме Пэли–Винера $G(z) \exp(ibz) \in H_-^2$, т.е. утверждение 2) имеет место. Основным в теореме 1, конечно, является утверждение 1).

Пусть сначала $p = \infty$. Имеем

$$|G(z)| \leq \|g\|_\infty \int_b^\infty \exp(yt - at^\alpha) dt. \quad (11)$$

Пусть $c = K(\beta, a)$; тогда ясно, что $a = K(\alpha, c)$. Полагая $\gamma = 0$ и меняя ролями α и β , получаем по лемме 2

$$|G(z)| \leq C \|g\| y^{\beta/2-1} \exp(K(\beta, a)y^\beta), \quad y \geq 1.$$

Но если $0 < y < 1$, то из (11) видно, что $|G(z)| \leq C \|g\|_\infty$. Значит,

$$|G(z)| \leq C \|g\|_\infty (1 + y)^{\beta/2-1} \exp(K(\beta, a)y^\beta), \quad y \geq 0,$$

и при $p = \infty$ утверждение 1) верно.

Пусть теперь $p = 2$. При фиксированном y функция $G(x + iy)$ есть преобразование Фурье функции

$$\exp(yt - at^\alpha)g(t), \quad t > b,$$

принадлежащей $L^2(b, \infty)$; по равенству Парсеваля

$$\int_{\mathbb{R}} |G(x + iy)|^2 dx = 2\pi \int_b^\infty \exp(2(yt - at^\alpha)) |g(t)|^2 dt. \quad (12)$$

Проинтегрируем (12) по положительной мере

$$(1 + y)^{\beta/2-1} \exp(-2K(\beta, a)y^\beta) dy$$

вдоль полупрямой $\mathbb{R}_+$. Затем справа изменим порядок интегрирования. Получим

$$\begin{aligned} & \iint_{y>0} |G(z)|^2 (1 + y)^{\beta/2-1} \exp(-2K(\beta, a)y^\beta) dx dy \\ &= 2\pi \int_b^\infty |g(t)|^2 \exp(-2at^\alpha) dt \int_{\mathbb{R}_+} (1 + y)^{\beta/2-1} \exp(2(yt - K(\beta, a)y^\beta)) dy. \end{aligned}$$

По лемме 2 правая часть не превосходит $C \|g\|_2^2$, и при $p = 2$ утверждение 1) доказано.

Случай $2 < p < \infty$ достигается интерполяцией по Риссу–Торину. Рассмотрим линейный оператор T , действующий по правилу

$$g(t) \rightarrow G(z)(1 + y)^{1-\beta/2} \exp(-K(\beta, a)y^\beta).$$

Мы доказали, что одновременно

$$T : L^\infty((b, \infty), dt) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R}_+^2, dx dy), \quad (13)$$

$$T : L^2((b, \infty), dt) \rightarrow L^2(\mathbb{R}_+^2, (1+y)^{3\beta/2-3} dx dy). \quad (14)$$

В силу замечания 1 свойство (13) может быть записано в таком виде:

$$T : L^\infty((b, \infty), dt) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R}_+^2, (1+y)^{3\beta/2-3} dx dy). \quad (15)$$

Теперь по теореме Рисса–Торина из (14) и (15) следует, что при всех $p \in (2, \infty)$

$$T : L^p((b, \infty), dt) \rightarrow L^p(\mathbb{R}_+^2, (1+y)^{3\beta/2-3} dx dy).$$

А это и означает справедливость утверждения 1) теоремы 1. Теорема 1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При $1 \leq p < 2$ оба утверждения теоремы 1 теряют силу.

Это подтверждается примером функции

$$G(z) = \int_0^1 e^{-izt} t^{-\gamma} dt, \quad 0 < \gamma < 1, \quad (16)$$

при надлежаще подобранном γ . Убедимся в этом.

Ясно, что $G(z)$ имеет вид (10), где $b = 0$, а $g(t) = 0$ на $(1, \infty)$ и

$$\exp(-at^\alpha)g(t) = t^{-\gamma}, \quad 0 < t < 1.$$

Значит, условие $g \in L^p(0, \infty)$ равносильно условию $\gamma < 1/p$. Из леммы об асимптотике интеграла Фурье [12, с. 40] следует, что при любом фиксированном y

$$G(x+iy) = \int_0^1 e^{-ixt} e^{yt} t^{-\gamma} dt \asymp (1+|x|)^{\gamma-1}, \quad |x| > x_0 \quad (17)$$

(здесь символ $\asymp$ означает, что отношение левой и правой частей отделено от нуля и бесконечности). Следовательно, $G(x+iy) \notin L^2(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда $\gamma \geq 1/2$, а y любое. Так как $p < 2$, то выбор γ , удовлетворяющего обоим неравенствам: $1/2 \leq \gamma < 1/p$, возможен. В итоге при таком значении γ имеем $g(t) \in L^p$, $G(x+iy) \notin L^2(\mathbb{R})$, и в силу (17) $G(x+iy) \notin L^p(\mathbb{R})$. А это уже противоречит утверждениям теоремы 1. Действительно, если бы $G(z) \in H_-^2$, то $G(x+iy) \in L^2(\mathbb{R})$ при всех $y < 0$. Далее, если бы $G(z) \in A_+^p(\beta, a)$, то были бы выполнены условия леммы 3 с $c = 0$ и с произвольным $d > 0$. По этой лемме $G(x+iy) \in L^p(\mathbb{R})$, $y > 0$. Замечание 2 имеет место.

4. Следующая теорема является двойственной по отношению к теореме 1.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $1 \leq q \leq 2$, $-\infty < b < +\infty$, и пусть $G(z)$ – целая функция, удовлетворяющая следующим условиям:

- 1) $G(z) \in A_+^q(\beta, a)$;
- 2) $G(z) \exp(ibz) \in H_-^2$.

Тогда $G(z)$ представима в виде (10) с $g(t) \in L^q(b, \infty)$ и

$$\|g\|_q \leq C \|G(z)\|_{q, \beta, a, +}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условий 1) и 2) следует, что $G(z) \in B^q(0, c)$ и $G(z) \in B^2(-c, 0)$ при любом $c > 0$. По лемме 4 имеет место соотношение (7) равномерно в каждой горизонтальной полосе. Далее, по лемме 3

$$G(x + iy) \in L^q(\mathbb{R}), \quad y > 0, \quad (18)$$

и $G(x) \in L^2(\mathbb{R})$ по условию 2).

Обозначим через

$$\exp(-at^\alpha)g(t) \quad (19)$$

обратное преобразование Фурье функции $G(x)$. Так как $G(z) \exp(ibz) \in H_-^2$, то по теореме Пэли–Винера обратное преобразование Фурье функции $G(x) \exp(ibx)$ сосредоточено на $\mathbb{R}_+$. Значит, обратное преобразование Фурье функции $G(x)$ сосредоточено на (b, ∞) , т.е. $g(t) = 0$ при $t < b$. Надо доказать, что $g(t) \in L^q(b, \infty)$, и оценить норму $g(t)$ через норму $G(z)$ в $A_+^q(\beta, a)$.

При фиксированном $y > 0$ рассмотрим обратное преобразование Фурье функции $G(x + iy)$ (существующее в силу (18) и теоремы Хаусдорфа–Юнга):

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ixt} G(x + iy) dx = \frac{1}{2\pi} \exp(yt) \int_{\operatorname{Im} z = y} e^{izt} G(z) dz.$$

С помощью равномерного соотношения (7) последний интеграл деформируется в интеграл по вещественной прямой, дающий (вместе с коэффициентом $1/(2\pi)$) обратное преобразование Фурье функции $G(x)$, т.е. функцию (19). Следовательно, обратное преобразование Фурье функции $G(x + iy)$ ($y > 0$) равно

$$\exp(yt - at^\alpha)g(t). \quad (20)$$

Пусть $h(t) \in L^p(b, \infty)$, $p = q/(q - 1) \geq 2$, и

$$H(z) = \int_b^\infty e^{-izt} \exp(-at^\alpha)h(t) dt.$$

Достаточно доказать, что

$$\sup_{\|h\|=1} \left| \int_b^\infty g(t) \bar{h}(t) dt \right| \leq C \|G(z)\|_{q, \beta, a, +}. \quad (21)$$

Рассмотрим функцию $J(t) = J_{0,2,\gamma}(t)$ в обозначениях (5) с $\gamma = \beta/2 - 1$. Функция $J(t) \exp(-2at^\alpha)$ положительна и непрерывна на полупрямой $[b, \infty)$ и по лемме 2 имеет положительный предел при $t \rightarrow +\infty$. Значит, функция $B(t) = (J(t) \exp(-2at^\alpha))^{-1}$ ограничена (пусть константой B) на полупрямой $[b, \infty)$. Имеем

$$\int_b^\infty g(t) \bar{h}(t) dt = \int_b^\infty g(t) \bar{h}(t) B(t) \exp(-2at^\alpha) J(t) dt.$$

Мы рассматриваем функции $h(t)$ из единичной сферы пространства L^p (см. (21)). Тогда функции $h(t) \bar{B}(t)$ лежат в шаре радиуса B с центром в нуле пространства $L^p(b, \infty)$. Поэтому

$$\begin{aligned} \sup_{\|h\|=1} \left| \int_b^\infty g(t) \bar{h}(t) dt \right| &\leq \sup_{\|h\| \leq B} \left| \int_b^\infty g(t) \bar{h}(t) \exp(-2at^\alpha) dt \right| \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}_+} (1+y)^{\beta/2-1} \exp(2(yt - K(\beta, a)y^\beta)) dy. \end{aligned} \quad (22)$$

В правой части изменим порядок интегрирования, после чего применим равенство Парсеваля, помня, что $H(x + iy)$ есть преобразование Фурье функции $\exp(yt - at^\alpha)h(t)$ и что обратное преобразование функции $G(x + iy)$ есть функция (20). Получим, что выражение под знаком модуля в правой части (22) равно

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}_+} (1+y)^{\beta/2-1} \exp(-2K(\beta, a)y^\beta) dy \int_b^\infty g(t)\bar{h}(t) \exp(2(yt - at^\alpha)) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}_+} (1+y)^{\beta/2-1} \exp(-2K(\beta, a)y^\beta) dy \int_{\mathbb{R}} G(x+iy)\overline{H}(x+iy) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}_+^2} G(z)\overline{H}(z)(1+y)^{(1-3/q)(1-\beta/2)+(1-3/p)(1-\beta/2)} \\ & \quad \times \exp(-2K(\beta, a)y^\beta) dx dy, \end{aligned}$$

так как $1/p + 1/q = 1$. Теперь к правой части применим неравенство Гёльдера, используя условие 1) теоремы 2 (для $G(z)$) и утверждение 1) теоремы 1 (для $H(z)$). Получим требуемую оценку (21).

Остается доказать представление (10). Для этого рассмотрим правую часть в (10). С одной стороны, это целая функция. С другой (по построению) – на вещественной прямой она совпадает с $G(x)$. По теореме единственности она совпадает с $G(z)$ всюду. Теорема 2 доказана.

При $p = q = 2$ теоремы 1, 2 дают следующее утверждение типа теоремы Пэли–Винера.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Класс функций, представимых в виде (10) с $g \in L^2$, где b конечно, совпадает с классом целых функций, для которых:*

- 1) $G(z) \in A_+^2(\beta, a)$;
- 2) $G(z) \exp(ibz) \in H_-^2$.

При этом

$$\|G\|_{2,\beta,a,+} \asymp \|g\|_2.$$

Здесь и в последующем символ $\asymp$ означает эквивалентность норм.

5. В этом пункте рассматривается вопрос об интегрируемости функций (10) на лучах $\arg z = \theta$ в комплексной плоскости. Наибольшего интереса заслуживают значения $\theta \in (0, \pi)$. Действительно, если $\theta = 0, \pi$, то в нашем распоряжении имеется теория преобразования Фурье. Если же $\theta \in (-\pi, 0)$, т.е. $\operatorname{Re}(iz) > 0$, то можно пользоваться результатами о поведении преобразования Лапласа [13], из которых, в частности, следует, что если $g \in L^p(b, \infty)$, $1 < p < \infty$, то

$$G(re^{i\theta}) \exp(ibre^{i\theta}) \in L^p(\mathbb{R}_+, r^{p-2} dr)$$

для всех $\theta \in (-\pi, 0)$.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $g(t) \in L^p(b, \infty)$, $1 \leq p \leq \infty$; пусть $G(z)$ – функция (10). Тогда при любом $\theta \in (0, \pi)$*

$$G(re^{i\theta})(1+r)^{(1-2/p)(1-\beta/2)} \exp(-K(\beta, a)(r \sin \theta)^\beta) \in L^p(\mathbb{R}_+).$$

При этом

$$\left\| G(re^{i\theta})(1+r)^{(1-2/p)(1-\beta/2)} \exp(-K(\beta, a)(r \sin \theta)^\beta) \right\|_p \leq C(\theta) \|g\|_p. \quad (23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $(1 + r) \sin \theta \leq 1 + r \sin \theta \leq 1 + r$, то достаточно доказать оценку

$$\left\| G(re^{i\theta})(1 + r \sin \theta)^{(1-2/p)(1-\beta/2)} \exp(-K(\beta, a)(r \sin \theta)^\beta) \right\|_p \leq C(\sin \theta)^{-1/p} \|g\|_p. \quad (24)$$

Считаем $\theta \in (0, \pi)$ фиксированным. Используя вытекающую из (10) оценку

$$|G(re^{i\theta})| \leq \int_b^\infty \exp(tr \sin \theta - at^\alpha) |g(t)| dt, \quad (25)$$

мы докажем теорему для $p = \infty$ и $p = 1$, а затем проведем соответствующую интерполяцию.

Пусть $p = \infty$. Из (25) следует, что

$$|G(re^{i\theta})| \leq \|g\|_\infty \int_b^\infty \exp(tr \sin \theta - at^\alpha) dt.$$

Применим к последнему интегралу лемму 2, меняя в ней ролями α и β и помня, что если $a = K(\alpha, c)$, то $c = K(\beta, a)$. Получим, что при $r > 0$

$$|G(re^{i\theta})| \leq C\|g\|_\infty (1 + r \sin \theta)^{\beta/2-1} \cdot \exp(K(\beta, a)(r \sin \theta)^\beta),$$

и для $p = \infty$ (24) доказано.

Пусть $p = 1$. Проинтегрируем (25) по мере

$$(1 + r \sin \theta)^{\beta/2-1} \cdot \exp(-K(\beta, a)(r \sin \theta)^\beta) \sin \theta dr$$

вдоль $\mathbb{R}_+$. Затем после подстановки $r \sin \theta = s$ изменим порядок интегрирования. Будем иметь

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}_+} |G(re^{i\theta})| (1 + r \sin \theta)^{\beta/2-1} \cdot \exp(-K(\beta, a)(r \sin \theta)^\beta) \sin \theta dr \\ & \leq \int_b^\infty |g(t)| \exp(-at^\alpha) dt \int_{\mathbb{R}_+} (1 + s)^{\beta/2-1} \exp(st - K(\beta, a)s^\beta) ds. \end{aligned}$$

По лемме 2 последнее выражение не превосходит $C\|g\|_1$. Значит, и при $p = 1$ (24) верно.

Теперь рассмотрим линейный оператор, действующий по правилу

$$T : g(t) \rightarrow G(re^{i\theta})(1 + r \sin \theta)^{1-\beta/2} \cdot \exp(-K(\beta, a)(r \sin \theta)^\beta).$$

Мы доказали, что одновременно

$$\begin{aligned} T : L^\infty((b, \infty), dt) & \rightarrow L^\infty(\mathbb{R}_+, (1 + r \sin \theta)^{\beta-2} dr), & \|T\| & \leq C, \\ T : L^1((b, \infty), dt) & \rightarrow L^1(\mathbb{R}_+, (1 + r \sin \theta)^{\beta-2} dr), & \|T\| & \leq C/\sin \theta \end{aligned}$$

(в первом случае мы, как и при доказательстве теоремы 1, учли замечание 1). По теореме Рисса–Торина для всех $p \in (1, \infty)$

$$T : L^p((b, \infty), dt) \rightarrow L^p(\mathbb{R}_+, (1 + r \sin \theta)^{\beta-2} dr), \quad \|T\| \leq C/(\sin \theta)^{1/p}.$$

А это и означает справедливость оценки (24). Теорема 3 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Оценка (24) может быть записана в виде

$$\|G(re^{i\theta}/\sin\theta)(1+r)^{(1-2/p)(1-\beta/2)} \cdot \exp(-K(\beta, a)r^\beta)\|_p \leq C\|g\|_p.$$

Теорема 3 отражает ту комплексную специфику преобразования Фурье (10), которая порождается быстро убывающим весом. Можно ли надеяться на то, что функция (10) и на вещественной прямой сохраняет подобный эффект? Вообще говоря, нет, как показывает

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Если $1 \leq p < 2$, то при $\theta = 0, \pi$ теорема 3 теряет силу.

Для доказательства обратимся к функции (16), которая, как мы видели при доказательстве замечания 2, имеет вид (10) с $b = 0$, причем условие $g(t) \in L^p(0, \infty)$ равносильно условию $\gamma < 1/p$. Далее, в силу (17) условие

$$G(x)(1+|x|)^{(1-2/p)(1-\beta/2)} \notin L^p(\mathbb{R}_+) \quad (\text{или } L^p(\mathbb{R}_-)) \quad (26)$$

равносильно условию $p((\gamma-1) + (1-2/p)(1-\beta/2)) \geq -1$, которое записывается в виде $\gamma \geq 1/p - \beta/p + \beta/2$. Если $p < 2$, то очевидно, что выбор γ , удовлетворяющего этому условию и одновременно условию $\gamma < 1/p$, возможен. При таком выборе γ $g(t) \in L^p(0, \infty)$ и имеет место свойство (26). Замечание 4 верно.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Если $p \geq 2$, $1 < \alpha \leq 2$, то теорема 3 сохраняет силу при $\theta = 0, \pi$.

Действительно, если $g(t) \in L^p(b, \infty)$, $p \geq 2$, то

$$\exp(-at^\alpha)g(t) \in L^2(b, \infty) \cap L^1(b, \infty).$$

Значит, $G(x) \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, и потому

$$G(x) \in L^p(\mathbb{R}), \quad p \geq 2. \quad (27)$$

И так как $p \geq 2$, $\beta \geq 2$, то $(1-2/p)(1-\beta/2) \leq 0$, и из (27) следует, что

$$G(x)(1+|x|)^{(1-2/p)(1-\beta/2)} \in L^p(\mathbb{R}).$$

6. Перейдем к функциям вида

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_{\mathbb{R}_-} \exp(-izt) \exp(-a_-|t|^{\alpha_-}) f_-(t) dt \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}_+} \exp(-izt) \exp(-a_+|t|^{\alpha_+}) f_+(t) dt, \end{aligned} \quad (28)$$

где $a_\pm > 0$, $\alpha_\pm > 1$. Их рассмотрение подготовлено изучением функций (10). Пусть $1/\alpha_\pm + 1/\beta_\pm = 1$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $a_\pm > 0$, $\alpha_\pm > 1$, $f_\pm(t) \in L^{p_\pm}(\mathbb{R}_\pm)$, где $2 \leq p_\pm \leq \infty$. Тогда функция (28) целая и

$$F(z) \in A_+^{p_+}(\beta_+, a_+) \cap A_-^{p_-}(\beta_-, a_-),$$

причем

$$\|F(z)\|_{p_\pm, \beta_\pm, a_\pm, \pm} \leq C(\|f_+\|_{p_+} + \|f_-\|_{p_-}). \quad (29)$$

В частности, если $f(t) \in L^p(\mathbb{R})$, $2 \leq p \leq \infty$, и

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-izt) \exp(-a|t|^\alpha) f(t) dt, \quad a > 0, \quad \alpha > 1, \quad (30)$$

то $F(z) \in A^p(\beta, a)$, причем

$$\|F(z)\|_{p, \beta, a} \leq C\|f\|_p.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $F_-(z)$ и $F_+(z)$ слагаемые в правой части (28). По теореме 1

$$\|F_+(z)\|_{p_+, \beta_+, a_+, +} \leq C \|f_+\|_{p_+}. \quad (31)$$

Далее, так как при фиксированном y функция $F_-(x + iy)$ есть преобразование Фурье функции $\exp(yt - a_-|t|^{\alpha_-})f_-(t)$ ($t < 0$), то с помощью неравенства Гёльдера и равенства Парсеваля находим: при всех $y > 0$

$$|F_-(x + iy)| \leq C \|f_-\|_{p_-}, \quad \|F_-(x + iy)\|_2 \leq C \|f_-\|_{p_-}. \quad (32)$$

Значит, $\|F_-(x + iy)\|_{p_+} \leq C \|f_-\|_{p_-}$, $y > 0$, и, следовательно,

$$\|F_-(z)\|_{p_+, \beta_+, a_+, +} \leq C \|f_-\|_{p_-}. \quad (33)$$

Так как $\|F\| \leq \|F_+\| + \|F_-\|$, то неравенства (31) и (33) дают требуемую оценку (29) для верхней строки знаков. Аналогично эта оценка выводится и для нижней строки знаков. Чтобы получить утверждение, касающееся функции (30), возведем оба неравенства (29) в степень $p = p_+ = p_-$ и сложим. Тогда

$$\|F(z)\|_{p, \beta, a}^p \leq C (\|f_+\|_p + \|f_-\|_p)^p, \quad \beta = \beta_+ = \beta_-, \quad a = a_+ = a_-,$$

и остается применить элементарное неравенство

$$(A + B)^p \leq 2^{p-1}(A^p + B^p), \quad A, B > 0, \quad p \geq 1.$$

Теорема 4 доказана.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $1 \leq q_{\pm} \leq 2$, $a_{\pm} > 0$, $\beta_{\pm} > 1$. Предположим, что $F(z)$ — целая функция такая, что

$$F(z) \in A_+^{q_+}(\beta_+, a_+) \cap A_-^{q_-}(\beta_-, a_-).$$

Тогда $F(z)$ представима в виде (28), где $f_{\pm}(t) \in L^{q_{\pm}}(\mathbb{R}_{\pm})$, причем

$$\|f_{\pm}\|_{q_{\pm}} \leq C \|F(z)\|_{q_{\pm}, \beta_{\pm}, a_{\pm}, \pm}. \quad (34)$$

В частности, если $1 \leq q \leq 2$, $a > 0$, $\beta > 1$ и $F(z)$ — целая функция такая, что $F(z) \in A^q(\beta, a)$, то $F(z)$ представима в виде (30), где $f(t) \in L^q(\mathbb{R})$, и

$$\|f\|_q \leq C \|F(z)\|_{q, \beta, a}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предположению $F(z) \in B^{q_+}(0, c) \cap B^{q_-}(-c, 0)$ при любом $c > 0$. По лемме 4 имеет место соотношение (7) равномерно в каждой горизонтальной полосе. В частности, $|F(z)|$ ограничен в каждой горизонтальной полосе. Пусть для определенности $q_+ \geq q_-$. Тогда из ограниченности $|F(z)|$ в полосе $-c < y < 0$ и из условия $F(z) \in B^{q_-}(-c, 0)$ следует, что $F(z) \in B^{q_+}(-c, 0)$. Значит, $F(z) \in B^{q_+}(-c, c)$ при любом $c > 0$. По лемме 3 $F(x + iy) \in L^{q_+}(\mathbb{R})$ при любом фиксированном y . По теореме Хаусдорфа–Юнга при любом y у функции $F(x + iy)$ существует обратное преобразование Фурье. Обозначим обратное преобразование Фурье функции $F(x)$ через

$$\exp(-a_{\pm}|t|^{\alpha_{\pm}})f_{\pm}(t), \quad t \in \mathbb{R}_{\pm}.$$

Так же, как и при доказательстве теоремы 2 (с использованием (7) для $F(z)$), заключаем, что обратное преобразование Фурье функции $F(x + iy)$ при $t > 0$ равно

$$\exp(yt - a_+ t^{\alpha_+}) f_+(t). \quad (35)$$

Пусть $h(t) \in L^{p_+}(\mathbb{R}_+)$, $1/p_+ + 1/q_+ = 1$ и

$$H(z) = \int_0^\infty \exp(-izt) \exp(-a_+ t^{\alpha_+}) h(t) dt.$$

Чтобы убедиться в справедливости (34) для верхней строки знаков, достаточно доказать, что

$$\sup_{\|h\|=1} \left| \int_0^\infty f_+(t) \bar{h}(t) dt \right| \leq C \|F(z)\|_{q_+, \beta_+, a_+, +}.$$

А это делается точно так же, как в доказательстве теоремы 2 (см. текст после (21)). При этом $b = 0$, а в роли (20) теперь выступает (35). Случай нижних знаков в (34) сводится к рассмотренному заменой z на $-z$. Так же, как в теореме 2, доказываем и представление (28). Теорема 5 доказана.

При $p_\pm = q_\pm = 2$ теоремы 4, 5 дают следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Класс функций, представимых в виде (28), где $f_\pm(t) \in L^2(\mathbb{R}_\pm)$, $a_\pm > 0$, $\alpha_\pm > 1$, совпадает с классом целых функций $F(z)$ таких, что $F(z) \in A_+^2(\beta_+, a_+) \cap A_-^2(\beta_-, a_-)$. При этом*

$$\|F(z)\|_{2, \beta_\pm, a_\pm, \pm} \leq C(\|f_+\|_2 + \|f_-\|_2), \quad \|f_\pm\|_2 \leq C\|F(z)\|_{2, q_\pm, \beta_\pm, a_\pm, \pm}.$$

В частности, класс функций, представимых в виде (30) с $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$, совпадает с классом целых функций $A^2(\beta, a)$. При этом

$$\|F\|_{2, \beta, a} \asymp \|f\|_2.$$

ТЕОРЕМА 6. *Пусть $1 \leq p_\pm \leq \infty$, $a_\pm > 0$, $\alpha_\pm > 1$, $I_+ = (0, \pi)$, $I_- = (-\pi, 0)$. Пусть, далее, $f_\pm(t) \in L^{p_\pm}(\mathbb{R}_\pm)$, и пусть $F(z)$ – функция (28). Тогда если $\theta \in I_\pm$, то*

$$F(re^{i\theta})(1+r)^{(1-2/p_\pm)(1-\beta_\pm/2)} \exp(-K(\beta_\pm, a_\pm)(r|\sin \theta|)^{\beta_\pm}) \in L^{p_\pm}(\mathbb{R}_+),$$

причем

$$\begin{aligned} & \left\| F(re^{i\theta})(1+r)^{(1-2/p_\pm)(1-\beta_\pm/2)} \exp(-K(\beta_\pm, a_\pm)(r|\sin \theta|)^{\beta_\pm}) \right\|_{p_\pm} \\ & \leq C(\theta)(\|f_+\|_{p_+} + \|f_-\|_{p_-}). \end{aligned} \quad (36)$$

В частности, если $F(z)$ – функция (30), где $f(t) \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$, то при $\theta \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$,

$$\left\| F(re^{i\theta})(1+r)^{(1-2/p)(1-\beta/2)} \exp(-K(\beta, a)(r|\sin \theta|)^\beta) \right\|_p \leq C(\theta)\|f\|_p.$$

Эта теорема есть следствие теоремы 3. Действительно, если $F_\mp(z)$ – слагаемые в (28), то для $F_+(z)$ и $\theta \in I_+$ утверждение теоремы 6 имеет место по теореме 3. А для $F_-(z)$ и $\theta \in I_+$ оно справедливо в силу первой оценки (32). Складывая эти оценки для $F_\pm(z)$ и учитывая, что $\|F\| \leq \|F_+\| + \|F_-\|$, получаем (36) для верхней строки знаков. Нижняя строка знаков сводится к верхней заменой z на $-z$. Теорема 6 имеет место.

7. В оставшейся части статьи даются применения теоремы 5 к исследованию минимальности и неполноты взвешенных систем экспонент

$$\exp(-i\lambda_n t - t^2/2), \quad (\lambda_n) = \Lambda, \quad (37)$$

в пространствах $L^p(\mathbb{R})$. Как показано в [9], если

$$\Lambda = \bigcup_{k=0}^3 (2(\pi n)^{1/2} \exp(i(\pi/4 + \pi k/2)))_{n=1}^{\infty} \cup (\pm\lambda), \quad (38)$$

где точка λ не равна 0 и не принадлежит предыдущему множеству в (38), то система (37) полна и минимальна в $L^2(\mathbb{R})$. В статье [14] рассмотрены более общие последовательности показателей

$$\Lambda = \bigcup_{k=0}^3 (2(\pi(n+\alpha))^{1/2} \exp(i(\pi/4 + \pi k/2)))_{n=1}^{\infty} \cup (\pm\lambda), \quad \alpha > -1, \quad (39)$$

и установлено, что в этом случае полнота системы (37) в $L^2(\mathbb{R})$ равносильна условию $\alpha \leq 1/8$, а минимальность – условию $\alpha > -1/8$.

Мы рассматриваем всевозможные повороты последовательностей (39), т.е. последовательности

$$\Lambda = \bigcup_{k=0}^3 (2(\pi(n+\alpha))^{1/2} \exp(i(\gamma + \pi k/2)))_{n=1}^{\infty} \cup (\lambda) \cup (\mu), \quad \alpha > -1, \quad \gamma \in [0, \pi/2), \quad (40)$$

где λ, μ – произвольные точки. Имеет место

ТЕОРЕМА 7. Пусть Λ – последовательность (40), пусть $p \geq 2$. Тогда:

- 1) при $\alpha > 1/(4q)$ система (37) неполна в $L^p(\mathbb{R})$;
- 2) при $\alpha > 1/(4q) - 1/4$ система (37) минимальна в $L^p(\mathbb{R})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$L(z) = z \prod_1^{\infty} (1 - z^2/(n+\alpha)^2), \quad \alpha > -1.$$

Нам понадобится оценка [15]

$$|L(z)| \leq C \exp(\pi|y|)/r^{2\alpha}, \quad r = |z| \geq 1. \quad (41)$$

Введем в рассмотрение целую функцию

$$F(z) = e^{-z^2/4} L(e^{-2i\gamma} z^2/(4\pi)) (z - \lambda)(z - \mu)/z^2. \quad (42)$$

Ясно, что множество нулей функции $F(z)$ совпадает с последовательностью (40). Поэтому, доказав представление

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-izt - t^2/2) f(t) dt, \quad f \neq 0, \quad f \in L^q,$$

мы установим неполноту системы (37) в $L^p(\mathbb{R})$. В свою очередь в силу теоремы 5 это представление является следствием свойства

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |F(x + iy)|^q \exp(-(q/2)y^2) dx dy < \infty. \quad (43)$$

Таким образом, для доказательства утверждения 1) нам достаточно показать, что если $\alpha > 1/(4q)$, то справедливо свойство (43).

Пусть $r = |z|$, $\theta = \arg z$. В силу (41) и (42) подынтегральная функция в (43) не превосходит

$$Cr^{-4\alpha q} \exp((q/4)r^2(|\sin 2(\theta - \gamma)| - \cos 2\theta - 2\sin^2 \theta)), \quad r > 1. \quad (44)$$

Но выражение $2\sin^2 \theta + \cos 2\theta - |\sin 2(\theta - \gamma)| = 1 - |\sin 2(\theta - \gamma)|$ равно либо $2\sin^2(\pi/4 - \theta + \gamma)$, либо $2\cos^2(\pi/4 - \theta + \gamma)$. Поэтому нам достаточно убедиться в том, что при $h(\theta) = \sin^2 \theta, \cos^2 \theta$

$$\int_0^\infty \int_0^{\pi/2} r^{1-4\alpha q} \exp(-(q/2)r^2 h(\theta)) dr d\theta \stackrel{\text{df}}{=} J < \infty.$$

Имеем

$$\int_0^\infty r^{1-4\alpha q} \exp(-(q/2)r^2 h(\theta)) dr = (1/2)\Gamma(1 - 2\alpha q)((q/2)h(\theta))^{2\alpha q - 1},$$

и, значит,

$$J \leq C \int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^{4\alpha q - 2} d\theta = C \int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^{4\alpha q - 2} d\theta.$$

Поэтому $J < \infty$, если $\alpha > 1/(4q)$. Утверждение 1) доказано.

Для доказательства минимальности достаточно показать, что

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |F(z)|^q (1 + |z|)^{-q} \exp(-(q/2)y^2) dx dy < \infty. \quad (45)$$

Действительно, если (45) верно, то по теореме 5 при любом n

$$\frac{F(z)}{F'(\lambda_n)(z - \lambda_n)} = \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-izt - \frac{t^2}{2}\right) h_n(t) dt, \quad h_n(t) \in L^q(\mathbb{R}).$$

Отсюда и из того, что множество нулей $F(z)$ есть последовательность (40), следует, что $h_n(t)$ — биортогональная система к системе (37). И так как $h_n(t) \in L^q(\mathbb{R})$, то система (37) минимальна в $L^p(\mathbb{R})$.

Сравнивая (45) и (43), делаем вывод, что подынтегральная функция в (45) при больших r мажорируется выражением (44), в котором $r^{-4\alpha q}$ следует заменить на $r^{-4\alpha q - q}$. Но это равносильно тому, что в только что проведенных рассуждениях α заменяется на $\alpha + 1/4$. В итоге левая часть в (45) не превосходит выражения

$$C \int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^{4\alpha q + q - 2} d\theta = C \int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^{4\alpha q + q - 2} d\theta,$$

которое конечно, если $4\alpha q + q - 2 > -1$. Значит, при $\alpha > 1/(4q) - 1/4$ свойство (45) имеет место. Утверждение 2) также доказано. Теорема 7 верна.

Мы не касаемся здесь достаточных условий полноты и неминимальности систем (37), (40); этот вопрос требует отдельного рассмотрения.

Список литературы

1. *Hardy G. H.* A theorem concerning Fourier transforms // J. London Math. Soc. 1933. V. 8. P. 227–231.
2. *Morgan G. W.* A note on Fourier transforms // J. London Math. Soc. 1934. V. 9. P. 187–192.
3. *Гельфанд И. М., Шиллов Г. Е.* Преобразования Фурье быстро убывающих функций и вопросы единственности решения задачи Коши // УМН. 1953. Т. 3. № 6. С. 3–54.
4. *Бабенко К. И.* Об одной новой проблеме квазианалитичности и о преобразовании Фурье целых функций // Тр. Моск. матем. об-ва. 1956. № 5. С. 523–542.
5. *Zalik R.* On approximation by shifts and a theorem of Wiener // Trans. Amer. Math. Soc. 1978. V. 243. P. 299–308.
6. *Faxen B.* On approximation by translates and related problems in function theory // Ark. math. 1981. V. 19. P. 271–289.
7. *Седлецкий А. М.* Аппроксимация сдвигами и полнота взвешенных систем экспонент в $L^2(\mathbb{R})$ // Матем. сб. 1984. Т. 123. № 1. С. 92–107.
8. *Zalik R.* Remarks on a paper of Gelfand and Šilov on Fourier transforms // J. Math. Anal. and Appl. 1984. V. 102. P. 102–112.
9. *Zalik R., Abuabara Saad T.* Some theorems concerning holomorphic Fourier transforms // J. Math. Anal. and Appl. 1987. V. 126. P. 483–493.
10. *Sedletskii A. M.* Theorems of Paley–Wiener–Pitt’s type for Fourier transforms of rapidly decreasing functions // Integr. Transf. and Spec. Functions. 1994. V. 2. № 2. P. 153–164.
11. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. В 2-х т. Т. 1. Тригонометрические ряды. М.: Мир, 1965.
12. *Консон Э.* Асимптотические разложения. М.: Мир, 1966.
13. *Sedletskii A. M.* An analogue of a Hardy–Littlewood theorem for Laplace transform and its applications // Anal. math. 1985. V. 11. № 4. P. 343–354.
14. *Сальникова Т. А.* Полные и минимальные системы экспонент в пространствах $L^p(\mathbb{R})$ // Матем. заметки. 1994. Т. 55. № 3. С. 118–129.
15. *Седлецкий А. М.* Биортогональные разложения функций в ряды экспонент на интервалах вещественной оси // УМН. 1982. Т. 37. № 5. С. 51–95.

Поступило в редакцию
2.III.1995