Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Махнёв, Д. В. Падучих, О 2-локально графах Зейделя, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1997, том 61, выпуск 4, 67–80

DOI: <https://doi.org/10.4213/im136>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 16:12:12

УДК 519.14

А. А. Махнёв, Д. В. Падучих

О 2-локально графах Зейделя

Назовем i -окрестностью вершины a графа Γ подграф $\Gamma_i(a)$, индуцированный Γ на множестве всех вершин графа Γ , которые находятся на расстоянии i от вершины a . Пусть $\mathcal{F}$ – некоторый класс графов. Граф Γ назовем i -локально $\mathcal{F}$ -графом, если $\Gamma_i(a)$ лежит в $\mathcal{F}$ для любой вершины a графа Γ . В работе классифицированы связные регулярные графы, в которых 2-окрестности являются графами Зейделя (графом Зейделя называется сильно регулярный граф, имеющий собственное значение, равное -2). Класс графов Зейделя состоит из полных многодольных графов с долями порядка 2, решетчатых и треугольных графов, а также графов Шрикханде, Чанга, Петерсена, Клебша и Шлефли.

Библиография: 6 наименований.

Введение

В работе рассматриваются неориентированные графы без петель и кратных ребер. Под расстоянием $d(a, b)$ между вершинами a, b графа Γ понимается длина кратчайшего пути, соединяющего a с b . Назовем i -окрестностью вершины a подграф $\Gamma_i(a)$, индуцированный Γ на множестве всех вершин графа Γ , которые находятся на расстоянии i от вершины a . Подграф $\Gamma_1(a)$ мы будем называть *окрестностью вершины a* и обозначать через $[a]$. Через $a^\perp$ обозначим подграф, индуцированный на $\{a\} \cup [a]$ (на шаре радиуса 1 с центром a).

Пусть $\mathcal{F}$ – некоторый класс графов. Граф Γ назовем i -локально $\mathcal{F}$ -графом, если $\Gamma_i(a)$ лежит в $\mathcal{F}$ для любой вершины a графа Γ . Если при этом класс $\mathcal{F}$ состоит из графов, изоморфных некоторому графу Δ , то граф Γ назовем i -локально Δ -графом. При $i = 1$ используется выражение: *локально граф*. Задача описания локально $\mathcal{F}$ -графов является классической и решена для различных классов $\mathcal{F}$ (см., например, [1]). Особый интерес эта задача приобрела в свете изучения диаграммных геометрий и их расширений.

Исследование 2-локально $\mathcal{F}$ -графов является сравнительно новой задачей. Можно отметить, что изучение 2-локально Δ -графов диаметра 2 сводится к изучению локально $\overline{\Delta}$ -графов. В частности, описание Холлом и Шультом локально котреугольных графов [2] является описанием 2-локально треугольных графов диаметра 2. В статье [3] на некотором шаге возникла задача изучения графов, в которых 2-окрестности оказались прямоугольными решетками, треугольными графами или графами Шлефли.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 93-01-01529) и Международного научного фонда совместно с правительством России (грант NMC 300).

В данной работе изучаются связные регулярные графы, в которых 2-окрестности являются графами Зейделя. *Графом Зейделя* называется сильно регулярный граф, имеющий собственное значение, равное -2 . Класс графов Зейделя обозначим через $\mathcal{S}$. По теореме Зейделя [4] класс $\mathcal{S}$ состоит из полных многодольных графов $K_{n \times 2}$ с n долями порядка 2, решетчатых и треугольных графов, а также графов Шрикханде, Чанга, Петерсена, Клебша и Шлефли (см. § 1 для описания указанных графов).

Валентностью вершины называется число вершин в ее окрестности. Граф Γ называется *регулярным валентности k* , если валентность любой вершины из Γ равна k . Граф Γ называется *реберно регулярным с параметрами (v, k, λ)* , если он имеет v вершин и является регулярным графом валентности k , в котором каждое ребро лежит в λ треугольниках. Граф Γ – вполне регулярный граф с параметрами (v, k, λ, μ) , если он реберно регулярен с соответствующими параметрами и $[a] \cap [b]$ содержит μ вершин для любых двух вершин a, b , находящихся на расстоянии 2 в Γ . Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом*. Подграф, индуцированный на $[a] \cap [b]$, назовем λ -*подграфом* (μ -*подграфом*), если вершины a, b смежны (находятся на расстоянии 2). Граф Γ называется *редуцированным*, если ядро $K(a) = \{x \in \Gamma \mid x^\perp = a^\perp\}$ состоит из единственной вершины для любой вершины a графа. Скажем, что граф Γ является прямой суммой своих подграфов Γ_i , если подграфы $\bar{\Gamma}_i$ являются связными компонентами графа $\bar{\Gamma}$. *Лестничным графом* называется объединение изолированных ребер. Через $(m_1, \dots, m_n)$ обозначим полный n -дольный граф с долями порядков $m_1, \dots, m_n$. Если $m_1 = \dots = m_n = m$, то граф $(m_1, \dots, m_n)$ обозначается через $K_{n \times m}$. *Графом Тэйлора* называется вполне регулярный граф диаметра 3, в котором каждая вершина лежит в $a^\perp \cup b^\perp$ для любых двух вершин с $d(a, b) = 3$.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ , то через $b_i(u, w)$ ($c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \dots, b_{d-1}; c_1, \dots, c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ . Заметим, что для любого дистанционно регулярного графа b_0 – это валентность графа, $c_1 = 1$. Дистанционно регулярный граф диаметра d называется *антиподальным*, если отношение – находиться на расстоянии d – является отношением эквивалентности на множестве вершин графа.

ТЕОРЕМА. Пусть Γ – связный регулярный 2-локально $\mathcal{S}$ -граф. Тогда либо Γ имеет диаметр 3 и является 2-локально Δ -графом Тэйлора, причем граф Δ изоморфен треугольному графу $T(6)$, (3×3) -решетке или графу Шлефли, либо диаметр Γ равен 2 и связные компоненты графа $\bar{\Gamma}$ изоморфны следующим графам:

- 1) регулярный локально лестничный граф;
- 2) дополнительный граф к $(t+1) \times (t+1)$ -решетке или граф Джонсона $J(6, 3)$;
- 3) котрешетчатый граф $\overline{T(t+2)}$, граф Конвэя–Смита, граф Доро, граф, получаемый из графа изотропных точек симплектического проективного пространства размерности 5 над полем из двух элементов удалением гиперплоскости или эллиптической квадрики;
- 4) граф Клебша либо граф Тэйлора, в котором окрестности вершин яв-

ляются точечными графами обобщенного четырехугольника $GQ(2, 4)$, либо сильно регулярный локально $GQ(2, 4)$ -граф с параметрами $(64, 27, 10, 12)$;

5) дистанционно регулярный граф на 51 вершине с массивом пересечений $\{16, 10, 1; 1, 5, 16\}$, в котором окрестности вершин изоморфны графу, дополнителю к графу Клебша.

Система инцидентности, состоящая из точек и прямых, называется α -частичной геометрией порядка (s, t) , если каждая прямая содержит $s + 1$ точку, каждая точка лежит на $t + 1$ прямой (прямые пересекаются не более чем по одной точке) и для любой точки a , не лежащей на прямой L , найдется точно α прямых, проходящих через a и пересекающих L (обозначение $pG_\alpha(s, t)$). Если $\alpha = 1$, то геометрия называется обобщенным четырехугольником и обозначается $GQ(s, t)$. Графом Джонсона $J(n, m)$ называется граф, вершинами которого являются m -элементные подмножества данного n -элементного множества, и две вершины смежны, если они пересекаются по $(m - 1)$ -элементному подмножеству. Граф Конвея–Смита на 63 вершинах имеет диаметр 4 и является антиподальным 3-накрытием графа $T(7)$. Граф Доро на 65 вершинах является единственным дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{10, 6, 4; 1, 2, 5\}$. Он может быть описан как граф коммутирования для класса инволюций группы $P\Omega L(2, 25)$, не лежащего в коммутанте. Известны существование и единственность графа из п. 5) теоремы [1, с. 386].

Класс регулярных локально лестничных графов совпадает с классом реберно регулярных графов, имеющих $\lambda = 1$. В классе сильно регулярных графов с $\lambda = 1$ известно существование точечных графов для $GQ(2, t)$, а также графов с параметрами $(81, 20, 1, 6)$, $(243, 22, 1, 2)$, $(729, 55, 1, 20)$. Отметим здесь проблему Зейделя о существовании сильно регулярного графа с параметрами $(99, 14, 1, 2)$ и статью [6], в которой изучаются сильно регулярные графы с $\lambda = 1$, не имеющие двух непересекающихся треугольников, соединенных точно двумя ребрами.

§ 1. Редукция к графам диаметра 2

В этом параграфе мы дадим определения и некоторые свойства графов Зейделя и опишем 2-локально $\mathcal{S}$ -графы диаметра, большего 2.

Прямоугольной решеткой $((m \times n)$ -графом) называется граф с множеством вершин $X \times Y$, где $|X| = m$, $|Y| = n$ и вершины (x_1, y_1) , (x_2, y_2) смежны, только если $x_1 = x_2$ или $y_1 = y_2$. Если $m = n$, то граф называется решеточным $(m \times m)$ -графом. Треугольным графом $T(m)$ называется граф с множеством неупорядоченных пар из X в качестве вершин, $|X| = m$ и пары $\{a, b\}$, $\{c, d\}$ смежны тогда и только тогда, когда они имеют общий элемент.

В графе на рис. 1 отождествим вершины i^+ , i^- ($i = 1, 2, \dots, 5$). Затем отождествим вершины $1, 5$ и j^+ , j^- ($j = 6, 7, 8$). Полученный сильно регулярный граф с параметрами $(16, 6, 2, 2)$ называется графом Шрикханде. Граф Шрикханде – единственный нерешеточный граф, имеющий параметры решеточного графа (это параметры (4×4) -решетки).

Для нетреугольного графа Γ , имеющего параметры треугольного графа, необходимо имеем $m = 8$ и Γ – один из трех графов Чанга. Для подмножества вершин X графа Γ переключением Γ относительно X называется граф Γ' с тем же множеством вершин, причем смежность вершин в X и $\Gamma - X$ остается неизменной, а смежность между вершинами из X и $\Gamma - X$ заменяется на противополо-

Рис. 1. Граф Шрикханде.

ложную. Теперь графы Чанга Ch_1 , Ch_2 , Ch_3 получаются переключением треугольного графа $T(8)$ относительно множеств $\{15, 26, 37, 48\}$, $\{12, 23, \dots, 78, 81\}$, $\{12, 23, 31; 45, 56, 67, 78, 84\}$ соответственно.

Граф Петерсена – это сильно регулярный граф с параметрами $(10, 3, 0, 1)$. Он совпадает с графом $\overline{T(5)}$.

Граф Клебша – это сильно регулярный граф с параметрами $(16, 10, 6, 6)$. Простое описание имеет граф Γ , дополнительный к графу Клебша. Пусть $a \in \Gamma$ и $[a] = \{b_1, \dots, b_5\}$. Тогда $\Gamma_2(a)$ состоит из 10 вершин c_{ij} , смежных с b_i, b_j для различных $i, j \in \{1, \dots, 5\}$. При этом граф $\Gamma_2(a)$ является графом Петерсена. Таким образом, граф Клебша является локально $T(5)$ -графом.

Граф Шлефли – это сильно регулярный граф с параметрами $(27, 16, 10, 8)$. Он является дополнительным к точечному графу обобщенного четырехугольника $GQ(2, 4)$, причем окрестности вершин в графе Шлефли являются графами Клебша.

В табл. 1 выписаны параметры графов Зейделя (здесь r – отличное от k неотрицательное собственное значение графа).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $\mathcal{F}$ состоит из регулярных графов диаметра 2. Если связный регулярный редуцированный 2-локально $\mathcal{F}$ -граф Γ имеет диаметр, больший 2, то Γ – граф Тэйлора и вторые окрестности вершин изоморфны сильно регулярному графу Δ с $k(\Delta) = 2\mu(\Delta)$.

ТАБЛИЦА 1

№	Граф	v	k	λ	μ	r
1	Многодольный	$2n$	$2(n-1)$	$2(n-2)$	$2(n-1)$	0
2	Треугольный	$n(n-1)/2$	$2(n-2)$	$n-2$	4	$n-4$
3	Решетчатый	n^2	$2(n-1)$	$n-2$	2	$n-2$
4	Шрикханде	16	6	2	2	2
5	Чанга	28	12	6	4	4
6	Петерсена	10	3	0	1	1
7	Клебша	16	10	6	6	2
8	Шлефли	27	16	10	8	4

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть Γ – связный регулярный 2-локально $\mathcal{S}$ -граф диаметра, большего 2. Тогда Γ – граф Тэйлора, являющийся локально Δ -графом, где $\Delta = T(6)$, (3×3) -решетка или граф Шлефли.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1. Пусть граф Γ удовлетворяет условиям предложения 1. Покажем сначала, что диаметр графа Γ равен 3. Если $bcade$ – геодезический 4-путь, то $b, e \in \Gamma_2(a)$, причем расстояние между b, e в графе $\Gamma_2(a)$ не меньше 4. Противоречие.

Пусть a – такая вершина из Γ , что $\Gamma_3(a)$ непусто. Покажем, что любая вершина $x \in \Gamma_2(a)$ смежна с любой вершиной $y \in \Gamma_3(a)$. В противном случае $\Gamma_2(a)$ содержит вершину z , находящуюся на расстоянии 2 от y . Противоречие с тем, что $\Gamma_2(z)$ содержит a , y и расстояние в Γ между a, y равно 3.

Покажем теперь, что $\Gamma_3(a)$ является кликой (полным подграфом). В противном случае $\Gamma_3(a)$ содержит вершины b, c с $d(b, c) = 2$. По предыдущему утверждению вершина a из $\Gamma_3(b)$ должна быть смежна с c . Противоречие.

Итак, $x^\perp = y^\perp$ для любых вершин $x, y \in \Gamma_3(a)$. По редуцированности графа $|\Gamma_3(a)| = 1$ и $[a] = \Gamma_2(b)$ для $b \in \Gamma_3(a)$. Положим $\Delta(x) = \Gamma_2(x)$ для $x \in \Gamma$. Число ребер между $[a]$ и $[b]$ равно $|[a]|(|[a]| - k(\Delta(a)) - 1)$ и равно $|[b]|(|[b]| - k(\Delta(b)) - 1)$. Отсюда валентность графа $\Delta = \Delta(x)$ не зависит от выбора вершины $x \in \Gamma$. Таким образом, имеем $\mu(a, c) = |\Delta| - k(\Delta) - 1$ для любых вершин a, c , находящихся на расстоянии 2 в Γ . Так как Γ – регулярный граф, то для любой вершины $x \in \Gamma$ подграф $\Gamma_3(x)$ непуст.

Таким образом, Γ – дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{|\Delta|, |\Delta| - k(\Delta) - 1, 1; 1, |\Delta| - k(\Delta) - 1, |\Delta|\}$. По теореме Тэйлора–Ливингстона [1, теорема 1.5.3] граф Δ является сильно регулярным с $k(\Delta) = 2\mu(\Delta)$, причем ввиду леммы 1.5.2 [1] и равенства $[a] = \Gamma_2(b)$ для $b \in \Gamma_3(a)$ каждый граф из $\mathcal{F}$ изоморфен Δ . Предложение 1 доказано.

Для доказательства следствия 1 достаточно заметить, что графы из $\mathcal{S}$ редуцированы, и выбрать в табл. 1 графы Δ с $k(\Delta) = 2\mu(\Delta)$.

§ 2. 2-локально решетчатые графы

В этом параграфе мы рассмотрим связанные регулярные графы диаметра 2, в которых 2-окрестности являются $(m \times m)$ -решетками.

Пусть $\mathcal{F}$ состоит из связанных регулярных графов диаметра 2, Γ — v -вершинный регулярный 2-локально $\mathcal{F}$ -граф валентности k и диаметра 2. Для $a \in \Gamma$ число вершин в $\Gamma_2(a)$ не зависит от выбора вершины a и равно $v - k - 1$. Положим $\overline{\mathcal{F}} = \{\Lambda \mid \overline{\Lambda} \in \mathcal{F}\}$. Тогда $\overline{\Gamma}$ является локально $\overline{\mathcal{F}}$ -графом, и если $\overline{\Gamma}_i$ — связанные компоненты графа $\overline{\Gamma}$, то граф Γ является прямой суммой графов Γ_i . Таким образом, без ограничения общности мы можем считать граф $\overline{\Gamma}$ связным. Пусть ab — ребро графа $\overline{\Gamma}$. Тогда граф $\overline{\Gamma}(a) \cap \overline{\Gamma}(b)$ состоит из $(v - k - 1) - 1 - k(\Gamma_2(a)) = (v - k - 1) - 1 - k(\Gamma_2(b))$ вершин. В силу связности графа $\overline{\Gamma}$ заключаем, что граф $\Gamma_2(a)$ имеет валентность, не зависящую от выбора вершины $a \in \Gamma$.

Пусть граф Γ удовлетворяет условиям теоремы и граф $\overline{\Gamma}$ связан. Заметим, что граф Зейделя однозначно определяется своим числом вершин и валентностью, кроме следующих двух исключений: решетчатый (4×4) -граф и граф Шрикханде, а также треугольный граф $T(8)$ и три графа Чанга. Но 2-окрестности в графе Шрикханде и (4×4) -графе не изоморфны. Значит, если одна 2-окрестность из Γ является графом Шрикханде, то Γ является 2-локально Шрикханде-графом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть граф Γ является связным регулярным 2-локально $(m \times m)$ -графом диаметра 2, $m \geq 3$, и граф $\overline{\Gamma}$ связан. Тогда Γ является $(m + 1) \times (m + 1)$ -решеткой или $m = 3$ и $\overline{\Gamma}$ — граф Джонсона $J(6, 3)$.

Пусть граф Γ удовлетворяет условиям предложения. Если $m = 3$, то граф $\overline{\Gamma}$ является локально (3×3) -графом, так как (3×3) -решетка самодуальна. В этом случае ввиду [1, с. 258] $\overline{\Gamma}$ является графом Джонсона $J(6, 3)$ или графом, дополнительным к (4×4) -решетке. Пусть в дальнейшем $m \geq 4$.

ЛЕММА 1. Пусть Λ является $(m \times m)$ -решеткой, C — максимальная коклика из Λ . Тогда $|C| = m$ и для каждой вершины $a \in \Lambda - C$ однозначно определяются вершины $b, c \in C$ такие, что $a \in [b] \cap [c]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что для любой вершины $a \in \Lambda$ будем иметь $\Lambda_2(a) = (m - 1) \times (m - 1)$. Утверждение леммы получаем индукцией по m . Лемма доказана.

Выберем произвольную вершину $a \in \Gamma$, и пусть $\Lambda = \Gamma_2(a)$, C — максимальная коклика из Λ , $b, c \in C$. Напомним, что граф Γ является кореберно регулярным и $[b] \cap [c]$ содержит μ вершин. Ясно, что $\mu - 2$ из этих вершин лежат в $[a]$. Пусть Γ' — подграф, индуцированный Γ на этих $\mu - 2$ вершинах, $\Gamma_1 = \Gamma - \Gamma'$.

ЛЕММА 2. Граф Γ является прямой суммой графов Γ' и Γ_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что любая вершина $d \in C$ смежна со всеми вершинами из Γ' . В противном случае ввиду леммы 1 вершины b, c будут иметь не менее трех общих соседей в $\Gamma_2(d)$. Таким образом, подграф Γ' не зависит от выбора вершин $b, c \in C$.

Возьмем теперь произвольную вершину $e \in \Lambda - C$. По лемме 1 найдутся вершины $x, y \in C$, для которых e, f являются общими соседями в Λ (f — некоторая вершина из $\Lambda - C$). Заменив в C вершины x, y на e, f , получим новую коклику C'

из Λ . Так как $m \geq 4$, то $|C \cap C'| \geq 2$, поэтому каждая вершина из C' (а значит, и e) смежна со всеми вершинами из Γ' .

Пусть теперь $d \in [a] \cap \Gamma_1$. Тогда Λ содержит не смежную с d вершину e . В $\Gamma_2(e)$ выберем максимальную коклику C'' , содержащую a . Тогда остальные вершины из C'' лежат в Λ , поэтому они смежны со всеми вершинами из Γ' . Как показано выше, каждая вершина из $\Gamma_2(e)$ смежна со всеми вершинами из Γ' . Итак, граф Γ является прямой суммой графов Γ' и Γ_1 . Лемма доказана.

Теперь можно считать, что $\Gamma = \Gamma_1$.

ЛЕММА 3. *Граф Γ является $(m+1) \times (m+1)$ -решеткой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что граф Γ кореберно регулярен с $\mu = 2$. Далее, μ -подграфы $[a] \cap [b]$ и $[a] \cap [c]$ не пересекаются для любых различных вершин $b, c \in C$, поэтому для валентности k графа Γ имеем неравенство $k \geq 2n$. С другой стороны, каждая вершина из $[a]$ смежна с некоторой вершиной коклики C . Действительно, если вершина $d \in [a]$ не смежна с вершиной $e \in C$, то, выбрав в $\Gamma_2(e)$ коклику $C' = (C - \{e\}) \cup \{a\}$, мы можем применить к ней лемму 1.

Итак, $k = 2n$. Теперь число вершин в графе Γ равно $(n+1)^2$. Покажем, что граф Γ реберно регулярен. Пусть $d \in [a]$. Тогда вершина d смежна с единственной вершиной $e \in C$. Легко понять, что d смежна в $\Gamma_2(a)$ только с соседями вершины e . В самом деле, допустим, что d смежна в $\Gamma_2(a)$ с вершиной x , не смежной с e . По лемме 1 найдутся вершины $b, c \in C$, для которых $[b] \cap [c] = \{x, y\}$. Заменив в C вершины b, c на x, y , получим коклику C' , содержащую две вершины, смежные с d . Противоречие с леммой 1.

Аналогично найдем, что для каждой отличной от e вершины $b \in C$ вершина d смежна точно с одной вершиной из $[b] \cap [e]$. В противном случае достаточно заменить в C вершины b, e на $[b] \cap [e]$, и в полученной коклике d будет смежна с единственной вершиной. Таким образом, вершина d имеет в $\Gamma_2(a)$ точно n соседей. Отсюда $[a] \cap [d]$ содержит точно $n - 1$ вершин. Итак, Γ – сильно регулярный граф с параметрами $((n+1)^2, 2n, n-1, 2)$ и в силу теоремы Зейделя является $(n+1) \times (n+1)$ -решеткой. Предложение 2 доказано.

§ 3. Треугольные графы и графы Чанга

В этом параграфе мы рассмотрим связанные регулярные графы диаметра 2, в которых 2-окрестности являются графами Чанга или треугольными графами.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Пусть Γ – связный регулярный граф диаметра 2, в котором 2-окрестности являются треугольными графами $T(m)$, $m \geq 5$, или графами Чанга. Если граф $\bar{\Gamma}$ связан, то граф Γ является либо треугольным графом $T(m+2)$, либо $m = 5$ и $\bar{\Gamma}$ является графом Конвея–Смита на 63 вершинах или графом Доро на 65 вершинах, либо $m = 6$ и $\bar{\Gamma}$ получается из графа изотропных точек симплектического проективного пространства размерности 5 над полем из двух элементов удалением гиперплоскости или эллиптической квадрати.*

Пусть граф Γ удовлетворяет условиям предложения 3. Заметим, что в графах Чанга нет 2-окрестностей вершин, изоморфных треугольному графу. Отсюда либо все 2-окрестности вершин из Γ являются треугольными графами, либо все они

являются графами Чанга. В первом случае по теореме Холла–Шульца [2] выполняется заключение предложения 3. Пусть до конца параграфа все 2-окрестности в графе Γ являются графами Чанга. Для несмежных вершин $a, b \in \Gamma$ положим $\Delta(a, b) = \Gamma_2(a) \cap \Gamma_2(b)$.

ЛЕММА 4. Пусть Λ – граф Чанга Ch_1 , полученный переключением графа $T(8)$ относительно множества $X = \{15, 26, 37, 48\}$. Тогда граф $\Lambda_2(15)$ является объединением 3-клик $X_0 = \{26, 37, 48\}$ и (2×6) -решетки $\{12, 13, 14, 16, 17, 18; 52, 53, 54, 56, 57, 58\}$, причем вершина из X_0 смежна с вершиной из решетки, если они не содержат общих элементов из $\{1, \dots, 8\}$. Далее, если 2-окрестность некоторой вершины x в графе Чанга содержит 6-клик, то этот граф получен переключением графа $T(8)$ относительно множества вершин $X = \{15, 26, 37, 48\}$ и $x \in X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение леммы тривиально. Второе получается просмотром 2-окрестностей вершин в графах Чанга.

ЛЕММА 5. Пусть a, b – несмежные вершины в графе Чанга Λ и $\Lambda_2(a) \cap \Lambda_2(b)$ содержит 5-клик L . Тогда точно одна из вершин a, b лежит в переключаемом множестве X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Lambda = Ch_1$. Тогда 2-окрестности вершин, не лежащих в переключаемом множестве $X = \{15, 26, 37, 48\}$, изоморфны. Далее, $\Lambda_2(12) = (T\{34 \dots 8\} - \{37, 48\}) \cup \{15, 26\}$ и все вершины произвольной 5-клики L из $\Lambda_2(12)$ содержат либо 5, либо 6. В этом случае только вершина из $\{15, 26\}$ не смежна с вершинами из L .

Пусть $\Lambda = Ch_2$. Тогда имеется 4 типа 2-окрестностей вершин, не лежащих в переключаемом множестве $X = \{12, 23, \dots, 78, 81\}$. Далее, $\Lambda_2(13) = (T\{24 \dots 8\} - \{45, 56, 67, 78\}) \cup \{12, 23, 34, 81\}$ и единственная 5-клика L из $\Lambda_2(13)$ совпадает с $\{24, 25, 26, 27, 28\}$. Но в этом случае только вершины 12, 23 не смежны с вершинами из $\Lambda_2(13)$ и утверждение леммы выполняется.

Для вершин 14, 15, 16 их 2-окрестности не содержат 5-клик.

Пусть $\Lambda = Ch_3$. Тогда имеется 3 типа 2-окрестностей вершин, не лежащих в переключаемом множестве $X = \{12, 23, 13; 45, 56, 67, 78, 84\}$. Для вершины 14 ее 2-окрестность не содержит 5-клик. Далее, $\Lambda_2(46) = (T\{123578\} - \{12, 23, 13; 78\}) \cup \{45, 56, 67, 84\}$ и единственная 5-клика L из $\Lambda_2(13)$ совпадает с $\{51, 52, 53, 57, 58\}$. Но в этом случае только вершины 45, 56 не смежны с вершинами из $\Lambda_2(13)$ и утверждение леммы выполняется.

Аналогично рассматривается $\Lambda_2(47)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 6. Не существуют связные регулярные графы, в которых 2-окрестности являются графами Чанга.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a \in \Gamma$ и граф $\Lambda = \Gamma_2(a)$ является графом Чанга. Если Λ является графом Ch_1 , полученным переключением графа $T(8)$ относительно $X = \{15, 26, 37, 48\}$, то положим $b = 15$, $c = 12$. Тогда граф $\Delta(a, b) - c^\perp$ является полным графом на шести вершинах с одним удаленным ребром. Этот же граф получается еще в одном случае: Λ является графом Чанга Ch_2 , полученным переключением $T(8)$ относительно $X = \{12, 23, \dots, 78, 81\}$, $b = 13$, $c = 34$. Если

же Λ является графом Чанга Ch_3 , полученным переключением $T(8)$ относительно $X = \{12, 23, 13; 45, 56, 67, 78, 84\}$, то пусть $b = 45$, $c = 46$.

Тогда подграф $\Delta(a, b) - c^\perp$ содержит 5-клик. По строению графа $\Delta(a, c)$ заключаем, что a не лежит в переключаемом множестве для графа $\Gamma_2(c)$. Ввиду леммы 5 переключаемое множество для графа $\Gamma_2(c)$ содержит вершину b . Но теперь переключаемое множество для графа $\Gamma_2(b)$ содержит вершины a, c . Противоречие с леммой 5. Лемма 6, а вместе с ней и предложение 4 доказаны.

§ 4. Графы Петерсена, Шлефли и Шрикханде

В этом параграфе мы рассмотрим связанные регулярные графы диаметра 2, в которых 2-окрестности являются графами Петерсена, Шрикханде или графами Шлефли.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть Γ – связный регулярный граф диаметра 2 с 2-окрестностями вершин, изоморфными графам Петерсена, Шлефли или Шрикханде. Тогда связные компоненты графа $\bar{\Gamma}$ изоморфны графу Клебша или локально $GQ(2, 4)$ -графу Тэйлора, или сильно регулярному локально $GQ(2, 4)$ -графу с параметрами $(64, 27, 10, 12)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть граф Γ удовлетворяет условиям предложения 4. Сначала допустим, что 2-окрестности вершин из Γ изоморфны графу Петерсена. Тогда граф $\bar{\Gamma}$ является локально $T(5)$ -графом. Без ограничения общности можно считать, что граф $\bar{\Gamma}$ связан. Заметим, что μ -подграфы в локально $T(m)$ -графе являются локально четырехугольниками, поэтому μ -подграфы являются объединениями изолированных октаэдров, число которых не превосходит $m/4$. Таким образом, $\bar{\Gamma}$ является сильно регулярным графом с параметрами $(16, 10, 6, 6)$ и совпадает с графом Клебша.

Рис. 2. Граф Δ_0

Пусть теперь Γ является графом, в котором 2-окрестности изоморфны графу Шлефли. Тогда граф $\bar{\Gamma}$ является локально $GQ(2, 4)$ -графом. Из [5] следует справедливость предложения 4 в рассматриваемом случае.

Пусть, наконец, Γ является графом, в котором 2-окрестности изоморфны графу Шрикханде. Для вершины $a \in \Gamma$ пусть $\Delta = \Gamma_2(a)$. Тогда граф $\Delta_0 = \Delta \cap \Gamma_2(b)$ для $b \in \Delta$ изображен на рис. 2.

Пусть $c \in [a] \cap \Gamma_2(b)$. По строению графа $\Gamma_2(b)$ вершина c смежна в Δ_0 с одним из 2-путей: 258, 456, 239, 136, 479, 178. Без ограничения общности вершина c смежна с вершинами 2, 5, 8. Далее, $\Delta(b)$ – шестиугольник, и точно три вершины 3, 5, 7 смежны в нем с парами антиподальных вершин, а остальные вершины из Δ_0 смежны с ребрами шестиугольника.

Пусть вершина 5 смежна с парой антиподальных вершин $5^+, 5^-$ в шестиугольнике $\Delta(b)$. Очевидно, что $c \in \Gamma_2(4)$. Так как вершины 2, 5 не лежат в $\Gamma_2(4)$, то c смежна еще с двумя вершинами $d, e \in \Delta(b)$. Вершины $d, e, 8$ образуют 2-путь в $\Gamma_2(4) \cap \Delta$, причем вершина 8 является крайней в этом 2-пути, так как она смежна с ребром ef графа $\Delta(b)$.

Напомним, что в графе Шрикханде $\mu = 2$, поэтому вершины 2, 8 имеют в $\Delta(b)$ единственного общего соседа. Аналогично, $\lambda = 2$ в графе Δ , поэтому пары вершин 5, 8 и 5, 2 имеют по одному общему соседу в $\Delta(b)$. С другой стороны, вершины $5^+, 5^-$ находятся на расстоянии 3 в $\Delta(b)$, следовательно, тройка вершин 2, 5, 8 имеет в $\Delta(b)$ общего соседа. По симметрии то же самое верно для тройки вершин 4, 5, 6.

Пусть вершина 4 смежна с ребром xu графа $\Delta(b)$, а вершина 6 – с ребром yz (см. рис. 3). Покажем, что вершина 2 смежна с ребром de .

Рис. 3. Граф $\Delta(b)$

В противном случае вершина 2 смежна с ребром fw графа $\Delta(b)$ (см. рис. 4). Рассмотрим подграф $\Gamma_2(6)$. Из рассуждений, проведенных для вершины 4, следует, что вершина c смежна с ребром в 2-пути $\Gamma_2(6) \cap \Delta(b)$. Противоречие с тем, что вершина c смежна с e и не смежна с f .

Рис. 4. Граф $\Delta(b)$

Таким образом, мы показали, что вершина 5 смежна с e . Но тогда одна из вершин 3, 7 не смежна ни с e ни с d . Пусть для определенности это будет вершина 3. В этом случае вершина s смежна с вершинами 5, 8, e , d в $\Gamma_2(3) \cap \Delta(b)$. Противоречие. Предложение 4 доказано.

§ 5. Граф Клебша

В этом параграфе мы рассмотрим связные регулярные графы диаметра 2, в которых 2-окрестности являются графами Клебша.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Связный регулярный граф диаметра 2 с 2-окрестностями вершин, изоморфными графу Клебша, является прямой суммой графов, дополнительных к дистанционно регулярному графу с массивом пересечений $\{16, 10, 1; 1, 5, 16\}$.*

Заметим, что дополнительный граф к графу Клебша является сильно регулярным с параметрами $(16, 5, 0, 2)$. Мы докажем, что для сильно регулярного графа Δ с параметрами $(16, 5, 0, 2)$ связный локально Δ -граф Γ является дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{16, 10, 1; 1, 5, 16\}$.

ЛЕММА 7. *Пусть Λ является индуцированным n -угольником из Δ . Тогда $n \leq 6$ и выполняются следующие утверждения:*

- а) *если $n = 4$, то каждая вершина из Λ смежна с 3-кокликой вне Λ , каждая вершина вне Λ смежна с единственной вершиной из Λ ;*
- б) *если $n = 5$, то пять вершин вне Λ смежны с парами несмежных вершин из Λ , еще пять вершин вне Λ смежны с единственными вершинами из Λ и точно одна вершина вне Λ не смежна с вершинами из Λ ;*
- с) *если $n = 6$, то две вершины вне Λ смежны с 3-кокликами из Λ , три пары вершин вне Λ смежны с парами антиподальных вершин в Λ , точно две вершины вне Λ не смежны с вершинами из Λ .*

Рис. 5. Граф $[a] \cap [x]$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $n = 4, 5, 6$ утверждения леммы проверяются непосредственным подсчетом. Пусть abc – 2-путь из Λ , d – отличная от b вершина из $[a] \cap [c]$. По утверждению а) леммы $n - 5$ вершин из $\Lambda - (a^\perp \cup c^\perp)$ смежны с d , поэтому в случае $n > 6$ граф Δ содержит треугольник.

ЛЕММА 8. Для любых вершин a, b , находящихся на расстоянии 2 в Γ , подграф $[a] \cap [b]$ является четырех- или пятиугольником.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Валентность любой вершины c в графе $[a] \cap [b]$ равна 2, поэтому граф $[a] \cap [b]$ является объединением изолированных n -угольников. В силу леммы 7 этот граф связан и $n = 4, 5, 6$.

Покажем, что случай $n = 6$ невозможен. Пусть x, y, z – коклика из $[a] \cap [b]$. По утверждению с) леммы 7 граф $[b]$ содержит единственную вершину c , смежную с вершинами x, y, z . Тогда граф $[a] \cap [c]$ также является шестиугольником. Противоречие с тем, что граф Δ не содержит пары шестиугольников, пересекающихся по 3-коклике. Лемма доказана.

Введем следующие обозначения:

$Q(a) = \{x \in \Gamma \mid 4 = |[a] \cap [x]|\}$ – подграф “четырёхугольных” относительно a вершин;

$P(a) = \{x \in \Gamma \mid 5 = |[a] \cap [x]|\}$ – подграф “пятиугольных” относительно a вершин.

ЛЕММА 9. Выполняются следующие утверждения:

- а) если $\Gamma_3(a)$ не пусто, то граф $\Gamma_3(a)$ является кокликой;
- б) диаметр графа Γ не больше 3;
- с) любая вершина из $P(a)$ смежна с единственной вершиной из $\Gamma_3(a)$.

Рис. 6. Диаграмма графа относительно произвольной вершины

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим сначала, что если $b \in Q(a)$, то по лемме 7 граф $[b]$ содержится в $\Gamma_2(a)$. Отсюда $[c] \cap \Gamma_2(a) \subset P(a)$ для любой вершины $c \in \Gamma_3(a)$. По лемме 7 вершина из $P(a)$ смежна не более чем с одной вершиной из $\Gamma_3(a)$. Если вершина $c \in \Gamma_3(a)$ смежна с вершиной d вне $\Gamma_2(a)$, то $[c] \cap [e]$ – пятиугольник, не пересекающий $[d]$ для любой вершины $e \in \Gamma_2(c) \cap [a]$. Из пяти вершин в $[c] \cap [d]$ не менее четырех лежат в $\Gamma_2(e)$. Противоречие с леммой 7. Утверждения а), б) леммы 9 доказаны.

Допустим, что $b \in P(a)$ и $[b]$ не пересекает $\Gamma_3(a)$. Вершина $c \in [b]$, не смежная с вершинами пятиугольника $[a] \cap [b]$, смежна в $[b]$ с пятью вершинами, каждая из которых смежна с парой вершин из $[a] \cap [b]$. По предположению $c \in \Gamma_2(a)$, причем подграфы $[a] \cap [b]$ и $[a] \cap [c]$ не пересекаются. По лемме 7 $c \in P(a)$.

Как показано выше, вершины из $[b] \cap [c]$ образуют клику, и каждая из них смежна с коребром из $[a] \cap [b]$ и с коребром из $[a] \cap [c]$. Отсюда $[b] \cap [c] \subset P(a)$, иначе некоторое коребро из $[a] \cap [b]$ смежно с коребром из $[a] \cap [c]$ и с вершиной из $[a] \cap [b]$. Противоречие.

Для вершины $x \in [b] \cap [c]$ расположение двух коребер в пятиугольнике $[a] \cap [x]$ определяется однозначно (см. рис. 5). Таким образом, если вершина x смежна с вершинами $y, z \in [a] \cap [b]$, то она смежна с вершиной $w \in [a] \cap [c]$, причем $w \in [y] \cap [z]$. Отсюда следует, что пятиугольник $[a] \cap [c]$ образован соседями коребер пятиугольника $[a] \cap [b]$ и, следовательно, должен быть кликой. Противоречие.

ЛЕММА 10. Число вершин в $\Gamma_3(a)$ равно 1 или 2 и не зависит от выбора вершины a .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 9 $|P(a)| = 16|\Gamma_3(a)|$. Число ребер между $[a]$ и $\Gamma_2(a)$ равно $5|P(a)| + 4|Q(a)| = 160$, поэтому $|Q(a)| = 40 - 20|\Gamma_3(a)|$, в частности, $|\Gamma_3(a)| \leq 2$. Подсчитав число вершин в графе Γ для каждого из возможных значений $|\Gamma_3(a)|$, получим 57, 54, 51 соответственно. Следовательно, значение $|\Gamma_3(a)|$ не зависит от выбора вершины a .

Допустим, что $|\Gamma_3(a)| = 0$. Тогда Γ является сильно регулярным графом с параметрами (57, 16, 5, 4). Но этот граф не удовлетворяет условию целочисленности.

ЛЕММА 11. Число вершин в $\Gamma_3(a)$ равно 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $|\Gamma_3(a)| = 1$. Для произвольной вершины $x \in \Gamma$ через x^* обозначим единственную вершину из $\Gamma_3(x)$. Тогда $P(a^*) = [a]$, $Q(a) = Q(a^*)$ и граф Γ имеет диаграмму относительно любой вершины (см. рис. 6).

Если $x \in Q(a)$, то вершина x смежна с четырехугольниками из $[a]$ и $[a^*]$, образующими куб в силу леммы 7. Нетрудно показать, что тогда $[x] \cap Q(a)$ также является кубом и $Q(a)$ – локально кубический граф на 20 вершинах. Повторив рассуждения из доказательства леммы 8, получим, что μ -подграфы в $Q(a)$ – это либо четырехугольники, либо коклики из не более чем двух вершин.

Пусть $x \in Q(a)$. Тогда $x^* \in Q(a)$ и μ -граф $[x] \cap [y]$ содержит не более двух вершин из $Q(a)$ для восьми вершин $y \in Q(a) \cap [x^*]$. Таким образом, μ -граф $[x] \cap [y]$ содержит четыре вершины из $Q(a)$ для не более двух вершин $y \in Q(a)$. Противоречие с тем, что число ребер между окрестностью x в графе $Q(a)$ и 2-окрестностью x в этом же графе равно 32. Лемма доказана.

Таким образом, Γ – дистанционно регулярный граф с требуемым массивом пересечений. Предложение 5, а вместе с ним и теорема доказаны.

Список литературы

1. Brouwer A. E., Cohen A. M., Neumaier A. Distance-Regular Graphs. Berlin etc: Springer-Verlag, 1989.
2. Hall J. I., Shult E. E. Locally cotriangular graphs // Geom. Dedic. 1985. V. 18. № 1. P. 113-159.
3. Кабанов В. В., Махнёв А. А. Кореберно регулярные графы, в которых антиокрестности вершин кореберно регулярны: Тез. докл. // III Международная конференция по алгебре. Красноярск, 1993. С. 139.
4. Seidel J. J. Strongly regular graphs with $(-1, 1, 0)$ adjacency matrix having eigenvalue 3 // Lin. Alg. Appl. 1968. V. 1. № 2. P. 281-298.
5. Buekenhout F., Hubaut X. Locally polar spaces and related rank 3 groups // J. Algebra. 1977. V. 45. № 2. P. 391-434.
6. Махнёв А. А. О сильно регулярных графах с $\lambda=1$ // Матем. заметки. 1988. Т. 34. № 5. С. 667-672.

г. Екатеринбург, Институт математики
и механики УрО РАН,
e-mail: mak@top.imm.intec.ru

Поступило в редакцию
3.XI.1995