Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Смирнов, Описание гомологий групп и алгебр, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1997, том 61, выпуск 3, 203–212

DOI: <https://doi.org/10.4213/im131>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 15:14:57

УДК 513.83

В. А. Смирнов

Описание гомологий групп и алгебр

В работе дается описание гомологий групп и алгебр на языке A_∞ -структур
 Сташеффа. Найдены образующие и соотношения.
 Библиография: 8 наименований.

Пусть A – алгебра (над полем R). Тогда B -конструкцией BA над алгеброй A называется цепной комплекс

$$BA: A \leftarrow A \otimes A \leftarrow \dots \leftarrow A^{\otimes n} \leftarrow \dots,$$

образующие $x_1 \otimes \dots \otimes x_n \in A^{\otimes n}$ в котором обозначаются $[x_1, \dots, x_n]$ и дифференциал задается формулой

$$d[x_1, \dots, x_n] = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i [x_1, \dots, \pi(x_i \otimes x_{i+1}), \dots, x_n],$$

где $\pi: A \otimes A \rightarrow A$ – умножение в алгебре A .

Помимо структуры цепного комплекса B -конструкция BA имеет структуру коалгебры $\nabla: BA \rightarrow BA \otimes BA$, которая задается формулой

$$\nabla[x_1, \dots, x_n] = \sum_{i=1}^{n-1} [x_1, \dots, x_i] \otimes [x_{i+1}, \dots, x_n].$$

Гомологии $H_*(BA)$ B -конструкции BA над алгеброй A называются *гомологиями алгебры A* . Когомологии $H^*(BA) = H_*(\overline{BA})$, где $\overline{BA} = \text{Hom}(BA; R)$, называются *когомологиями алгебры A* [1].

В частности, если для группы G рассмотреть групповое кольцо $R(G)$ и групповую алгебру $A = \text{Ker}\{a: R(G) \rightarrow R\}$, то гомологии и когомологии алгебры A в этом случае называются соответственно *гомологиями* и *когомологиями группы G* . Наша задача состоит в описании этих гомологий. При этом, поскольку гомологии групп являются частным случаем гомологий алгебр, мы будем рассматривать случай гомологий и когомологий алгебр.

Первый вопрос, который нужно решить, состоит в выяснении алгебраической структуры, имеющейся на гомологиях и когомологиях алгебр, помимо обычной

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда (грант № MNJ300).

групповой структуры. Для этого заметим, что если K – дифференциальная ко-алгебра, то на ее гомологиях $K_* = H_*(K)$ имеется структура A_∞ -коалгебры, и поэтому на гомологиях B -конструкции BA алгебры A имеется структура A_∞ -ко-алгебры.

Двойственным образом, если A – дифференциальная алгебра, то на ее гомологиях $A_* = H_*(A)$ имеется структура A_∞ -алгебры, и поэтому на когомологиях B -конструкции BA алгебры A имеется структура A_∞ -алгебры [2]–[4].

Мы будем использовать эти структуры для описания гомологий и когомологий алгебр.

Напомним, что градуированный модуль A называется A_∞ -алгеброй, если задано семейство отображений $\pi_n: A^{\otimes n+2} \rightarrow A$, повышающих размерность на n и удовлетворяющих соотношениям

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \pi_i(1 \otimes \cdots \otimes \pi_{n-i} \otimes \cdots \otimes 1) = 0,$$

где $\varepsilon = (n+1)(k+1) + ik$.

Для A_∞ -алгебры A так же, как и для обычной алгебры, определено понятие B -конструкции BA . Отличие состоит только в формуле для дифференциала, которая в случае A_∞ -алгебры имеет вид [2]

$$d[x_1, \dots, x_n] = \sum_{i=1}^n \sum_k (-1)^i [x_1, \dots, \pi_k(x_i \otimes \cdots \otimes x_{i+k+1}), \dots, x_n].$$

Двойственным образом, градуированный модуль K называется A_∞ -коалгеброй, если задано семейство отображений $\nabla_n: K \rightarrow K^{\otimes n+2}$, повышающих размерность на n и удовлетворяющих соотношениям

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i (1 \otimes \cdots \otimes \nabla_{n-i} \otimes \cdots \otimes 1) \nabla_i = 0,$$

где $\varepsilon = (n+1)(k+1) + i(k+n-i)$.

Для A_∞ -коалгебры K определено понятие ко- B -конструкции FK , которая является дифференциальной алгеброй, порожденной элементами $[x_1, \dots, x_n]$, $x_1, \dots, x_n \in K$. Умножение $\pi: FK \otimes FK \rightarrow FK$ определено, как в тензорной алгебре, и дифференциал задается формулой

$$d[x_1, \dots, x_n] = \sum_{i=1}^n \sum_k (-1)^i [x_1, \dots, \nabla_k(x_i), \dots, x_n].$$

Отметим, что в случае если K – A_∞ -коалгебра конечного типа, т.е. для любого $x \in K$ существует номер, начиная с которого все операции ∇_n на x равны нулю, то ко- B -конструкция FK как градуированная алгебра совпадает с тензорной алгеброй. В противном случае в качестве FK следует брать пополнение тензорной алгебры относительно обычной фильтрации. Полученную таким образом ко- B -конструкцию будем обозначать $\widehat{FK}$.

Рассмотрим теперь вопрос о том, что означает описание A_∞ -алгебр и A_∞ -коалгебр. Обычные алгебры описываются заданием неразложимых элементов и соотношений между их произведениями. Но что означает неразложимость в случае A_∞ -алгебр. Неправильно было бы определять разложимые элементы в A_∞ -алгебре A как те элементы, которые принадлежат образам некоторых произведений $\pi_n: A^{\otimes n+2} \rightarrow A$. Для того чтобы дать правильное определение, нужно просто переформулировать определение разложимых элементов для алгебр с произведениями Масси на случай A_∞ -алгебр.

Пусть A — A_∞ -алгебра. Последовательность $(x^2, \dots, x^n)$ элементов $x^i \in A^{\otimes i}$ называется *последовательностью Масси* [5], если выполнены соотношения

$$\begin{aligned} &(\pi_0 \otimes \dots \otimes 1 - \dots + (-1)^n 1 \otimes \dots \otimes \pi_0)(x^n) = 0, \\ &(\pi_1 \otimes \dots \otimes 1 + \dots + 1 \otimes \dots \otimes \pi_1)(x^n) \\ &= (\pi_0 \otimes \dots \otimes 1 - \dots + (-1)^n 1 \otimes \dots \otimes \pi_0)(x^{n-1}), \\ &\dots\dots\dots \\ &(\pi_{n-3} \otimes 1 + 1 \otimes \pi_{n-3})(x^n) \\ &= (\pi_{n-4} \otimes 1 + (-1)^n 1 \otimes \pi_{n-4})(x^{n-1}) + \dots + (\pi_0 \otimes 1 - 1 \otimes \pi_0)(x^3). \end{aligned}$$

Для таких последовательностей Масси $(x^2, \dots, x^n)$ определяется произведение Масси $\mu(x^2, \dots, x^n) = \pi_0(x^2) + \dots + \pi_{n-2}(x^n)$. Элемент $x \in A$ называется *разложимым*, если он является образом какого-нибудь произведения Масси. Фактор A по разложимым элементам называется *модулем неразложимых элементов* и обозначается JA .

Переведем это определение на язык B -конструкций. Рассмотрим B -конструкцию BA над A_∞ -алгеброй A . Вложение $i: A \rightarrow BA$ индуцирует короткую точную последовательность

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{i} BA \xrightarrow{p} B^1A = BA/A \rightarrow 0$$

и длинную точную последовательность гомологий

$$\dots \rightarrow A \xrightarrow{i_*} H_*(BA) \xrightarrow{p_*} H_*(B^1A) \xrightarrow{\mu_*} A \rightarrow \dots$$

Из определения последовательности Масси следует, что последовательность $(x^2, \dots, x^n)$ является последовательностью Масси в том и только том случае, когда элемент $x = x^2 + \dots + x^n$ является циклом в $B^1(A)$. Более того, отображение μ_* индуцируется произведением Масси. Таким образом, элемент $x \in A$ разложим тогда и только тогда, когда он принадлежит образу μ_* . Следовательно, модуль неразложимых элементов JA изоморфен образу отображения $i_*: A \rightarrow H_*(BA)$.

Двойственным образом, для градуированной A_∞ -коалгебры K рассмотрим ко- B -конструкцию $\hat{F}K$. Проекция $p: \hat{F}K \rightarrow K$ индуцирует короткую точную последовательность

$$0 \rightarrow \hat{F}^1K \xrightarrow{i} \hat{F}K \xrightarrow{p} K \rightarrow 0$$

и длинную точную последовательность гомологий

$$\dots \rightarrow H_*(\widehat{F}^1 K) \xrightarrow{i_*} H_*(\widehat{F} K) \xrightarrow{p_*} K \xrightarrow{\nu} H_*(\widehat{F}^1 K) \rightarrow \dots$$

Элемент $x \in K$ называется *примитивным*, если он принадлежит ядру гомоморфизма $\nu_*: K \rightarrow H_*(\widehat{F}^1 K)$, или, что то же самое, образу гомоморфизма $p_*: H_*(\widehat{F} K) \rightarrow K$. Модуль примитивных элементов A_∞ -коалгебры K обозначим PK . Заметим, что в случае обычной коалгебры K с коумножением $\nabla: K \rightarrow K \otimes K$ примитивными элементами являются элементы из ядра отображения ∇ .

Для описания A_∞ -алгебр и коалгебр в первую очередь нужно найти соответственно неразложимые и примитивные элементы. Для этого рассмотрим сначала некоторые свойства B -конструкций и ко- B -конструкций.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Для произвольной алгебры A имеет место цепная эквивалентность алгебр $FBA \simeq A$.*

Определим отображение $\xi: A \rightarrow FBA$, положив $\xi(x) = [[x]]$, и отображение алгебр $\eta: FBA \rightarrow A$, положив на образующих $\eta[[x_1, \dots, x_n]] = x_1$, если $n = 1$, и 0 в остальных случаях. Ясно, что имеет место формула

$$\eta \circ \xi = \text{Id}: A \rightarrow A.$$

Покажем, что $\xi \circ \eta: FBA \rightarrow FBA$ гомотопно тождественному отображению. Определим цепную гомотопию $h: FBA \rightarrow FBA$, положив

$$\begin{aligned} h([[x_1], [x_2, \dots, x_n], \dots, [x_{m+1}, \dots, x_k]]) \\ = (-1)^\varepsilon [[x_1, x_2, \dots, x_n], \dots, [x_{m+1}, \dots, x_k]] \end{aligned}$$

и 0 в остальных случаях. Непосредственные вычисления показывают, что имеет место формула $d(h) = \xi \circ \eta - \text{Id}$, т.е. h является искомой цепной гомотопией.

Для алгебры A обозначим через $\widehat{A}$ пополнение A относительно обычной фильтрации

$$A = A^1 \supset A^2 = A \cdot A \supset \dots, \quad \widehat{A} = \varprojlim A/A^n.$$

Имеет место естественное отображение алгебр $A \rightarrow \widehat{A}$. Алгебра A называется *полной*, если это отображение – изоморфизм.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Для полной алгебры A имеет место цепная эквивалентность алгебр $\widehat{F}BA \simeq A$.*

Действительно, отображение алгебр $\eta: FBA \rightarrow A$ индуцирует отображение пополнений $\widehat{\eta}: \widehat{F}BA \rightarrow A$. Кроме того, имеет место вложение $\widehat{\xi}: A \rightarrow \widehat{F}BA$, $\widehat{\eta} \circ \widehat{\xi} = \text{Id}$. Рассмотренная ранее гомотопия $h: FBA \rightarrow FBA$ сохраняет фильтрацию и, следовательно, индуцирует гомотопию $\widehat{h}: \widehat{F}BA \rightarrow \widehat{F}BA$, $d(\widehat{h}) = \widehat{\xi} \circ \widehat{\eta} - \text{Id}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Для произвольной дифференциальной коалгебры K на ее гомологиях $H_*(K)$ имеется структура A_∞ -коалгебры и цепная эквивалентность дифференциальных алгебр $\widehat{FK} \simeq \widehat{FH}_*(K)$.

Доказательство проводится стандартным образом (см. [3], [4]).

Рассмотрим теперь алгебру A и найдем примитивные элементы гомологий ее B -конструкции $H_*(BA)$. Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 1. Для полной алгебры A модуль примитивных элементов $PH_*(BA)$ гомологий B -конструкции BA изоморфен модулю неразложимых элементов алгебры A : $PH_*(BA) \cong JA$.

Действительно, по определению модуля примитивных элементов имеем

$$PH_*(BA) = \text{Im}\{H_*(\widehat{FH}_*(BA)) \rightarrow H_*(BA)\}.$$

Используя изоморфизм $H_*(\widehat{FBA}) \cong A$, получаем требуемый изоморфизм

$$PH_*(BA) \cong \text{Im}\{A \rightarrow H_*(BA)\} \cong JA.$$

Заметим, что эта теорема является переформулировкой на язык A_∞ -алгебр соответствующего утверждения работы [5] о строении неразложимых элементов в когомологиях связных алгебр. Однако в нашем случае связность алгебры A не предполагается, что позволяет применить полученный результат для нахождения примитивных элементов гомологий групп.

Рассмотрим теперь двойственную ситуацию. Для произвольной коалгебры K определим фильтрацию $K^1 \subset K^2 \subset \dots \subset K$, полагая

$$K^1 = PK, \quad K^2 = \{x \in K : \nabla(x) \in K^1 \otimes K^1\}, \quad \dots$$

Обозначим через $\check{K}$ прямой предел K^n , $\check{K} = \varinjlim K^n$. Ясно, что $\check{K}$ будет под-коалгеброй коалгебры K . Коалгебру K будем называть *полной*, если $\check{K} = K$.

Имеют место следующие предложения, двойственные к предложениям 2, 3.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2'. Для полной коалгебры K имеет место цепная эквивалентность коалгебр $BFK \simeq K$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3'. Для произвольной дифференциальной алгебры A на ее гомологиях $H_*(A)$ имеется структура A_∞ -алгебры и цепная эквивалентность дифференциальных коалгебр $BH_*(A) \simeq BA$.

Доказательство см. в [3].

Рассмотрим теперь коалгебру K и найдем модуль неразложимых элементов $JH_*(FK)$ гомологий ее ко- B -конструкции FK . Имеет место следующая

индуцированное структурой A_∞ -алгебры в A . Конечно, некоторые из таких соотношений следуют просто из A_∞ -структуры в A . Для их нахождения рассмотрим отображение $\gamma \times 1 - 1 \times \mu: A_\infty A_\infty^1 A \rightarrow A_\infty^1 A$. Если x принадлежит образу этого отображения, то он порождает соотношение $\mu(x) = 0$, которое следует из A_∞ -структуры в A . Обозначим $A_\infty^1 * A$ фактор $A_\infty^1 A$ по образу отображения $\gamma \times 1 - 1 \times \mu$. Тогда для нахождения соотношений достаточно найти такие элементы x в $A_\infty^1 * A$, которые отображаются в нуль посредством отображения $A_\infty^1 * A \rightarrow A$.

Для A_∞ -алгебры A обозначим для краткости гомологии ее B -конструкции через K , т.е. $K = H_*(BA)$. Пусть, далее, $\bar{A}_\infty K$ обозначает свободную A_∞ -коалгебру, порожденную K ; $\bar{A}_\infty^1 K = \bar{A}_\infty K / K$. Структура A_∞ -коалгебры в K индуцирует отображение $\tau: K \rightarrow \bar{A}_\infty^1 K$. Кроме этого имеется отображение двойственности $\psi: \bar{A}_\infty^1 K \rightarrow A_\infty^1 A$ [6]. Рассмотрим отображение $K \rightarrow A_\infty^1 * A$, являющееся композицией отображений τ , ψ и проекции $A_\infty^1 A \rightarrow A_\infty^1 * A$. Тогда имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} K & \rightarrow & H_*(B^1 A) & \rightarrow & A \\ & \searrow & \downarrow & \nearrow & \\ & & A_\infty^1 * A & & \end{array}$$

Из этой диаграммы следует, что для нахождения соотношений в A_∞ -алгебре A нужно найти образ отображения $K \rightarrow A_\infty^1 * A$. Подводя итог вышесказанному, получаем, что для описания A_∞ -алгебры A нужно:

- 1) найти гомологии $H_*(BA)$ B -конструкции BA над алгеброй A ;
- 2) вычислить образ гомоморфизма $A \rightarrow H_*(BA)$; этот образ будет модулем JA неразложимых элементов A_∞ -алгебры A ;
- 3) вычислить образ гомоморфизма $H_*(BA) \rightarrow A_\infty^1 * A$; этот образ будет давать соотношения в A_∞ -алгебре A .

Двойственным образом, для описания A_∞ -коалгебры K нужно:

- 1') найти гомологии $H_*(\hat{F}K)$ ко- B -конструкции $\hat{F}K$ над коалгеброй K ;
- 2') вычислить образ гомоморфизма $H_*(\hat{F}K) \rightarrow K$; этот образ будет модулем примитивных элементов A_∞ -коалгебры K ;
- 3') вычислить ядро гомоморфизма $\bar{A}_\infty^1 * K \rightarrow H_*(\hat{F}K)$; это ядро будет давать порождающие элементы в искомой A_∞ -коалгебре.

Рассмотрим теперь полную коалгебру K и гомологии ее ко- B -конструкции $A_* = H_*(FK)$. Как показано в теореме 1', модуль неразложимых элементов A_* изоморфен модулю $PK = H_1(FK)$ примитивных элементов коалгебры K . Таким образом, для описания гомологий ко- B -конструкции осталось найти соотношения между операциями в $H_*(FK)$. Обозначим через $\nabla(n): K \rightarrow K^{\otimes n}$ итерацию ко-умножения $\nabla: K \rightarrow K \otimes K$ и через $p: K \rightarrow PK$ проекцию на модуль примитивных элементов. Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 2. *Для полной коалгебры K соотношения в A_∞ -алгебре $A_* = H_*(FK)$ записываются в виде*

$$\sum_{n \geq 0} \pi_n(p \otimes \cdots \otimes p) \nabla(n+2)(x) = 0, \quad x \in K.$$

Для доказательства требуемой формулы нужно вычислить образ отображения $K \cong H_*(BA_*) \rightarrow A_\infty^1 * A_*$. Соответствующие вычисления проведены в работе [6].

Заметим, что для произвольных элементов $x_1, \dots, x_n \in PK = H_1(FK)$ элементы $\pi_{n-2}(x_1 \otimes \dots \otimes x_n)$ принадлежат $H_2(FK)$. Поэтому все соотношения, описанные в теореме 2, являются соотношениями в $H_2(FK)$, а соотношения в гомологиях высших размерностей определяются структурой A_∞ -алгебры в $H_*(FK)$. Поэтому имеем

СЛЕДСТВИЕ. Для полной коалгебры K гомологии $H_*(FK)$ определяются гомологиями $H_1(FK)$, $H_2(FK)$ и операциями $\pi_n: H_1(FK)^{\otimes n+2} \rightarrow H_2(FK)$.

Обозначим через $A_\infty PK$ свободную градуированную A_∞ -алгебру, порожденную модулем PK , через $\tilde{A}_\infty PK$ – ее фактор- A_∞ -алгебру по соотношениям, указанным в теореме 2, и через $M\tilde{A}_\infty PK$ – подмодуль в $\tilde{A}_\infty PK$, порожденный элементами из PK и их итерированными произведениями Масси. Вложение $PK \rightarrow H_*(FK)$ индуцирует отображение A_∞ -алгебр $\tilde{A}_\infty PK \rightarrow H_*(FK)$, ограничение которого на $M\tilde{A}_\infty PK$ будет давать изоморфизм [6]

$$M\tilde{A}_\infty PK \cong H_*(FK).$$

Двойственным образом, для полной алгебры A рассмотрим гомологии $K_* = H_*(BA)$. Как показано в теореме 1, модуль примитивных элементов K_* изоморфен модулю $JA = H_1(BA)$ неразложимых элементов алгебры A . Таким образом, для описания гомологий B -конструкции осталось найти порождающие элементы в $\tilde{A}_\infty^1 JA$. Обозначим через $q: JA \rightarrow A$ отображение вложения неразложимых элементов алгебры A в саму алгебру A и через $\pi(n): A^{\otimes n} \rightarrow A$ итерацию умножения $\pi: A \otimes A \rightarrow A$.

ТЕОРЕМА 2'. Для полной алгебры A порождающие элементы в A_∞ -коалгебре $H_*(BA)$ записываются в виде

$$\sum_{n \geq 0} \nabla_n(x_1 \otimes \dots \otimes x_{n+2}),$$

где элементы $x_1, \dots, x_{n+2} \in JA$ таковы, что

$$\sum_{n \geq 0} \pi(n+2)(x_1 \otimes \dots \otimes x_{n+2}) = 0.$$

СЛЕДСТВИЕ. Для полной алгебры A гомологии $H_*(BA)$ определяются гомологиями $H_1(BA)$, $H_2(BA)$ и операциями $\nabla_n: H_2(BA) \rightarrow H_1(BA)^{\otimes n+2}$.

Если A – полная алгебра и гомологии $A_* = H_*(BA)$ являются конечно порожденным градуированным модулем, то соотношения в когомологиях $A^* = H^*(BA)$, рассматриваемых как A_∞ -алгебра, записываются в виде

$$\sum_{n \geq 0} \pi_n(\overline{q \otimes \dots \otimes q}) \bar{\pi}(n+2)(x) = 0, \quad x \in \bar{A}.$$

Отметим, что вместо условия полноты алгебр можно накладывать условие слабой полноты. Алгебра A называется *слабо полной*, если соответствующее отображение $A \rightarrow \hat{A}$ индуцирует изоморфизм гомологий.

В качестве примера рассмотрим когомологии циклической группы C_p порядка p с коэффициентами в поле Z/p . Соответствующая групповая алгебра A будет порождаться элементами $T_1, \dots, T_{p-1}$, умножение на которых задается формулой $\pi(T_i \otimes T_j) = T_{i+j} - T_i - T_j$, где $i + j$ рассматривается по модулю p и $T_0 = 0$. Непосредственная проверка показывает, что алгебра A имеет конечную фильтрацию и, следовательно, является полной. В ней имеется единственный неразложимый элемент, порождаемый элементом T_1 алгебры A , который мы обозначим u . Двойственный элемент $\bar{u}$ порождает единственный примитивный элемент в коалгебре $\bar{A}$. Из формулы умножения в алгебре A следует, что соотношения в когомологиях группы C_p , рассматриваемых как A_∞ -алгебра, будут иметь вид

$$\pi_0(\bar{u} \otimes \bar{u}) = 0, \dots, \pi_{p-3}(\bar{u} \otimes \dots \otimes \bar{u}) = 0.$$

Пусть $A_\infty\{\bar{u}\}$ – свободная A_∞ -алгебра с одной 1-мерной образующей $\bar{u}$, $\tilde{A}_\infty\{\bar{u}\}$ – фактор- A_∞ -алгебра по указанным выше соотношениям, $M\tilde{A}_\infty\{\bar{u}\}$ – подмодуль, порожденный элементом $\bar{u}$ и его итерированными произведениями Масси. Тогда отображение A_∞ -алгебр $\tilde{A}_\infty\{\bar{u}\} \rightarrow H^*(C_p; Z/p)$ индуцирует изоморфизм

$$M\tilde{A}_\infty\{\bar{u}\} \cong H^*(C_p; Z/p).$$

Заметим, что если группа G приводит к алгебре над полем Z/p с конечной фильтрацией, то расширение G при помощи C_p также будет приводить к алгебре с конечной фильтрацией. Поэтому p -группы приводят к полным групповым алгебрам над полем Z/p , и, следовательно, для описания их когомологий можно воспользоваться предложенным выше методом.

Пример алгебры, не являющейся слабо полной, дает симметрическая группа Σ_p с коэффициентами в Z/p при $p > 2$.

Если G – конечная группа, для которой групповая алгебра над полем Z/p не является слабо полной, то для описания когомологий $H^*(G; Z/p)$ можно воспользоваться тем, что эти когомологии изоморфны модулю G -инвариантных элементов в когомологиях $H^*(H; Z/p)$ силовой p -подгруппы $H \subset G$, и тем, что p -группы нильпотентны. В частности, если H – нормальный делитель в G , то можно воспользоваться изоморфизмом $H^*(G; Z/p) \cong H^*(H; Z/p)^{G/H}$ [7].

Например, для симметрической группы Σ_p силовой p -группой является циклическая группа C_p . Вложение $C_p \subset \Sigma_p$ индуцирует мономорфизм когомологий $H^*(\Sigma_p; Z/p) \rightarrow H^*(C_p; Z/p)$, образом которого являются инвариантные элементы относительно автоморфизма [8]

$$\text{ad}_\gamma^*: H^*(C_p; Z/p) \rightarrow H^*(C_p; Z/p), \quad \gamma \in \Sigma_p.$$

На одномерных когомологиях этот автоморфизм задается формулой $\text{ad}_\gamma^1(\bar{u}) = 2\bar{u}$. Рассмотрим автоморфизм $\text{ad}_\gamma: M\tilde{A}_\infty\{\bar{u}\} \rightarrow M\tilde{A}_\infty\{\bar{u}\}$, определяемый на образующих индуктивной формулой

$$\text{ad}_\gamma(\pi_i(x_1 \otimes \dots \otimes x_{i+2})) = \pi_i(\text{ad}_\gamma(x_1) \otimes \dots \otimes \text{ad}_\gamma(x_{i+2})).$$

Инвариантные элементы относительно этого автоморфизма будут образовывать модуль, изоморфный $H^*(\Sigma_p; Z/p)$.

Список литературы

1. Маклейн С. Гомология. М.: Мир, 1966.
2. Stasheff J. D. Homotopy associativity of H -spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. V. 108. № 2. P. 275–312.
3. Кадешивили Т. В. К теории гомологий расслоенных пространств // УМН. 1980. Т. 35. № 3. С. 183–188.
4. Смирнов В. А. Гомологии расслоенных пространств // УМН. 1980. Т. 35. № 3. С. 227–230.
5. Gugenheim V. K., May J. P. On the theory and applications of . . . // Mem. AMS. 1974. V. 142. P. 1–93.
6. Смирнов В. А. Гомологии B -конструкций и ко- B -конструкций // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 4. С. 80–96.
7. Браун К. С. Когомологии групп. М.: Наука, 1987.
8. Стинрод Н., Эпштейн Д. Когомологические операции. М.: Наука, 1983.

Поступило в редакцию
29.IX.1995