Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. И. Наумкин, Асимптотика при больших временах решений нелинейного уравнения Шрёдингера, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1997, том 61, выпуск 4, 81–118

DOI: <https://doi.org/10.4213/im137>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 13:17:53

УДК 517.9+535.5

П. И. Наумкин

Асимптотика при больших временах решений нелинейного уравнения Шрёдингера

Рассмотрена асимптотика решений задачи Коши для нелинейного уравнения Шрёдингера при больших временах равномерно по пространственной переменной. В случае, когда нелинейный член в уравнении Шрёдингера убывает по времени быстрее линейных, асимптотика имеет квазилинейный характер. Особо интересен случай, когда нелинейность убывает с течением времени с той же скоростью или даже медленнее, чем линейные члены, и, таким образом, более существенно влияет на асимптотику решения при больших временах. В работе с помощью подходящей замены переменных этот случай сведен к квазилинейному: для новой функции получено интегральное уравнение с быстроубывающей нелинейностью, что позволило применить для его решения метод последовательных приближений. Таким образом, получен конструктивный алгоритм вычисления асимптотики решения задачи Коши для нелинейного уравнения Шрёдингера через начальные данные.

Библиография: 38 наименований.

§ 1. Введение

Рассмотрим задачу Коши для одномерного нелинейного уравнения Шрёдингера:

$$u_t - ia|u|^2u - iu_{xx} = 0, \quad u(x, 1) = \bar{u}(x), \quad (1.1)$$

где решение $u(x, t)$ – комплекснозначная функция, $x \in R_1$ и $t \geq 1$ (начало отсчета времени мы сдвинули в точку $t = 1$ для удобства записи дальнейших формул), $a(t)$ – вещественная функция. Уравнению (1.1) посвящено огромное число работ (см. [1] и литературу там). В частности, известно существование глобального по времени решения из класса

$$C^0([1, \infty); H^1(R_1)) \cap C^1((1, \infty); H^{-1}(R_1))$$

в случае произвольного начального условия $\bar{u}(x) \in H^1(R_1)$. Кроме того, чем быстрее начальные данные $\bar{u}(x)$ убывают на бесконечности, тем более гладким оказывается решение $u(x, t)$ задачи Коши (1.1) при $t > 1$, так что, например, для финитных начальных данных $\bar{u}(x)$ решение $u(x, t)$ принадлежит $C^\infty((1, \infty) \times R_1)$.

В настоящей работе мы сосредоточим свое внимание на асимптотическом поведении решения $u(x, t)$ задачи Коши (1.1) при больших значениях времени. В случае постоянного коэффициента a уравнение (1.1) интегрируется с помощью метода обратной задачи рассеяния, и асимптотика решений задачи Коши (1.1) при

$t \rightarrow \infty$ изучена в работах [2]–[8]. А если коэффициент $a(t)$ “убывает” по времени: $a(t) \in \mathcal{L}_r(1, \infty)$, $r \in [1, \infty)$, то нелинейный член в уравнении (1.1) убывает с течением времени быстрее линейных и асимптотика при $t \rightarrow \infty$ решения $u(x, t)$ задачи Коши (1.1) имеет квазилинейный характер в том смысле, что главный член асимптотики имеет тот же вид, что и для линейного уравнения Шрёдингера, и только коэффициент в главном члене асимптотики учитывает вклад нелинейности. Аналогичное поведение решения наблюдается в многомерном по пространственной переменной случае, а также для нелинейностей, имеющих более высокую степень и постоянный коэффициент (см. по этому поводу работы [1] и [9]–[36]).

В § 2 мы докажем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть:*

- 1) $a(t) \in \mathcal{L}_r(1, \infty)$, $r \in [1, \infty)$;
- 2) *начальные данные $\bar{u}(x)$ задачи Коши (1.1) принадлежат классу $H^{1,0}(R_1) \cap H^{0,1}(R_1)$ и достаточно малы, т.е.*

$$|\bar{u}|_1 \equiv \|\bar{u}\|_{H^{1,0}} + \|\bar{u}\|_{H^{0,1}} \leq \varepsilon, \quad (1.2)$$

где величина $\varepsilon > 0$ достаточно мала.

Тогда асимптотика при $t \rightarrow \infty$ решения $u(x, t) \in C^0([1, \infty); H^{1,0}(R_1) \cap H^{0,1}(R_1))$ задачи Коши (1.1) имеет равномерно по $x \in R_1$ следующий вид¹:

$$u(x, t) = \frac{V(\chi)e^{it\chi^2}}{\sqrt{4\pi it}} + O(t^{-\frac{1}{2}-\delta}), \quad (1.3)$$

где $\delta > 0$ – некоторая постоянная, $\chi = x/(2t)$, коэффициент $V(\chi)$, учитывающий вклад нелинейности, может быть вычислен через начальное условие с помощью рекуррентных соотношений (см. (2.10) и (2.4) ниже).

Теорема 1 получается попутно, а для нас главная ее цель – подготовить необходимый аппарат для более интересного случая, когда коэффициент $a(t)$ не убывает по времени, а ограничен или даже растет с течением времени. Тогда нелинейность в уравнении (1.1) оказывает более существенное влияние на характер асимптотического поведения решения $u(x, t)$. В работах [37], [38] построен модифицированный оператор рассеяния для одномерного по пространственной переменной нелинейного уравнения Шрёдингера и производного нелинейного уравнения Шрёдингера. В этих работах авторы “угадали” асимптотическую форму $U(\chi, t)$ волны $u(x, t)$ при $t \rightarrow +\infty$ и вычли ее из решения $u(x, t)$. Тогда разность $u(x, t) - U(\chi, t)$ убывает быстрее по времени, и авторам удалось оценить ее подобно квазилинейному случаю из интегрального уравнения. Так авторы доказали, что решение $u(x, t)$ существует и стремится к асимптотике $U(\chi, t)$ при $t \rightarrow +\infty$ равномерно по $x \in R_1$. При этом, однако, оставалось неясным, как конструктивно связать коэффициенты

¹Как обычно, под корнем мы понимаем его главное значение: $\sqrt{1} = 1$. Норму $\|\varphi\|_{H^{l,k}}$ определяем так: $|\varphi|_{l,k} \equiv \|\varphi\|_{H^{l,k}} = \|\varphi\|_{\mathcal{L}_2(R_1)} + \|x^k \frac{d^l \varphi}{dx^l}\|_{\mathcal{L}_2(R_1)}$, $l, k \geq 0$.

в асимптотической форме $U(\chi, t)$ с начальными данными $\bar{u}(x)$ задачи Коши. Метод работ [37], [38] помогает нам понять, как искать асимптотику решения задачи Коши для нелинейного уравнения Шрёдингера (1.1) в случае, когда коэффициент $a(t)$ не убывает. Прежде всего, мы замечаем, что асимптотическая форма $U(\chi, t)$ является асимптотической при $t \rightarrow \infty$ некоторого интеграла

$$G_v(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi it}} \int_{R_1} dy v(y, t) e^{i(x-y)^2/(4t)}$$

от неубывающей по времени и быстроосциллирующей функции $v(x, t)$, а ядро $\frac{1}{\sqrt{4\pi it}} e^{ix^2/(4t)}$ этого интеграла является фундаментальным решением для линейного уравнения Шрёдингера. Поэтому сначала мы перейдем от решения $u(x, t)$ к новой функции

$$v(x, t) = G_u^{-1}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi it}} \int_{R_1} dy u(y, t) e^{-i(x-y)^2/(4t)}$$

и для нее выпишем интегральное уравнение. Асимптотика при больших временах нелинейного члена в этом интегральном уравнении дает расходящееся слагаемое и как раз отвечает за быструю осцилляцию по времени функции $v(x, t)$ и решения $u(x, t)$. Мы исключим это расходящееся слагаемое из интегрального уравнения с помощью подходящей замены, перейдя от функции $v(x, t)$ к новой функции $w(x, t)$. В новом интегральном уравнении для функции $w(x, t)$ нелинейный член быстро убывает по времени, что позволяет применить обычную процедуру метода последовательных приближений и, таким образом, получить конструктивный алгоритм для вычисления асимптотики $U(\chi, t)$ решения $u(x, t)$ при больших временах через начальное условие $\bar{u}(x)$ задачи Коши (1.1).

В §3 мы докажем следующие два утверждения.

ТЕОРЕМА 2. Пусть:

1) вещественная функция $a(t) \in C^1([1, \infty))$ такова, что

$$\sup_{t \geq 1} a(t) < \infty, \quad \sup_{t \geq 1} ta'(t) < \infty;$$

2) начальные данные $\bar{u}(x) \in H^{1,0}(R_1) \cap H^{0,1}(R_1)$ достаточно малы, так что выполнено неравенство (1.2).

Тогда для решения $u(x, t) \in C^0([1, \infty); H^{0,1}(R_1) \cap H^{1,0}(R_1))$ задачи Коши (1.1) имеет место следующая асимптотическая формула при $t \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in R_1$:

$$u(x, t) = \frac{W(\chi)}{\sqrt{4\pi it}} \exp\left(i\chi^2 t + |W(\chi)|^2 \int_1^t b(\tau) d\tau + i\Phi(\chi)\right) + O(t^{-\frac{1}{2}-\delta}), \quad (1.4)$$

где $\delta > 0$ – некоторая постоянная, $\chi = \frac{x}{2t}$, $b(t) = \frac{ia(t)}{4\pi t}$, амплитуда волны $W(\chi)$ и фаза $\Phi(\chi)$ вычисляются с помощью рекуррентных соотношений через начальные данные $\bar{u}(x)$ задачи Коши (см. формулы (3.14), (3.15) и (3.2) ниже).

Введем класс функций

$$Z^M = \{\varphi(x) \in H^{\infty, \infty}(R_1) : |\varphi|_n \leq M_n \quad \forall n \geq 0\},$$

где $|\varphi|_n = |\varphi|_{n,0} + |\varphi|_{0,n}$,

$$|\varphi|_{k,l} = \|\varphi\|_{\mathcal{L}_2} + \left\| x^l \frac{d^k \varphi}{dx^k} \right\|_{\mathcal{L}_2}, \quad k, l \geq 0,$$

$$M_n = \varepsilon \theta^n (n+1)^{\sigma n} \quad \forall n \geq 0, \quad \varepsilon \in (0, 1), \quad \theta > 1, \quad \sigma > 1.$$

Отметим, что класс Жеврея Z^M непуст. Он содержит, в частности, быстроубывающие квазианалитические функции, например функцию $\varphi(x) = \varepsilon \exp(-x^2) \in Z^M$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть:

1) вещественная функция $a(t) \in C^0([1, \infty))$ такова, что

$$\sup_{t \geq 1} t^{-\beta} a(t) < \infty, \quad \beta \in (0, 1/16);$$

2) начальные данные $\bar{u}(x)$ задачи (1.1) принадлежат классу Жеврея Z^M , в определении которого величина $\varepsilon > 0$ достаточно мала, а $\sigma \in (1, \frac{1-2\beta}{14\beta})$.

Тогда существует решение $u(x, t)$ задачи Коши (1.1), которое принадлежит классу $C^0([1, \infty); Z^{K(t)})$, где $K_n(t) = c(ct^\beta)^n M_n$, $c > 0$ – некоторая постоянная, и имеет при $t \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in R_1$ асимптотическое представление (1.4).

ЗАМЕЧАНИЕ. При выполнении условий теоремы 3 решение задачи Коши (1.1) оказывается бесконечно гладким и убывающим по x быстрее любой степени. Интуитивно ясно, однако, что для нахождения асимптотики при $t \rightarrow \infty$ условие принадлежности начальных данных классу Жеврея является слишком ограничительным. Необходимость использования класса Жеврея в теореме 3 вызвана, по-видимому, тем, что асимптотическая форма $U(\chi, t)$ не достаточно точно описывает поведение волны $u(x, t)$ при больших x , так что проводимая ниже, в § 3, замена $v(x, t) = B_{w,w}(x, t)$ оказывается удачной лишь в области $|x| \ll \sqrt{t}$. Также мы не стремились довести до оптимального ограничение на параметр β , но интересно было бы при больших значениях β найти асимптотику $U(\chi, t)$. Наверное, тогда придется учитывать еще старшие члены асимптотического разложения $A_v(x, t)$.

Содержание работы таково: в § 2 проведено доказательство теоремы 1, § 3 посвящен доказательству теорем 2 и 3, а в § 4, 5 доказан ряд лемм, используемых при доказательстве теорем 2 и 3.

§ 2. Доказательство теоремы 1

Решение задачи Коши для линейного уравнения Шрёдингера

$$\psi_t - i\psi_{xx} = 0, \quad \psi(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in R_1, \quad t > 0,$$

с помощью известных формул (см. [1]) для функции Грина можно представить в виде следующего интеграла:

$$\psi(x, t) = G_\varphi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi it}} \int_{-\infty}^{\infty} dy \varphi(y) e^{i(x-y)^2/(4t)}.$$

Начало отсчета времени мы сдвинули здесь в точку $t = 0$ с тем, чтобы не интересоваться далее особым поведением фундаментального решения вблизи начала отсчета времени $t = 1$ в задаче Коши (1.1). Тогда сделаем замену $u(x, t) = G_v(x, t)$ и перепишем задачу (1.1) в виде

$$v_t - iaG_f^{-1} = 0, \quad v(x, 1) = G_u^{-1}(x, 1), \quad (2.1)$$

где $f = |u|^2 u = |G_v|^2 G_v$, а обратное отображение G_u^{-1} задается интегралом с сопряженным ядром:

$$v(x, t) = G_u^{-1}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{-4\pi it}} \int_{R_1} dy u(y, t) \exp\left(-\frac{i(x-y)^2}{4t}\right).$$

Нелинейное слагаемое G_f^{-1} в уравнении (2.1) можно записать явно следующим образом:

$$\begin{aligned} G_f^{-1} &= \frac{1}{(4\pi t)^2} \iiint_{R_4} dy dz d\xi d\eta v(y, t) v(z, t) v^*(\eta, t) \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{i}{4t}((x-\xi)^2 - (\xi-y)^2 - (\xi-z)^2 + (\xi-\eta)^2)\right) \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^2} \iiint_{R_4} dy dz d\xi d\eta v(y, t) v(z, t) v^*(\eta, t) \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{i}{4t}(x^2 + \eta^2 - y^2 - z^2)\right) \exp\left(\frac{i\xi}{2t}(x + \eta - y - z)\right) \\ &= \frac{1}{4\pi t} \iint_{R_2} dy dz v(y, t) v(z, t) v^*(y + z - x, t) \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{i}{4t}(x^2 - y^2 - z^2 + (x - y - z)^2)\right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

(звездочка означает комплексное сопряжение). Подставив (2.2) в (2.1) и проинтегрировав по t , получим

$$v(x, t) = v(x, 1) + \int_1^t A_v(x, \tau) d\tau, \quad (2.3)$$

где

$$\begin{aligned} A_v(x, t) &= b(t) \iint_{R^2} dy dz v(y, t) v(z, t) v^*(y + z - x, t) \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{i}{4t}(x^2 - y^2 - z^2 + (x - y - z)^2)\right), \quad b(t) = \frac{ia(t)}{4\pi t}. \end{aligned}$$

Применим к интегральному уравнению (2.3) метод последовательных приближений. Зададим при всех $x \in R_1$, $t \geq 1$

$$v^{(0)}(x, t) = v(x, 1) = G_u^{-1}(x, 1)$$

и определим функции $v^{(l+1)}(x, t)$ при $l \geq 0$ с помощью рекуррентных соотношений

$$v^{(l+1)}(x, t) = v(x, 1) + \int_1^t A_{v^{(l)}}(x, \tau) d\tau. \quad (2.4)$$

Из теоремы вложения Соболева имеем

$$\|(1 + |x|)^\nu \varphi(x)\|_{\mathcal{L}_1(R_1)} \leq c \|\varphi\|_{H^{0,1}(R_1)} \quad (2.5)$$

для любой функции $\varphi(x) \in H^{0,1}(R_1)$, $\nu \in [0, 1/2)$. Через c здесь и ниже обозначены различные постоянные. Далее благодаря теореме Планшереля в силу условия (1.2) найдем

$$\begin{aligned} |v(x, 1)|_1 &= 2\|\bar{u}\|_{\mathcal{L}_2} + \frac{1}{2\pi} \left\| \frac{\partial}{\partial p} (e^{ip^2} \hat{u}(p)) \right\|_{\mathcal{L}_2} \\ &+ \|G_{\bar{u}}^{-1}(x, 1)\|_{\mathcal{L}_2} \leq 3\|\bar{u}\|_1 \leq 3\varepsilon; \end{aligned} \quad (2.6)$$

здесь и ниже крышкой обозначено преобразование Фурье:

$$\hat{u}(p) = \int_{R_1} e^{-ipx} \bar{u}(x) dx.$$

Докажем по индукции, что при всех $l \geq 0$

$$|v^{(l)}|_1 \leq 4\varepsilon. \quad (2.7)$$

В самом деле, ввиду (2.5) и (2.6) получим из (2.4)

$$\begin{aligned} |v^{(l+1)}|_1 &\leq |v(x, 1)|_1 + \left\| \int_1^\infty d\tau |b(\tau)| \iint_{R_2} dy dz |v^{(l)}(y, \tau)| |v^{(l)}(z, \tau)| \right. \\ &\times \left\| \frac{\partial v^{(l)}(y + z - x, \tau)}{\partial x} \right\|_{\mathcal{L}_2} + c \left\| \int_1^\infty d\tau |b(\tau)| \iint_{R_2} dy dz |v^{(l)}(y, \tau)| \right. \\ &\times v^{(l)}(z, \tau) v^{(l)}(y + z - x, \tau) \left(1 + |x| + \frac{|x|}{\tau} + \frac{|x - y - z|}{\tau} \right) \left. \right\|_{\mathcal{L}_2} \\ &\leq 3\varepsilon + c \int_1^\infty \frac{d\tau}{\tau} |a(\tau)| |v^{(l)}|_1^3 \leq 3\varepsilon + (4\varepsilon)^3 c \int_1^\infty \frac{d\tau}{\tau} |a(\tau)| \leq 4\varepsilon, \end{aligned}$$

если величина $\varepsilon > 0$ достаточно мала.

Итак, все последовательные приближения $v^{(l)}(x, t)$ ограничены в норме $|\cdot|_1$. Теперь для разности $v^{(l+1)} - v^{(l)}$ ввиду (2.7) найдем

$$\begin{aligned} |v^{(l+1)} - v^{(l)}|_1 &\leq c \left\| \int_1^t d\tau |b(\tau)| \iint_{R_2} dy dz |v^{(l)}(y, \tau) v^{(l)}(z, \tau) v^{(l)*}(y + z - x, \tau) \right. \\ &- v^{(l-1)}(y, \tau) v^{(l-1)}(z, \tau) v^{(l-1)*}(y + z - x, \tau) \left. \right\| \\ &\times \left(1 + |x| + \frac{|x|}{\tau} + \frac{|x - y - z|}{\tau} \right) \left\| \int_1^\infty d\tau |b(\tau)| \right. \\ &\times \iint_{R_2} dy dz \left| v^{(l)}(y, \tau) v^{(l)}(z, \tau) \frac{\partial v^{(l)}(y + z - x, \tau)}{\partial x} \right. \\ &- v^{(l-1)}(y, \tau) v^{(l-1)}(z, \tau) \frac{\partial v^{(l-1)}(y + z - x, \tau)}{\partial x} \left. \right\|_{\mathcal{L}_2} \\ &\leq c\varepsilon^2 \int_1^\infty \frac{d\tau}{\tau} |a(t)| |v^{(l)} - v^{(l-1)}|_1 \leq \frac{1}{2} \sup_{t \geq 1} |v^{(l)} - v^{(l-1)}|_1. \end{aligned}$$

Таким образом, последовательность $\{v^{(l)}\}$ сходится при $l \rightarrow \infty$ в норме $C^0([1, \infty); H^{1,0}(R_1) \cap H^{0,1}(R_1))$ к решению $v(x, t)$ интегрального уравнения (2.3) из класса $C^0([1, \infty); H^{1,0}(R_1) \cap H^{0,1}(R_1))$, которому соответствует решение $u(x, t) = G_v(x, t)$ задачи (1.1) из класса $C^0([1, \infty); H^{1,0}(R_1) \cap H^{0,1}(R_1))$.

Вычислим асимптотику функции $u(x, t)$. При $t \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in R_1$ имеем

$$\begin{aligned} u(x, t) &= G_v(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi it}} \int_{R_1} dy v(y, t) \exp\left(\frac{i(x-y)^2}{4t}\right) \\ &= \frac{e^{ix^2/(4t)}}{\sqrt{4\pi it}} \int_{R_1} dy v(y, t) \exp\left(-\frac{ixy}{2t}\right) \left\{1 + \left(\exp\left(\frac{iy^2}{4t}\right) - 1\right)\right\} \\ &= \frac{\hat{v}(\chi, t)e^{i\chi^2 t}}{\sqrt{4\pi it}} + O\left(\|v\|_{H^{0,1}} t^{-\frac{1}{2}-\frac{\nu}{2}}\right), \end{aligned} \quad (2.8)$$

где $\chi = \frac{x}{2t}$, $\nu \in (0, \frac{1}{2})$ – некоторая постоянная. Здесь мы использовали следующее неравенство:

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{e^{ix^2/(4t)}}{\sqrt{4\pi it}} \int_{R_1} dy \exp\left(-\frac{ixy}{2t}\right) \left(\exp\left(\frac{iy^2}{4t}\right) - 1\right) v(y, t) \right\|_{\mathcal{L}_\infty} \\ &\leq t^{-\frac{1}{2}-\frac{\nu}{2}} \| |y|^\nu v(y, t) \|_{\mathcal{L}_1} \leq c t^{-\frac{1}{2}-\frac{\nu}{2}} \|v\|_{H^{0,1}}, \end{aligned}$$

которое справедливо в силу оценок (2.5), (2.7) и неравенства

$$\left| \exp\left(\frac{iy^2}{4t}\right) - 1 \right| \leq 2|y|^\nu t^{-\nu/2} \quad \forall y \in R_1, \quad t \geq 1, \quad \nu \in \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

Обозначим теперь $V(\chi) = \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{v}(\chi, t)$ и заметим, что разность $V(\chi) - \hat{v}(\chi, t)$ можно оценить так:

$$\begin{aligned} \|V(\chi) - \hat{v}(\chi, t)\|_{\mathcal{L}_\infty} &\leq c \|V(\chi) - \hat{v}(\chi, t)\|_{H^{0,1}} \leq c \left\| \int_t^\infty d\tau \frac{|a(\tau)|}{\tau} \right. \\ &\quad \times \left. \iint_{R_2} dy dz |v(y, \tau)v(z, \tau)| |v(y+z-x, \tau)| \right\|_{H^{0,1}} \\ &\leq c \|v\|_{H^{0,1}}^3 \int_t^\infty \frac{|a(\tau)|}{\tau} d\tau = O(t^{-1/r}); \end{aligned} \quad (2.9)$$

здесь мы учли, что $a(t) \in \mathcal{L}_r(1, \infty)$, так что применение неравенства Гёльдера дает оценку

$$\int_t^\infty \frac{|a(\tau)|}{\tau} d\tau \leq c t^{-1/r} \|a\|_{\mathcal{L}_r(1, \infty)}.$$

Таким образом, из (2.8) ввиду (2.9) получим асимптотику (1.3), в которой $\delta = \min\left(\frac{1}{r}, \frac{\nu}{2}\right)$. Коэффициент $V(\chi)$ вычисляется как двойной предел:

$$V(\chi) = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{l \rightarrow \infty} \hat{v}^{(l)}(\chi, t),$$

т.е. для заданной точности $\varepsilon_1 > 0$ найдутся число $T \geq 1$ и номер $l \geq 0$ такие, что

$$V(\chi) = \hat{v}^{(l)}(\chi, T) + O(\varepsilon_1), \quad (2.10)$$

где функция $\hat{v}^{(l)}(\chi, T)$ находится из рекуррентного соотношения (2.4). Теорема 1 доказана.

§ 3. Доказательство теорем 2 и 3

Теоремы 2 и 3 доказываются аналогично. Будем доказывать их параллельно, указывая лишь на необходимые изменения. Теперь функция $a(t)$ не убывает, поэтому представим нелинейное слагаемое $A_v(x, t)$ в интегральном уравнении (2.3) в виде

$$A_v(x, t) = \tilde{A}_v(x, t) + b(t) \iint_{R_2} dy dz v(y, t) v(z, t) v^*(y + z - x, t) E(x, y, z, t),$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{A}_v(x, t) &= b(t) \iint_{R_2} dy dz v(y, t) v(z, t) v^*(y + z - x, t), \\ E(x, y, z, t) &= \exp\left(-\frac{i}{4t}(x^2 - y^2 - z^2 + (x - y - z)^2)\right) - 1, \end{aligned}$$

выделив, таким образом, растущее при больших временах слагаемое $\tilde{A}_v(x, t)$.

Чтобы устранить из интегрального уравнения (2.3) расходящееся слагаемое $\tilde{A}_v$, мы перейдем от функции $v(x, t)$ к новой функции $w(x, t)$ с помощью формулы $v(x, t) = B_{w, w}(x, t)$, где мультипликатор Фурье $B_{\varphi, \psi}$ задается через обратное преобразование Фурье:

$$\begin{aligned} B_{\varphi, \psi}(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{R_1} dp e^{ipx} \hat{B}_\varphi(p, t) \hat{\psi}(p, t), \\ \hat{B}_\varphi(p, t) &= \exp\left(\int_1^t d\tau b(\tau) |\hat{\varphi}(p, \tau)|^2\right), \\ \hat{\varphi}(p, t) &= \int_{R_1} e^{-ipx} \varphi(x, t) dx \end{aligned}$$

– прямое преобразование Фурье функции $\varphi(x, t)$. Преобразование $B_{\varphi, \psi}$ не изменяет модуль $|\hat{\psi}(p, t)|$ образа Фурье функции $\psi(x, t)$. Поэтому легко можно вычислить обратное отображение

$$w(x, t) = B_{v, v}^{-1}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{R_1} e^{ipx} \hat{B}_v^*(p, t) \hat{v}(p, t) dp;$$

оно определяется сопряженным символом

$$\hat{B}_v^*(p, t) = \exp\left(-\int_1^t b(\tau) |\hat{v}(p, \tau)|^2 d\tau\right),$$

поскольку в силу вещественности коэффициента $a(t)$ имеем $b^*(t) = -b(t)$.

Учитывая равенство $\widehat{B}_\varphi(p, 1) = 1$, так что $w(x, 1) = v(x, 1)$, из уравнения (2.3) получим

$$w_t = (B_{v,v}^{-1})_t = B_{v,v}^{-1} - \frac{1}{2\pi} \int_{R_1} dp e^{ipx} b(t) |\widehat{v}(p, t)|^2 \widehat{v}(p, t) \widehat{B}_v^*(p, t) \equiv B_{v,g}^{-1},$$

где

$$\begin{aligned} g(x, t) &= v_t(x, t) - \frac{b(t)}{2\pi} \int_{R_1} e^{ipx} |\widehat{v}(p, t)|^2 \widehat{v}(p, t) dp \equiv b(t) f(x, t), \\ f(x, t) &= \iint_{R_2} dy dz v(y, t) v(z, t) v^*(y + z - x, t) E(x, y, z, t), \\ v(x, t) &= B_{w,w}(x, t). \end{aligned}$$

Таким образом, получаем $w_t = B_{v,bf}^{-1} = b B_{v,f}^{-1}$, откуда, проинтегрировав по t от 1 до t , найдем

$$w(x, t) = v(x, 1) + \int_1^t b(\tau) B_{w,f}^{-1}(x, \tau) d\tau. \quad (3.1)$$

Будем решать уравнение (3.1) методом последовательных приближений. Определим $w^{(0)}(x, t) = v(x, 1)$ и зададим функции $w^{(l)}(x, t)$ с помощью рекуррентного соотношения:

$$w^{(l+1)}(x, t) = v(x, 1) + \int_1^t b(\tau) B_{w^{(l)}, f^{(l)}}^{-1}(x, \tau) d\tau, \quad (3.2)$$

где

$$\begin{aligned} f^{(l)}(x, t) &= \iint_{R_2} dy dz v^{(l)}(y, t) v^{(l)}(z, t) v^{(l)*}(y + z - x, t) E(x, y, z, t), \\ v^{(l)} &= B_{w^{(l)}, w^{(l)}}. \end{aligned}$$

В случае теоремы 2 докажем следующие оценки для функций $w^{(l)}$ при всех $l \geq 1$:

$$|||w^{(l)}||| \leq 5\varepsilon, \quad (3.3)$$

$$\sup_{t \geq 1} e^{-t} |w^{(l+1)} - w^{(l)}|_1 \leq \frac{1}{2} \sup_{t \geq 1} e^{-t} |w^{(l)} - w^{(l-1)}|_1, \quad (3.4)$$

где введена норма

$$|||\varphi||| = \sup_{t \geq 1} (t^{1-4\gamma} |\varphi'_t|_1 + t^{-\gamma} |\varphi|_1 + t^{\frac{5}{4}-5\gamma} \|\varphi'_t\|_{\mathcal{L}_1}), \quad \gamma \in \left(0, \frac{1}{20}\right).$$

Действительно, по индукции, предположив, что оценка (3.3) уже установлена для номера l , благодаря лемме 2, доказанной ниже, в § 4, получим

$$|||\int_1^t \Lambda_{w^{(l)}} d\tau||| \leq c\varepsilon^3,$$

и так как ввиду (2.6) $|v(x, 1)|_1 \leq 3\varepsilon$, то из (3.2) найдем (3.3) с новым номером $l + 1$. Оценка (3.4) получается из второй оценки леммы 2, поскольку по индукции из (3.2) следует, что

$$\begin{aligned} \sup_{t \geq 1} e^{-t} |w^{(l+1)} - w^{(l)}|_1 &\leq \sup_{t \geq 1} e^{-t} \left| \int_1^t (\Lambda_{w^{(l)}} - \Lambda_{w^{(l-1)}}) d\tau \right|_1 \\ &\leq 5\varepsilon \sup_{t \geq 1} e^{-t} |w^{(l)} - w^{(l-1)}|_1, \end{aligned}$$

откуда приходим к оценке (3.4), так как величина $\varepsilon > 0$ достаточно мала.

В случае теоремы 3 докажем оценку (3.4), а также такие оценки при всех $l \geq 0$, $n \geq 0$, $t \geq 1$:

$$|w^{(l)}|_n \leq L_n(t), \quad (3.5)$$

где $L_n(t) = \overline{M}_n t^{\beta(n-2)}$ при $n \geq 2$, $L_n = \overline{M}_n$ при $n = 0, 1$; $\overline{M}_n = \bar{\varepsilon} \bar{\theta}^n (n+1)^{\sigma n}$, $\bar{\varepsilon} = 8e\varepsilon$, при всех $n \geq 0$, $\bar{\theta} = 8\theta$, а величины $\sigma > 1$, $\theta > 1$ и $\varepsilon \in (0, 1)$ взяты из условия теоремы 3, причем $\varepsilon > 0$ достаточно мало.

При $l = 0$ имеем $w^{(0)}(x, t) = v(x, 1) = G_u^{-1}(x, 1)$, и по лемме 3 из § 5 (см. ниже) получим $|w^{(0)}|_n \leq \frac{1}{2} \overline{M}_n$ при всех $n \geq 0$. Так что (3.5) выполнено при $l = 0$. Далее по индукции, предположив справедливость оценки (3.5) для номера l , с помощью леммы 5 из § 5 найдем при всех $l \geq 1$ и $n \geq 0$

$$\begin{aligned} |w^{(l+1)}|_n &\leq |w^{(0)}|_n + \left| \int_1^t \Lambda_{w^{(l)}} \right|_n \leq \frac{1}{2} \overline{M}_n \\ &\quad + c\varepsilon^2 \int_1^t (n+1) \overline{M}_n \tau^{\beta(n-3)-1} d\tau \leq L_n(t); \end{aligned}$$

таким образом, получаем (3.5) с новым номером. Оценка (3.4) теперь следует из второй оценки леммы 5, так как $|w^{(l)}|_1 \leq c\varepsilon$ и величина $\varepsilon > 0$ достаточно мала:

$$\begin{aligned} \sup_{t \geq 1} e^{-t} |w^{(l+1)} - w^{(l)}|_1 &= \sup_{t \geq 1} e^{-t} \int_1^t |\Lambda_{w^{(l)}} - \Lambda_{w^{(l-1)}}|_1 d\tau \\ &\leq \frac{1}{2} \sup_{t \geq 1} e^{-t} |w^{(l)} - w^{(l-1)}|_1. \end{aligned}$$

Оценки (3.3)–(3.5) означают, что последовательность $\{w^{(l)}(x, t)\}$ сходится при $l \rightarrow \infty$ в норме $C^0([1, T]; H^{1,0}(R_1) \cap H^{0,1}(R_1))$ при любом $T > 1$ к решению $w(x, t)$ интегрального уравнения (3.1), принадлежащего пространству $C^0([1, \infty); H^{1,0}(R_1) \cap H^{0,1}(R_1))$ в случае теоремы 2, либо классу $C^0([1, \infty); Z^{K(t)})$ при условиях теоремы 3.

Докажем теперь асимптотику (1.4). Ввиду оценок леммы 1 или леммы 4 получаем

$$\|v\|_{H^{0,1}} = \|B_{w,w}\|_{H^{0,1}(R_1)} \leq c(t^\beta + t^\gamma),$$

поэтому из (2.8) найдем следующее представление решения $u(x, t)$ задачи Коши (1.1) при $t \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in R_1$:

$$u(x, t) = \frac{\hat{v}(\chi, t)e^{i\chi^2 t}}{\sqrt{4\pi i t}} + O(t^{-\frac{1}{2}-\delta}), \quad (3.6)$$

где $\delta > 0$ – некоторая постоянная, $\chi = x/(2t)$. Рассмотрим главный член асимптотики в (3.6). Обозначим

$$W(\chi) = \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{w}(\chi, t)$$

и оценим разность $\hat{w}(\chi, t) - W(\chi)$ с помощью леммы 2 или леммы 5:

$$\begin{aligned} \|\hat{w} - W\|_{\mathcal{L}_\infty} &\leq \left\| \int_t^\infty \Lambda_w(\chi, \tau) d\tau \right\|_{\mathcal{L}_1} \leq \varepsilon \int_1^\infty (\tau^{-1-2\beta} + \tau^{5\gamma-5/4}) d\tau \\ &= O(t^{-2\beta} + t^{5\gamma-1/4}); \end{aligned} \quad (3.7)$$

таким образом, $\hat{w}(\chi, t) = W(\chi) + O(t^{-\delta})$ с некоторым $\delta > 0$, и так как $\hat{v}(\chi, t) = \hat{B}_w(\chi, t)\hat{w}(\chi, t)$, то из (3.6) найдем

$$u(x, t) = \frac{W(\chi)e^{i\chi^2 t}}{\sqrt{4\pi i t}} \exp\left(\int_1^t b(\tau)|\hat{w}(\chi, \tau)|^2 d\tau\right) + O(t^{-\frac{1}{2}-\delta}). \quad (3.8)$$

Фазу в главном члене асимптотики (3.8) запишем в виде

$$\begin{aligned} \int_1^t b(\tau)|\hat{w}(\chi, \tau)|^2 d\tau &= |W(\chi)|^2 \int_1^t b(\tau) d\tau + \Phi(\chi) + (\Psi(\chi, t) - \Phi(\chi)) \\ &\quad + (|\hat{w}(\chi, t)|^2 - |W(\chi)|^2) \int_1^t b(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(\chi) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \Psi(\chi, t); \\ \Psi(\chi, t) &= \int_1^t d\tau b(\tau)(|\hat{w}(\chi, \tau)|^2 - |\hat{w}(\chi, t)|^2) \\ &= - \int_1^t d\xi \frac{\partial}{\partial \xi} (|\hat{w}(\chi, \xi)|^2) \int_1^\xi b(\tau) d\tau; \end{aligned}$$

и, таким образом,

$$\Phi(\chi) = - \int_1^\infty d\xi \int_1^\xi b(\tau) d\tau \frac{\partial}{\partial \xi} (|\hat{w}(\chi, \xi)|^2).$$

Последнее слагаемое в (3.9) мало из-за оценки (3.7):

$$\| |\hat{w}(\chi, t)|^2 - |W(\chi)|^2 \|_{\mathcal{L}_\infty} \int_1^t |b(\tau)| d\tau = O(t^{-\delta}), \quad (3.10)$$

где $\delta > 0$ – некоторая постоянная. Оценим предпоследнее слагаемое в (3.9):

$$\begin{aligned} \|\Psi(\chi, t) - \Phi(\chi)\|_{\mathcal{L}_\infty} &= \left\| \int_t^\infty d\tau \int_1^\tau b(\xi) d\xi \frac{\partial}{\partial \tau} |\widehat{w}(\chi, \tau)|^2 \right\|_{\mathcal{L}_\infty} \\ &\leq c \int_t^\infty d\tau \tau^\beta \|w\|_{\mathcal{L}_1} \left\| \frac{\partial w}{\partial \tau} \right\|_{\mathcal{L}_1} \\ &\leq c \int_t^\infty \tau^{-1-\beta} d\tau = O(t^{-\beta}). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Следовательно, из (3.8) ввиду (3.9) найдем

$$u(x, t) = \frac{W(\chi)}{\sqrt{4\pi it}} \exp\left(ti\chi^2 + \Phi(\chi) + |W(\chi)|^2 \int_1^t b(\tau) d\tau\right) + S + O(t^{-\frac{1}{2}-\delta}), \quad (3.12)$$

где величина S в силу (3.10), (3.11) имеет оценку:

$$\begin{aligned} \|S\|_{\mathcal{L}_\infty} &= \left\| \frac{W(\chi)}{\sqrt{4\pi it}} \exp\left(ti\chi^2 + \Phi(\chi) + |W(\chi)|^2 \int_1^t b(\tau) d\tau\right) \right. \\ &\quad \times \left. \left\{ \exp\left(\Psi(\chi, t) - \Phi(\chi) + (|\widehat{w}(\chi, t)|^2 - |W(\chi)|^2) \int_1^t b(\tau) d\tau\right) - 1 \right\} \right\|_{\mathcal{L}_\infty} \\ &\leq \frac{c}{\sqrt{t}} \left(\|\Psi(\chi, t) - \Phi(\chi)\|_{\mathcal{L}_\infty} \right. \\ &\quad \left. + \left\| (|\widehat{w}(\chi, t)|^2 - |W(\chi)|^2) \int_1^t b(\tau) d\tau \right\|_{\mathcal{L}_\infty} \right) = O(t^{-\frac{1}{2}-\delta}). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Подстановка (3.13) в (3.12) дает асимптотику (1.4). Сделаем замечание по поводу вычисления амплитуды $W(\chi)$ и фазы $\Phi(\chi)$. Благодаря оценке (3.7) для заданной точности $\varepsilon_1 > 0$ можем выбрать время $T > 1$ столь большим, чтобы

$$\|W(\chi) - \widehat{w}(\chi, T)\|_{\mathcal{L}_\infty} \leq \varepsilon_1.$$

После этого, в силу оценки (3.4) для разности $w^{(l)} - w^{(l-1)}$, можем выбрать такое большое значение l , чтобы для заданной точности $\varepsilon_2 > 0$ имело место неравенство

$$\|\widehat{w}^{(l)}(\chi, T) - \widehat{w}(\chi, T)\|_{\mathcal{L}_\infty(R_1)} \leq \varepsilon_2.$$

Затем мы можем вычислить $\widehat{w}^{(l)}(\chi, T)$, пользуясь рекуррентным соотношением (3.2), и, таким образом, получаем для коэффициента $W(\chi)$ выражение

$$W(\chi) = \widehat{w}^{(l)}(\chi, T) + O(\varepsilon_1) + O(\varepsilon_2). \quad (3.14)$$

Аналогично, для фазы $\Phi(\chi)$ из (3.11) найдем $\Phi(\chi) = \Psi(\chi, T) + \varepsilon_3$, а величину $\Psi(\chi, T)$ заменим ее приближением

$$\Psi^{(l)}(\chi, T) = \int_1^T (|\widehat{w}^{(l)}(\chi, \tau)|^2 - |\widehat{w}^{(l)}(\chi, T)|^2) b(\tau) d\tau,$$

которое отличается от точного значения $\Psi(\chi, T)$ не более заданной точности ε_4 , если при фиксированном значении T выбрать номер l достаточно большим. Значит,

$$\Phi(\chi) = \Psi^{(l)}(\chi, T) + O(\varepsilon_3) + O(\varepsilon_4). \quad (3.15)$$

Теоремы 2 и 3 доказаны.

§ 4. Леммы для теоремы 2

Обозначим, как и выше,

$$|\varphi|_1 = 2\|\varphi\|_{\mathcal{L}_2} + \|x\varphi(x)\|_{\mathcal{L}_2} + \|\varphi'(x)\|_{\mathcal{L}_2}.$$

Оценим сначала введенный в § 3 оператор

$$B_{\varphi, \psi}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{R_1} e^{ipx} \widehat{B}_{\varphi}(p, t) \widehat{\psi}(p, t) dp,$$

где

$$\widehat{B}_{\varphi}(p, t) = \exp\left(\int_1^t b(\tau) |\widehat{\varphi}(p, \tau)|^2 d\tau\right),$$

крышка означает преобразование Фурье

$$\widehat{\varphi}(p, t) = \int_{R_1} e^{-ipx} \varphi(x, t) dx.$$

Обозначим также

$$X_{\varkappa} \equiv \left\{ \varphi(x, t) \in C^0([1, \infty); H^{0,1}(R_1) \cap H^{1,0}(R_1)) : \right. \\ \left. \sup_{t \geq 1} (\|\varphi\|_{\mathcal{L}_1} + t^{-\gamma} |\varphi|_1) \leq \varkappa \right\},$$

где $\varkappa > 0$, $\gamma \in (0, \frac{1}{20})$.

ЛЕММА 1. Пусть $b^*(t) = -b(t)$, $\sup_{t \geq 1} tb(t) < \infty$.

Тогда:

1) для любых функций $\varphi(x, t) \in C^0([1, \infty); \mathcal{L}_1(R_1))$ и $\psi(x, t) \in C^0([1, \infty); H^{n,0}(R_1))$ при всех $n \geq 0$ имеем равенство

$$\|B_{\varphi, \psi}\|_{H^{n,0}} = \|\psi\|_{H^{n,0}}; \quad (4.1)$$

2) для любых $\varphi \in X_{\varkappa}$ и $\psi \in C^0([1, \infty); H^{0,1}(R_1))$ имеет место представление

$$xB_{\varphi, \psi}(x, t) = B_{\varphi, u}, \quad u = x\psi(x, t) + F_{\varphi, \psi}(x, t) \quad (4.2)$$

(отображение $F_{\varphi,\psi}$ определено ниже в (4.9)), причем если $\sup_{t \geq 1} \|\psi\|_{\mathcal{L}_1} < \infty$, то справедлива оценка

$$\sup_{t \geq 1} t^{-\gamma} \|F_{\varphi,\psi}\|_{\mathcal{L}_2} \leq c\kappa^2 \sup_{t \geq 1} \|\psi\|_{\mathcal{L}_1}, \quad (4.3)$$

а если $\psi \in C^1([1, \infty); \mathcal{L}_1(R_1))$ и $\sup_{t \geq 1} (\|\psi\|_{\mathcal{L}_1} + t\|\psi'_t\|_{\mathcal{L}_1}) < \infty$, то выполняется оценка

$$\sup_{t \geq 1} t^{1-\gamma} \left\| \frac{\partial}{\partial t} F_{\varphi,\psi} \right\|_{\mathcal{L}_2} \leq c\kappa^2 \sup_{t \geq 1} (\|\psi\|_{\mathcal{L}_1} + t\|\psi'_t\|_{\mathcal{L}_1}); \quad (4.4)$$

3) для любых $\varphi, \psi, t^{-\nu}f, t^{-\nu}g \in X_{\kappa}$, $\kappa > 0$, $\nu \in [\gamma, 3\gamma]$, справедливо неравенство

$$\sup_{t \geq 1} t^{-\gamma-\nu} e^{-t} |B_{\varphi,f} - B_{\psi,g}|_1 \leq c(1 + \kappa^2) \sup_{t \geq 1} e^{-t} (t^{-\nu} |f - g|_1 + \kappa^2 |\varphi - \psi|_1), \quad (4.5)$$

где $c > 0$ – некоторая константа.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из равенств (4.1) и (4.2) и оценки (4.3) получаем следующее неравенство для любых $\varphi, \psi \in X_{\kappa}$:

$$\begin{aligned} \|B_{\varphi,\psi}\|_{H^{0,1}} &= \|B_{\varphi,\psi}\|_{\mathcal{L}_2} + \|xB_{\varphi,\psi}\|_{\mathcal{L}_2} \leq \|\psi\|_{\mathcal{L}_2} + \|x\psi\|_{\mathcal{L}_2} + \|F_{\varphi,\psi}\|_{\mathcal{L}_2} \\ &\leq ct^{\gamma} \sup_{t \geq 1} (t^{-\gamma} |\psi|_1 + \kappa^2 \|\psi\|_{\mathcal{L}_1}), \end{aligned} \quad (4.6)$$

откуда также найдем

$$\sup_{t \geq 1} t^{-\gamma} |B_{\varphi,\psi}|_1 \leq c\kappa(1 + \kappa^2). \quad (4.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Равенство (4.1) легко следует из теоремы Планшереля и определения мультипликатора $B_{\varphi,\psi}$. Для доказательства (4.2) заметим, что

$$\begin{aligned} xB_{\varphi,\psi}(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{R_1} dp e^{ipx} i \frac{\partial}{\partial p} (\widehat{\psi}(p, t) \widehat{B}_{\varphi}(p, t)) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{R_1} dp e^{ipx} \widehat{B}_{\varphi}(p, t) \left\{ i\widehat{\psi}'_p(p, t) \right. \\ &\quad \left. + i\widehat{\psi}(p, t) \int_1^t b(\tau) (|\widehat{\varphi}(p, \tau)|^2)'_p d\tau \right\}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

так что получаем представление (4.2), в котором

$$\begin{aligned} F_{\varphi,\psi}(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{R_1} e^{ipx} \widehat{F}_{\varphi}(p, t) \widehat{\psi}(p, t), \\ \widehat{F}_{\varphi}(p, t) &= \int_1^t b(\tau) i \frac{\partial}{\partial p} (|\widehat{\varphi}(p, \tau)|^2) d\tau. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Из (4.9) легко получаем оценку

$$\begin{aligned} \|F_{\varphi,\psi}\|_{\mathcal{L}_2} &\leq c \left\| \widehat{\psi}(p,t) \int_1^t d\tau \frac{1}{\tau} |\widehat{\varphi}\widehat{\psi}'_p| \right\|_{\mathcal{L}_2} \\ &\leq c \sup_{t \geq 1} \|\psi\|_{\mathcal{L}_1} \cdot \sup_{t \geq 1} \|\varphi\|_{\mathcal{L}_1} \cdot \sup_{t \geq 1} \int_1^t \frac{d\tau}{\tau} \|\varphi\|_{H^{0,1}} \\ &\leq c\kappa^2 \sup_{t \geq 1} \|\psi\|_{\mathcal{L}_1} \int_1^t d\tau \cdot \tau^{\gamma-1} \leq c\kappa^2 t^\gamma \sup_{t \geq 1} \|\psi\|_{\mathcal{L}_1}, \end{aligned}$$

откуда следует (4.3). Продифференцировав (4.9) по t , найдем

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial F_{\varphi,\psi}}{\partial t} \right\|_{\mathcal{L}_2} &= \left\| \widehat{\psi}'_t(p,t) \int_1^t b(\tau) i \frac{\partial}{\partial p} |\widehat{\varphi}(p,\tau)|^2 d\tau + \widehat{\psi}(p,t) b(t) i \frac{\partial}{\partial p} |\widehat{\varphi}(p,t)|^2 \right\|_{\mathcal{L}_2} \\ &\leq c \|\widehat{\psi}'_t\|_{\mathcal{L}_\infty} \int_1^t \frac{d\tau}{\tau} \|\widehat{\varphi}\|_{\mathcal{L}_\infty} \|\widehat{\varphi}'_p\|_{\mathcal{L}_2} + \frac{c}{t} \|\widehat{\psi}\|_{\mathcal{L}_\infty} \|\widehat{\varphi}\|_{\mathcal{L}_\infty} \|\widehat{\varphi}'_p\|_{\mathcal{L}_2} \\ &\leq c \sup_{t \geq 1} (t \|\psi'_t\|_{\mathcal{L}_1}) \frac{\kappa^2}{t} \int_1^t d\tau \tau^{\gamma-1} + c \frac{\kappa^2}{t^{1-\gamma}} \sup_{t \geq 1} \|\psi\|_{\mathcal{L}_1} \\ &\leq c\kappa^2 t^{\gamma-1} \sup_{t \geq 1} (\|\psi\|_{\mathcal{L}_1} + t \|\psi'_t\|_{\mathcal{L}_1}), \end{aligned}$$

откуда вытекает (4.4). Остается установить неравенство (4.5). Пользуясь линейностью оператора $B_{\varphi,\psi}$ по второму аргументу, находим

$$B_{\varphi,f} - B_{\psi,g} = B_{\varphi,f-g} + B_{\varphi,g} - B_{\psi,g}.$$

Благодаря оценкам (4.6) и (4.1) оценим первое слагаемое так:

$$\begin{aligned} |B_{\varphi,f-g}|_1 &= t^\nu e^t (\|B_{\varphi,(f-g)t^{-\nu}e^{-t}}\|_{H^{0,1}} + \|B_{\varphi,(f-g)t^{-\nu}e^{-t}}\|_{H^{1,0}}) \\ &\leq c t^\nu e^t (t^\gamma \sup_{t \geq 1} t^{-\nu-\gamma} e^{-t} |f-g|_1 + t^\gamma \kappa^2 \sup_{t \geq 1} t^{-\nu} e^{-t} \|f-g\|_{\mathcal{L}_1}) \\ &\leq c(1 + \kappa^2) t^{\gamma+\nu} e^t \sup_{t \geq 1} t^{-\nu} e^{-t} |f-g|_1, \end{aligned} \tag{4.10}$$

так как по теореме вложения Соболева $\|\varphi\|_{\mathcal{L}_1} \leq c|\varphi|_1$. Учитывая оценку

$$\|F_{\varphi,g}\|_{\mathcal{L}_2} = t^\nu \|F_{\varphi,gt^{-\nu}}\|_{\mathcal{L}_2} \leq c\kappa^2 t^{\gamma+\nu} \sup_{t \geq 1} t^{-\nu} \|g\|_{\mathcal{L}_1} \leq c\kappa^3 t^{\gamma+\nu},$$

а также

$$\begin{aligned} \|\widehat{B}_\varphi - \widehat{B}_\psi\|_{\mathcal{L}_\infty} &= \left\| 1 - \exp \left(\int_1^t b(\tau) (|\widehat{\varphi}(p,\tau)|^2 - |\widehat{\psi}(p,\tau)|^2) d\tau \right) \right\|_{\mathcal{L}_\infty} \\ &\leq c \int_1^t \frac{d\tau}{\tau} \|\widehat{\varphi} - \widehat{\psi}\|_{\mathcal{L}_\infty} \|\widehat{\varphi} + \widehat{\psi}\|_{\mathcal{L}_\infty} \\ &\leq c \int_1^t \frac{e^\tau}{\tau} d\tau \sup_{t \geq 1} e^{-t} |\varphi - \psi|_1 (\|\varphi\|_{\mathcal{L}_1} + \|\psi\|_{\mathcal{L}_1}) \\ &\leq c\kappa e^t \sup_{t \geq 1} e^{-t} |\varphi - \psi|_1 \end{aligned}$$

и неравенство

$$\begin{aligned}
\|(\widehat{F}_\varphi - \widehat{F}_\psi)\widehat{g}\|_{\mathcal{L}_2} &= \left\| \widehat{g}(p, t) \int_1^t b(\tau) \frac{\partial}{\partial p} (|\widehat{\varphi}(p, \tau)|^2 - |\widehat{\psi}(p, \tau)|^2) d\tau \right\|_{\mathcal{L}_2} \\
&\leq c \|\widehat{g}\|_{\mathcal{L}_\infty} \int_1^t \frac{d\tau}{\tau} \|\varphi - \psi\|_{H^{0,1}} (\|\varphi\|_{H^{0,1}} + \|\psi\|_{H^{0,1}}) \\
&\leq c t^\nu \int_1^t d\tau e^\tau \tau^{\gamma-1} \sup_{t \geq 1} (t^{-\nu} |g|_1) \sup_{t \geq 1} |\varphi - \psi|_1 (|\varphi|_1 + |\psi|_1) t^{-\gamma} e^{-t} \\
&\leq c \varkappa^2 t^\nu e^t \sup_{t \geq 1} e^{-t} |\varphi - \psi|_1
\end{aligned}$$

с помощью теоремы Планшереля и представления (4.2) найдем

$$\begin{aligned}
|B_{\varphi,g} - B_{\psi,g}|_1 &\leq \frac{1}{2\pi} (2\|\widehat{g}(\widehat{B}_\varphi - \widehat{B}_\psi)\|_{\mathcal{L}_2} + \|\widehat{g}'_p(\widehat{B}_\varphi - \widehat{B}_\psi)\|_{\mathcal{L}_2} \\
&\quad + \|\widehat{g}(p, t)p(\widehat{B}_\varphi(p, t) - \widehat{B}_\psi(p, t))\|_{\mathcal{L}_2} + \|\widehat{g}(\widehat{F}_\varphi \widehat{B}_\varphi - \widehat{F}_\psi \widehat{B}_\psi)\|_{\mathcal{L}_2}) \\
&\leq c(|g|_1 + \|F_{\varphi,g}\|_{\mathcal{L}_2}) \|\widehat{B}_\varphi - \widehat{B}_\psi\|_{\mathcal{L}_\infty} + c\|\widehat{g}(\widehat{F}_\varphi - \widehat{F}_\psi)\|_{\mathcal{L}_2} \\
&\leq c \varkappa^2 (1 + \varkappa^2) t^{\gamma+\nu} e^t \sup_{t \geq 1} e^{-t} |\varphi - \psi|_1.
\end{aligned}$$

Отсюда и из (4.10) получаем оценку (4.5). Лемма 1 доказана.

В следующей лемме мы оценим оператор

$$\Lambda_w(x, t) = b(t)B'_{w,f}(x, t),$$

где

$$\begin{aligned}
f(x, t) &= \iint_{R_2} dy dz v(y, t) v(z, t) v^*(y + z - x, t) E(x, y, z, t), \\
v(x, t) &= B_{w,w}(x, t), \\
E(x, y, z, t) &= \exp\left(-\frac{i}{4t}(x^2 - y^2 - z^2 + (x - y - z)^2)\right) - 1.
\end{aligned}$$

Введем, как в §3, норму

$$|||\varphi||| = \sup_{t \geq 1} (t^{\frac{5}{4}-5\gamma} \|\varphi'_t\|_{\mathcal{L}_1} + t^{1-4\gamma} |\varphi'_t|_1 + t^{-\gamma} |\varphi|_1)$$

и пространство

$$Y_\varepsilon = \{\varphi(x, t) \in C^1([1, \infty); H^{1,0}(R_1) \cap H^{0,1}(R_1)) : |||\varphi||| \leq \varepsilon\}$$

и докажем следующее утверждение.

ЛЕММА 2. Пусть $b^* = -b$, $\sup_{t \geq 1} tb(t) < \infty$ и $\sup_{t \geq 1} t^2 b'(t) < \infty$.

Тогда:

1) для любой функции $w \in Y_\varepsilon$ с достаточно малым $\varepsilon > 0$ имеем

$$\left\| \int_1^t \Lambda_w d\tau \right\| \leq c\varepsilon^3, \quad (4.11)$$

где $c > 0$ – некоторая постоянная;

2) для любых функций $w, \rho \in Y_\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ достаточно мало, справедлива оценка

$$\sup_{t \geq 1} e^{-t} \left| \int_1^t (\Lambda_w - \Lambda_\rho) d\tau \right|_1 \leq \varepsilon \sup_{t \geq 1} e^{-t} |w - \rho|_1. \quad (4.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что из определения множества Y_ε вытекает оценка для любой функции $\varphi \in Y_\varepsilon$:

$$\sup_{t \geq 1} t^{-\gamma} |\varphi|_1 \leq \|\varphi\| \leq \varepsilon, \quad (4.13)$$

и по теореме вложения Соболева

$$\|\varphi(x, 1)\|_{\mathcal{L}_1} \leq c|\varphi(x, 1)|_{H^{0,1}} \leq c \sup_{t \geq 1} t^{-\gamma} \|\varphi\|_1 \leq c\|\varphi\| \leq c\varepsilon,$$

так что

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{\mathcal{L}_1} &\leq \|\varphi(x, 1)\|_{\mathcal{L}_1} + \sup_{t \geq 1} \int_1^t \|\varphi'_t\|_{\mathcal{L}_1} d\tau \\ &\leq c\varepsilon + \sup_{t \geq 1} (t^{5/4-5\gamma} \|\varphi'_t\|_{\mathcal{L}_1}) \sup_{t \geq 1} \int_1^t \tau^{5\gamma-5/4} d\tau \leq c\varepsilon. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Таким образом, если $\varphi \in Y_\varepsilon$, то $\varphi \in X_\varkappa$ при $\varkappa = c\varepsilon$, и из (4.7) найдем

$$\sup_{t \geq 1} t^{-\gamma} |v|_1 = \sup_{t \geq 1} t^{-\gamma} |B_{w,w}|_1 \leq c\varepsilon(1 + (c\varepsilon)^2) \leq c\varepsilon, \quad (4.15)$$

так как $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Ввиду (2.5) с $\nu = 0$ и (4.15), а также с помощью элементарной оценки

$$|E(x, y, z, t)| \leq c t^{-\mu} (|y|^{2\mu} + |z|^{2\mu} + |x - y - z|^{2\mu}), \quad (4.16)$$

справедливой при всех $x, y, z \in R_1$, $t \geq 1$, $\mu \in [0, 1]$, оценим, взяв $\mu = 1/2$,

$$\begin{aligned} \sup_{t \geq 1} t^{\frac{1}{2}-3\gamma} \|f\|_{\mathcal{L}_2} &\leq c \sup_{t \geq 1} t^{-3\gamma} \left\| \iint_{R_2} dy dz (|y| + |z| + |x - y - z|) |v(y, t)| \right. \\ &\quad \left. \times |v(z, t)| |v(y + z - x, t)| \right\|_{\mathcal{L}_2} \\ &\leq c \sup_{t \geq 1} \|v\|_{H^{0,1}}^3 t^{-3\gamma} \leq c\varepsilon^3. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Также, взяв в (4.16) $\mu = 0$, получим

$$\begin{aligned} \sup_{t \geq 1} t^{-3\gamma} |f|_1 &\leq c \sup_{t \geq 1} t^{-3\gamma} \left\| \iint_{R_2} dy dz |v(y, t) v(z, t)| \left(|v(y + z - x, t)| \right. \right. \\ &\quad \times \left. \left(1 + |x| + \frac{|x|}{t} + \frac{|x - y - z|}{t} \right) + |v'_x(y + z - x, t)| \right) \Big\|_{\mathcal{L}_2} \\ &\leq c \sup_{t \geq 1} t^{-3\gamma} |v|_1 \|v\|_{\mathcal{L}_1}^2 \leq c \varepsilon^3. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Таким образом, из (4.18) вытекает, что $t^{-3\gamma} f \in X_{c\varepsilon^3}$. Далее, теорема вложения Соболева с помощью интерполяции дает для любой функции $\varphi \in H^{0,1}(R_1)$

$$\|\varphi\|_{\mathcal{L}_1} \leq c \|\varphi\|_{\mathcal{L}_2}^{1-\nu} \|\varphi\|_{H^{0,1}}^\nu, \quad \nu \in \left(\frac{1}{2}, 1 \right). \quad (4.19)$$

Поэтому, взяв в (4.19) $\nu = \frac{1}{2} + \gamma$, получим из (4.17) и (4.18)

$$\sup_{t \geq 1} t^{\frac{1}{4}-4\gamma} \|f\|_{\mathcal{L}_1} \leq c \varepsilon^3. \quad (4.20)$$

Из равенства (4.1) и оценки (4.17) вытекает неравенство

$$\|B_{w,f}^{-1}\|_{\mathcal{L}_2} = \|f\|_{\mathcal{L}_2} \leq c \varepsilon^3 t^{3\gamma-1/2}, \quad (4.21)$$

и так как $t^{-3\gamma} f \in X_{c\varepsilon^3}$, то из (4.7) при $\varkappa = c\varepsilon^3$ найдем

$$\sup_{t \geq 1} t^{-4\gamma} |B_{w,f}^{-1}|_1 = \sup_{t \geq 1} t^{-\gamma} |B_{w,ft^{-3\gamma}}|_1 \leq c \varepsilon^3, \quad (4.22)$$

так что из (4.19) при $\nu = \frac{1}{2} + \gamma$ получим

$$\|B_{w,f}^{-1}\|_{\mathcal{L}_1} \leq c \varepsilon^3 t^{5\gamma-1/4}, \quad (4.23)$$

откуда в силу условия леммы следует

$$\sup_{t \geq 1} t^{5/4-5\gamma} \|\Lambda_w\|_{\mathcal{L}_1} \leq c \varepsilon^3. \quad (4.24)$$

Далее, из (4.22) имеем

$$\sup_{t \geq 1} t^{1-4\gamma} |\Lambda_w|_1 \leq c \varepsilon^3. \quad (4.25)$$

Остается доказать следующую оценку, содержащуюся в (4.11):

$$\sup_{t \geq 1} t^{-\gamma} \left| \int_1^t \Lambda_w d\tau \right|_1 \leq c \varepsilon^3. \quad (4.26)$$

Ввиду тождества $x = y + z + (x - y - z)$ и в силу симметрии интеграла f относительно замены переменных интегрирования $y \rightarrow z$ получим

$$f'_\chi(x, t) = s(x, t) + \tilde{h}(x, t), \quad xf(x, t) = g(x, t) + h(x, t), \quad (4.27)$$

где

$$\begin{aligned} s(x, t) &= \iint_{R_2} dy dz v(y, t) v(z, t) v^*(y + z - x, t) E(x, y, z, t) \frac{i}{2t} (y + z - 2x), \\ g(x, t) &= 2 \iint_{R_2} dy dz \cdot y v(y, t) v(z, t) v^*(y + z - x, t) E(x, y, z, t), \\ h(x, t) &= \iint_{R_2} dy dz v(y, t) v(z, t) (B_{w,u}(y + z - x, t))^* E(x, y, z, t), \\ \tilde{h}(x, t) &= \iint_{R_2} dy dz v(y, t) v(z, t) (B_{w,\tilde{u}}(y + z - x, t))^* E(x, y, z, t), \end{aligned}$$

функция $u(x, t) = xw(x, t) + F_{w,w}(x, t)$ взята из представления (4.2): $xv(x, t) = B_{w,u}(x, t)$, а $\tilde{u}(x, t) = -w'_x(x, t)$. Поэтому с помощью (4.1), (4.2) и равенства $\frac{\partial}{\partial x} B_{w,f}^{-1} = B_{w,\partial f/\partial x}^{-1}$ найдем из (4.27)

$$\begin{aligned} &\left\| \int_1^t \Lambda_w d\tau \right\|_{H^{0,1}} + \left\| \int_1^t \Lambda_w d\tau \right\|_{H^{1,0}} \leq \left(2 \left\| \int_1^t \Lambda_w d\tau \right\|_{\mathcal{L}_2} \right. \\ &\quad \left. + \left\| \int_1^t d\tau b(\tau) B_{w,\tilde{s}}^{-1} \right\|_{\mathcal{L}_2} + \left\| \int_1^t d\tau b(\tau) B_{w,s}^{-1} \right\|_{\mathcal{L}_2} \right) \\ &\quad + \left\| \int_1^t d\tau b(\tau) B_{w,g}^{-1} \right\|_{\mathcal{L}_2} + \left\| \int_1^t d\tau b(\tau) B_{w,h}^{-1} \right\|_{\mathcal{L}_2} \\ &\quad + \left\| \int_1^t d\tau b(\tau) B_{w,\tilde{h}}^{-1} \right\|_{\mathcal{L}_2} \equiv I_1 + I_2 + I_3 + I_4, \end{aligned} \quad (4.28)$$

где $\tilde{s}(x, t) = F_{w,f}(x, t)$. Ввиду (4.3) и (4.20) найдем

$$\|\tilde{s}\|_{\mathcal{L}_2} \leq c \varepsilon^2 t^{5\gamma-1/4} \sup_{t \geq 1} t^{1/4-4\gamma} \|f\|_{\mathcal{L}_1} \leq c \varepsilon^5 t^{5\gamma-1/4}$$

и, как в (4.18), имеем

$$\|s\|_{\mathcal{L}_2} \leq \frac{c}{t} |v|_1 \|v\|_{\mathcal{L}_1}^2 \leq c \varepsilon^3 t^{3\gamma-1}.$$

Поэтому первое слагаемое в (4.28) легко оценивается благодаря (4.1) и (4.17):

$$\begin{aligned} I_1 &\leq c \int_1^t \frac{d\tau}{\tau} (\|B_{w,f}^{-1}\|_{\mathcal{L}_2} + \|B_{w,\tilde{s}}^{-1}\|_{\mathcal{L}_2} + \|B_{w,s}^{-1}\|_{\mathcal{L}_2}) \\ &\leq c \int_1^t \frac{d\tau}{\tau} (\|f\|_{\mathcal{L}_2} + \|\tilde{s}\|_{\mathcal{L}_2} + \|s\|_{\mathcal{L}_2}) \leq c \varepsilon^3 \int_1^t \tau^{5\gamma-5/4} d\tau \leq c \varepsilon^3. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Обозначим

$$E_1(x, y, t) = E(x, y, 0, t) = \exp\left(-\frac{i}{4t}(x^2 - y^2 + (x - y)^2)\right) - 1;$$

тогда интеграл $g(x, t)$ разобьется на сумму двух интегралов:

$$\begin{aligned} g(x, t) = g_1(x, t) + g_2(x, t) &\equiv \iint_{R_2} dy dz v(y, t) v(z, t) v^*(y + z - x, t) \\ &\times \left((E(x, y, z, t) - E_1(x, y, t)) + E_1(x, y, t) \right). \end{aligned}$$

Ввиду равенства (4.1) и условия леммы оценим интеграл I_2 следующим образом:

$$I_2 \leq c \int_1^t \frac{d\tau}{\tau} (\|g_1\|_{\mathcal{L}_2} + \|g_2\|_{\mathcal{L}_2}). \quad (4.30)$$

С помощью неравенств (4.15) и (2.5) и оценки

$$|E(x, y, z, t) - E_1(x, y, t)| \leq t^{-\mu} (|x - y - z|^{2\mu} + |z|^{2\mu}),$$

взятой при $\mu = \frac{1}{4} - \gamma$, оценим g_1 :

$$\begin{aligned} \|g_1\|_{\mathcal{L}_2} &\leq t^{-\mu} \left\| \iint_{R_2} dy dz |yv(y, t)| |v(z, t)| |v(y + z - x, t)| \right. \\ &\quad \times (|z|^{2\mu} + |x - y - z|^{2\mu}) \left. \right\|_{\mathcal{L}_2} \\ &\leq c t^{-\mu} \|yv(y, t)\|_{\mathcal{L}_2} \|(1 + |z|)^{2\mu} v(z, t)\|_{\mathcal{L}_1}^2 \\ &\leq c t^{-\mu} \|v\|_{H^{0,1}}^3 \leq c \varepsilon^3 t^{4\gamma-1/4}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

В интеграле g_2 функция $E_1(x, y, t)$ не зависит от z , и, значит, интегрирование по переменной z представляет собой свертку. В терминах преобразования Фурье свертка отвечает произведению фурье-образов, так что ввиду определения мультипликатора $B_{w,w}$ найдем

$$\begin{aligned} \int_{R_1} dz v(z, t) v^*(y + z - x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{R_1} dp e^{ip(x-y)} \hat{v}(p, t) \hat{v}^*(p, t) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{R_1} dp e^{ip(x-y)} |\hat{w}(p, t)|^2 |\hat{B}_w(p, t)|^2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{R_1} dp e^{ip(x-y)} |\hat{w}(p, t)|^2 \\ &= \int_{R_1} dz w(z, t) w^*(y + z - x, t). \end{aligned}$$

Следовательно, интеграл по z упрощается, и так как $w \in X_{c\varepsilon}$, ввиду (4.15) мы получаем

$$\begin{aligned} \|g_2\|_{\mathcal{L}_2} &= \left\| \iint_{R_2} dy dz E_1(x, y, t) y v(y, t) w(z, t) w^*(y + z - x, t) \right\|_{\mathcal{L}_2} \\ &\leq \|y v(y, t)\|_{\mathcal{L}_2} \|w\|_{\mathcal{L}_1}^2 \leq t^\gamma \sup_{t \geq 1} t^{-\gamma} |v|_1 \|w\|_{\mathcal{L}_1}^2 \leq c \varepsilon^3 t^\gamma. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Подстановка (4.31) и (4.32) в (4.30) дает

$$I_2 \leq c \varepsilon^3 \int_1^t d\tau \tau^{\gamma-1} \leq c \varepsilon^3 t^\gamma. \quad (4.33)$$

Обозначим

$$E_2(x, y, z, t) = \exp\left(-\frac{i}{8t}(2x - y - z)^2\right)$$

и запишем интеграл $h(x, t)$ в виде

$$\begin{aligned} h(x, t) &= \iint_{R_2} dy dz v(y, t) v(z, t) (B_{w,u}(y + z - x, t))^* \{ (E(x, y, z, t) \\ &\quad - E_2(x, y, z, t) + 1) + E_2(x, y, z, t) - 1 \} \equiv h_1 + h_2 - h_3. \end{aligned}$$

Аналогичное представление имеет интеграл $\tilde{h}$ с $\tilde{u}$ вместо u . Тогда в силу (4.1) преобразуем интеграл I_3 следующим образом:

$$\begin{aligned} I_3 &= \left\| \int_1^t d\tau b(\tau) (B_{w,h_1}^{-1} - B_{w,h_3}^{-1} + h_4 + (B_{w,h_2}^{-1} - h_4)) \right\|_{\mathcal{L}_2} \\ &\leq \int_1^t d\tau |b(\tau)| (\|B_{w,h_1}^{-1}\|_{\mathcal{L}_2} + \|B_{w,h_3}^{-1}\|_{\mathcal{L}_2} + \|h_4\|_{\mathcal{L}_2}) \\ &\quad + \left\| \int_1^t d\tau b(\tau) (B_{w,h_2}^{-1} - h_4) \right\|_{\mathcal{L}_2} \\ &\leq c \int_1^t \frac{d\tau}{\tau} (\|h_1\|_{\mathcal{L}_2} + \|h_3\|_{\mathcal{L}_2} + \|h_4\|_{\mathcal{L}_2}) \\ &\quad + \left\| \int_1^t d\tau b(\tau) (B_{w,h_2}^{-1} - h_4) \right\|_{\mathcal{L}_2} = I_5 + I_6, \end{aligned} \quad (4.34)$$

где

$$h_4(x, t) = \iint_{R_2} dy dz E_2(x, y, z, t) w(y, t) w(z, t) u^*(y + z - x, t).$$

Для интеграла I_4 выражение и последующие рассуждения полностью аналогичны, и мы не будем их приводить.

Оценим h_1 с помощью неравенства

$$|E(x, y, z, t) - E_2(x, y, z, t) - 1| \leq c t^{-\mu} (|y|^{2\mu} + |z|^{2\mu}), \quad (4.35)$$

в котором положим $\mu = \frac{1}{4} - \gamma$:

$$\begin{aligned} \|h_1\|_{\mathcal{L}_2} &\leq c t^{-\mu} \left\| \iint_{R_2} dy dz (|y|^{2\mu} + |z|^{2\mu}) |v(y, t) v(z, t)| |B_{w,u}(y + z - x, t)| \right\|_{\mathcal{L}_2} \\ &\leq c t^{-\mu} \|v\|_{H^{0,1}}^2 \|u\|_{\mathcal{L}_2} \leq c \varepsilon^3 t^{4\gamma-1/4}, \end{aligned} \quad (4.36)$$

так как в силу (4.3)

$$\|u\|_{\mathcal{L}_2} \leq c \|w\|_{H^{0,1}} + c \varepsilon^2 t^\gamma \|w\|_{\mathcal{L}_1} \leq c \varepsilon t^\gamma.$$

Так же легко оценивается h_4 :

$$\|h_4\|_{\mathcal{L}_2} \leq \|w\|_{\mathcal{L}_1}^2 \|u\|_{\mathcal{L}_2} \leq c \varepsilon^3 t^\gamma. \quad (4.37)$$

Интеграл h_3 является сверткой, поэтому, перейдя по теореме Планшереля к образам Фурье, получим произведение и (так как $|\widehat{B}_w(p, t)| = 1$) найдем

$$\begin{aligned} \|h_3\|_{\mathcal{L}_2} &= \frac{1}{2\pi} \|\widehat{v}^2(p, t) \widehat{B}^*(p, t) \widehat{u}(p, t)\|_{\mathcal{L}_2} = \frac{1}{2\pi} \|\widehat{w}^2(p, t) \widehat{u}(p, t)\|_{\mathcal{L}_2} \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \|\widehat{w}\|_{\mathcal{L}_\infty}^2 \|\widehat{u}\|_{\mathcal{L}_2} \leq \|w\|_{\mathcal{L}_1}^2 \|u\|_{\mathcal{L}_2} \leq c \varepsilon^3 t^\gamma. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Собирая вместе оценки (4.36)–(4.38), получаем оценку интеграла I_5 :

$$I_5 \leq c \varepsilon^3 \int_1^t d\tau \tau^{\gamma-1} \leq c \varepsilon^3 t^\gamma. \quad (4.39)$$

В интеграле I_6 благодаря теореме Планшереля перейдем к фурье-образам. Предварительно вычислим преобразование Фурье от вспомогательного интеграла

$$\Omega_{\varphi, \psi}(x, t) = \iint_{R_2} dy dz \varphi(y, t) \varphi(z, t) \psi^*(y + z - x, t) E_2(x, y, z, t).$$

Сделав замену переменной x на $\xi = x - y - z$, получим

$$\begin{aligned} \widehat{\Omega}_{\varphi, \psi}(p, t) &= \int_{R_1} dx e^{-ipx} \iint_{R_2} dy dz \varphi(y, t) \varphi(z, t) \psi^*(y + z - x, t) \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{i(2x - y - z)^2}{8t}\right) \\ &= \iiint_{R_3} dy dz d\xi e^{-ip(y+z+\xi)} \\ &\quad \times \varphi(y, t) \varphi(z, t) \psi^*(-\xi, t) \exp\left(-\frac{i(2\xi + y + z)^2}{8t}\right), \end{aligned}$$

откуда с помощью тождества $1 = \sqrt{\frac{2it}{\pi}} \int_{R_1} dq e^{2itq^2}$ найдем

$$\begin{aligned}
\widehat{\Omega}_{\varphi, \psi}(p, t) &= \sqrt{\frac{2it}{\pi}} \iiint_{R_4} dy dz d\xi dq \varphi(y, t) \varphi(z, t) \psi^*(-\xi, t) \\
&\quad \times \exp\left(-ip(y+z+\xi) - \frac{i(y+z+2\xi)^2}{8t} + 2it\left(q - \frac{(y+z+2\xi)}{4t}\right)^2\right) \\
&= \sqrt{\frac{2it}{\pi}} \iiint_{R_4} dq dy dz d\xi e^{2itq^2} \varphi(y, t) e^{-iy(p+q)} \varphi(z, t) e^{-iz(p+q)} \\
&\quad \times \psi^*(-\xi, t) e^{-i\xi(p+2q)} = \sqrt{\frac{2it}{\pi}} \int_{R_1} dq e^{2itq^2} \\
&\quad \times \widehat{\varphi}^2(p+q, t) \widehat{\psi}^*(p+2q, t). \tag{4.40}
\end{aligned}$$

Поэтому, взяв в (4.40) $\varphi = v = B_{w,w}$, $\psi = B_{w,u}$ либо $\varphi = w$, $\psi = u$, найдем

$$\begin{aligned}
I_6 &= c \left\| \int_1^t d\tau b(\tau) \sqrt{\tau} \int_{R_1} dq e^{2i\tau q^2} \widehat{u}^*(p+2q, \tau) (\widehat{v}^2(p+q, \tau) \widehat{B}_w^*(p+2q, \tau) \right. \\
&\quad \times \widehat{B}_w^*(p, \tau) - \widehat{w}^2(p+q, \tau)) \Big\|_{\mathcal{L}_2} \\
&= c \left\| \int_1^t d\tau b(\tau) \sqrt{\tau} \int_{R_1} dq e^{2i\tau q^2} \widehat{w}^2(p+q, \tau) \widehat{u}^*(p+2q, \tau) Q(p, q, \tau) \right\|_{\mathcal{L}_2},
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
Q(p, q, t) &= \widehat{B}_w^*(p, t) \widehat{B}_w^2(p+q, t) \widehat{B}_w^*(p+2q, t) - 1 \\
&= \exp\left(\int_1^t d\tau b(\tau) (2|\widehat{w}(p+q, \tau)|^2 - |\widehat{w}(p, \tau)|^2 - |\widehat{w}(p+2q, \tau)|^2)\right) - 1,
\end{aligned}$$

так как $b^*(\tau) = -b(\tau)$. Теперь с помощью тождества

$$e^{2i\tau q^2} = \frac{\sqrt{\tau}}{D(q, \tau)} \frac{\partial}{\partial \tau} (\sqrt{\tau} e^{2i\tau q^2}),$$

где $D(q, \tau) = \frac{1}{2} + 2i\tau q^2$, проинтегрируем по τ по частям в интеграле I_6 :

$$\begin{aligned}
I_6 &= c \left\| \int_1^t d\tau b(\tau) \tau \int_{R_1} dq \frac{1}{D(q, \tau)} \frac{\partial}{\partial \tau} (\sqrt{\tau} e^{2i\tau q^2}) \widehat{w}^2(p+q, \tau) \right. \\
&\quad \times \widehat{u}^*(p+2q, \tau) Q(p, q, \tau) \Big\|_{\mathcal{L}_2} = c \left\| \int_{R_1} dq b(t) t^{3/2} Q(p, q, t) \frac{e^{2itq^2}}{D(q, t)} \right. \\
&\quad \times \widehat{w}^2(p+q, t) \widehat{u}^*(p+2q, t) - \int_1^t d\tau \sqrt{\tau} \int_{R_1} dq e^{2i\tau q^2} \\
&\quad \times \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{b(\tau) \tau Q(p, q, \tau)}{D(q, \tau)} \widehat{w}^2(p+q, \tau) \widehat{u}^*(p+2q, \tau) \right) \Big\|_{\mathcal{L}_2}. \tag{4.41}
\end{aligned}$$

Здесь мы учли, что $Q(p, q, 1) = 0$ для всех $p, q \in R_1$. Оценим величину $Q(p, q, t)$. При всех $p, q \in R_1$, $t \geq 1$ имеем $|Q(p, q, t)| \leq 2$. Кроме того, при $|q| \leq 1$ найдем

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial Q}{\partial t}(p, q, t) \right| &\leq \frac{c}{t} |2|\widehat{w}(p+q, t)|^2 - |\widehat{w}(p, t)|^2 - |\widehat{w}(p+2q, t)|^2| \\ &\leq \frac{c}{t} \int_0^q \left| \frac{\partial}{\partial p} |\widehat{w}(p+q+r, t)|^2 + \frac{\partial}{\partial p} |\widehat{w}(p+q-r, t)|^2 \right| dr \\ &\leq \frac{c\sqrt{|q|}}{t} \left\| \frac{\partial}{\partial p} |\widehat{w}|^2 \right\|_{\mathcal{L}_2} \leq c\sqrt{|q|} t^{\gamma-1} \sup_{t \geq 1} t^{-\gamma} \|w\|_1 \|w\|_{\mathcal{L}_1} \\ &\leq \frac{c\varepsilon^3 \sqrt{|q|}}{t^{1-\gamma}}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Проинтегрировав (4.42) по t , найдем

$$|Q(p, q, t)| \leq c\varepsilon^2 \sqrt{|q|} \int_1^t d\tau \tau^{\gamma-1} \leq c\varepsilon^2 \sqrt{|q|} t^\gamma. \quad (4.43)$$

Из условия леммы следует, что для некоторой величины $c > 0$

$$\left| \frac{d^l tb(t)}{dt^l} \right| \leq c t^{-l}, \quad l = 0, 1. \quad (4.44)$$

Далее, ввиду равенства

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{D(q, t)} \right) = \frac{1}{tD(q, t)} \left(\frac{1}{2D(q, t)} - 1 \right)$$

с помощью оценок $|D(q, t)| \geq 1/2$ и $|D(q, t)| \geq 2tq^2$ получим

$$\left| \frac{\partial^l}{\partial t^l} \left(\frac{1}{D(q, t)} \right) \right| \leq c t^{\gamma-l-3/4} |q|^{2\gamma-3/2} (1+|q|)^{-1/2}. \quad (4.45)$$

Собирая вместе оценки (4.42)–(4.45), находим

$$\left| \frac{\partial^l}{\partial t^l} \left(tb(t) \frac{Q(p, q, t)}{D(q, t)} \right) \right| \leq c\varepsilon^2 t^{2\gamma-l-3/4} |q|^{2\gamma-1} (1+|q|)^{-1/2}. \quad (4.46)$$

Подстановка (4.46) в (4.41) дает

$$\begin{aligned} I_6 &\leq c\varepsilon^2 \left\| \int_{R_1} dq t^{2\gamma-1/4} \frac{|q|^{2\gamma-1}}{\sqrt{1+|q|}} |\widehat{w}(p+q, t)|^2 |\widehat{u}(p+2q, t)| \right\|_{\mathcal{L}_2} \\ &\quad + c\varepsilon^2 \int_1^t d\tau \tau^{2\gamma-5/4} \left\| \int_{R_1} dq |q|^{2\gamma-1} (1+|q|)^{-1/2} \right. \\ &\quad \times |\widehat{w}(p+q, \tau)|^2 |\widehat{u}(p+2q, \tau)| \left. \right\|_{\mathcal{L}_2} \\ &\quad + c\varepsilon^2 \int_1^t d\tau \tau^{2\gamma-1/4} \left\| \int_{R_1} dq |q|^{2\gamma-1} (1+|q|)^{-1/2} \left(|\widehat{w}'_\tau(p+q, \tau)| \right. \right. \\ &\quad \times |\widehat{w}(p+q, \tau) \widehat{u}^*(p+2q, \tau)| + |\widehat{w}(p+q, \tau)|^2 |\widehat{u}'_\tau(p+2q, \tau)| \left. \right) \left. \right\|_{\mathcal{L}_2} \\ &\leq c\varepsilon^5 + c\varepsilon^2 \int_1^t d\tau \cdot \tau^{6\gamma-5/4} \int_{R_1} \frac{dq |q|^{2\gamma-1}}{\sqrt{1+|q|}} (\|w\|_{\mathcal{L}_1}^2 \|u\|_{\mathcal{L}_2} \tau^{-\gamma} \\ &\quad + \|\tau w'_\tau\|_{\mathcal{L}_1} \|w\|_{\mathcal{L}_1} \|u\|_{\mathcal{L}_2} \tau^{-\gamma} + \|w\|_{\mathcal{L}_1}^2 \|u'_\tau\|_{\mathcal{L}_2} \tau^{1-4\gamma}) \leq c\varepsilon^5, \end{aligned} \quad (4.47)$$

поскольку из (4.4) следует, что

$$\begin{aligned} \sup_{\tau \geq 1} \tau^{1-4\gamma} \|u'_\tau\|_{\mathcal{L}_2} &\leq \sup_{\tau \geq 1} \tau^{1-4\gamma} |w'_\tau|_1 + c\varepsilon^2 \sup_{\tau \geq 1} (\|w\|_{\mathcal{L}_1} + \tau \|w'_\tau\|_{\mathcal{L}_1}) \\ &\leq c\varepsilon(1 + \varepsilon^2) \leq c\varepsilon. \end{aligned}$$

Как мы отмечали выше, интеграл I_4 имеет ту же оценку, что и I_3 . Таким образом, собирая вместе оценки (4.29), (4.33), (4.39) и (4.47) и подставляя их в (4.28), получаем (4.26). Итак, из (4.24)–(4.26) получаем (4.11). Остается доказать (4.12). Имеем

$$\int_1^t d\tau (\Lambda_w - \Lambda_\varphi) = \int_1^t d\tau b(\tau) (B_{w,f}^{-1} - B_{\varphi,g}^{-1}), \quad (4.48)$$

где

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \iint_{R_2} dy dz v(y, t) v(z, t) v^*(y + z - x, t) E(x, y, z, t), \\ v(x, t) &= B_{w,w}(x, t), \\ g(x, t) &= \iint_{R_2} dy dz \psi(y, t) \psi(z, t) \psi^*(y + z - x, t) E(x, y, z, t), \\ \psi(x, t) &= B_{\varphi,\varphi}(x, t). \end{aligned}$$

Оценка (4.5) леммы 1 при $\nu = 4\gamma$ дает для любых $w, \varphi \in Y_\varepsilon$

$$\sup_{t \geq 1} t^{-5\gamma} e^{-t} |B_{w,f}^{-1} - B_{\varphi,g}^{-1}|_1 \leq c \sup_{t \geq 1} e^{-t} (t^{-4\gamma} |f - g|_1 + \varepsilon^2 |\varphi - w|_1), \quad (4.49)$$

поскольку в силу (4.18) $\sup_{t \geq 1} t^{-3\gamma} |f|_1 \leq \varepsilon$ и $\sup_{t \geq 1} t^{-3\gamma} |g|_1 \leq \varepsilon$. Далее, из (4.15) и (4.5) с $\nu = \gamma$ найдем

$$\begin{aligned} |f - g|_1 &\leq c \left\| \iint_{R_2} dy dz |v(y, t) v(z, t) v^*(y + z - x, t) \right. \\ &\quad \left. - \psi(y, t) \psi(z, t) \psi^*(y + z - x, t) \right| \left(1 + |x| + \frac{|x|}{t} + \frac{|x - y - z|}{t} \right) \Big\|_{\mathcal{L}_2} \\ &\quad + \left\| \iint_{R_2} dy dz |v(y, t) v(z, t) v_x^*(y + z - x, t) \right. \\ &\quad \left. - \psi(y, t) \psi(z, t) \psi_y^*(y + z - x, t) \right\|_{\mathcal{L}_2} \leq c (\|v\|_{H^{0,1}}^2 + \|\psi\|_{H^{0,1}}^2) |v - \psi|_1 \\ &\leq c t^{4\gamma} e^t \sup_{t \geq 1} t^{-2\gamma} (|v|_1^2 + |\psi|_1^2) e^{-t} t^{-2\gamma} |v - \psi|_1 \\ &\leq c \varepsilon^2 t^{4\gamma} e^t \sup_{t \geq 1} e^{-t} |w - \varphi|_1. \end{aligned}$$

Поэтому из (4.49) получаем

$$\sup_{t \geq 1} e^{-t} t^{-5\gamma} |B_{w,f}^{-1} - B_{\varphi,g}^{-1}|_1 \leq c \varepsilon^2 \sup_{t \geq 1} e^{-t} |w - \varphi|_1,$$

так что

$$\begin{aligned} \sup_{t \geq 1} e^{-t} \int_1^t |\Lambda_w - \Lambda_\varphi|_1 d\tau &\leq c \varepsilon^2 \left(\sup_{t \geq 1} e^{-t} |w - \varphi|_1 \right) \sup_{t \geq 1} e^{-t} \int_1^t \frac{e^\tau d\tau}{\tau^{1-5\gamma}} \\ &\leq c \varepsilon^2 \sup_{t \geq 1} e^{-t} |w - \varphi|_1. \end{aligned}$$

Таким образом, оценка (4.12), а вместе с ней и лемма 2 доказаны.

§ 5. Леммы для теоремы 3

Обозначим

$$Z^M = \{\varphi(x) \in H^{\infty, \infty}(R_1) : |\varphi|_n \leq M_n \quad \forall n \geq 0\},$$

где

$$|\varphi|_n = |\varphi|_{n,0} + |\varphi|_{0,n}, \quad |\varphi|_{n,k} = \|\varphi\|_{\mathcal{L}_2} + \left\| x^k \frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n} \right\|_{\mathcal{L}_2},$$

$$M_n = \varepsilon \theta^n (n+1)^{\sigma n} \quad \forall n \geq 0; \quad \sigma > 1, \quad \theta > 1, \quad \varepsilon \in (0, 1).$$

Для того чтобы оценить начальное условие при доказательстве теоремы 3, нам потребуется оценить в классе Жеврея Z^M следующий интеграл:

$$v(x) = G_\varphi^{-1}(x, 1) = \frac{1}{\sqrt{-4\pi i}} \int_{R_1} \varphi(y) \exp\left(-\frac{i}{4}(x-y)^2\right) dy.$$

ЛЕММА 3. Пусть $\varphi(x) \in Z^m$. Тогда:

1) для всех натуральных n справедливо неравенство

$$\alpha_n \equiv \sup_{0 \leq k \leq n} (|\varphi|_{n-k,k} + |\varphi|_{k,n-k}) \leq 4eM_n; \quad (5.1)$$

2) функция $v(x)$ принадлежит $Z^{\tilde{m}}$, где $\tilde{M}_n = 4e\varepsilon(8\theta)^n(n+1)^{\sigma n} \quad \forall n \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $n = 1$ неравенство (5.1) элементарно следует из определения пространства Z^M . Рассуждая по индукции, при $n \geq 2$, $0 \leq k \leq [\frac{n}{2}]$, проинтегрировав k раз по x по частям, найдем

$$\begin{aligned} & (|\varphi|_{k,n-k} + |\varphi|_{n-k,k})^2 \\ & \leq 12\|\varphi\|_{\mathcal{L}_2}^2 + 3 \int_{R_1} dx \left(x^{2n-2k} \left(\frac{d^k \varphi(x)}{dx^k} \right)^2 + x^{2k} \left(\frac{d^{n-k} \varphi(x)}{dx^{n-k}} \right)^2 \right) \\ & \leq 3\varepsilon^2 + 3(-1)^k \int_{R_1} dx \sum_{j=0}^k c_k^j \left(\varphi(x) \frac{d^{2k-j} \varphi(x)}{dx^{2k-j}} \frac{d^j x^{2n-2k}}{dx^j} \right. \\ & \quad \left. + \frac{d^{n-2k} \varphi(x)}{dx^{n-2k}} \frac{d^{n-j} \varphi(x)}{dx^{n-j}} \frac{d^j x^{2k}}{dx^j} \right) \\ & \leq 3\varepsilon^2 + 3 \sum_{j=0}^k c_k^j (2n)^j (|\varphi|_{0,n-j} |\varphi|_{2k-j,n-2k} + |\varphi|_{n-j,0} |\varphi|_{n-2k,2k-j}) \\ & \leq 3 \left(M_n \alpha_n + 4e \sum_{j=1}^k \frac{(2kn)^j}{j!} M_{n-j}^2 \right) + 3\varepsilon^2 \\ & \leq 3\varepsilon^2 + 3M_n \left(\alpha_n + 4eM_n \sum_{j=1}^k \frac{1}{j!} \left(\frac{2kn}{\theta^2(n+1)^{2\sigma}} \right)^j \right) \\ & \leq 3\varepsilon^2 + 3M_n \left(\alpha_n + 4eM_n \sum_{j=1}^k \frac{1}{j!} \right) \leq 2eM_n(\alpha_n + 4eM_n). \end{aligned}$$

Отсюда, взяв максимум по всем k от 0 до n , найдем

$$\alpha_n \leq \sqrt{2eM_n(\alpha_n + 4eM_n)},$$

откуда $\alpha_n \leq 4eM_n$. Таким образом, неравенство (5.1) установлено для всех целых $n \geq 1$.

Чтобы доказать второе утверждение леммы, определим для всех $l \geq 0$ функции

$$\widehat{\psi}_l(p) = e^{-ip^2} \frac{\partial^l}{\partial p^l} (e^{ip^2} \widehat{\varphi}(p)).$$

Легко получить следующее рекуррентное соотношение:

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}_0(p) &= \widehat{\psi}(p), \\ \widehat{\psi}_l(p) &= e^{-ip^2} \frac{\partial}{\partial p} (e^{ip^2} \widehat{\psi}_{l-1}(p)) = 2ip\widehat{\psi}_{l-1}(p) + \widehat{\psi}'_{l-1}(p), \quad l \geq 1, \end{aligned}$$

откуда, возвращаясь к прообразу Фурье $\psi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{R_1} e^{ipx} \widehat{\psi}(p) dp$, найдем

$$\psi_l(x) = 2\psi'_{l-1}(x) - ix\psi_{l-1}(x). \quad (5.2)$$

Докажем при всех целых $l, k, n \geq 0$ следующую оценку:

$$|\psi_l|_{k,n} \leq 4e7^l M_{l+k+n}. \quad (5.3)$$

При $l = 0$ оценки (5.3) получаются из условия леммы и неравенства (5.1). При всех $l \geq 1$, $n, k \geq 0$, продифференцировав рекуррентное соотношение (5.2) k раз по x и умножив результат на x^n , получим

$$\begin{aligned} |\psi_l|_{k,n} &\leq 2|\psi_{l-1}|_{k+1,n} + |\psi_{l-1}|_{k,n+1} + k|\psi_{l-1}|_{k-1,n} + 2|\psi_{l-1}|_{1,0} + |\psi_{l-1}|_{0,1} \\ &\leq 4e7^{l-1} (3M_{l+k+n} + 3M_l + kM_{l+k+n-1}) \leq 4e7^l M_{l+k+n}, \end{aligned}$$

так как при всех $k, n \geq 0$, $l \geq 1$ верно неравенство $kM_{l+k+n-1} \leq M_{l+k+n}$. Таким образом, оценка (5.3) установлена. Взяв в (5.3) $k = n = 0$, найдем при всех $l \geq 0$ с помощью теоремы Планшереля

$$\begin{aligned} |v|_l &= \frac{1}{2\pi} (\|\widehat{v}^{(l)}(p)\|_{\mathcal{L}_2} + \|p^l \widehat{v}(p)\|_{\mathcal{L}_2} + 2\|\widehat{v}\|_{\mathcal{L}_2}) \\ &= \frac{1}{2\pi} (\|e^{ip^2} \widehat{\psi}_l(p)\|_{\mathcal{L}_2} + \|p^l e^{ip^2} \widehat{\varphi}(p)\|_{\mathcal{L}_2} + 2\|\varphi\|_{\mathcal{L}_2}) \\ &= |\psi_l|_{0,0} + |\varphi|_{l,0} \leq M_l(1 + 4e7^l) \leq \widetilde{M}_l, \end{aligned}$$

так что $v \in Z^{\widetilde{M}}$, $\widetilde{M}_l = 4e(8\theta)^l(l+1)^{\sigma l}$. Лемма 3 доказана.

В следующей лемме мы оценим введенный в §3 оператор

$$\begin{aligned} B_{\varphi,\psi}(x,t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{R_1} e^{ipx} \widehat{\psi}(p,t) \widehat{B}_{\varphi}(p,t) dp, \\ \widehat{B}_{\varphi}(p,t) &= \exp\left(\int_1^t b(\tau) |\widehat{\varphi}(p,\tau)|^2 d\tau\right) \end{aligned}$$

в пространстве Жеврея Z^M . Обозначим $L_n(t) = t^{\beta(n-2)} M_n$ при всех $n \geq 2$, $L_n = M_n$ при $n = 0, 1$, $\beta \in (0, \frac{1}{16})$, и через $\omega_n(t) > 0$ – некоторую неубывающую последовательность (ниже в лемме 5 мы выбираем $\omega_n = c\varepsilon^2(n+1)t^{-5\beta}$ либо $\omega_n = 1$).

ЛЕММА 4. Пусть $\sup_{t \geq 1} t^{1-\beta} b(t) < \infty$, $\beta \in (0, \frac{1}{16})$, $b^*(t) = -b(t)$. Тогда:

1) для любых функций $\varphi, \psi \in C^0([1, \infty); H^{\infty, \infty}(R_1))$ таких, что для всех $n \geq 0$ и $t \geq 1$

$$|\varphi|_n \leq L_n, \quad |\psi|_n \leq t^{\beta n} \omega_n M_n, \quad (5.4)$$

причем величина $\varepsilon > 0$ в определении последовательности M_n достаточно мала, выполнено неравенство при всех $n \geq 0$ и $t \geq 1$

$$|B_{\varphi, \psi}|_n \leq c \omega_n t^{\beta n} M_n; \quad (5.5)$$

2) для любых функций $\varphi, \psi, f, g \in C^0([1, \infty); H^{0,1}(R_1) \cap H^{1,0}(R_1))$ таких, что $|\varphi|_1 \leq \varkappa$, $|\psi|_1 \leq \varkappa$, $|f|_1 \leq \varkappa t^\nu$, $|g|_1 \leq \varkappa t^\nu$, при некотором $\nu \in [0, 3\beta]$ и $\varkappa > 0$ справедлива оценка

$$\sup_{t \geq 1} t^{-\beta-\nu} e^{-t} |B_{\varphi, f} - B_{\psi, g}|_1 \leq c(1 + \varkappa^2) \sup_{t \geq 1} e^{-t} (t^{-\nu} |f - g|_1 + \varkappa^2 |\varphi - \psi|_1), \quad (5.6)$$

где $c > 0$ – некоторая постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С помощью (4.2) находим $x^l B_{\varphi, \psi} = B_{\varphi, u_l}$, и для u_l получим рекуррентное соотношение

$$u_0 = \psi, \quad u_l(x, t) = x u_{l-1}(x, t) + F_{\varphi, u_{l-1}}(x, t), \quad l \geq 1.$$

Таким образом, перейдя к преобразованию Фурье, получим при всех $l \geq 1$

$$\hat{u}_l(p, t) = i \frac{\partial}{\partial p} \hat{u}_{l-1}(p, t) + \hat{F}_\varphi(p, t) \hat{u}_{l-1}(p, t), \quad (5.7)$$

где

$$\hat{F}_\varphi(p, t) = \int_1^t b(\tau) i \frac{\partial}{\partial p} |\hat{\varphi}(p, \tau)|^2 d\tau.$$

С помощью (5.4) оценим $\hat{F}_\varphi(p, t)$. Имеем по теореме вложения Соболева

$$\left\| \frac{\partial}{\partial p} |\hat{\varphi}(p, t)|^2 \right\|_{\mathcal{L}_2} \leq \left\| \frac{\partial \hat{\varphi}(p, t)}{\partial p} \right\|_{\mathcal{L}_2} \|\hat{\varphi}(p, t)\|_{\mathcal{L}_\infty} \leq c |\varphi|_1^2 \leq c \varepsilon^2,$$

и при всех $m \geq 2$ и $t \geq 1$ получаем

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^m}{\partial p^m} |\hat{\varphi}(p, t)|^2 \right\|_{\mathcal{L}_2} &\leq \sum_{j=0}^m c_m^j \left\| \frac{\partial^j \hat{\varphi}(p, t)}{\partial p^j} \frac{\partial^{m-j} \hat{\varphi}^*(p, t)}{\partial p^{m-j}} \right\|_{\mathcal{L}_2} \\ &\leq c |\varphi|_1 |\varphi|_m + c \sum_{j=1}^{[m/2]} c_m^j (|\varphi|_j + |\varphi|_{j+1}) |\varphi|_{m-j} \\ &\leq c \varepsilon L_m + c \sum_{j=1}^{[m/2]} c_m^j L_{j+1} L_{m-j} \\ &\leq c \varepsilon L_m + c t^{\beta(m-2)} \sum_{j=1}^{[m/2]} c_m^j M_{j+1} M_{m-j} \leq c \varepsilon L_m(t). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Здесь и ниже через $c > 0$ обозначены различные постоянные, не зависящие от номера m . В оценке (5.8) мы воспользовались неравенством

$$\sum_{j=1}^{[m/2]} c_m^j M_{j+1} M_{m-j} \leq c \varepsilon M_m \quad \forall m \geq 2. \quad (5.9)$$

Действительно, оценивая биномиальный коэффициент $c_m^j = \frac{m!}{j!(m-j)!}$ по формуле Стирлинга, найдем $c_m^j \leq \frac{(1+m)^m}{j^j (m-j+1)^{m-j}}$ при всех натуральных m и j таких, что $j < m$. Поэтому, учитывая также оценку $\left(\frac{j+2}{j}\right)^{\sigma(j+1)} \leq 3^{2\sigma}$, справедливую при всех $j \geq 1$, обозначив $\rho = \sigma - 1 > 0$, получим

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{[m/2]} c_m^j M_{j+1} M_{m-j} \\ & \leq \varepsilon^2 \theta^{m+1} \sum_{j=1}^{[m/2]} \frac{(m+1)^m}{j^j (1+m-j)^{m-j}} (j+2)^{\sigma(j+1)} (m-j+1)^{\sigma(m-j)} \\ & \leq c \varepsilon M_m \sum_{j=1}^{[m/2]} j^{\sigma+\rho j} (1+m-j)^{\rho(m-j)} (m+1)^{-\rho m} \\ & \leq c \varepsilon M_m \sum_{j=1}^{[m/2]} j^{\sigma} 2^{-\rho j} \leq c \varepsilon M_m. \end{aligned}$$

Благодаря (5.8) имеем для всех натуральных $n \geq 1$

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^n \widehat{F}_\varphi(p, t)}{\partial p^n} \right\|_{\mathcal{L}_2} & \leq c \int_1^t d\tau \tau^{\beta-1} \left\| \frac{\partial^{n+1}}{\partial p^{n+1}} |\widehat{\varphi}(p, \tau)|^2 \right\|_{\mathcal{L}_2} \\ & \leq c \varepsilon \int_1^t \tau^{\beta-1} L_{n+1}(\tau) d\tau \leq c \varepsilon M_{n+1} \int_1^t \tau^{\beta n-1} d\tau \\ & \leq \frac{c \varepsilon t^{\beta n}}{n} M_{n+1}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

А при $n = 0$, если $|\varphi|_1 \leq \varkappa$, $\varkappa > 0$, имеем

$$\|\widehat{F}_\varphi\|_{\mathcal{L}_2} \leq c \varkappa^2 t^\beta. \quad (5.11)$$

Докажем теперь для всех $t \geq 1$, $n \geq 0$, $l \geq 0$ следующую оценку:

$$\left\| \frac{\partial^n \widehat{u}_l}{\partial p^n} \right\|_{\mathcal{L}_2} \leq \omega_m M_m t^{\beta m} \sum_{j=1}^{l+1} j^{-\sigma}, \quad (5.12)$$

где $m = n + l$. (Отметим, что сумма в правой части неравенства (5.12) ограничена равномерно по $l \geq 0$, так что в некоторых случаях при использовании неравенства (5.12) мы будем сумму заменять константой.) При $l = 0$ из (5.1) сразу

следует (5.12). Предположим теперь по индукции, что оценка (5.12) справедлива для номера $l-1$, и оценим $\hat{u}_l$ из рекуррентного соотношения (5.7). Отдельно рассмотрим случай $n=0$. С помощью теоремы вложения Соболева из (5.10) и (5.11) найдем

$$\begin{aligned} \|\hat{u}_l\|_{\mathcal{L}_2} &\leq \left\| \frac{\partial^n \hat{u}_{l-1}}{\partial p} \right\|_{\mathcal{L}_2} + \|\hat{F}_\varphi \hat{u}_{l-1}\|_{\mathcal{L}_2} \\ &\leq \omega_l t^{\beta l} M_l \sum_{j=1}^l j^{-\sigma} + c \|\hat{F}_\varphi\|_{H^{1,0}} \|u_{l-1}\|_{\mathcal{L}_2} \\ &\leq \omega_l M_l t^{\beta l} \left(\sum_{j=1}^l j^{-\sigma} + c\varepsilon \frac{M_{l-1}}{M_l} \right) \leq \omega_l t^{\beta l} M_l \sum_{j=1}^{l+1} j^{-\sigma}, \end{aligned} \quad (5.13)$$

так как $M_{l-1} \leq \frac{cM_l}{(l+1)^\sigma}$ при всех $l \geq 1$. Далее, при всех натуральных l и n теоремы вложения Соболева получим

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^n \hat{u}_l}{\partial p^n} \right\|_{\mathcal{L}_2} &\leq \left\| \frac{\partial^{n+1} \hat{u}_{l-1}}{\partial p^{n+1}} \right\|_{\mathcal{L}_2} + \|\hat{u}_{l-1}\|_{\mathcal{L}_\infty} \left\| \frac{\partial^n \hat{F}_\varphi}{\partial p^n} \right\|_{\mathcal{L}_2} \\ &\quad + \sum_{j=0}^{n-1} c_n^j \left\| \frac{\partial^j \hat{F}_\varphi}{\partial p^j} \right\|_{\mathcal{L}_\infty} \left\| \frac{\partial^{n-j} \hat{u}_{l-1}}{\partial p^{n-j}} \right\|_{\mathcal{L}_2} \\ &\leq \omega_m t^{\beta m} M_m \sum_{j=1}^l j^{-\sigma} + c\varepsilon \omega_l M_l M_{n+1} t^{\beta m} \\ &\quad + c\varepsilon t^{\beta m} \sum_{j=0}^{n-1} c_n^j M_{j+2} M_{m-1-j} \omega_{m-1-j} \\ &\leq \omega_m t^{\beta m} M_m \left(\sum_{j=1}^l j^{-\sigma} + \frac{M_{n+1} M_l}{M_m} + \sum_{j=0}^{n-1} c_n^j \frac{M_{j+2} M_{m-j-1}}{M_m} \right). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Докажем теперь следующие два неравенства для всех натуральных l и n :

$$M_{n+1} M_l \leq c\varepsilon (l+1)^{-\sigma} M_m, \quad (5.15)$$

$$J \equiv \sum_{j=0}^{n-1} c_n^j M_{j+2} M_{m-1-j} \leq c\varepsilon M_m (l+1)^{-\sigma}, \quad (5.16)$$

где $m = n+l$, c – некоторые положительные постоянные, не зависящие от номеров l и n . Действительно, при $n \geq l \geq 1$ имеем

$$\frac{(n+2)^{\sigma(n+1)} (l+1)^{\sigma(l+1)}}{(m+1)^{\sigma m}} \leq \frac{(l+1)^{\sigma(l+1)}}{(m+1)^{\sigma(l-1)}} \leq (l+1)^{2\sigma} \left(\frac{2}{3} \right)^{\sigma(l-1)} \leq c,$$

а если $l > n \geq 1$, то

$$\frac{(n+2)^{\sigma(n+1)}(l+1)^{\sigma(l+1)}}{(m+1)^{\sigma m}} \leq \frac{(n+2)^{\sigma(n+1)}}{(m+1)^{\sigma(n-1)}} \leq (n+2)^{2\sigma} \left(\frac{3}{4}\right)^{\sigma n} \leq c,$$

таким образом, при всех натуральных l и n получаем

$$M_{n+1}M_l \leq \varepsilon^2 \theta^{m+1} (n+2)^{\sigma(n+1)} (l+1)^{\sigma l} \leq \frac{c \varepsilon M_m}{(l+1)^\sigma}$$

и оценка (5.15) оправдана.

Докажем теперь (5.16). Представим сумму J в виде

$$J = \sum_{j=0}^{[m/2]} + \sum_{j=[\frac{m}{2}]+1}^{n-1} = J_1 + J_2. \quad (5.17)$$

Сумма J_1 оценивается аналогично (5.9). В силу неравенства $c_n^j \leq c_m^j$ и оценки $M_{m-j-1} \leq (m-j+1)^{-\sigma} M_{m-j} \leq c(l+1)^{-\sigma} M_{m-j}$ при $j \leq m/2$, $m = n+l \geq l$, найдем

$$\begin{aligned} J_1 &\leq \sum_{j=0}^{[m/2]} c_m^j M_{j+2} M_{m-j-1} \leq c(l+1)^{-\sigma} \sum_{j=0}^{[m/2]} c_m^j M_{j+2} M_{m-j} \\ &\leq c \varepsilon^2 \theta^{m+2} (l+1)^{-\sigma} \left((m+1)^{\sigma m} + \sum_{j=1}^{[m/2]} \frac{(1+m)^m}{j^j (m-j+1)^{m-j}} \right. \\ &\quad \left. \times (j+3)^{\sigma(j+2)} (m-j+1)^{\sigma(m-j)} \right) \\ &\leq c \varepsilon (l+1)^{-\sigma} M_m \left(1 + \sum_{j=1}^{[m/2]} \frac{j^{2\sigma+\rho j} (m+1-j)^{\rho(m-j)}}{(1+m)^{\rho m}} \right) \\ &\leq c \varepsilon (l+1)^{-\sigma} M_m \left(1 + \sum_{j=1}^{[m/2]} j^{2\sigma} 2^{-\rho j} \right) \leq c \varepsilon (l+1)^{-\sigma} M_m. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Во второй сумме J_2 сделаем замену индекса суммирования $j = m-2-k$. Тогда $c_n^{m-k-2} = c_n^{k+2-l} \leq c_{m-2}^k \leq c_m^k$, и аналогично (5.18) получаем

$$\begin{aligned} J_2 &= \sum_{k=l-1}^{m-3-[m/2]} c_n^{m-k-2} M_{m-k} M_{k+1} \leq c \sum_{k=l-1}^{m-3-[m/2]} c_m^k M_{m-k} M_{k+2} (k+3)^{-\sigma} \\ &\leq c(l+1)^{-\sigma} \sum_{j=0}^{[m/2]} c_m^j M_{j+2} M_{m-j} \leq c \varepsilon (l+1)^{-\sigma} M_m. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Подстановка (5.18) и (5.19) в (5.17) дает (5.16). А из (5.14)–(5.16) следует (5.12). Оценка (5.12) нужна нам для того, чтобы оценить оператор $B_{\varphi,\psi}$. Ввиду (4.1) из (5.12) с $n = 0$ найдем

$$\begin{aligned} |B_{\varphi,\psi}|_l &= 2\|B_{\varphi,\psi}\|_{\mathcal{L}_2} + \left\| \frac{\partial^l}{\partial x^l} B_{\varphi,\psi} \right\|_{\mathcal{L}_2} + \|x^l B_{\varphi,\psi}\|_{\mathcal{L}_2} \\ &= 2\|\psi\|_{\mathcal{L}_2} + \left\| B_{\varphi, \frac{\partial^l \psi}{\partial x^l}} \right\|_{\mathcal{L}_2} + \|B_{\varphi, u_l}\|_{\mathcal{L}_2} \\ &= 2\|\psi\|_{\mathcal{L}_2} + \left\| \frac{\partial^l \psi}{\partial x^l} \right\|_{\mathcal{L}_2} + \|u_l\|_{\mathcal{L}_2} \leq c\omega_l t^{\beta l} M_l. \end{aligned}$$

Итак, оценка (5.5) доказана. Установим (5.6). Разность $B_{\varphi,f} - B_{\psi,g}$ оценим, как в лемме 1. Найдем

$$B_{\varphi,f} - B_{\psi,g} = B_{\varphi,f-g} + (B_{\varphi,g} - B_{\psi,g}). \quad (5.20)$$

Первое слагаемое в правой части (5.20) ввиду (4.1), (4.2), (5.11) по теореме Планшереля оценим так:

$$\begin{aligned} |B_{\varphi,f-g}|_1 &\leq |f-g|_1 + \frac{1}{2\pi} \|\widehat{F}_\varphi(\hat{f} - \hat{g})\|_{\mathcal{L}_2} \\ &\leq c|f-g|_1(1 + \|\widehat{F}_\varphi\|_{\mathcal{L}_2}) \leq c(1 + \varkappa^2)|f-g|_1. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Для второго слагаемого по теореме Планшереля получим, обозначив $u = xg + F_{\varphi,g}$ и $v = xg + F_{\psi,g}$,

$$\begin{aligned} |B_{\varphi,g} - B_{\psi,g}|_1 &= 2\|B_{\varphi,g} - B_{\psi,g}\|_{\mathcal{L}_2} + \left\| \frac{\partial}{\partial x} (B_{\varphi,g} - B_{\psi,g}) \right\|_{\mathcal{L}_2} + \|B_{\varphi,u} - B_{\psi,v}\|_{\mathcal{L}_2} \\ &\leq c\|\hat{g}(\widehat{B}_\varphi - \widehat{B}_\psi)\|_{H^{0,1}} + c\|\hat{g}'_p(\widehat{B}_\varphi - \widehat{B}_\psi)\|_{\mathcal{L}_2} \\ &\quad + c\|\hat{g}(\widehat{F}_\varphi \widehat{B}_\varphi - \widehat{F}_\psi \widehat{B}_\psi)\|_{\mathcal{L}_2} \\ &\leq c(|g|_1 + \|\widehat{F}_\varphi \hat{g}\|_{\mathcal{L}_2})\|\widehat{B}_\varphi - \widehat{B}_\psi\|_{\mathcal{L}_\infty} + c\|\hat{g}\|\|\widehat{F}_\varphi - \widehat{F}_\psi\|_{\mathcal{L}_2} \\ &\leq c\varkappa^2(1 + \varkappa^2)t^{\nu+\beta}e^t \sup_{t \geq 1} e^{-t}|\varphi - \psi|_1, \end{aligned} \quad (5.22)$$

ПОСКОЛЬКУ

$$\begin{aligned} \|\widehat{B}_\varphi - \widehat{B}_\psi\|_{\mathcal{L}_\infty} &= \left\| \exp \left(\int_1^t d\tau b(\tau) (|\widehat{\varphi}(p, \tau)|^2 - |\widehat{\psi}(p, \tau)|^2) \right) - 1 \right\|_{\mathcal{L}_2} \\ &\leq c \int_1^t \tau^{\beta-1} \|\widehat{\varphi} - \widehat{\psi}\|_{\mathcal{L}_\infty} \|\widehat{\varphi} + \widehat{\psi}\|_{\mathcal{L}_\infty} d\tau \\ &\leq c\varkappa \sup_{t \geq 1} (e^{-t}|\varphi - \psi|_1) \int_1^t d\tau e^\tau \tau^{\beta-1} \leq c\varkappa e^t \sup_{t \geq 1} e^{-t}|\varphi - \psi|_1, \end{aligned}$$

а также

$$\begin{aligned}
\| |\hat{g}| |\hat{F}_\varphi - \hat{F}_\psi| \|_{\mathcal{L}_2} &= \left\| |\hat{g}| \left| \int_1^t b(\tau) i \frac{\partial}{\partial p} (|\hat{\varphi}(p, \tau)|^2 - |\hat{\psi}(p, \tau)|^2) d\tau \right| \right\|_{\mathcal{L}_2} \\
&\leq c \|\hat{g}\|_{\mathcal{L}_\infty} \int_1^t \tau^{\beta-1} \|\varphi - \psi\|_{H^{0,1}} \|\varphi + \psi\|_{H^{0,1}} d\tau \\
&\leq c \varkappa |g|_1 \int_1^t e^\tau \tau^{\beta-1} d\tau \sup_{t \geq 1} e^{-t} |\varphi - \psi|_1 \\
&\leq c \varkappa^2 t^\nu e^t \sup_{t \geq 1} e^{-t} |\varphi - \psi|_1.
\end{aligned}$$

Из (5.20)–(5.22) вытекает (5.6). Лемма 4 доказана.

Оценим теперь оператор $\Lambda_w(x, t) = b(t) B_{w,f}^{-1}(x, t)$ в пространстве Жеврея Z^M . Здесь, как и выше,

$$\begin{aligned}
f(x, t) &= \iint_{R_2} dy dz v(y, t) v(z, t) v^*(y + z - x, t) E(x, y, z, t), \\
v(x, t) &= B_{w,w}(x, t), \quad E(x, y, z, t) = \exp\left(-\frac{i}{4t}(x^2 - y^2 - z^2 + (x - y - z)^2)\right) - 1, \\
L_n(t) &= M_n t^{\beta(n-2)} \quad \forall n \geq 2; \quad L_n = M_n, \quad n = 0, 1; \\
M_n &= \varepsilon \theta^n (n+1)^{\sigma n} \quad \forall n \geq 0; \\
\varepsilon &\in (0, 1), \quad \theta > 1, \quad \beta \in \left(0, \frac{1}{16}\right), \quad \sigma \in \left(1, \frac{1-2\beta}{14\beta}\right).
\end{aligned}$$

ЛЕММА 5. Пусть $b^*(t) = -b(t)$, $\sup_{t \geq 1} b(t) t^{1-\beta} < \infty$, $\beta \in (0, \frac{1}{16})$. Тогда:
1) для любой функции $w \in C^0([1, \infty); H^{\infty, \infty}(R_1))$ такой, что $\forall n \geq 0$

$$|w|_n \leq L_n, \quad (5.23)$$

где величина $\varepsilon > 0$ достаточно мала, справедлива оценка при всех $n \geq 0$

$$|\Lambda_w|_n \leq c \varepsilon^2 (n+1) t^{\beta(n-4)-1} M_n, \quad (5.24)$$

где $c > 0$ – некоторая не зависящая от n постоянная;

2) для любых функций $\varphi, w \in C^0([1, \infty); H^{1,0}(R_1) \cap H^{0,1}(R_1))$ таких, что $|\varphi|_1 \leq c\varepsilon$, $|w|_1 \leq \varepsilon c$, $\varepsilon > 0$ мало, выполнено неравенство

$$\sup_{t \geq 1} e^{-t} \int_1^t |\Lambda_\varphi - \Lambda_w|_1 d\tau \leq \frac{1}{2} \sup_{t \geq 1} e^{-t} |\varphi - w|_1. \quad (5.25)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Так как $\Lambda_w(x, 1) = 0$ при всех $x \in R_1$, то из (5.24) следует, что для всех $n \geq 0$

$$\left| \int_1^t \Lambda_w d\tau \right|_n \leq c \varepsilon^2 L_n. \quad (5.26)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С помощью оценки (5.5) с $\omega_n = 1$ получаем $\forall n \geq 0, t \geq 1$

$$|v|_n = |B_{w,w}|_n \leq cM_n t^{\beta n}. \quad (5.27)$$

Чтобы проще было оценить производные функции $f(x, t)$, сделаем замену переменных $y = x - \eta$, $z = x - \xi$; тогда

$$f(x, t) = \iint_{R_2} d\eta d\xi v(x - \eta, t) v(x - \xi, t) v^*(x - \eta - \xi, t) \tilde{E}(\eta, \xi, t),$$

где

$$\tilde{E}(\eta, \xi, t) = \exp\left(-\frac{i\eta\xi}{2t}\right) - 1.$$

Тогда, пользуясь формулой Лейбница, тождеством

$$x^n = \sum_{j=0}^n \sum_{l=0}^j c_n^j c_j^l (x - \eta)^l (x - \xi)^{j-l} (\eta + \xi - x)^{n-j}$$

и оценкой

$$|\tilde{E}(\eta, \xi, t)| \leq c t^{-\nu/2} (|x - \eta|^\nu + |x - \xi|^\nu + |x - \xi - \eta|^\nu),$$

при $\nu = 1/\sigma$ получим

$$\begin{aligned} |f|_n &= 2\|f\|_{\mathcal{L}_2} + \left\| \frac{\partial^n f}{\partial x^n} \right\|_{\mathcal{L}_2} + \|x^n f\|_{\mathcal{L}_2} \\ &\leq 2\|f\|_{\mathcal{L}_2} + \sum_{j=0}^n \sum_{l=0}^j c_n^j c_j^l \left(\left\| \iint_{R_2} d\eta d\xi \tilde{E}(\eta, \xi, t) \frac{\partial^l v(x - \eta, t)}{\partial x^l} \right. \right. \\ &\quad \times \frac{\partial^{j-l} v(x - \xi, t)}{\partial x^{j-l}} \frac{\partial^{n-j}}{\partial x^{n-j}} v^*(x - \xi - \eta, t) \left. \left\|_{\mathcal{L}_2} \right. \right. \\ &\quad + \left\| \iint_{R_2} d\eta d\xi \tilde{E}(\eta, \xi, t) (x - \eta)^l v(x - \eta, t) (x - \xi)^{j-l} \right. \\ &\quad \times v(x - \xi, t) (\eta + \xi - x)^{n-j} v^*(x - \eta - \xi, t) \left. \left\|_{\mathcal{L}_2} \right. \right) \\ &\leq 2\|f\|_{\mathcal{L}_2} \\ &\quad + c t^{-\frac{1}{2\sigma}} \sum_{j=0}^{[n/2]} \sum_{l=0}^{[j/2]} c_n^j c_j^l \left(\left\| \iint_{R_2} d\eta d\xi (|x - \eta|^\nu + |x - \xi|^\nu + |x - \xi - \eta|^\nu) \right. \right. \\ &\quad \times \left\| \frac{\partial^l v(x - \xi, t)}{\partial x^l} \right\| \left\| \frac{\partial^{j-l} v(x - \eta, t)}{\partial x^{j-l}} \right\| \left\| \frac{\partial^{n-j} v(x - \xi - \eta, t)}{\partial x^{n-j}} \right\| \left. \left\|_{\mathcal{L}_2} \right. \right. \\ &\quad + \left\| \iint_{R_2} d\eta d\xi (|x - \eta|^\nu + |x - \xi|^\nu + |x - \xi - \eta|^\nu) |x - \eta|^l |x - \xi|^{j-l} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times |x - \xi - \eta|^{n-j} |v(x - \eta, t)| |v(x - \xi, t)| |v(x - \xi - \eta, t)| \Big\|_{\mathcal{L}_2} \Big) \\
& \leq 2 \|f\|_{\mathcal{L}_2} + c t^{-\frac{1}{2\sigma}} \sum_{j=0}^{[n/2]} \sum_{l=0}^{[j/2]} c_n^j c_j^l \left(\left\| |x|^{l+\nu} v \right\|_{\mathcal{L}_1} \left\| |x|^{j-l} v \right\|_{\mathcal{L}_1} \left\| |x|^{n-j} v \right\|_{\mathcal{L}_2} \right. \\
& \quad + \left\| |x|^l v \right\|_{\mathcal{L}_1} \left\| |x|^{j-l+\nu} v \right\|_{\mathcal{L}_1} \left\| |x|^{n-j} v \right\|_{\mathcal{L}_2} \\
& \quad + \left\| |x|^l v \right\|_{\mathcal{L}_1} \left\| |x|^{j-l} v \right\|_{\mathcal{L}_1} \left\| |x|^{n-j+\nu} v \right\|_{\mathcal{L}_2} \\
& \quad + \left\| |x|^\nu \frac{\partial^l v}{\partial x^l} \right\|_{\mathcal{L}_1} \left\| \frac{\partial^{j-l} v}{\partial x^{j-l}} \right\|_{\mathcal{L}_1} \left\| \frac{\partial^{n-j} v}{\partial x^{n-j}} \right\|_{\mathcal{L}_2} \\
& \quad + \left\| \frac{\partial^l v}{\partial x^l} \right\|_{\mathcal{L}_1} \left\| |x|^\nu \frac{\partial^{j-l} v}{\partial x^{j-l}} \right\|_{\mathcal{L}_1} \left\| \frac{\partial^{n-j} v}{\partial x^{n-j}} \right\|_{\mathcal{L}_2} \\
& \quad \left. + \left\| \frac{\partial^l v}{\partial x^l} \right\|_{\mathcal{L}_1} \left\| \frac{\partial^{j-l} v}{\partial x^{j-l}} \right\|_{\mathcal{L}_1} \left\| |x|^\nu \frac{\partial^{n-j} v}{\partial x^{n-j}} \right\|_{\mathcal{L}_2} \right). \tag{5.28}
\end{aligned}$$

Из (5.1) и (5.27) при всех $n \geq 0$, $0 \leq k \leq n$ получаем $|v|_{k,n-k} \leq c t^{\beta n} M_n$ ($c > 0$ – некоторая постоянная, не зависящая от n), поэтому при $\mu \in [0, 1]$ найдем при всех $k, l \geq 0$, $m = k + l$,

$$\left\| |x|^{\mu+k} \frac{\partial^l v}{\partial x^l} \right\|_{\mathcal{L}_2} \leq |v|_{l,k}^{1-\mu} |v|_{l,k+1}^\mu \leq c \varepsilon \theta^{m+\mu} t^{\beta(m+\mu)} (m+1)^{\sigma(\mu+m)}, \tag{5.29}$$

и ввиду (2.5) найдем также при $\mu \in [0, 1]$ и при всех $k, l \geq 0$, $m = l + k$,

$$\begin{aligned}
\left\| |x|^{\mu+k} \frac{\partial^l v}{\partial x^l} \right\|_{\mathcal{L}_1} & \leq c \left\| |x|^{\mu+k} \frac{\partial^l v}{\partial x^l} \right\|_{\mathcal{L}_2} + c \left\| |x|^{\mu+k+1} \frac{\partial^l v}{\partial x^l} \right\|_{\mathcal{L}_2} \\
& \leq c M_{m+1} t^{\beta(m+1+\mu)} (m+1)^{\sigma\mu}. \tag{5.30}
\end{aligned}$$

С помощью (5.29), (5.30) и (5.9) из (5.28) имеем

$$\begin{aligned}
|f|_n & \leq c t^{-\frac{1}{2\sigma}} \sum_{j=0}^{[n/2]} \sum_{l=0}^{[j/2]} c_n^j c_j^l \left(M_{l+1} t^{\beta(l+1+\nu)} (l+1) M_{j-l+1} t^{\beta(j-l+1)} M_{n-j} t^{\beta(n-j)} \right. \\
& \quad + M_{l+1} t^{\beta(l+1)} M_{j-l+1} t^{\beta(j-l+1+\nu)} (j-l+1) M_{n-j} t^{\beta(n-j)} \\
& \quad \left. + M_{l+1} t^{\beta(l+1)} M_{j-l+1} t^{\beta(j-l+1)} M_{n-j} (n+1-j) t^{\beta(n-j+\nu)} \right) \\
& \leq c(n+1) t^{\beta n + 2\beta + \frac{\beta}{\sigma} - \frac{1}{2\sigma}} \sum_{j=0}^{[n/2]} c_n^j \sum_{l=0}^{[j/2]} c_j^l M_{l+1} M_{j-l+1} M_{n-j} \\
& \leq c t^{\beta(n-5)} (n+1) \varepsilon \sum_{j=0}^{[n/2]} c_n^j M_{j+1} M_{n-j} \leq c \varepsilon^2 (n+1) t^{\beta(n-5)} M_n, \tag{5.31}
\end{aligned}$$

так как $\beta \left(2 + \frac{1}{\sigma} \right) - \frac{1}{2\sigma} < -5\beta$, поскольку по условию леммы $\beta \in \left(0, \frac{1}{16} \right)$ и $\sigma \in \left(1, \frac{1-2\beta}{14\beta} \right)$.

Из (5.23) и (5.31) мы видим, что выполнено условие (5.4) леммы 4 с $\omega_n = c\varepsilon^2(n+1)t^{-5\beta}$, поэтому справедлив результат (5.5):

$$|B_{w,f}^{-1}|_n \leq c\omega_n M_n t^{\beta n},$$

откуда легко получаем оценку (5.24):

$$|\Lambda_w|_n \leq c t^{\beta-1} |B_{w,f}^{-1}|_n \leq c\varepsilon^2(n+1)t^{\beta(n-4)-1} M_n.$$

Остается установить (5.25). Как и в лемме 3, запишем неравенство (4.48). Поскольку $|w|_1 \leq c\varepsilon$ и $|\varphi|_1 \leq c\varepsilon$, то в силу (5.11)

$$\begin{aligned} |f|_1 &= \left| \iint_{R_2} dy dz v(y,t)v(z,t)v^*(y+z-x,t)E(x,y,z,t) \right|_1 \\ &\leq c \left\| \iint_{R_2} dy dz |v(y,t)v(z,t)| \left(|v(y+z-x,t)| \left(1 + |x| + \frac{|x|}{t} + \frac{|x-y-z|}{t} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left| \frac{\partial v(y+z-x,t)}{\partial x} \right| \right) \right\|_{\mathcal{L}_2} \leq c \|v\|_{\mathcal{L}_1}^2 |v|_1 \leq c |v|_1^3 = c |B_{w,w}|_1^3 \leq c t^{3\beta} \varepsilon^3. \end{aligned}$$

Аналогично получаем $|g|_1 \leq c\varepsilon^3 t^{3\beta}$. Так что, применив оценку (5.6) леммы 4 с $\nu = 3\beta$, запишем

$$\sup_{t \geq 1} t^{-4\beta} e^{-t} |B_{w,f}^{-1} - B_{\varphi,g}^{-1}|_1 \leq c \sup_{t \geq 1} e^{-t} (\varepsilon |\varphi - w|_1 + t^{-3\beta} |f - g|_1). \quad (5.32)$$

Далее, так как из (5.6) с $\nu = 0$ следует неравенство

$$\sup_{t \geq 1} e^{-t} t^{-\beta} |v - \psi|_1 = \sup_{t \geq 1} e^{-t} t^{-\beta} |B_{\varphi,\varphi} - B_{w,w}|_1 \leq c \sup_{t \geq 1} e^{-t} |\varphi - w|_1,$$

то

$$\begin{aligned} |f - g|_1 &= \left| \iint_{R_2} dy dz E(x,y,z,t) (v(y,t)v(z,t)v^*(y+z-x,t) \right. \\ &\quad \left. - \psi(y,t)\psi(z,t)\psi^*(y+z-x,t)) \right|_1 \leq c (|v|_1^2 + |\psi|_1^2) |v - \psi|_1 \\ &\leq c \varepsilon^2 e^t t^{3\beta} \sup_{t \geq 1} e^{-t} |\varphi - w|_1. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Подстановка (5.33) в (5.32) и затем в (4.48) дает

$$\left| \int_1^t (\Lambda_w - \Lambda_\varphi) d\tau \right|_1 \leq c \varepsilon \sup_{t \geq 1} e^{-t} |\varphi - w|_1 \int_1^t \frac{e^\tau d\tau}{\tau^{1-5\beta}} \leq \frac{1}{2} e^t \sup_{t \geq 1} e^{-t} |\varphi - w|_1,$$

отсюда следует (5.25). Лемма 5 доказана.

Список литературы

1. *Cazenave T.* An introduction to nonlinear Schrodinger equations // *Textos de Metodos Matematicos*. 1989. V. 22.
2. *Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П.* Теория солитонов. Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.
3. *Абдоуиц М., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987.
4. *Новожионов В. Ю.* Асимптотика при $t \rightarrow \infty$ решения задачи Коши для нелинейного уравнения Шрёдингера // *ДАН СССР*. 1980. Т. 251. № 4. С. 799–801.
5. *Итс А. Р.* Асимптотика решений нелинейного уравнения Шрёдингера и изомонодромные деформации систем линейных дифференциальных уравнений // *ДАН СССР*. 1981. Т. 261. № 1. С. 14–18.
6. *Захаров В. Е., Манаков С. В.* Асимптотическое поведение нелинейных волновых систем, интегрируемых методом обратной задачи // *ЖЭТФ*. 1976. Т. 71. С. 203–215.
7. *Манаков С. В.* Нелинейная дифракция Фраунгофера // *ЖЭТФ*. 1973. Т. 65. № 10. С. 1392–1398.
8. *Segur H., Ablowitz M. J.* Asymptotic solutions and conservation laws for the nonlinear Schrodinger equation. I, II // *J. Math. Phys.* 1976. V. 17. P. 710–713; 714–716.
9. *Barab J. E.* Nonexistence of asymptotically free solutions for a nonlinear Schrodinger equation // *J. Math. Phys.* 1984. V. 25. P. 3270–3273.
10. *Cazenave T.* Equations de Schrodinger non lineaires en dimension deux // *Proc. R. Soc. Edinb.* 1979. V. 84. P. 327–346.
11. *Cazenave T., Dias J. P., Figueira M.* A remark on the decay of the solutions of some Schrodinger equations // *Rend. Sem. Math. Univ. Polit. Torino*. 1982. V. 40. P. 129–137.
12. *Cazenave T., Weissler F. B.* Rapidly decaying solutions of the nonlinear Schrodinger equations // *Comm. Math. Phys.* 1992. V. 147. P. 75–100.
13. *Dias J. P., Figueira M.* Conservation laws and time decay for the solutions to some nonlinear Schrodinger–Hartree equations // *J. Math. Anal. Appl.* 1981. V. 84. P. 486–508.
14. *Ginibre J., Velo G.* Time decay of finite energy solutions for the nonlinear Klein–Gordon and Schrodinger equations // *Ann. Inst. Henri. Poincare. Phys. Theor.* 1985. V. 43. P. 399–442.
15. *Ginibre J., Velo G.* Scattering Theory in the energy space for a class of nonlinear Schrodinger equations // *J. Math. Pures Appl.* 1985. V. 64. P. 363–401.
16. *Glassey R.* Asymptotic behaviour of solutions to certain nonlinear Schrodinger–Hartree equations // *Comm. Math. Phys.* 1977. V. 53. P. 9–18.
17. *Hayashi N.* Asymptotic behavior of solutions to time dependent Hartree equations // *J. Nonlinear Anal.*
18. *Hayashi N., Ozawa T.* Time decay for some Schrodinger equations // *J. Funct. Anal.* 1989. V. 85. P. 307–348; *Math. Z.* 1989. V. 200. P. 467–483.
19. *Hayashi N., Ozawa T.* Time decay of solutions of the Cauchy problem for time dependent Schrodinger–Hartree equations // *Comm. Math. Phys.* 1987. V. 110. P. 467–478.
20. *Hayashi N., Ozawa T.* Scattering theory in the weighted $L_2(R_n)$ spaces for some Schrodinger equations // *Ann. Inst. Henri Poincare. Phys. Theor.* 1988. V. 48. P. 17–37.
21. *Hayashi N., Tsutsumi Y.* $L_\infty(R_n)$ decay of classical solutions for nonlinear Schrodinger equations // *Proc. R. Soc. Edinb. A.* 1986. V. 104. P. 309–327.
22. *Hayashi N., Tsutsumi Y.* Scattering theory for Hartree type equations // *Ann. Inst. Henri Poincare. Phys. Theor.* 1987. V. 46. P. 187–213.
23. *Lin J. E., Strauss W. A.* Decay and scattering of solutions of a nonlinear Schrodinger equation // *J. Funct. Anal.* 1978. V. 30. P. 245–263.
24. *Hayashi N., Tsutsumi Y.* Remarks on the scattering problem for non-linear Schrodinger equations // *Lectures notes in Mathematics*. 1984. V. 1285. P. 162–168.
25. *Lin Yue.* Asymptotic behavior of solutions of Schrodinger equations // *Chinese Ann. Math. Ser. A.* 1991. V. 12. № 1. P. 19–25.

26. *Наумкин П. И.* Асимптотика при больших временах решений нелинейного уравнения Шрёдингера в $2 + 1$ измерениях // Изв. РАН. Сер. матем. 1993. Т. 57. № 5. С. 197–209.
27. *Siqueire E. S. R.* Asymptotic behavior of the solutions of a nonlinear system of Schrodinger equations // Nonlinear Anal. 1993. V. 20. № 10. P. 1231–1243.
28. *Strauss W. A.* Dispersion of low-energy waves for two conservative equations // Arch. Rat. Mech. Anal. 1974. V. 55. № 1. P. 110–113.
29. *Strauss W. A.* Nonlinear scattering theory // Scattering theory in Mathematical Physics / Eds. Lavita J., Marchand J. P. Reidel, 1974.
30. *Strauss W. A.* Nonlinear scattering theory at low energy // J. Funct. Anal. 1981. V. 43. P. 101–133; J. Funct. Anal. 1981. V. 43. P. 281–293.
31. *Schonbek M. E.* Decay of solutions of Schrodinger equations // Duke Math. J. 1979. V. 46. P. 203–213.
32. *Tsutsumi Y.* Global existence and asymptotic behaviour of solutions for the Maxwell–Schrodinger equations in three space dimensions // Comm. Math. Phys. 1993. V. 151. № 3. P. 543–576.
33. *Tsutsumi Y.* Scattering problem for nonlinear Schrodinger equations // Ann. Inst. Henry Poincare. Phys. Theor. 1985. V. 43. P. 321–347.
34. *Tsutsumi Y., Yajima K.* The asymptotic behavior of nonlinear Schrodinger equations // Bull. AMS. 1984. V. 11. P. 186–188.
35. *Weinstein W. I.* Nonlinear Schrodinger equations and sharp interpolations estimates // Comm. Math. Phys. 1983. V. 87. P. 567–576.
36. *Yao Jing Qi.* Time decay of solutions to a nonlinear Schrodinger equation in an exterior domain in R_2 // Nonlinear Anal. 1992. V. 19. № 6. P. 563–571.
37. *Ozawa T.* Long range scattering for nonlinear Schrodinger equation in one space dimension // Comm. Math. Phys. 1991. V. 139. P. 479–493.
38. *Hayashi N., Ozawa T.* Modified wave operators for the derivative nonlinear Schrodinger equation // Math. Ann. 1994. V. 298. P. 557–576.