Общероссийский математический портал

В. А. Юдин, Нижние оценки для сферических дизайнов, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1997, том 61, выпуск 3, 213–223

DOI: <https://doi.org/10.4213/im132>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 10:14:32

УДК 517.5

В. А. Юдин

Нижние оценки для сферических дизайнов

В работе получена новая оценка снизу мощности сферических дизайнов. В зависимости от размерности она улучшает известную оценку Дельсарта на экспоненциальный множитель, при стремлении степени дизайна к бесконечности.

Библиография: 15 наименований.

§ 1. Введение

Пусть $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $xy = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$, $|x| = \sqrt{xx}$, $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ – единичная сфера, $S_\alpha^{n-1}(a) = \{x \in S^{n-1} : ax \geq \cos \alpha\}$ – сферическая шапка раствора α , $0 < \alpha < \pi$, с центром в точке a , $a \in S^{n-1}$.

Конечное множество W , $W \subset S^{n-1}$, называется [1] *дизайном порядка s* , если кубатурная формула

$$\int_{S^{n-1}} f(x) dx = \frac{1}{|W|} \sum_{u \in W} f(u), \quad |W| = \sum_{u \in W} 1, \quad (1)$$

точна для любого алгебраического многочлена n переменных и степени s . Под степенью монома $x_1^{s_1} \dots x_n^{s_n}$ подразумевается сумма показателей $s_1 + \dots + s_n$. Дизайн называется *минимальным*, если он имеет наименьшее количество точек, которое обозначим через $N = N(s, n)$. Исследование дизайнов начато в прошлом веке, им посвящено большое число работ (см. [1], а также известные обзоры [2], [3]). При $n = 2$ и $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 2$, минимальными дизайнами являются $s + 1$ вершина правильного многоугольника, вписанного в единичную окружность. Для сферы произвольной размерности минимальными дизайнами являются: при $s = 1$ – две противоположные точки сферы, при $s = 2$ это $(n + 1)$ вершина правильного симплекса, вписанного в сферу, а при $s = 3$ это $2n$ вершин правильного октаэдра (точки пересечения единичной сферы с координатными осями). При $s \geq 4$ минимальность доказана лишь для ограниченного набора (при определенных значениях s и n) множеств. К их числу относятся следующие известные конструкции: 12 вершин икосаэдра – дизайн 5-го порядка в $\mathbb{R}^3$, 240 минимальных векторов решетки Коркина–Золотарева – дизайн 7-го порядка в $\mathbb{R}^8$, 196560 минимальных векторов решетки Лича – дизайн 11-го порядка в $\mathbb{R}^{24}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 96-01-00212).

Настоящая работа посвящена оценкам снизу $N(n, s)$ и основана на использовании экстремальных свойств функций. Близкие задачи возникают в теории кодирования [4]–[6] и в теории приближения [7], [8]. Первые оценки снизу $N(n, s)$ получены Дельсартом [9]:

$$N(n, s) \geq \begin{cases} \binom{k+n-1}{k} + \binom{k+n-2}{k-1}, & s = 2k, \\ 2\binom{k+n-1}{k}, & s = 2k + 1. \end{cases} \quad (2)$$

В ряде случаев неравенства (2) оказываются точными. Усиление неравенств (2) для конкретных чисел s, n осуществлялось в ряде работ (см. [10] с подробностями) с использованием численных методов.

Через $P_k^{\alpha, \beta}(t)$ обозначим [11] многочлены Якоби. Они образуют ортогональную систему многочленов на интервале $(-1, 1)$ с весом $(1-t)^\alpha(1+t)^\beta$. При $\alpha = \beta = (n-3)/2$ нормированные многочлены $P_k^{\alpha, \beta}(t)/P_k^{\alpha, \beta}(1)$ Гегенбауэра обозначим через $P_k(t)$. Пусть γ – наибольший нуль $P'_s(t)$. В работе докажем неравенство

$$N(n, s-1) \geq 2 \cdot \frac{\int_0^1 (1-t^2)^{(n-3)/2} dt}{\int_\gamma^1 (1-t^2)^{(n-3)/2} dt}, \quad s, n \in \mathbb{N}, \quad s, n \geq 2. \quad (3)$$

При фиксированной размерности n и $s \rightarrow \infty$ главный член асимптотического разложения, задаваемый оценкой (3), в $(4/e)^n$ раз больше, чем аналогичный из (2). В случае $n = 2$ неравенство (3) дает точную оценку $N(n, s-1) \geq s$.

Оценка (3) получена в результате рассмотрения известной [9] экстремальной задачи для алгебраических многочленов. В работе используется ее обобщение для функций. Через $M_{s,n}$ обозначим совокупность непрерывных на отрезке $[-1, 1]$ функций $F(t)$, удовлетворяющих условиям:

$$\begin{aligned} 1) \quad & F(t) \geq 0, \quad -1 \leq t \leq 1, \quad F(1) > 0; \\ 2) \quad & F_k \leq 0, \quad k = s, s+1, \dots; \quad F_k = \frac{\int_{-1}^1 F(t) P_k(t) (1-t^2)^{(n-3)/2} dt}{\int_{-1}^1 P_k^2(t) (1-t^2)^{(n-3)/2} dt}. \end{aligned} \quad (4)$$

Оценка снизу мощности дизайна следует из неравенства

$$N(n, s-1) \geq \sup_{F \in M_{s,n}} \frac{F(1)}{F_0}. \quad (5)$$

Действительно, из положительности F вытекает

$$I = \sum_{u,v \in W} F(uv) \geq \sum_{u=v} F(uv) = NF(1). \quad (6)$$

Оценим I сверху, используя разложение F в ряд Фурье:

$$F(t) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k P_k(t).$$

Так как, за исключением s членов, все коэффициенты Фурье F_k неположительны, то нетрудно показать абсолютную сходимость ряда Фурье. Следовательно,

$$I = N^2 F_0 + \sum_{1 \leq k \leq s-1} F_k \sum_{u,v \in W} P_k(uv) + \sum_{k \geq s} F_k \sum_{u,v \in W} P_k(uv) = I_1 + I_2 + I_3.$$

Исходя из определения дизайна, находим, что $I_2 = 0$. Используя положительную определенность многочленов Гегенбауэра [1]

$$\sum_{u,v \in W} P_k(uv) \geq 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

и условие (4), находим, что $I_3 \leq 0$. Объединяя полученные неравенства с неравенством (6), получаем (5).

Приведенные рассуждения фактически принадлежат Дельсарту (он ограничивался случаем, когда F – многочлен). При размерностях $n \geq 3$ точное решение экстремальной задачи не известно. В работе строится функция F из класса $M_{s,n}$, с помощью которой получаем (3). В частном случае $n = 2$ построенная функция является наилучшей, поскольку отношение (3) равняется s .

§ 2. Конструкция функции

Из теории ортогональных многочленов следует [11], что с точностью до числового множителя $P'_s(t)$ есть многочлен Якоби $P_{s-1}^{\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2}}(t)$. Все его нули простые и расположены на интервале $(-1, 1)$. Наибольший нуль производной $-\gamma$ также принадлежит интервалу $(-1, 1)$. В работе [6] приведена серия первых нулей:

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= 0, & \gamma_3 &= \sqrt{\frac{1}{n+2}}, & \gamma_4 &= \sqrt{\frac{3}{n+4}}, \\ \gamma_5 &= \sqrt{\frac{3(n+4) + \sqrt{6(n+3)(n+4)}}{(n+4)(n+6)}}, & \gamma_6 &= \sqrt{\frac{5(n+6) + \sqrt{10(n+3)(n+6)}}{(n+6)(n+8)}}, \end{aligned}$$

и дана равномерная по обоим параметрам s, n их оценка снизу:

$$\gamma \geq \frac{\sqrt{4(s-1)(n+s-1)}}{n+2(s-1)} - \frac{(4\pi)^{2/3}}{(s-1)^{1/6}\sqrt{n+s-1}}, \quad n, s = 2, 3, \dots \quad (7)$$

Пусть $m = -P_s(\gamma)$; на S^{n-1} рассмотрим две зональные функции

$$f(ax) = \begin{cases} P_s(ax) + m, & ax \geq \gamma, \\ 0, & ax < \gamma, \end{cases} \quad g(ax) = \begin{cases} 1, & ax \geq \gamma, \\ 0, & ax < \gamma. \end{cases}$$

Каждая функция имеет один и тот же носитель – сферическую шапку $S_\alpha(a)$ раствора α такого, что $\cos \alpha = \gamma$. В качестве функции $F(t)$, $t = ab$, рассмотрим свертку этих функций на сфере:

$$F(ab) = \int_{S^{n-1}} f(ax)g(bx) dx. \quad (8)$$

Так как функции $f(ax)$, $g(bx)$ зональны, то очевидно, что интеграл (8) зависит лишь от скалярного произведения $ab = t$.

ТЕОРЕМА 1. Для любых $s, n \in \mathbb{N}$, $s, n \geq 2$,

$$F(t) \in M_{s,n}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $f(ax)$, $g(ax)$ неотрицательны, то и свертка функций неотрицательна. Следовательно, $F(t) \geq 0$, $-1 \leq t \leq 1$. Кроме того, очевидно, что $f(ax), g(ax) \in L_2(S^{n-1})$. Положим $t = ab$, $t' = ab'$. Из (8) найдем

$$F(t) - F(t') = \int_{S^{n-1}} [f(ax)g(bx) - f(ax)g(b'x)] dx,$$

откуда по неравенству Коши–Буняковского

$$|F(t) - F(t')| \leq \left\{ \int_{S^{n-1}} |f(ax)|^2 dx \right\}^{1/2} \cdot \left\{ \int_{S^{n-1}} |g(bx) - g(b'x)|^2 dx \right\}^{1/2}.$$

Поскольку $t' \rightarrow t$ при $b' \rightarrow b$, то правая часть стремится к нулю. Таким образом, непрерывность функции $F(t)$ установлена.

Докажем справедливость неравенств (4). С этой целью рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ область D , ограниченную двумя поверхностями: сферической шапкой $S_\alpha^{n-1}(a)$, $\cos \alpha = \gamma$ (поверхность Γ_1), и конусом $ax = |x| \cos \alpha$ (поверхность Γ_2). Через n_1, n_2 обозначим единичные внешние нормали к поверхностям Γ_1, Γ_2 . Напишем [12] формулу Грина для области D :

$$\begin{aligned} \int_D (u\Delta v - \Delta uv) dx &= \int_{\Gamma_1} \left(u \frac{\partial v}{\partial n_1} - \frac{\partial u}{\partial n_1} v \right) dx + \int_{\Gamma_2} \left(u \frac{\partial v}{\partial n_2} - \frac{\partial u}{\partial n_2} v \right) dx, \\ I &= I_1 + I_2, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

есть оператор Лапласа, а $\frac{\partial}{\partial n}$ – производная по внешней нормали.

В (9) положим

$$u = |x|^k P_k \left(\frac{ax}{|x|} \right), \quad v = |x|^s \left[P_s \left(\frac{ax}{|x|} \right) + m \right].$$

Вычислим I . Так как для любого $k = 0, 1, 2, \dots$ $u(x)$ есть [12] гармонический многочлен в $\mathbb{R}^n$, то

$$\Delta u \equiv 0, \quad \Delta v \equiv \Delta(m|x|^s);$$

непосредственный подсчет показывает, что

$$\Delta v = ms(n + s - 2)|x|^{s-2}.$$

Таким образом,

$$I = \int_D |x|^k P_k \left(\frac{ax}{|x|} \right) ms(n + s - 2)|x|^{s-2} dx.$$

Переходя к поверхностному интегралу, находим

$$\begin{aligned} I &= ms(n + s - 2) \int_0^1 r^{k+s+n-3} dr \int_{S_{\alpha}^{n-1}(a)} P_k(ax) dx \\ &= \frac{ms(n + s - 2)}{k + n + s - 2} \int_{S_{\alpha}^{n-1}(a)} P_k(ax) dx. \end{aligned} \quad (10)$$

Вычислим I_1 . Так как $u(x)$ – однородный многочлен степени k , а $|x|^s$ – однородная функция степени s , то

$$\frac{\partial}{\partial n_1} \left\{ |x|^k P_k \left(\frac{ax}{|x|} \right) \right\} \Big|_{\Gamma_1} = k P_k(ax), \quad \frac{\partial}{\partial n_1} (|x|^s) \Big|_{\Gamma_1} = s.$$

Следовательно, для I_1 получим выражение

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\Gamma_1} \left\{ P_k(ax) [s P_s(ax) + sm] - k P_k(ax) [P_s(ax) + m] \right\} dx \\ &= (s - k) \int_{\Gamma_1} [P_s(ax) + m] P_k(ax) dx = (s - k) \int_{S^{n-1}} f(ax) P_k(ax) dx. \end{aligned} \quad (11)$$

Вычислим I_2 . Покажем, что на поверхности конуса Γ_2 значение функции v и ее производной по внешней нормали равны нулю. Имеем

$$v|_{\Gamma_2} = |x|^s \left[P_s \left(\frac{ax}{|x|} \right) + m \right] \Big|_{ax=|x| \cos \alpha} = |x|^s [P_s(\cos \alpha) + m] = 0.$$

Так как

$$\operatorname{grad} v = s|x|^{s-2}xP_s\left(\frac{ax}{|x|}\right) + |x|^s P'_s\left(\frac{ax}{|x|}\right) \frac{ax - x\frac{ax}{|x|}}{|x|^2} + msx|x|^{s-2},$$

а $P'_s(\cos \alpha) = 0$, то

$$\operatorname{grad} v|_{\Gamma_2} = sx|x|^{s-2} \left[P_s\left(\frac{ax}{|x|}\right) + m \right] \Big|_{\Gamma_2} = 0$$

в силу определения числа m . Следовательно,

$$\frac{\partial v}{\partial n_2} \Big|_{\Gamma_2} = n_2 \operatorname{grad} v|_{\Gamma_2} = 0.$$

Таким образом доказали, что $I_2 = 0$. Из (9)–(11) находим

$$\int_{S^{n-1}} f(ax)P_k(ax) dx = \frac{ms(k+s-2)}{(s-k)(k+n+s-2)} \int_{S^{n-1}(a)} P_k(ax) dx. \quad (12)$$

Между одномерными рядами Фурье функций, заданных на интервале $(-1, 1)$ по системе многочленов Гегенбауэра, и рядами Фурье функций, заданных на сфере S^{n-1} по зональным сферическим гармоникам, имеется тесная связь. Для наших целей необходима информация о ряде Фурье свертки (8). Пусть

$$\sum f_k P_k(ax), \quad f_k = \int_{S^{n-1}} f(ax)P_k(ax) dx \Big/ \int_{S^{n-1}} P_k^2(ax) dx,$$

есть ряд Фурье $f(ax)$ по сферическим гармоникам. В силу зональности $f(ax)$ он состоит лишь из зональных сферических гармоник. Все остальные компоненты равны нулю. Из формулы Лапласа [13] вытекает, что

$$\int_{S^{n-1}} P_s(ax)P_s(bx) dx = a_s P_s(ab)$$

с некоторыми положительными постоянными a_s . Следовательно, используя [13] ортогональность сферических гармоник, находим

$$F(ab) = \int_{S^{n-1}} f(ax)g(bx) dx = \sum_{k=0}^{\infty} f_k g_k P_k(ab) b_k,$$

где

$$b_k = a_k \int_{S^{n-1}} P_k^2(ax) dx > 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Из определения $f(ax)$, $g(ax)$ и соотношения (12) получаем

$$F_k = b_k f_k g_k = \frac{a_k ms(k+s-2)}{(s-k)(k+n+s-2)} \cdot \frac{\left[\int_{S^{n-1}(a)} P_k(ax) dx \right]^2}{\int_{S^{n-1}} P_k^2(ax) dx},$$

откуда вытекает необходимое нам неравенство

$$F_k \leq 0, \quad k \geq s, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Теорема доказана.

§ 3. Оценка снизу мощности дизайна

ТЕОРЕМА 2. Для любых $s, n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$N(n, s-1) \geq 2 \cdot \frac{\int_0^1 (1-t^2)^{(n-3)/2} dt}{\int_\gamma^1 (1-t^2)^{(n-3)/2} dt}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $g(ax) = 1$, $x \in S_\alpha^{n-1}(a)$, то из (8) находим

$$F(1) = \int_{S^{n-1}} f(ax) dx = f_0 \text{mes } S^{n-1}.$$

Из разложения в ряд Фурье свертки находим

$$F_0 = \int_{S^{n-1}} f_0 g_0 dx = f_0 g_0 \text{mes } S^{n-1},$$

но

$$g_0 = \frac{1}{\text{mes } S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} g(ax) dx = \frac{\text{mes } S_\alpha^{n-1}(a)}{\text{mes } S^{n-1}}.$$

Следовательно,

$$\frac{F(1)}{F_0} = \frac{\text{mes } S^{n-1} \cdot f_0}{\text{mes } S^{n-1} \cdot f_0 \cdot g_0} = \frac{\text{mes } S^{n-1}}{\text{mes } S_\alpha^{n-1}(a)}.$$

Переходя к сечениям

$$\Gamma_t = \{x \in S^{n-1} : ax = t\}, \quad \text{mes } \Gamma_t = \text{mes } S^{n-2}(1-t^2)^{(n-3)/2},$$

найдем

$$\frac{F(1)}{F_0} = \frac{\text{mes } S^{n-2} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{(n-3)/2} dt}{\text{mes } S^{n-2} \int_\gamma^1 (1-t^2)^{(n-3)/2} dt} = 2 \cdot \frac{\int_0^1 (1-t^2)^{(n-3)/2} dt}{\int_\gamma^1 (1-t^2)^{(n-3)/2} dt}.$$

Теорема доказана.

Выясним скорость убывания оценки (3) при $s \rightarrow \infty$.

СЛЕДСТВИЕ. При $s \rightarrow \infty$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$,

$$N(n, s) \geq \frac{2^{n-1}}{n^n} s^{n-1} \{1 + O(s^{-2/3})\}.$$

Поскольку

$$\int_0^1 (1-t^2)^{(n-3)/2} dt \geq \int_0^1 t(1-t^2)^{(n-3)/2} dt = \frac{1}{n-1},$$

а

$$\int_{\gamma}^1 (1-t^2)^{(n-3)/2} dt \leq (1-\gamma)(1-\gamma^2)^{(n-3)/2} \leq 2(1-\gamma^2)^{(n-1)/2},$$

то

$$N(n, s) \geq \frac{1}{n-1} (1-\gamma^2)^{(n-1)/2}.$$

Из неравенств (7) находим

$$1-\gamma^2 \leq \left(\frac{n}{n+2s} \right)^2 \{1 + O(s^{-2/3})\}.$$

Следовательно,

$$N(n, s) \geq \frac{1}{n-1} \left(1 + \frac{2s}{n} \right)^{n-1} \{1 + O(s^{-2/3})\} \geq \frac{2^{n-1} s^{n-1}}{n^n} \{1 + O(s^{-2/3})\}.$$

Используя асимптотику гамма-функции для определения скорости роста биномиальных коэффициентов, находим, что оценка (2) Дельсарта имеет вид

$$\left(\frac{es}{2n} \right)^{n-1} \{1 + O(s^{-1})\}, \quad s \rightarrow \infty.$$

Таким образом, при фиксированной размерности n и $s \rightarrow \infty$ полученная оценка (3) улучшает оценку (2) на экспоненциальный множитель $\left(\frac{e}{4}\right)^n$.

В связи с большим интересом к исследованию дизайнов, проявленным за последнее время [10], [14], по просьбе автора А. В. Колушов осуществил численные расчеты (3) при размерностях n : $2 \leq n \leq 30$, и степени дизайна $s-1$: $3 \leq s \leq 15$. Полученная оценка снизу $N(n, s-1)$ приведена в таблице, где сверху над каждой колонкой стоит размерность пространства, а слева от колонок – числа s . Так как в работе получено лишь асимптотическое улучшение ($s \rightarrow \infty$) оценок Дельсарта, то представляет интерес сравнение оценок (2), (3) при конкретных s, n . При размерностях $n = 3, 4$ (3) лучше (2) лишь при $s \geq 9$. В численном выражении неравенства принимают вид

$$\begin{aligned} N(3, 9) &\geq 31(30), & N(3, 10) &\geq 37(36), & N(3, 11) &\geq 43(42), \\ N(4, 9) &\geq 71(70), & N(4, 10) &\geq 92(91), & N(4, 11) &\geq 117(112), \end{aligned}$$

где в скобках указана оценка Дельсарта (2). Отметим, что при некоторых “малых” s оценка (3) оказывается хуже оценки (2).

ЗАМЕЧАНИЕ. В классическом анализе Фурье одна и та же функция, заданная на $\mathbb{R}^n$ с известными (по знаку) значениями преобразования Фурье позволяет одновременно строить тригонометрические полиномы с известными по знаку значениями и периодические функции с известными по знаку коэффициентами Фурье. Приведем пример. Пусть $W(x)$ – “достаточно гладкая” в $\mathbb{R}^n$ функция с конечным носителем, у которой преобразование Фурье [15] удовлетворяет неравенству

$$\widehat{W}(s) = \int_{\mathbb{R}^n} W(x) e^{-2\pi i s x} dx \leq 0, \quad s \in D,$$

где D – некоторая окрестность нуля. Определим тригонометрический полином

$$F(x) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} W(\nu) e^{2\pi i \nu x}$$

и периодическую функцию

$$G(x) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} W(x - \nu).$$

По формуле суммирования Пуассона [15]

$$F(x) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} \widehat{W}(x - \nu)$$

тригонометрический полином F будет неположителен на множестве $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}^n} (k + D)$, а функция G будет иметь неположительные коэффициенты Фурье

$$\widehat{G}_\nu = \int_{T^n} G(x) e^{-2\pi i \nu x} dx = \int_{\mathbb{R}^n} W(x) e^{-2\pi i \nu x} dx \leq 0, \quad T^n = (0, 1]^n,$$

вне области D . Взаимосвязь между F и G здесь оказывается очевидной.

В случае сферы возникает очень интересный и важный в приложениях вопрос об аналоге формулы суммирования Пуассона. Для оценок мощностей кодов на сфере (упаковка сферических шапок $S_\alpha^{n-1}(a)$ на S^{n-1}) использовался (см. [1], [4], [6]) аналог тригонометрического полинома F . В настоящей работе построен сферический аналог функции G . Однако все оценки и вычисления приходится вести заново.

В заключение автор выражает благодарность А.В. Колушову за проведение численных расчетов.

Таблица значений оценок снизу $N(n, s - 1)$

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	3.00	3.61	4.04	4.34	4.58	4.76	4.91	5.03	5.13
4	4.00	5.79	7.34	8.68	9.84	10.85	11.73	12.50	13.19
5	5.00	8.51	12.21	15.93	19.53	22.98	26.25	29.33	32.21
6	6.00	11.78	18.96	27.17	36.07	45.40	54.94	64.55	74.12
7	7.00	15.59	27.89	43.70	62.65	84.29	108.15	133.81	160.86
8	8.00	19.95	39.31	66.99	103.36	148.37	201.68	262.75	330.90
9	9.00	24.85	53.55	98.70	163.29	249.50	358.74	491.73	648.55
10	10.00	30.30	70.89	140.67	248.64	403.34	612.34	882.01	1217.38
11	11.00	36.29	91.67	194.91	366.84	630.13	1008.11	1523.73	2198.61
12	12.00	42.83	116.19	263.64	526.64	955.48	1607.69	2545.99	3836.05
13	13.00	49.91	144.75	349.25	738.24	1411.29	2492.63	4129.42	6488.89
14	14.00	57.54	177.68	454.32	1013.41	2036.70	3768.88	6521.66	10674.50
15	15.00	65.72	215.29	581.60	1365.56	2879.06	5571.95	10055.82	17122.87

	11	12	13	14	15	16	17
3	5.22	5.29	5.36	5.42	5.47	5.51	5.55
4	13.80	14.34	14.83	15.28	15.68	16.05	16.39
5	34.91	37.44	39.80	42.02	44.10	46.05	47.88
6	83.54	92.78	101.79	110.54	119.03	127.23	135.15
7	188.97	217.82	247.15	276.77	306.48	336.15	365.64
8	405.42	485.55	570.56	659.75	752.47	848.12	946.14
9	828.82	1031.75	1256.28	1501.14	1764.96	2046.25	2343.53
10	1622.12	2098.64	2648.14	3270.84	3966.03	4732.29	5567.56
11	3052.48	4102.66	5363.87	6848.06	8564.47	10519.75	12718.06
12	5544.50	7736.92	10476.30	13821.74	17827.45	22541.79	28007.38
13	9754.50	14121.59	19793.20	26975.32	35873.17	46687.76	59611.82
14	16672.34	25020.62	36278.03	51047.60	69968.04	93702.90	122929.11
15	27758.42	43146.66	64670.20	93902.95	132595.97	182664.30	246160.45

	18	19	20	21	22	23
3	5.59	5.62	5.65	5.68	5.71	5.73
4	16.70	16.99	17.25	17.50	17.73	17.94
5	49.60	51.22	52.75	54.19	55.55	56.85
6	142.79	150.15	157.25	164.08	170.67	177.00
7	394.87	423.75	452.23	480.26	507.80	534.82
8	1046.05	1147.38	1249.75	1352.82	1456.26	1559.81
9	2655.32	2980.18	3316.70	3663.52	4019.41	4383.17
10	6469.36	7434.80	8460.76	9543.90	10680.81	11868.03
11	15161.38	17849.59	20780.95	23951.93	27357.89	30993.01
12	34260.52	41331.02	49242.51	58013.20	67655.10	78175.27
13	74828.65	92508.74	112809.11	135871.35	161822.05	190770.70
14	158331.21	200586.92	250365.30	308314.37	375053.60	451173.93
15	325257.26	422219.70	539377.83	679113.51	843818.39	1035882.04

	24	25	26	27	28	29	30
3	5.75	5.77	5.79	5.81	5.82	5.84	5.85
4	18.14	18.33	18.50	18.67	18.82	18.97	19.11
5	58.07	59.23	60.34	61.39	62.39	63.34	64.25
6	183.11	188.99	194.65	200.11	205.38	210.45	215.35
7	561.31	587.25	612.64	637.46	661.73	685.43	708.59
8	1663.23	1766.31	1868.89	1970.79	2071.91	2172.11	2271.32
9	4753.68	5129.92	5510.93	5895.82	6283.81	6674.11	7066.09
10	13102.07	14379.47	15696.87	17050.97	18438.64	19856.71	21302.33
11	34850.48	38922.87	43202.24	47679.69	52346.82	57194.43	62213.37
12	89575.69	101853.86	115004.28	129016.50	143877.95	159572.80	176083.81
13	222812.51	258026.03	296473.57	338202.71	383249.18	431634.50	483365.79
14	537232.82	633747.09	741190.53	859994.59	990553.20	1133206.63	1288247.72
15	1257663.14	1511497.94	1799624.45	2124228.16	2487393.74	2891096.96	3337231.17

Список литературы

1. Конвей Дж., Слоэн Н. Упаковка шаров, решетки группы. Т. 1, 2. М.: Мир, 1990.
2. Resnick B. Sums of even powers of real linear forms // Memoirs of the Amer. Math. Soc. 1992. V. 96. № 463.
3. Seidel J. Isometric embeddings and geometric designs // Discrete Math. 1994. V. 136. P. 281–293.
4. Сидельников В. М. Об экстремальных многочленах, используемых при оценках мощности кода // Пробл. передачи информ. 1980. Т. 14. №3. С. 17–30.
5. Левенштейн В. И. О границах для упаковок в n -мерном евклидовом пространстве // ДАН СССР. 1979. Т. 245. №6. С. 1299–1303.
6. Левенштейн В. И. Границы для упаковок метрических пространств и некоторые их приложения // Проблемы кибернетики. 1983. Т. 40. С. 43–110.
7. Черных Н. И. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Матем. заметки. 1967. Т. 2. №5. С. 513–522.
8. Юдин В. А. Многомерная теорема Джексона в L_2 // Матем. заметки. 1981. Т. 29. №9. С. 309–315.
9. Delsarte P., Goethals J. M., Seidel J. J. Spherical codes and design // Geom. Dedicata. 1977. V. 6. P. 363–388.
10. Boyvalenkov P. Extremal Polynomials for obtaining Bounds for Spherical Codes and Designs // Discrete Comput. Geom. 1995. V. 14. P. 167–183.
11. Сеге Г. Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962.
12. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 1. Л.: Гостехиздат, 1951.
13. Соболев С. Л. Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974.
14. Hardin R. H., Sloane N. J. A. New spherical 4-designs // Discrete Math. 1992. V. 106/107. P. 255–264.
15. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.