Общероссийский математический портал

И. В. Аржанцев, О действиях сложности один группы SL_2 , *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1997, том 61, выпуск 4, 3–18

DOI: <https://doi.org/10.4213/im133>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 17:05:45

УДК 512.74

И. В. Аржанцев

О действиях сложности один группы SL_2

В статье изучаются действия группы SL_2 с двумерной орбитой общего положения на трехмерных нормальных аффинных алгебраических многообразиях. В случае, когда стабилизатор общего положения есть подгруппа мономиальных матриц, получена полная классификация таких действий. Также получены некоторые результаты для произвольных действий сложности один редуктивных алгебраических групп.

Библиография: 14 наименований.

§ 1. Введение

В данной работе мы будем изучать действие группы $SL_2(\mathbb{K}) = SL_2$ на *нормальных* неприводимых аффинных многообразиях. Основное поле $\mathbb{K}$ будем считать алгебраически замкнутым и нулевой характеристики.

Сложностью $c(X, G)$ действия $G : X$ произвольной редуктивной группы G на алгебраическом многообразии X называют коразмерность орбиты общего положения для индуцированного действия борелевской подгруппы $B : X$, или по теореме Розенлихта

$$c(X, G) = \text{tr. deg } \mathbb{K}(X)^B.$$

Подробнее с понятием сложности можно познакомиться в работе [8].

Действия сложности нуль называют *сферическими*.

В § 2 будут рассмотрены некоторые общие свойства сложности действий редуктивных групп. Будет показано, что сложность орбит постоянна вдоль пластов и является полунепрерывной сверху функцией на многообразии.

Затем мы перейдем к случаю $G = SL_2$. В этом случае для аффинного многообразия X $c(X, SL_2) = \dim X - 2$, если только действие не тривиально.

Сферические действия группы SL_2 легко перечислить.

ЛЕММА 1 [2, п.4.1, лемма 2]. *Любая алгебраическая подгруппа в SL_2 сопряжена одной из следующих подгрупп:*

- 1) *конечной подгруппе;*
- 2) *борелевской подгруппе B ;*
- 3) *максимальному тору T ;*
- 4) *нормализатору максимального тора N ;*

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда и правительства Российской Федерации, грант MQZ300.

5) *конечному расширению максимальной унитарной подгруппы*

$$U_n = \left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon & a \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix} \middle| a, \varepsilon \in \mathbb{K} \right\}, \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

Известно, что на открытом множестве в X подгруппы Леви стабилизаторов точек сопряжены (см. [4]), и потому деформироваться может лишь унитарный радикал стабилизатора точки общего положения. Из леммы 1 следует, что для подгруппы группы SL_2 унитарный радикал либо тривиален, либо есть одномерная унитарная подгруппа, и, следовательно, он деформироваться никак не может.

Таким образом, верна

ЛЕММА 2. *Для всякого действия SL_2 на X существует стабилизатор общего положения (с.о.п.).*

Следующая лемма дает важную геометрическую информацию об орбитах изучаемого действия.

ЛЕММА 3 [4, с.252]. *Если редуктивная группа G действует на аффинном многообразии X и стабилизатор некоторой точки $x \in X$ содержит максимальный тор группы G , то орбита Gx замкнута. В частности, при $G = SL_2$ орбиты типа SL_2/T или SL_2/N замкнуты.*

Отсюда мы непосредственно получаем, что если действие $SL_2 : X$ сферическое, то X есть либо однородное пространство, изоморфное SL_2/T или SL_2/N , либо замыкание O_n орбиты старшего вектора неприводимого модуля V_n группы SL_2 (см. [7]).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Здесь и далее модуль V_n есть $(n + 1)$ -мерный неприводимый SL_2 -модуль, определенный, как известно, однозначно с точностью до изоморфизма.

Далее естественно рассмотреть *действия сложности 1*, т.е. SL_2 -действия на трехмерных многообразиях. Если с.о.п. такого действия есть конечная подгруппа, то X содержит плотную орбиту группы SL_2 . Такие действия полностью классифицированы в работе [1]. Там показано, что локально транзитивное действие группы SL_2 на трехмерном нормальном многообразии либо есть транзитивное действие, либо соответствует паре чисел из $\mathbb{N} \times (0, \frac{1}{2}]_{\mathbb{Q}}$. Первое из этих чисел определяет порядок стабилизатора общего положения такого действия, который в этой ситуации является циклической подгруппой. Второе число называется *высотой* и характеризует алгебру U -инвариантов.

Ниже последовательно рассмотрены случаи, когда с.о.п. равен U_n , N и T (в последнем из них мы ограничимся изучением гладких многообразий). Будем называть такие нормальные SL_2 -многообразия сложности один соответственно (S, U) -, (S, N) - и (S, T) -многообразиями.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Случай, когда с.о.п. равен B , невозможен, так как $SL_2/B \cong \mathbb{P}^1$, тогда как многообразие X предполагается аффинным.

Условимся далее под изоморфизмом двух объектов с заданным на них действием группы SL_2 понимать SL_2 -эквивариантный изоморфизм.

Цель этой работы – показать, что изучение действия группы SL_2 сложности один с заданным с.о.п., равным H , сводится к изучению действия группы $N_{SL_2}(H)$ на некотором многообразии Y меньшей размерности. При этом для восстановления исходного действия группы SL_2 требуется фиксировать некоторый дополнительный набор данных на многообразии Y .

Автор хотел бы выразить глубокую признательность своему научному руководителю профессору Э.Б. Винбергу за постановку задачи и постоянное внимание к работе, а также М. Бриону, П.И. Кацыло, Х. Крафту и Д.А. Тимашеву за полезные обсуждения.

§ 2. Общая постановка задачи

В этом параграфе многообразие X не предполагается нормальным.

Имеет место следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть G – редуктивная алгебраическая группа и X – квазипроективное G -многообразие. Тогда сложность орбит как однородных пространств группы G постоянна вдоль пластов и является полунепрерывной сверху функцией на многообразии X .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пластом действия группы G на многообразии X называется неприводимая компонента локально замкнутого в X подмножества $\{x \in X \mid \dim Gx = d\}$ при некотором фиксированном значении d (см. [4]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что в случае, когда многообразие X неприводимо, орбиты максимальной размерности имеют одну и ту же сложность и что сложность не может возрастать при переходе к орбитам меньшей размерности, а затем воспользоваться индукцией по размерности.

Заметим, что на любом G -многообразии найдется открытое множество, все орбиты точек которого имеют одинаковую сложность, – достаточно рассмотреть множество $G(U_G \cap U_B)$, где U_G (соответственно U_B) есть множество точек, G -орбиты (соответственно B -орбиты) которых имеют максимальную размерность. Таким образом, определена сложность орбиты общего положения с.о.г.р. $(X, G) = c$. Очевидно, что сложность произвольной орбиты максимальной размерности может быть лишь $\geq c$.

Если бы для некоторой орбиты O (любой размерности) неравенство оказалось строгим, на этой орбите нашлись бы алгебраически независимые B -инвариантные рациональные функции $f_1, \dots, f_{(c+1)}$. Воспользуемся следующей леммой.

ЛЕММА (Кнопа [9, п. 2]). Пусть X – квазипроективное G -многообразие. Тогда всякая рациональная B -полуинвариантная функция на G -инвариантном подмногообразии продолжается до рациональной B -полуинвариантной функции того же веса на всем X .

Таким образом, функции $f_1, \dots, f_{(c+1)}$ можно продолжить до B -инвариантных рациональных функций $F_1, \dots, F_{(c+1)}$ на всем многообразии X . Пусть $\{\xi_j\}$ – ба-

зис алгебры Ли группы G . Поскольку $f_1, \dots, f_{(c+1)}$ алгебраически независимы, ранг матрицы $\left(\frac{\partial f_i}{\partial \xi_j}\right)$ равен $(c+1)$ вдоль орбиты O , и потому ранг матрицы $\left(\frac{\partial F_i}{\partial \xi_j}\right)$ равен $(c+1)$ хотя бы в одной точке многообразия X . Следовательно, функции $F_1, \dots, F_{(c+1)}$ алгебраически независимы при ограничении на орбиту общего положения. Противоречие с предположением с.о.г.р. $(X, G) = c$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В работе [11] данное предложение доказано в случае присоединенного действия простой группы.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. На различных пластах орбит одной и той же размерности сложности орбит могут быть различны. Например, рассмотрим представление группы $SL_2 \times SL_2$ в модуле $V \oplus W$, где V – пространство матриц размера 2×2 с действием $(g_1, g_2)m = g_1^{-1}mg_2$, а W есть представление первой компоненты SL_2 в бинарных формах степени 3 с тривиальным действием второй компоненты. Тогда орбита вектора $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 0\right)$ сферична, а орбита вектора $\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, x^2y\right)$ имеет сложность один.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если на X найдется открытое множество, орбиты всех точек которого сферичны, то и все орбиты на многообразии X сферичны.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Всякое действие со сферической орбитой общего положения допускает рациональное сечение. В самом деле, известно (см. [4]), что для любого действия связной разрешимой группы рациональное сечение существует, а в данной ситуации сечение для действия борелевской подгруппы B является также G -сечением.

СЛЕДСТВИЕ 2. На произвольном G -многообразии X множество точек, G -орбиты которых сферичны, является замкнутым подмногообразием.

В случае присоединенного представления простой группы это подмногообразие описано в работе [11].

Рассмотрим подробнее действия сложности один. Здесь имеются две принципиально различные возможности: либо на X имеется открытая G -орбита сложности один, либо имеется однопараметрическое семейство сферических G -орбит максимальной размерности (подробное изложение см. в [8]).

Первая возможность для аффинных однородных пространств изучалась в [12]. В последующих параграфах мы будем рассматривать вторую возможность применительно к группе SL_2 .

В общей ситуации имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть X – аффинное многообразие, на котором редуктивная группа G действует со сложностью один и фактор $X//G$ одномерен. Тогда все неприводимые компоненты слоев морфизма факторизации ϕ равноразмерны и суть сферические многообразия.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равноразмерность морфизма факторизации непосредственно вытекает из теоремы о слоях морфизма (см. [5]). Предположим теперь, что Y

не сферическая компонента одного из слоев морфизма ϕ . Пусть $t \in \mathbb{K}[X]^G$ – функция, не являющаяся константой. На Y есть функция $w \in \mathbb{K}(Y)^B$, разделяющая B -орбиты общего положения. Согласно лемме Кнопа ее можно продолжить до функции $W \in \mathbb{K}(X)^B = \mathbb{K}(X)^G$. В данной ситуации $\text{tr. deg. } \mathbb{K}(X)^B = 1$, функция t постоянна на Y , имеется алгебраическая зависимость между t и W , и потому функция W также постоянна на Y . Полученное противоречие с условием $W|_Y = w$ завершает доказательство.

§ 3. (S, U) -многообразие

Результаты этого параграфа получаются применением некоторой общей теории. Пусть связная редуктивная группа G действует на аффинном нормальном неприводимом многообразии X так, что в стабилизаторе точки общего положения содержится максимальная унипотентная подгруппа $U \subset G$. Тогда известно (см. [3]), что

$$\mathbb{K}[X] \cong (\mathbb{K}[X]^U \otimes \mathbb{K}[G/U^-])^T,$$

где T – максимальный тор группы G , а U^- – противоположная по отношению к U унипотентная подгруппа. Действие группы G на алгебре, стоящей в правой части, осуществляется умножением слева на втором множителе тензорного произведения, а тор T действует естественным образом на алгебре $\mathbb{K}[X]^U$ и умножениями справа на алгебре $\mathbb{K}[G/U^-]$. Таким образом, G -многообразие X однозначно восстанавливается по T -многообразию $Y = X//U = \text{Spec } \mathbb{K}[X]^U$. При этом все веса T -модуля $\mathbb{K}[Y] = \mathbb{K}[X]^U$ доминантны.

Обратно, пусть имеется многообразие Y с заданным на ней нетривиальным действием тора T таким, что все веса T -модуля $\mathbb{K}[Y]$ доминантны. Тогда мы можем построить соответствующее G -многообразие X , а именно $X = \text{Spec}(\mathbb{K}[Y] \otimes \mathbb{K}[G/U^-])^T$. Заметим, что согласно критерию Луны–Вуста [2] нормальность X эквивалентна нормальности $X//U$.

В случае $G = SL_2$ можно отождествить однородное пространство SL_2/U^- с $\mathbb{K}^2 \setminus \{0\}$ с естественным действием одномерного тора. Тогда $\text{Spec } \mathbb{K}[SL_2/U^-] = \mathbb{K}^2$. Тем самым справедлива

ТЕОРЕМА 1. *(S, U) -многообразия взаимно однозначно соответствуют нормальным аффинным поверхностям Y с фиксированной нетривиальной $\mathbb{Z}_+$ -градуировкой на алгебре регулярных функций $\mathbb{K}[Y]$. Эта градуировка задает действие одномерного тора T на Y , и соответствующее (S, U) -многообразие изоморфно многообразию*

$$X = (Y \times \mathbb{K}^2)//T.$$

При этом $\mathbb{K}[X]^{SL_2} \cong \mathbb{K}[Y]^T$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если орбита общего положения на X изоморфна SL_2/U_n , то любая другая орбита либо есть неподвижная точка, либо изоморфна SL_2/U_m , где n делит m .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Одним из результатов [10] является следующее предложение: если предполагать многообразие X унитарно рациональным и алгебру $\mathbb{K}[X]$ факториальной и без непостоянных обратимых функций, то:

- а) при $\mathbb{K}[X]^{\mathrm{SL}_2} = \mathbb{K}$ поверхность Y есть полное пересечение;
- б) при $\mathbb{K}[X]^{\mathrm{SL}_2} \neq \mathbb{K}$ поверхность Y есть плоскость $\mathbb{A}^2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Гладкость поверхности Y не гарантирует гладкости многообразия X . Используя теорию этальных слайсов (некоторые подробности см. в § 5), можно показать, что гладким (S, U) -многообразиям соответствуют поверхности, которые являются локально тривиальными расслоениями (в топологии Зарисского) над некоторой гладкой аффинной кривой со слоем $\mathbb{A}^1$, причем тор действует на каждом из слоев естественным образом: $(t, x) \rightarrow tx$, $t \in \mathbb{K}^*$, $x \in \mathbb{A}^1$. Значит, всякое гладкое (S, U) -многообразие есть локально тривиальное расслоение над гладкой кривой со слоем V_1 .

Поскольку для рассматриваемых ниже (S, N) - и (S, T) -многообразий SL_2 -действие является стабильным, мы получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Всякое действие группы SL_2 на гладком трехмерном аффинном многообразии либо является локально транзитивным, либо обладает непостоянной регулярной инвариантной функцией.*

§ 4. (S, N) -многообразия

В этом и следующем параграфах будем предполагать основное поле полем комплексных чисел $\mathbb{C}$.

4.1. Общие свойства (S, N) -многообразий. Итак, на X имеется однопараметрическое семейство орбит типа SL_2/N . Мы уже знаем, что все эти орбиты замкнуты. В разложение SL_2 -модуля $\mathbb{K}[X]$ в прямую сумму неприводимых подмодулей могут входить лишь те неприводимые SL_2 -модули, которые содержат ненулевой вектор со стабилизатором N , а это в точности модули V_{4n} . Отсюда следует, что на X не может быть орбит типа SL_2/T и всякая замкнутая орбита есть либо SL_2/N , либо неподвижная точка.

ЛЕММА 4. *Множество N -неподвижных точек X^N есть гладкая неприводимая аффинная кривая, изоморфная $X//\mathrm{SL}_2$. Множество SL_2 -неподвижных точек X^{SL_2} есть конечный набор точек на этой кривой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно (см. [4]), что морфизм факторизации разделяет замкнутые орбиты на X . Таким образом, каждый слой морфизма факторизации либо есть орбита типа SL_2/N , либо содержит в точности одну неподвижную точку. На орбите типа SL_2/N есть всего одна N -неподвижная точка. Следовательно, если ограничить морфизм факторизации $\phi: X \rightarrow X//\mathrm{SL}_2$ на подмногообразие X^N , то получится биективное отображение. Из нормальности многообразия X вытекает нормальность $X//\mathrm{SL}_2$, а для кривых нормальность означает гладкость. Воспользовавшись тем, что биективный морфизм на нормальное многообразие есть изоморфизм, получаем $X^N \cong X//\mathrm{SL}_2$. Остается заметить, что X^{SL_2} есть собственное подмногообразие кривой X^N .

ЛЕММА 5. *Все слои морфизма факторизации $\phi: X \rightarrow X//SL_2$ двумерны и неприводимы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Двумерность сразу следует из общей теоремы о размерности слоев морфизма. Что касается неприводимости, то первоначально я доказывал это, используя вложение многообразия X в некоторый SL_2 -модуль. Затем Э.Б. Винберг предложил следующее инвариантное доказательство. Пусть слой $\phi^{-1}(x)$ приводим, т.е. $\phi^{-1}(x) = Y_1 \cup Y_2$, где Y_1, Y_2 – замкнутые подмножества. Имеем

$$\mathbb{K}[Y_1] \cong \bigoplus_{i \in I} V_i, \quad \mathbb{K}[Y_2] \cong \bigoplus_{j \in J} V_j,$$

где I и J – некоторые подполугруппы в полугруппе $\mathbb{Z}_+$. Если $i \in I, j \in J$, то подмодуль, изоморфный V_{ij} , входит как в $\mathbb{K}[Y_1]$, так и в $\mathbb{K}[Y_2]$. Компоненты Y_1 и Y_2 пересекаются по одной точке (в силу связности группы SL_2 неприводимые компоненты слоя SL_2 -инвариантны и потому пересекаются лишь по единственной замкнутой орбите в слое). Следовательно, G -модули $\mathbb{K}[\phi^{-1}(x)]$ и $\mathbb{K}[Y_1] \oplus \mathbb{K}[Y_2]$ отличаются лишь на один одномерный подмодуль, а потому подмодуль, изоморфный V_{ij} , входит в $\mathbb{K}[\phi^{-1}(x)]$ с кратностью > 1 .

С другой стороны, слой общего положения морфизма факторизации есть SL_2/N , и спектр алгебры регулярных функций такого слоя прост, так как это сферическое многообразие (см. [2]). Рассмотрим две функции f_λ^1 и f_λ^2 из $\mathbb{K}[X]$, являющиеся старшими векторами веса λ в SL_2 -модуле $\mathbb{K}[X]$ относительно борелевской подгруппы B . При сужении на слой общего положения из-за простоты спектра рациональная функция f_λ^1/f_λ^2 должна быть константой (возможно, равной ∞). Поэтому она определяет рациональную функцию на факторе. На гладкой кривой рациональная функция в каждой точке принимает определенное значение, возможно бесконечное. Таким образом, функции f_λ^1 и f_λ^2 пропорциональны при ограничении на любой слой, и потому спектр каждого слоя морфизма факторизации прост. Противоречие.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В доказательстве леммы 5 мы существенно используем тот факт, что кривая $C = X//SL_2$ нормальна. Действительно, рассмотрим кривую

$$C = \{(u, v) \mid u^2 = v^2 + v^3\} \hookrightarrow V^N = \mathbb{K}^2 \hookrightarrow V_2 \oplus V_2 = V.$$

Тогда многообразие $\overline{SL_2(C)}$ содержит единственную одноточечную орбиту, которая лежит в замыкании двух двумерных орбит $SL_2(x^2, x^2)$ и $SL_2(x^2, -x^2)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Лемма 5 позволяет установить биекцию между множеством неподвижных точек X^{SL_2} и множеством незамкнутых орбит на X : каждый слой морфизма факторизации либо есть орбита типа SL_2/N , либо содержит по одной орбите из двух только что указанных множеств.

Далее будем обозначать кривую $X//SL_2$ буквой C .

4.2. Простые (S, N) -многообразия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем нормальное (S, N) -многообразие X *простым*, если $X//\mathrm{SL}_2 = \mathbb{A}^1$ и $X^{\mathrm{SL}_2} = \{0\}$.

Образующую алгебры инвариантов простого (S, N) -многообразия X будем обозначать через z .

ПРИМЕР 1. а) Рассмотрим действие группы $\mathbb{Z}_{2k}$ на пространстве V_2 умножениями на корни степени $2k$ из единицы и положим $X^k \cong V_2//\mathbb{Z}_{2k}$. Возникает действие $\mathrm{SL}_2 : X^k$, орбита общего положения которого есть SL_2/N , фактор $X^k//\mathrm{SL}_2$ есть $\mathbb{A}^1$, $X^{\mathrm{SL}_2} = \{0\}$ и незамкнутая орбита есть $\mathrm{SL}_2//U_{4k}$. Многообразие X^k нормально как фактор нормального многообразия.

б) Пусть $\phi: X^k \rightarrow \mathbb{A}^1$ – морфизм факторизации. Рассмотрим индуцированное морфизмом $z \rightarrow z^n$ расслоение

$$\begin{array}{ccc} X_n^k & \longrightarrow & X^k \\ \downarrow & & \downarrow \varphi \\ \mathbb{A}^1 & \xrightarrow{z \rightarrow z^n} & \mathbb{A}^1 \end{array}$$

Таким образом получаются новые SL_2 -многообразия X_n^k . Точка многообразия X_n^k может быть реализована как пара (z, ω) , где ω – бинарная квадратичная форма, определенная с точностью до умножения на ϵ , $\epsilon^{2k} = 1$, а $z \in \mathbb{K}$, $z^n = (\det \omega)^k$.

ЛЕММА 6. *Многообразие X_n^k нормально тогда и только тогда, когда либо $n = 1$, либо $k = 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $n = 1$ получаются в точности многообразия из п. а), которые нормальны.

Будем обозначать через a, b, c стандартные координаты в трехмерном пространстве бинарных форм второй степени $V_2 = \{ax^2 + bxy + cy^2\}$.

Многообразие X_n^1 является фактором гиперповерхности $z^n = b^2 - 4ac$ по группе $\mathbb{Z}_2$. Указанная гиперповерхность особа лишь в одной точке – начале координат. Как известно, для гиперповерхности нормальность эквивалентна гладкости в размерности 1, и потому X_n^1 нормально.

Пусть теперь $n > 1$ и $k > 1$. Алгебра регулярных функций на X_n^k порождается мономами z и $a^i b^j c^l (i + j + l = 2k)$ с соотношением $z^n = (b^2 - 4ac)^k$. Легко видеть, что

$$\left(\frac{(b^2 - 4ac)^l b^{2k-2l}}{z} \right)^n = (b^2 - 4ac)^{nl-k} b^{2kn-2ln},$$

где $l = (\text{неполное частное от деления } k \text{ на } n) + 1$. Это соотношение показывает, что алгебра $\mathbb{K}[X_n^k]$ не является целозамкнутой.

ЛЕММА 7. *Всякое простое (S, N) -многообразие SL_2 -эквиариантно гомеоморфно в $\mathbb{C}$ -топологии одному из многообразий X_n^k .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим эквивариантное замкнутое вложение X в некоторый конечномерный SL_2 -модуль:

$$\psi: X \hookrightarrow V = V_{4k_1} \oplus \cdots \oplus V_{4k_p}, \quad k_i \geq 0.$$

Определено вложение

$$\psi': X^N \cong \mathbb{A}^1 \hookrightarrow V^N = \langle x^{2k_1} y^{2k_1} \rangle \oplus \cdots \oplus \langle x^{2k_p} y^{2k_p} \rangle$$

(мы отождествляем неприводимые SL_2 -модули с соответствующими пространствами бинарных форм).

Можно считать, что $\{0\} \in \mathbb{A}^1$ переходит в нуль пространства V^N . Обозначим координаты в этом пространстве через $(\chi_1, \dots, \chi_p)$. Тогда вложение ψ' задается формулами

$$\chi_i = a_i z^{n_i} + b_i z^{n_i+1} + \cdots, \quad a_i \neq 0 \quad (1)$$

(многооточие означает члены высших порядков по z).

На открытом подмножестве $SL_2(X^N \setminus \{0\}) \subset X$ вложение ψ можно задать формулой

$$gv \rightarrow ((a_i z^{n_i} + b_i z^{n_i+1} + \cdots) \omega^{2k_i})_{i=1}^p, \quad g \in SL_2, \quad v \in X^N,$$

где $\omega = g(xy)$ и z – координата точки v на прямой $X^N \cong \mathbb{A}^1$.

На простом (S, N) -многообразии имеется ровно одна незамкнутая орбита (поскольку по определению имеется ровно одна неподвижная точка), которая изоморфна SL_2/U_{4k} для некоторого k . Наличие этой орбиты означает, что для некоторой последовательности $\{\omega_j\}$ бинарных форм второй степени с определителем 1 и некоторой числовой последовательности $\{z_j\}$, $z_j \rightarrow 0$, существует конечный предел $\lim_{j \rightarrow \infty} a_i \left(z_j^{\frac{n_i}{2k_i}} \psi_j \right)^{2k_i}$ для всякого i (последовательности $\{\psi_j\}$ и $\{z_j\}$ от i не зависят), причем для некоторых i этот предел отличен от нуля. Отсюда следует, что у точек незамкнутой орбиты ненулевые координаты будут лишь в тех модулях V_{4k_i} , для которых числа $\tau_i = \frac{n_i}{k_i}$ достигают минимального значения. Можно считать, что этот минимум достигается при $i = 1, \dots, l$. Тогда числа $k_1, \dots, k_l$ делятся на k и $\left(\frac{k_1}{k}, \dots, \frac{k_l}{k} \right) = 1$. Отсюда и из равенства $\frac{n_1}{(k_1/k)} = \cdots = \frac{n_l}{(k_l/k)}$ следует, что число $n = \frac{n_1 k}{k_1} = \cdots = \frac{n_l k}{k_l}$ натуральное.

Определим рациональное отображение $X_n^k \rightarrow X$ по формуле

$$(z, \omega) \rightarrow \left\{ (a_i + b_i z + \cdots) z^{n_i} \frac{\omega^{2k_i}}{(\det \omega)^{k_i}}, \quad i = 1, \dots, p \right\}.$$

Данное отображение определяет изоморфизм на открытом множестве орбит типа SL_2/N , так как по построению прямая $(X_n^k)^N$ отображается на X^N изоморфно. Поскольку $\frac{n}{k} = \frac{n_i}{k_i}$ при $i = 1, \dots, l$ и $\frac{n}{k} > \frac{n_i}{k_i}$ при $i > l$, это рациональное отображение непрерывно продолжается на точки (z, ω) с $\det(\omega) = 0$, так как $\frac{z^{n_i}}{(\det \omega)^{k_i}}$ стремится к 1 при $i = 1, \dots, l$ и к 0 при $i > l$. Более того, из условия $\left(\frac{k_1}{k}, \dots, \frac{k_l}{k} \right) = 1$

вытекает, что стабилизатор точки образа незамкнутой орбиты при этом отображении есть U_{4k} , и потому отображение биективно на незамкнутой орбите.

Нами построен бирациональный морфизм $X_n^k \rightarrow X$, непрерывно продолжаемый до биективного отображения. Проверим непрерывность обратного отображения. Согласно доказанному ниже предложению 5 все слои морфизма факторизации $\phi: X \rightarrow X//\mathrm{SL}_2$ нормальны. Потому “нулевой” слой изоморфен O_{4k} (см. § 1). Полугруппа весов T -модуля $\mathbb{K}[O_{4k}]^U$ есть $4k\mathbb{Z}_+$. С другой стороны, полугруппа весов T -модуля $\mathbb{K}[\phi^{-1}(0)]^U$ есть $4k_1\mathbb{Z}_+ \cup \dots \cup 4k_l\mathbb{Z}_+$. Отсюда вытекает, что одно из чисел $k_1, \dots, k_l$ равно k . Пусть для определенности $k_1 = k$.

Заметим, что в каждом из подмодулей V_{4k_i} образ X лежит во множестве тех бинарных форм степени $4k_i$, которые являются $2k_i$ -степенями форм второй степени, и для всякого $x \in X$ определена с точностью до умножения на ϵ , $\epsilon^{2k_i} = 1$, форма второй степени $\omega_i(x) = (\psi_i(x))^{\frac{1}{2k_i}}$.

Определим отображение $X \rightarrow X_n^k$ формулой

$$x \rightarrow \left(z(x), \frac{\omega_1(x)}{(a_1 + b_1 z(x) + \dots)^{\frac{1}{2k_1}}} \right).$$

Это отображение корректно определено при достаточно малых значениях $z(x)$ и продолжает изоморфизм открытых подмножеств $\mathrm{SL}_2 X^N$ и $\mathrm{SL}_2(X_n^k)^N$ до непрерывной биекции в окрестности “нулевого” слоя. Тем самым требуемый гомеоморфизм построен.

Чтобы вернуться от топологических утверждений к алгебраическим нам понадобится

ЛЕММА 8. а) Пусть X и Y – бирационально изоморфные нормальные аффинные многообразия. Предположим, что изоморфизм их открытых подмножеств U_X и U_Y продолжается до $\mathbb{C}$ -гомеоморфизма X и Y . Тогда этот $\mathbb{C}$ -гомеоморфизм является изоморфизмом алгебраических многообразий.

б) Если в условиях п. а) многообразие X не нормально, то Y есть нормализация многообразия X и морфизм нормализации биективен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Рассмотрим аффинное многообразие $X \times Y$ и в нем диагональ $U_{X \times Y}$, определенную заданным изоморфизмом $U_X \cong U_Y$. Пусть $\Gamma = \overline{U_{X \times Y}}$. Замыкание в топологии Зарисского квазиаффинного многообразия совпадает с его замыканием в $\mathbb{C}$ -топологии. Поэтому проекция $\Gamma \rightarrow X$ есть гомеоморфизм. Это биективный морфизм и из нормальности X вытекает изоморфизм $X \cong \Gamma$. Аналогично получаем $Y \cong \Gamma$.

Пункт б) следует из доказательства п. а).

Далее мы изучим нормализацию $\mathrm{Norm} X_n^k$ многообразия X_n^k при $n > 1$ и $k > 1$. Пусть $d = (k, n)$. Тогда имеется естественное вложение $\mathbb{K}[X_n^k] \hookrightarrow \mathbb{K}\left[X_{\left(\frac{k}{d}, \frac{n}{d}\right)}^{\frac{k}{d}}\right]$, заданное тавтологически: $z \rightarrow z', a^i b^j c^l \rightarrow (a')^i (b')^j (c')^l$. Алгебра $\mathbb{K}\left[X_{\left(\frac{k}{d}, \frac{n}{d}\right)}^{\frac{k}{d}}\right]$ цела

над своей подалгеброй $\mathbb{K}[X_n^k]$, и поля частных этих алгебр совпадают, так как

$$((b')^{\frac{2k}{d}})^d \in \mathbb{K}[X_n^k], \quad (b')^{\frac{2k}{d}} = \frac{(b^2 - 4ac)^{\frac{kd-k}{d}} b^{\frac{2k}{d}}}{z^{\frac{nd-n}{d}}} \in Qk[X_n^k]$$

и т.п. Поэтому нормализация X_n^k совпадает с нормализацией $X_{(\frac{n}{d})}^{\frac{k}{d}}$ и, следовательно, достаточно ограничиться изучением $\text{Norm}(X_n^k)$ при взаимно простых числах n и k .

ЛЕММА 9. *Морфизм нормализации $\text{Norm}(X_n^k) \rightarrow X_n^k$ биективен тогда и только тогда, когда числа k и n взаимно просты.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вложим алгебру $\mathbb{K}[X_n^k] = \mathbb{K}[a^i b^j c^l (i+j+l=2k), z \mid z^n = (b^2 - 4ac)^k]$ в алгебру $A_n^k = \mathbb{K}[a, b, c, z \mid z^n = (b^2 - 4ac)^k]$. Алгебра A_n^k цела над $\mathbb{K}[X_n^k]$. При взаимно простых k и n алгебра A_n^k не имеет делителей нуля и ее целое замыкание получается присоединением элемента $\lambda = \frac{(b^2 - 4ac)^v}{z^u}$, где $(-u)k + vn = 1$ (в таком представлении всегда можно считать $u > 0$ и $v > 0$). Действительно, $\lambda^k = z$ и $A_n^k[\lambda] = \mathbb{K}[a, b, c, \lambda \mid \lambda^n = b^2 - 4ac]$ – целозамкнутая алгебра. Отсюда заключаем, что

$$\text{Norm}(\mathbb{K}[X_n^k]) = \mathbb{K}[X_n^k] \left[\frac{(b^2 - 4ac)^{tv} \xi}{z^{tu}} \right],$$

где ξ пробегает всевозможные однородные формы от a, b, c таких степеней α , что $(\alpha + 2vt)$ делится на $2k$ и t пробегает натуральные числа. Элемент $\frac{(b^2 - 4ac)^{tv} \xi}{z^{tu}}$ в степени k равен $z^t \xi^k$. Следовательно, при сужении на слой $z = 0$ все добавленные элементы становятся нильпотентами и “нулевой слой” морфизма факторизации с приведенной структурой у многообразия $\text{Norm}(X_n^k)$ изоморфен соответствующему слою многообразия X_n^k . Морфизм нормализации сюръективен и потому определяет биективное отображение на “нулевом слое”. Вне “нулевого слоя” многообразие X_n^k гладко, и потому морфизм нормализации суть локальный изоморфизм. Итак, для взаимно простых чисел k и n утверждение леммы доказано.

В случае, когда $d = (k, n) > 1$, “нулевой слой” морфизма факторизации у $\text{Norm}(X_n^k)$ содержит незамкнутую орбиту типа $SL_2 / U_{\frac{4k}{d}}$, и на этом слое морфизм нормализации есть d -листное накрытие, разветвленное в точности над неподвижной точкой.

Сопоставляя утверждения леммы 7, леммы 8, б) и леммы 9, окончательно получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Всякое простое (S, N) -многообразие изоморфно одному из многообразий $\text{Norm}(X_n^k)$ при взаимно простых числах k и n .*

ЗАМЕЧАНИЕ 3. При различных парах взаимно простых чисел (k, n) и (k', n') многообразия $\text{Norm}(X_n^k)$ и $\text{Norm}(X_{n'}^{k'})$ не изоморфны. Действительно, при $k \neq k'$ у этих многообразий различны незамкнутые орбиты, а число n для $\text{Norm}(X_n^k)$ есть порядок группы тех эквивариантных автоморфизмов этого многообразия, которые тождественны при сужении на “нулевой” слой морфизма факторизации (такие автоморфизмы действуют тождественно на функции $a^i b^j c^l (i+j+l=2k)$ и умножают z на корень из 1 степени n).

4.3. Классификация (S, N) -многообразий. Пусть теперь X есть произвольное (S, N) -многообразие. Выберем на гладкой кривой X^N локальный аналитический параметр z в окрестности точки $x \in X^{\mathrm{SL}_2}$. Тогда для вложения $X \hookrightarrow V$ вложение $X^N \hookrightarrow V^N$ будет задаваться формулами типа (1), где в правой части будут стоять не обязательно многочлены, но ряды. Однако это не повлияет на следующие рассуждения, и мы получим, что в некоторой окрестности точки x многообразие X SL_2 -эквивариантно гомеоморфно многообразию X_n^k для некоторых взаимно простых натуральных чисел k и n , которые мы будем называть *отметками* точки $x \in X^{\mathrm{SL}_2}$.

Заметим, что слой общего положения для морфизма факторизации $\phi: X \rightarrow X//\mathrm{SL}_2$ есть SL_2/N и $\mathrm{Aut}_{\mathrm{SL}_2} \mathrm{SL}_2/N \cong N_{\mathrm{SL}_2}(N)/N = \{e\}$. Поэтому $X \setminus \phi^{-1}(\phi(X^{\mathrm{SL}_2})) \cong (C \setminus \phi(X^{\mathrm{SL}_2})) \times \mathrm{SL}_2/N$. Отсюда вытекает, что (S, N) -многообразие однозначно определяется набором данных (кривая C , набор точек X^{SL_2} , пары отметок точек из X^{SL_2}). Покажем, что для любого такого набора данных соответствующее (S, N) -многообразие существует. Для этого нам понадобится лемма, легко доказываемая с помощью стандартной техники теории алгебраических кривых.

ЛЕММА 10. *Для гладкой неприводимой аффинной алгебраической кривой C и отмеченной на ней точки x найдется такой регулярный морфизм $\phi: C \rightarrow \mathbb{A}^1$, что точка x не будет точкой ветвления морфизма ϕ .*

Теперь для фиксированной на C точки $x_i \in X^{\mathrm{SL}_2}$ с отметками (k_i, n_i) , удалив из C все точки ветвления ϕ , а также все точки X^{SL_2} , кроме x_i , получим открытое множество $C_i \hookrightarrow C$. Рассмотрим многообразие $\mathrm{Norm}(X_{n_i}^{k_i})$, морфизм факторизации $\phi_i: \mathrm{Norm}(X_{n_i}^{k_i}) \rightarrow \mathbb{A}^1$ и индуцированное над C_i расслоение Z_i :

$$\begin{array}{ccc} Z_i & \longrightarrow & \mathrm{Norm}(X_{n_i}^{k_i}) \\ \downarrow \psi_i & & \downarrow \varphi_i \\ C_i & \longrightarrow & \mathbb{A}^1 \end{array}$$

Легко видеть, что Z_i нормально и в нем есть открытое подмножество $(C_i \setminus \{x_i\}) \times \mathrm{SL}_2/N$. Наконец, рассмотрим проекцию

$$\psi: Z = (C \setminus X^{\mathrm{SL}_2}) \times \mathrm{SL}_2/N \rightarrow (C \setminus X^{\mathrm{SL}_2}).$$

Многообразия Z и Z_i по всем значениям i можно единственным способом склеить в алгебраическое многообразие X (слой общего положения SL_2/N допускает лишь тождественный эквивариантный автоморфизм, и потому два таких слоя можно отождествить единственным образом) и отобразить $X \rightarrow C$ согласованно со всеми морфизмами ψ и ψ_i .

ЛЕММА (об аффинном морфизме [6]). Пусть $f: X \rightarrow Y$ – морфизм алгебраических многообразий такой, что существует открытое покрытие $\{V_i\}$ многообразия Y и $f^{-1}(V_i)$ аффинно для каждого i . Тогда для любого аффинного открытого множества $V \hookrightarrow Y$ $f^{-1}(V)$ аффинно.

Таким образом, X аффинно. Нормальность многообразия – свойство локальное, а локально X устроено либо как Z , либо как Z_i . Искомое многообразие X построено. Нами доказана следующая

ТЕОРЕМА 2. (S, N) -многообразия находятся во взаимно однозначном соответствии со следующим набором данных:

- 1) C – гладкая неприводимая аффинная кривая;
- 2) K – конечный набор из m точек на этой кривой (возможно, $m = 0$);
- 3) W – набор пар взаимно простых натуральных чисел $(k_1, n_1), \dots, (k_m, n_m)$, называемых метками точек из K .

ЗАМЕЧАНИЕ 4. (S, N) -многообразие гладко тогда и только тогда, когда $X \cong C \times SL_2/N$ (в терминах теоремы 2 это означает, что множество K пусто). В остальных случаях множество особых точек X совпадает с X^{SL_2} . Действительно, в каждой неподвижной точке касательное пространство есть SL_2 -модуль, в котором есть неприводимый подмодуль размерности ≥ 5 , тогда как многообразие X трехмерно. Остальные точки неособы, так как их орбиты двумерны, а нормальные многообразия неособы в коразмерности 1.

Здесь же кажется уместным сформулировать еще один общий результат о SL_2 -действиях на нормальных трехмерных многообразиях.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Если группа SL_2 действует на неприводимом трехмерном нормальном аффинном многообразии X , то все слои морфизма факторизации для такого действия неприводимы и нормальны.

При доказательстве естественно считать, что $\dim X//SL_2 = 1$, иначе слоем морфизма факторизации будет являться все многообразие X .

Переход к многообразию $\text{Spec } \mathbb{K}[X]^U$ показывает, что данное предложение эквивалентно следующему предложению.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5'. Если одномерный тор T эффективно действует на нормальной аффинной поверхности Y так, что в T -модуле $\mathbb{K}[Y]$ встречаются лишь неотрицательные веса тора T и фактор $Y//T$ одномерен, то каждый слой морфизма факторизации ϕ изоморфен аффинной прямой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В [14, гл.4] показано, что поверхность Y тороидальна, т.е. у всякой ее точки имеется T -инвариантная окрестность, полученная этальным отображением из T -инвариантной окрестности на аффинном торическом многообразии для двумерного тора $T \times \mathbb{K}^*$. Для такого торического многообразия в условиях предложения 5' неприводимость и нормальность всех слоев T -морфизма факторизации легко проверяется. Остается заметить, что единственным нормальным аффинным торическим многообразием для одномерного тора с условием неотрицательности весов является аффинная прямая.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть группа SL_2 действует на неприводимом трехмерном нормальном аффинном многообразии X и выполнено одно из двух условий:

- 1) действие $SL_2 : X$ локально транзитивно;
- 2) $\mathbb{K}[X]^{SL_2} \neq \mathbb{K}$.

Тогда все особенности многообразия X рациональны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для локально транзитивных действий группы SL_2 данный результат принадлежит В. Л. Попову (см. [3]). В случае $\mathbb{K}[X]^{SL_2} \neq \mathbb{K}$ мы имеем морфизм факторизации $X \rightarrow X//SL_2$ на гладкую кривую $X//SL_2$, который является плоским и все слои которого суть нормальные сферические многообразия. Согласно результатам работы [3] такие слои имеют рациональные особенности. Для завершения доказательства остается воспользоваться следующим фактом: если $f : X \rightarrow S$ – плоский морфизм и $x \in X$, причем точка $s = f(x)$ является рациональной особенностью в S , а x – рациональная особенность слоя $f^{-1}(s)$, то x является рациональной особенностью в X (см. [13]).

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Данный результат также можно переформулировать для действий одномерного тора на нормальной поверхности.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Предложение 6 не охватывает лишь случай (S, U) -многообразий, для которых $\mathbb{K}[X]^{SL_2} = \mathbb{K}$. В этом случае на многообразии X возможна лишь одна особая точка – одноточечная орбита, особенность в которой действительно может быть не рациональна. Так, в терминах теоремы 1 можно рассмотреть $Y = \{(x, y, z) \mid x^3 + y^3 + z^3 = 0\}$ с естественным действием тора $t(x, y, z) = (tx, ty, tz)$.

§ 5. Гладкие (S, T) -многообразия

В данной ситуации орбитой общего положения на многообразии X является однородное пространство SL_2/T . Возможно также конечное число орбит типа SL_2/N , SL_2/U_{2k} и { точка }.

Возникает простой пример гладкого (S, T) -многообразия: если C – гладкая неприводимая аффинная кривая, то $X = (SL_2/T) \times C$. Будем называть такие многообразия *многообразиями тривиального типа* (тривиальность эквивалентна несвязности кривой X^T). Все оставшиеся гладкие (S, T) -многообразия отнесем к нетривиальному типу.

С помощью теории этальных слайсов Д. Луны доказывается, что из гладкости многообразия X вытекает гладкость кривой X^T (см. [4, с. 238]). Поэтому для многообразий нетривиального типа кривая X^T неприводима.

На кривой X^T естественно действует группа $\mathbb{Z}_2 = N(T)/T$, и если на многообразии X все орбиты замкнуты, то

$$X = SL_2/T *_{\mathbb{Z}_2} X^T.$$

Выясним теперь, как устроено X в окрестности незамкнутой орбиты типа SL_2/U_{2k} . Рассуждения о касательном пространстве в неподвижной точке, приведенные в предыдущем параграфе, показывают, что из гладкости многообразия X

вытекает $k = 1$. Используя теорию этальных слайсов [4, с. 239], мы получаем, что некоторая комплексная окрестность незамкнутой орбиты в X аналитически эквивариантно изоморфна инвариантной окрестности нуля трехмерного SL_2 -модуля $T_x X$. Отсюда вытекает, что $T_x X$ есть модуль V_2 .

Итак, у нас определен набор данных: гладкая неприводимая аффинная кривая X^T с заданным нетривиальным алгебраическим действием на ней группы $N(T)/T = \mathbb{Z}_2$ и конечный набор точек X^{SL_2} в X^N . Покажем, как по такому набору данных построить соответствующее (S, T) -многообразие. Пусть C – гладкая неприводимая аффинная кривая, на которой нетривиальным образом действует группа $\mathbb{Z}_2$. Фиксируем некоторое множество точек $K \subset C^{\mathbb{Z}_2}$ (которое в дальнейшем будет множеством X^{SL_2}). Пусть x – точка из множества K . Рассмотрим этальный слайс S в точке x для действия $\mathbb{Z}_2 : C$. Согласно одной из теорем теории Луны [4, с. 238] существует превосходный морфизм $\phi: S \rightarrow \mathbb{A}^1$, который $\mathbb{Z}_2$ -эквивариантен относительно естественного действия $\mathbb{Z}_2$ на прямой и такой, что $\phi(x) = 0$. Этот морфизм индуцирует морфизм факторов $\phi/\mathbb{Z}_2 : C' \rightarrow \mathbb{A}^1$. С другой стороны, имеется морфизм факторизации $V_2 \rightarrow \mathbb{A}^1$. Рассматривая обратный образ пространства V_2 относительно морфизма $\phi/\mathbb{Z}_2$, получаем некоторое SL_2 -многообразие. “Склеив” все такие многообразия (для всех точек $x \in K$) и многообразие $SL_2 *_{N(C \setminus K)}$ по общему для них открытому подмножеству $SL_2 *_{N(C \setminus C^{\mathbb{Z}_2})}$, получим требуемое гладкое (S, T) -многообразие X .

Учитывая, во-первых, что по определению превосходного морфизма этальный слайс многообразия X в неподвижной точке x должен быть изоморфен соответствующему обратному образу пространства V_2 , и, во-вторых, что $N_{SL_2}(T)/T \cong \mathbb{Z}_2$ и что комплексная кривая без конечного числа точек есть связное множество (потому “склейка” определена однозначно), мы получаем единственность соответствующего (S, T) -многообразия.

Таким образом нами доказана

ТЕОРЕМА 3. *Гладкие (S, T) -многообразия нетривиального типа однозначно задаются следующим набором данных:*

- 1) C – гладкая неприводимая аффинная кривая с заданным на ней нетривиальным алгебраическим действием группы $\mathbb{Z}_2$;
- 2) K – выделенное подмножество (возможно, пустое) во множестве неподвижных точек $C^{\mathbb{Z}_2}$ (возможно, пустом).

ЗАМЕЧАНИЕ. Из того факта, что все орбиты на X изоморфны однородному пространству SL_2/T , никак не следует, что многообразие X имеет тривиальный тип. Например, можно рассмотреть многообразие $SL_2 *_{N(C)}$, где $C = \{(x, y) \mid xy = 1\}$ и инволюция определена формулой $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$.

Список литературы

1. Попов В. Л. Квазиоднородные аффинные алгебраические многообразия группы $SL(2)$ // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1973. Т. 37. № 4. С. 792–832.
2. Крафт Х. Геометрические методы в теории инвариантов. М.: Мир, 1987.
3. Попов В. Л. Стягивание действий редуктивных алгебраических групп // Матем. сб. 1986. Т. 130(172). № 3(7). С. 310–334.

4. *Винберг Э. Б., Попов В. Л.* Теория инвариантов // Итоги науки и техники. Фунд. направления. Т. 55. М.: ВИНТИ, 1989.
5. *Шафаревич И. Р.* Основы алгебраической геометрии. М.: Наука, 1988.
6. *Хартсхорн Р.* Алгебраическая геометрия. М.: Мир, 1981.
7. *Винберг Э. Б., Попов В. Л.* Об одном классе аффинных квазиоднородных многообразий // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1972. Т. 36. № 4. С. 749–764.
8. *Винберг Э. Б.* Сложность действий редуктивных групп // Функ. анализ и его прилож. 1986. Т. 20. № 1. С. 1–13.
9. *Knop F.* Über Bewertungen, welche unter einer reduktiven Gruppe invariant sind // Math. Annalen. 1993. V. 295. P. 333–363.
10. *Panyushev D. I.* Good properties of algebras of invariants and defect of linear representations // J. of Lie Theory. 1995. V. 5.
11. *Panyushev D. I.* Complexity and nilpotent orbit // Manuscripta math. 1994. № 83. P. 223–237.
12. *Panyushev D. I.* Complexity of Quasiaffine Homogeneous Varieties, t -Decompositions, and Affine Homogeneous Spaces of Complexity 1 // Advances in Soviet Mathematics. 1992. V. 8. P. 151–166.
13. *Elkik R.* Singularities rationnelles et deformations // Invent. math. 1978. V. 47. P. 139–147.
14. *Kempf G., Knudson F., Mumford D., Saint-Donat B.* Toroidal embeddings // Lecture Notes in Math. 1973. V. 339.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет

Поступило в редакцию
16.XI.1995