Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Павлов, О некоторых классах степенных рядов, аналитически непродолжимых за свой круг сходимости, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1997, том 61, выпуск 4, 119–136

DOI: <https://doi.org/10.4213/im138>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 05:42:05

УДК 517.53+511.33

А. И. Павлов

О некоторых классах степенных рядов, аналитически непродолжимых за свой круг сходимости

В теоретико-числовых терминах определяется класс $\{M\}$ множеств натуральных чисел, обладающих следующими свойствами:

1) асимптотическая плотность γ множества M удовлетворяет неравенству $0 < \gamma < 1$;

2) если $G(z)$ – целая функция с неотрицательными тейлоровскими коэффициентами, растущая не слишком быстро на бесконечности, то степенной ряд $\sum_{m \in M} G(m)z^m$, имеющий радиус сходимости 1, не может быть аналитически продолжен в область $|z| > 1$ через любую дугу на окружности $|z| = 1$.

Библиография: 12 наименований.

Введение

Пусть ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ имеет радиус сходимости 1. Говорят, что функция $f(z)$, представляемая этим рядом в круге $|z| < 1$, аналитически не продолжается за круг $|z| < 1$, если функция $f(z)$ не может быть аналитически продолжена в область $|z| > 1$ через любую дугу на окружности $|z| = 1$. Часто при этом говорят, что функция $f(z)$ имеет окружность $|z| = 1$ своей естественной границей (аналитичности).

Известно довольно много признаков, сформулированных в терминах коэффициентов a_n и достаточных для того, чтобы ряд $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ имел окружность $|z| = 1$ своей границей аналитичности. Не претендуя на полноту освещения истории вопроса, приведем некоторые из этих признаков.

1. В 1896 г. Фабри доказал теорему о лакунах. Пусть $\{n_k\}$ – возрастающая последовательность натуральных чисел плотности нуль, т.е. $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{n_k} = 0$, коэффициенты a_n ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ удовлетворяют условию $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} = 1$, $a_n = 0$ при $n \notin \{n_k\}$. Тогда функция $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ имеет окружность $|z| = 1$ своей границей аналитичности.

2. С 1921 г. хорошо известна классическая теорема Карлсона–Пойя: степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ с целыми коэффициентами a_n , сходящийся при $|z| < 1$, либо представляет рациональную функцию, либо имеет окружность $|z| = 1$ своей естественной границей.

3. В 1922 г. Сегё получил следующий результат: если коэффициенты степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ принимают лишь конечное число различных значений, то либо этот ряд представляет рациональную функцию, либо он аналитически не может быть продолжен за пределы круга $|z| < 1$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 94-01-00002).

Результаты пп. 1–3 детально обсуждаются в монографиях [1] и [5].

4. В 1922 г. Гекке [6] доказал, что если α – действительное иррациональное число, то степенные ряды $f_\alpha(z) = \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha n] z^n$ и $\psi_\alpha(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \{\alpha n\} z^n$ имеют окружность $|z| = 1$ границей аналитичности. Здесь и далее $\{x\}$ и $[x]$ – соответственно дробная и целая части числа x .

Приведенное в этом пункте утверждение является следствием равенства $\overline{\lim}_{r \rightarrow 1} |\psi_\alpha(re^{2\pi i \alpha k})| = \infty$, где целое k не равно 0. Такой способ доказательства невозможности аналитического продолжения за пределы круга $|z| < 1$ будет в дальнейшем называться *методом Гекке*.

Теорема Гекке в дальнейшем была обобщена в двух направлениях. В 1965 г. Морделл [7] методом Гекке доказал теорему: если $\varphi(x)$ – интегрируемая по Риману на отрезке $[0, 1]$ функция, для которой при всех целых k , за исключением, быть может, конечного числа, выполняется условие

$$\int_0^1 \varphi(x) e^{2\pi i k x} dx \neq 0,$$

и α – иррациональное число, то степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(\{\alpha n\}) z^n$ не может быть аналитически продолжен за пределы круга $|z| < 1$. В том же 1965 г. и тоже методом Гекке американские математики Кэрролл и Кемперман [8] доказали, что если

$$G(z) = \sum_{k=1}^N c_k (\ln z)^{\rho_k} z^{\sigma_k} e^{d_k z^{\tau_k}},$$

где ρ_k, σ_k, d_k и τ_k – действительные числа, $\tau_k < 1$, под $\ln z$ и z^{τ_k} подразумеваются те ветви соответствующих функций, которые вещественны при $z > 0$, то для иррационального α ряд $\sum_{n=1}^{\infty} G([\alpha n]) z^n$ имеет окружность $|z| = 1$ своей естественной границей.

В 1945 г. Салем [9] получил следующий результат. Пусть $\Phi(n)$ – положительная функция, стремящаяся к бесконечности вместе с n , и пусть ряд $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(n) z^n$ представляет рациональную функцию, а радиус сходимости ряда равен r , причем $0 < r \leq 1$. Пусть, далее, точка $z = r$ является для функции $f(z)$ полюсом порядка k . Обозначим $g(z) = (z - r)^k f(z)$, где $g(z)$ аналитична в точке $z = r$ и $g(r) \neq 0$. Допустим, что ξ – действительное число и не выполнено хотя бы одно из следующих условий:

- 1) $1/r$ является целым алгебраическим числом над полем рациональных чисел $\mathcal{K}$;
- 2) число $\xi g(r)$ является алгебраическим и принадлежит полю $\mathcal{K}(r)$.

Тогда для рядов $\sum_{n=1}^{\infty} [\xi \Phi(n)] z^n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \{\xi \Phi(n)\} z^n$ окружность $|z| = 1$ является естественной границей.

Из этой теоремы вытекает, в частности, невозможность аналитического продолжения в область $|z| > 1$ следующих рядов:

- a) $\sum_{n=1}^{\infty} \{\alpha q^n\} z^n$, где $q \geq 2$ целое, α иррационально;
- b) $\sum_{n=1}^{\infty} \{3^{1/2} 2^{n/2}\} z^n$;
- c) $\sum_{n=1}^{\infty} \{\lambda^n\} z^n$, где трансцендентное λ больше 1;
- d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{a}{q} \right)^n \right\} z^n$, где a целое, $a > q \geq 2$, и числа a и q взаимно просты.

5. Существует гипотеза, сформулированная автором в 1965 г.: если последовательность a_n , $n = 1, 2, 3, \dots$, чисел из отрезка $[0, 1]$ равномерно распределена на этом отрезке, то степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, сходящийся в круге $|z| < 1$, не может быть аналитически продолжен в область $|z| > 1$. В направлении доказательства этой гипотезы Вализер [10] в 1970 г. получил следующий результат. Пусть последовательность чисел a_n , $n = 1, 2, 3, \dots$, такова, что для любого целого $k \geq 1$ последовательность векторов $\bar{x}_n = (a_n, a_{n+k})$ равномерно распределена в квадрате $E = \{\bar{x} = (x_1, x_2) : 0 < x_1, x_2 < 1\}$. Тогда если функция $\varphi(x)$ интегрируема по Риману на отрезке $[0, 1]$, не сводится к постоянной и $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(a_n) z^n$, то функция $f(z)$, являясь аналитической в круге $|z| < 1$, не может быть аналитически продолжена в область $|z| > 1$.

6. В работе [11] рассматриваются ряды вида $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n) z^n$, где $\varphi(x)$ – мультипликативная функция натурального аргумента, т.е. если m и n – взаимно простые натуральные числа, то $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$. В указанной работе строится класс V мультипликативных функций такой, что если $\varphi \in V$, то ряд $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n) z^n$ сходится в круге $|z| < 1$, и окружность $|z| = 1$ является границей аналитичности функции $f(z)$.

Здесь будут указаны новые классы степенных рядов, которые не могут быть аналитически продолжены за границу своего круга аналитичности.

§ 1. Основные результаты работы

Пусть Ψ – множество функций ψ , удовлетворяющих следующим условиям:

1) ψ определена на множестве $\mathbb{N}$ всех натуральных чисел; при любых m_1 и m_2 таких, что $(m_1, m_2) = 1$, выполняется равенство $\psi(m_1 m_2) = \psi(m_1)\psi(m_2)$; $\psi(1) = 1$;

2) ψ принимает только значения $-1, 0, 1$;

3) при некотором целом $k \geq 2$ функция $\chi(m) = \sum_{d^k | m} \psi(d)$ принимает только значения 0 и 1;

4) существует бесконечная последовательность $\Lambda = \{p_i\}$ простых чисел такая, что $\psi(p_i) \neq 0$.

Пусть, далее, $M = M(\psi, k)$ – множество тех $m \geq 1$, для которых $\chi(m) = 1$. Можно показать, что асимптотическая плотность множества M равна

$$\gamma = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\psi(d)}{d^k}.$$

Действительно, если $N(x) = \sum_{\substack{m \leq x \\ m \in M}} 1$, то

$$\begin{aligned} N(x) &= \sum_{m \leq x} \chi(m) = \sum_{m \leq x} \sum_{d^k | m} \psi(d) = \sum_{d \leq x^{1/k}} \psi(d) \left[\frac{x}{d^k} \right] \\ &= x \sum_{d \leq x^{1/k}} \frac{\psi(d)}{d^k} + O(x^{1/k}) = \gamma x + O(x^{1/k}). \end{aligned}$$

Значит, из $k \geq 2$ получим $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{N(x)}{x} = 1$. Покажем, что $0 < \gamma < 1$. Действительно, в силу мультипликативности функции $\psi(n)$ получим

$$\begin{aligned} \gamma &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\psi(m)}{m^k} = \prod_p \left(1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\psi(p^\nu)}{p^{\nu k}} \right) \geq \prod_p \left(1 - \sum_{\nu=1}^{\infty} p^{-\nu k} \right) \\ &= \prod_p \left(1 - \frac{p^{-k}}{1 - p^{-k}} \right) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^k - 1} \right) > 0. \end{aligned}$$

С другой стороны, если $S_n(p) = \sum_{\nu=0}^n \psi(p^\nu)$, где p – простое число, то из неравенства $S_n(p) \leq 1$, $n \geq 0$, получим

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\psi(p^\nu)}{p^{\nu k}} &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{S_\nu(p) - S_{\nu-1}(p)}{p^{\nu k}} = -p^{-k} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (p^{-\nu k} - p^{-(\nu+1)k}) S_\nu(p) \\ &= -p^{-k} + (1 - p^{-k}) \sum_{\nu=1}^{\infty} p^{-\nu k} S_\nu(p) \leq -p^{-k} + (1 - p^{-k}) \sum_{\nu=1}^{\infty} p^{-\nu k} = 0. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что из определения множества M следует, что существуют простое p_0 и целое $n_0 > 1$ такие, что $S_{n_0}(p_0) < 1$. Значит,

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\psi(p_0^\nu)}{p_0^{\nu k}} = -p_0^{-k} + (1 - p_0^{-k}) \sum_{\nu=1}^{\infty} p_0^{-\nu k} S_\nu(p_0) < -p_0^{-k} + (1 - p_0^{-k}) \sum_{\nu=1}^{\infty} p_0^{-\nu k} = 0.$$

Поэтому в правой части равенства

$$\gamma = \prod_p \left(1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\psi(p^\nu)}{p^{\nu k}} \right)$$

все множители не более 1 и хотя бы один из них меньше 1. Следовательно, $\gamma < 1$.

Рассмотрим два примера. Пусть $\psi(m) \equiv \mu(m)$ – функция Мёбиуса. Тогда множество M состоит из так называемых k -чисел. При этом натуральное число m называется k -числом, если для любого простого p выполняется условие $p^k \nmid m$.

Пусть $\psi(m) \equiv \lambda(m)$ – функция Лиувилля. Напомним, что $\lambda(m) = (-1)^\tau$, где τ – число простых делителей числа m , считая с кратностью (если $m = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$, то $\tau = \alpha_1 + \dots + \alpha_r$). Соответствующее множество M в этом случае будет состоять из чисел, удовлетворяющих следующему условию:

если $m = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$, где $p_1, \dots, p_r$ – различные простые числа, то числа $[\alpha_1/k], \dots, [\alpha_r/k]$ четные.

Действительно, в силу мультипликативности функции $\chi(m) = \sum_{d^k | m} \lambda(d)$ сформулированное утверждение достаточно доказать лишь в случае $m = p^\alpha$, где p – простое число. Но если $\beta = [\alpha/k]$, то

$$\chi(p^\alpha) = \sum_{d^k | p^\alpha} \lambda(d) = \sum_{0 \leq \nu \leq [\alpha/k]} \lambda(p^\nu) = \sum_{\nu=0}^{\beta} (-1)^\nu = \frac{1 - (-1)^{\beta+1}}{2}.$$

Следовательно, если β – четное число, то $\chi(p^\alpha) = 1$, а если β – нечетное число, то $\chi(p^\alpha) = 0$.

Основными результатами работы являются теоремы 1 и 2. Обе теоремы доказываются методом Гекке.

ТЕОРЕМА 1. Пусть k целое, $k \geq 2$, и $P(z) = \sum_{n=0}^L c_n z^n$, где $c_L \neq 0$. Если $\psi \in \Psi$, $M = M(\psi, k)$ и $f(z) = \sum_{m \in M} P(m) z^m$, то функция $f(z)$ не может быть аналитически продолжена в область $|z| > 1$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть k целое, $k \geq 2$, и $G(z)$ – целая трансцендентная функция, удовлетворяющая условиям:

- 1) тейлоровские коэффициенты функции $G(z)$ неотрицательны;
- 2) функция $G(z)$ имеет порядок $\sigma < 1 - 1/k$ нормального типа, т.е. если $M_1(R) = \max_{|z|=R} |G(z)|$, то

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\ln M_1(R)}{R^\sigma} = A < \infty, \quad \sigma < 1 - \frac{1}{k}.$$

Тогда если $M = M(\psi, k)$, где $\psi \in \Psi$, то степенной ряд $f(z) = \sum_{m \in M} G(m) z^m$ имеет окружность $|z| = 1$ своей границей аналитичности.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если целая трансцендентная функция $G(z)$ имеет неотрицательные тейлоровские коэффициенты и на бесконечности растет не быстрее целой функции порядка $\sigma < 1/2$ нормального типа, то для любого целого $k \geq 2$ и $M = M(\psi, k)$, где $\psi \in \Psi$, степенной ряд $f(z) = \sum_{m \in M} G(m) z^m$ имеет окружность $|z| = 1$ естественной границей.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $G(z)$ – целая трансцендентная функция с неотрицательными тейлоровскими коэффициентами, она имеет порядок $\sigma < 1$ и нормальный тип. Тогда для любого целого $k \geq 1/(1 - \sigma)$ и $M = M(\psi, k)$, где $\psi \in \Psi$, степенной ряд $f(z) = \sum_{m \in M} G(m) z^m$ имеет окружность $|z| = 1$ естественной границей.

§ 2. Леммы

ЛЕММА 1 [2, с. 50]. Если $N \geq 0$ целое и $f_N(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^N z^n$, то

$$f_N(z) = \sum_{m=1}^{N+1} a_{N,m} \left(\frac{z}{1-z} \right)^m,$$

где $a_{N,m}$ – действительные числа, причем $a_{N,N+1} = N!$

ЛЕММА 2. Если Λ – последовательность простых чисел из определения множества $M(\psi, k)$, то существует i_0 такое, что при любом $i > i_0$, $p_i \in \Lambda$, выполняется условие

$$C_k(p_i) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\substack{d=1 \\ p_i | d}}^{\infty} \frac{\psi(d)}{d^k} \neq 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения $C_k(p)$ следует равенство

$$C_k(p_i) = p_i^{-k} (A_1(p_i) + A_2(p_i)),$$

где

$$A_1(p) = \sum_{\substack{d=1 \\ p \nmid d}}^{\infty} \frac{\psi(pd)}{d^k}, \quad A_2(p) = \psi(p) \sum_{\substack{d=1 \\ p \nmid d}}^{\infty} \frac{\psi(d)}{d^k}.$$

Согласно определению класса Ψ , во-первых,

$$|A_1(p)| \leq p^{-k} \sum_{d=1}^{\infty} \frac{|\psi(dp)|}{d^k} \leq \frac{\zeta(k)}{p^k}$$

и, во-вторых,

$$\sum_{\substack{d=1 \\ p_i \nmid d}}^{\infty} \frac{\psi(d)}{d^k} = \prod_{p \neq p_i} \left(1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\psi(p^\nu)}{p^{\nu k}} \right).$$

Если $p_i \in \Lambda$, то $\psi(p_i) \neq 0$. Следовательно,

$$|A_2(p_i)| \geq \prod_{p \neq p_i} \left(1 - \sum_{\nu=1}^{\infty} p^{-\nu k} \right) = \frac{1 - p_i^{-k}}{1 - 2p_i^{-k}} \prod_p \frac{1 - 2p^{-k}}{1 - p^{-k}}.$$

Если $\alpha = \prod_p \frac{1 - 2p^{-k}}{1 - p^{-k}}$, то $0 < \alpha < 1$. Значит, из

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1 - p_i^{-k}}{1 - 2p_i^{-k}} = 1$$

и неравенства

$$|C_k(p_i)| \geq p_i^{-k} (|A_2(p_i)| - |A_1(p_i)|)$$

получим лемму 2, так как $\lim_{i \rightarrow \infty} A_1(p_i) = 0$.

ЛЕММА 3. Пусть $F(z)$ – целая функция и $M(R) = \max_{|z|=R} |F(z)|$. Тогда если $1 \leq \lambda \leq R$, то

$$M\left(\frac{R}{\lambda}\right) \leq CM(R) \exp \left\{ -\frac{\ln M(R)}{\ln R} \ln \lambda \right\},$$

где $C = \max(1, M(1))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $0 < R_1 \leq R_2 \leq R_3$ и $M_\nu = M(R_\nu)$, $\nu = 1, 2, 3$. Тогда по теореме Адамара о трех кругах [3, с. 181] получим неравенство

$$M_2^{\ln \frac{R_3}{R_1}} \leq M_1^{\ln \frac{R_3}{R_2}} M_3^{\ln \frac{R_2}{R_1}}.$$

Значит, если $R_1 = 1$, $R_2 = \frac{R}{\lambda}$ и $R_3 = R$, то

$$M\left(\frac{R}{\lambda}\right) \leq (M(1))^{\ln \lambda / \ln R} (M(R))^{1 - \ln \lambda / \ln R}.$$

Отсюда следует утверждение леммы.

ЛЕММА 4. Пусть F – целая трансцендентная функция, $M(R) = \max_{|z|=R} |F(z)|$, $k \geq 2$ целое, $\alpha > 1$ и $C \geq 1$, причем параметры k , α и C не зависят от R . Если

$$R_1 = R(\ln R)^{-\alpha/k}, \quad R_2 = R^{k-1}(\ln R)^{-\alpha},$$

$$S_k(R) = \sum_{1 \leq d \leq R_1} d^{-k} \sum_{1 \leq m \leq R_2} M \left(R \left(1 + \left(C \frac{mR}{d^k} \right)^2 \right)^{-1/2} \right),$$

то при $R \rightarrow \infty$ выполняется равенство $S_k(R) = o(M(R))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$M_{d,m} = M \left(R \left(1 + \left(C \frac{mR}{d^k} \right)^2 \right)^{-1/2} \right).$$

Тогда

$$S_k(R) = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3,$$

где

$$\Sigma_1 = \sum_{1 \leq d \leq R^{1/k}} d^{-k} \sum_{1 \leq m \leq R_2} M_{d,m}, \quad \Sigma_2 = \sum_{R^{1/k} < d \leq R_1} d^{-k} \sum_{1 \leq m \leq d^k/R} M_{d,m},$$

$$\Sigma_3 = \sum_{R^{1/k} < d \leq R_1} d^{-k} \sum_{d^k/R < m \leq R_2} M_{d,m}.$$

Оценим Σ_1 и Σ_2 . Имеем

$$\Sigma_1 \leq \left(\sum_{1 \leq d \leq R^{1/k}} d^{-k} \right) \left(\sum_{1 \leq m \leq R_2} M(R(1 + (Cm)^2)^{-1/2}) \right)$$

$$\leq \zeta(k) M(R(1 + C^2)^{-1/2}) + \zeta(k) \sum_{2 \leq m \leq R_2} M\left(\frac{R}{m}\right),$$

где $\zeta(k)$ – дзета-функция Римана. Значит, согласно лемме 3 при $R \rightarrow \infty$

$$\Sigma_1 = o(M(R)) + O\left(M(R) \sum_{m \geq 2} m^{-T_0}\right),$$

где $T_0 = T_0(R) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\ln M(R)}{\ln R}$. Известно, что для любой целой трансцендентной функции $F(z)$ выполняется равенство

$$\lim_{R \rightarrow \infty} T_0(R) = \infty.$$

Поэтому

$$\Sigma_1 = o(M(R)), \quad R \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Далее,

$$\begin{aligned}\Sigma_2 &= \sum_{R^{1/k} < d \leq R_1} d^{-k} \sum_{1 \leq m \leq d^k/R} M \left(R \left(1 + \left(C \frac{mR}{d^k} \right)^2 \right)^{-1/2} \right) \\ &\leq M(R) \sum_{d \leq R_1} R^{-1} \leq \frac{R_1}{R} M(R) = O(M(R)(\ln R)^{-\alpha/k}).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\Sigma_2 = o(M(R)), \quad R \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Пусть $k \geq 3$ и

$$\Sigma_3 = \Sigma_4 + \Sigma_5 + \Sigma_6,$$

где

$$\begin{aligned}\Sigma_4 &= \sum_{R^{1/k} < d \leq R_2^{1/k}} d^{-k} \sum_{d^k/R < m \leq d^k} M_{d,m}, \\ \Sigma_5 &= \sum_{R^{1/k} < d \leq R_2^{1/k}} d^{-k} \sum_{d^k < m \leq R_2} M_{d,m}, \\ \Sigma_6 &= \sum_{R_2^{1/k} < d \leq R_1} d^{-k} \sum_{d^k/R < m \leq R_2} M_{d,m}.\end{aligned}$$

Оценим Σ_4 , Σ_5 и Σ_6 . Имеем

$$\Sigma_4 < \sum_{R^{1/k} < d \leq R_2^{1/k}} d^{-k} \sum_{d^k/R < m \leq d^k} M \left(R \left(\frac{mR}{d^k} \right)^{-1} \right).$$

Значит, согласно лемме 3

$$\begin{aligned}\Sigma_4 &= O \left(M(R) \sum_{R^{1/k} < d \leq R_2^{1/k}} d^{-k} \sum_{m \geq d^k/R} \left(\frac{mR}{d^k} \right)^{-T_0} \right) \\ &= O \left(M(R) \sum_{R^{1/k} < d \leq R_2^{1/k}} d^{-k} \left(\frac{d^k}{R} \right)^{T_0} \sum_{m \geq d^k/R} m^{-T_0} \right).\end{aligned}$$

Легко видеть, что равномерно по $L \geq 1$ и $T \geq 2$ выполняется равенство

$$\sum_{m \geq L} m^{-T} = O \left(L^{-T} + \frac{L^{1-T}}{T} \right). \quad (3)$$

Поэтому

$$\Sigma_4 = O \left(M(R) \sum_{R^{1/k} < d \leq R_2^{1/k}} d^{-k} \left(\frac{d^k}{R} \right)^{T_0} \left(\left(\frac{d^k}{R} \right)^{-T_0} + \frac{1}{T_0} \left(\frac{d^k}{R} \right)^{1-T_0} \right) \right).$$

Следовательно, при $R \rightarrow \infty$

$$\Sigma_4 = O\left(M(R)\left(\sum_{d>R^{1/k}} d^{-k} + \frac{1}{T_0} \sum_{d \leq R_2^{1/k}} R^{-1}\right)\right) = o(M(R)). \quad (4)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \Sigma_5 &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{R^{1/k} < d \leq R_2^{1/k}} d^{-k} \sum_{d^k < m \leq R_2} M\left(R\left(1 + \left(C\frac{mR}{d^k}\right)^2\right)^{-1/2}\right) \\ &< \sum_{R^{1/k} < d \leq R_2^{1/k}} d^{-k} \sum_{d^k < m \leq R_2} M(R(1 + (CR)^2)^{-1/2}) \\ &= O\left(R_2 \sum_{d>R^{1/k}} d^{-k}\right) = O(R_2 R^{1/k-1}) = O(R^{k-1}). \end{aligned}$$

Значит, из $\lim_{R \rightarrow \infty} T_0(R) = \infty$ получим

$$\Sigma_5 = o(M(R)), \quad R \rightarrow \infty. \quad (5)$$

В случае $k \geq 3$ осталось оценить Σ_6 . Имеем

$$\begin{aligned} \Sigma_6 &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{R_2^{1/k} < d \leq R_1} d^{-k} \sum_{d^k/R < m \leq R_2} M\left(R\left(1 + \left(C\frac{mR}{d^k}\right)^2\right)^{-1/2}\right) \\ &\leq \sum_{R_2^{1/k} < d \leq R_1} d^{-k} \sum_{n \geq 1} \sum_{\frac{d^k}{R}n < m \leq \frac{d^k}{R}(n+1)} M\left(R\left(1 + \left(C\frac{mR}{d^k}\right)^2\right)^{-1/2}\right) \\ &\leq \sum_{R_2^{1/k} < d \leq R_1} d^{-k} \sum_{n \geq 1} \frac{d^k}{R} M(R(1 + (Cn)^2)^{-1/2}). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\Sigma_6 \leq \frac{R_1}{R} \sum_{n \geq 1} M(R(1 + (Cn)^2)^{-1/2}) = O\left(\left(M(R) + \sum_{n \geq 2} M\left(\frac{R}{n}\right)\right) \ln^{-\alpha} R\right).$$

Следовательно, рассуждая так же, как при оценке Σ_1 , получим

$$\Sigma_6 = o(M(R)), \quad R \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Если $k = 2$, то

$$\begin{aligned} \Sigma_3 &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{R^{1/2} < d \leq R_1} d^{-2} \sum_{d^2/R < m \leq R_2} M\left(R\left(1 + \left(C\frac{mR}{d^2}\right)^2\right)^{-1/2}\right) \\ &\leq \sum_{R^{1/2} < d \leq R_1} d^{-2} \sum_{d^2/R \leq m \leq R_2} M\left(R\left(\frac{mR}{d^2}\right)^{-1}\right). \end{aligned}$$

Снова применяя лемму 3, получим

$$\begin{aligned}\Sigma_3 &= O\left(M(R) \sum_{R^{1/2} < d \leq R_1} d^{-2} \sum_{m \geq d^2/R} \left(\frac{mR}{d^2}\right)^{-T_0}\right) \\ &= O\left(M(R) \sum_{R^{1/2} < d \leq R_1} d^{-2} \left(\frac{d^2}{R}\right)^{T_0} \sum_{m \geq d^2/R} m^{-T_0}\right).\end{aligned}$$

Значит, пользуясь равенством (3), получим

$$\Sigma_3 = O\left(M(R) \left(\sum_{R^{1/2} < d \leq R_1} d^{-2} \left(\frac{d^2}{R}\right)^{T_0} \left(\left(\frac{d^2}{R}\right)^{-T_0} + \frac{1}{T_0} \left(\frac{d^2}{R}\right)^{1-T_0} \right) \right)\right).$$

Следовательно,

$$\Sigma_3 = O\left(M(R) \left(\sum_{d > R^{1/2}} d^{-2} + \frac{1}{T_0} \sum_{d \leq R_1} R^{-1} \right)\right) = o(M(R)). \quad (7)$$

Равенства (1)–(7) доказывают лемму 4.

ЛЕММА 5 [12]. Пусть функции $V(x)$ и $\mu(x)$ определены на интервале $(0, \infty)$, непрерывны, положительны, возрастают и $\int_1^\infty \frac{dx}{\mu(x)} < \infty$. Тогда для любого фиксированного $h > 0$ множество $E_h = \left\{x : V\left(x + \frac{1}{\mu(V(x))}\right) > h + V(x)\right\}$ имеет конечную меру.

ЛЕММА 6. Если $F(z)$ – целая функция, $M(R) = \max_{|z|=R} |F(z)|$ и $\overline{\lim}_{R \rightarrow \infty} R^{-\gamma} \ln M(R) = A < \infty$, где фиксированное γ больше 0, то для любых постоянных $C > 0$ и $\alpha > 1$ существуют R_n такие, что $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \infty$ и

$$M(R_n + CR_n^{1-\gamma} (\ln R_n)^{-\alpha}) < C_0 M(R_n),$$

где $C_0 > 0$ и не зависит от R_n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $V(x) = \ln M(e^x)$ и $\mu(x) = x(\ln x)^\alpha$, то согласно лемме 5 для любых $h > 0$ и $\alpha > 1$ существуют x_n такие, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ и

$$V\left(x_n + \frac{1}{V(x_n)(\ln V(x_n))^\alpha}\right) < h + V(x_n).$$

Следовательно, если $R_n = \exp(x_n)$, то при $n \geq 1$ выполняется неравенство

$$\ln M\left(R_n \exp\left\{\left(\ln M(R_n)(\ln \ln M(R_n))^\alpha\right)^{-1}\right\}\right) < h + \ln M(R_n). \quad (8)$$

Пусть $A_1 = A + \varepsilon$ и $\gamma_1 = (\gamma + \varepsilon)^\alpha$, где $\varepsilon > 0$ – фиксированное число. Тогда при $R > R_0(\varepsilon)$ выполняются неравенства

$$M(R) < \exp\{A_1 R^\gamma\}, \quad \ln M(R) < A_1 R^\gamma.$$

Значит, при $R > R_0$ получим

$$\ln M(R) (\ln \ln M(R))^\alpha < A_2 R^\gamma (\ln R)^\alpha,$$

где $A_2 > \max(C, A_1 \gamma_1)$. Следовательно, при $n > n_0$

$$\begin{aligned} \ln M(R_n + C R_n^{1-\gamma} (\ln R_n)^{-\alpha}) &< \ln M\left(R_n \exp\{C(R_n^\gamma \ln^\alpha R_n)^{-1}\}\right) \\ &< \ln M\left(R_n \exp\{C_1 (\ln M(R_n) (\ln \ln M(R_n))^\alpha)^{-1}\}\right), \end{aligned}$$

где $C_1 = C/A_2 < 1$. Поэтому из (8) получим утверждение леммы 6.

§ 3. Доказательство теоремы 1

Пусть простое p , $p \geq 2$, и целое a удовлетворяют неравенствам $1 \leq a \leq p-1$. Покажем, что при фиксированных a и p и при $r \rightarrow 1$, $0 < r < 1$, выполняется равенство

$$f(re^{2\pi ia/p}) = \frac{C_{k,L}(p)}{(1-r)^{L+1}} + O\left((1-r)^{-(L+1/k)} \left(\ln \frac{1}{1-r}\right)^{L+1}\right), \quad (9)$$

где $C_{k,L} = L! C_L \sum_{\substack{d=1 \\ p \nmid d}}^{\infty} \frac{\psi(d)}{d^k}$.

Согласно определению функции $f(z)$ при $|z| = r \rightarrow 1$ и $L \geq 1$ получим

$$f(z) = \sum_{m \in M} P(m) z^m = C_L \sum_{m \in M} m^L z^m + O\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{L-1} r^n\right). \quad (10)$$

Известно (и легко доказать), что при фиксированном $L \geq 1$ и $r \rightarrow 1$ выполняется равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{L-1} r^n = O((1-r)^{-L}). \quad (11)$$

С другой стороны, согласно определению множества M

$$\sum_{m \in M} m^L z^m = \sum_{d=1}^{\infty} \psi(d) d^{kL} \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^L z^{\nu d^k}.$$

Поэтому согласно лемме 1 и равенствам (10) и (11) при $L \geq 1$ и $r \rightarrow 1$

$$f(z) = L! C_L \sum_{d=1}^{\infty} \psi(d) d^{kL} \left(\frac{z^{d^k}}{1-z^{d^k}}\right)^{L+1} + O\left(\sum^{(0)} + (1-r)^{-L}\right), \quad (12)$$

где

$$\sum^{(0)} = \sum_{N=1}^L \sum_{d=1}^{\infty} d^{kL} \left(\frac{r^{d^k}}{1-r^{d^k}}\right)^N.$$

Заметим, что равенство (12) при $L = 0$ выполняется, если в этом случае второе слагаемое в правой части этого равенства отсутствует.

Пусть

$$\begin{aligned} z &= r \exp \left(2\pi i \frac{a}{p} \right), \quad T = (1-r)^{-1/k} \left(\ln \frac{1}{1-r} \right)^{-1/k}, \\ \sum_{d \leq T}^{(1)} &= \sum_{\substack{d \leq T \\ p \nmid d}} d^{kL} \psi(d) \left(\frac{r^{d^k}}{1-r^{d^k}} \right)^{L+1}, \\ \sum_{d > T}^{(1)} &= \sum_{\substack{d > T \\ p \nmid d}} d^{kL} \psi(d) \left(\frac{r^{d^k}}{1-r^{d^k}} \right)^{L+1}, \\ \sum^{(2)} &= \sum_{\substack{d=1 \\ p \nmid d}}^{\infty} d^{kL} \psi(d) \left(\frac{r^{d^k} e^{2\pi i a d^k / p}}{1-r^{d^k} e^{2\pi i a d^k / p}} \right)^{L+1}. \end{aligned}$$

Найдем асимптотику $\sum_{d \leq T}^{(1)}$ при $r \rightarrow 1$. Ясно, что

$$\sum_{d \leq T}^{(1)} = (1-r)^{-(L+1)} \sum_{\substack{d \leq T \\ p \nmid d}} d^{kL} \psi(d) \left(\frac{r^{d^k}}{1+r+r^2+\dots+r^{d^k-1}} \right)^{L+1}.$$

Если $d \leq T$, то при $r \rightarrow 1$ получим $(1-r)d^k \rightarrow 0$. Значит, при $d \leq T$

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^{d^k-1} r^\nu &= \sum_{\nu=0}^{d^k-1} (1-(1-r))^\nu = \sum_{\nu=0}^{d^k-1} (1+O(\nu(1-r))) \\ &= d^k + O(d^{2k}(1-r)) = d^k (1+O(d^k(1-r))). \end{aligned}$$

Поэтому при $d \leq T$

$$\left(\sum_{\nu=0}^{d^k-1} r^\nu \right)^{-1} = d^{-k} (1+O(d^k(1-r))), \quad r^{d^k} = 1+O(d^k(1-r)).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{d \leq T}^{(1)} &= (1-r)^{-(L+1)} \sum_{\substack{d \leq T \\ p \nmid d}} \frac{\psi(d)}{d^k} (1+O(d^k(1-r)))^{L+1} \\ &= (1-r)^{-(L+1)} \sum_{\substack{d=1 \\ p \nmid d}}^{\infty} \frac{\psi(d)}{d^k} + O \left((1-r)^{-(L+1/k)} \left(\ln \frac{1}{1-r} \right)^{1-1/k} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Оценим $\sum_{d>T}^{(1)}$, $\sum^{(2)}$ и $\sum^{(0)}$. Согласно определению

$$\sum_{d>T}^{(1)} \leq (1-r)^{-(L+1)} \sum_{d>T} d^{kL} \left(\frac{r^{d^k}}{1+r+r^2+\dots+r^{d^k-1}} \right)^{L+1}.$$

Если $d > T$, то

$$\sum_{\nu=0}^{d^k-1} r^\nu > \sum_{\nu=0}^{T^k-1} r^\nu = T^k + O(T^{2k}(1-r)) = T^k + o(T^k).$$

Значит, при $r \rightarrow 1$

$$\sum_{d>T}^{(1)} \leq 2((1-r)T^k)^{-(L+1)} \sum_{d>T} d^{kL} r^{d^k}. \quad (14)$$

Если $T_1 = 2L(1-r)^{-1/k}$, где $L \geq 1$, то при $t > T_1$ и $\delta = \ln(1/r)$ функция $t^{kL} e^{-\delta t^k}$ убывает. Следовательно, при $r \rightarrow 1$

$$\sum_{d>T} d^{kL} r^{d^k} \leq T_1 \max_{T \leq d \leq T_1} (d^{kL} r^{d^k}) + \int_{T_1}^{\infty} t^{kL} e^{-\delta t^k} dt = O(\delta^{-(L+1/k)}).$$

Так как при $r \rightarrow 1$ имеем $\delta \sim 1-r$, то из (14) получим оценку

$$\sum_{d>T}^{(1)} = O\left((1-r)^{-(L+1/k)} \left(\ln \frac{1}{1-r}\right)^{L+1}\right). \quad (15)$$

Оценим $\sum^{(2)}$. Ясно, что при $p \nmid d$

$$\left|1 - z^{d^k}\right|^2 = \left|1 - r^{d^k} e^{2\pi i \frac{ad^k}{p}}\right|^2 = \left|1 - r^{d^k}\right|^2 + 4r^{d^k} \sin^2\left(\pi \frac{ad^k}{p}\right) \geq 4r^{d^k} \sin^2\left(\frac{\pi}{p}\right).$$

Поэтому при $r \rightarrow 1$ и фиксированном $L \geq 1$

$$\begin{aligned} \sum^{(2)} &\leq \left(2 \sin \frac{\pi}{p}\right)^{-1} \sum_{d=1}^{\infty} d^{kL} r^{d^k} = O\left(\sum_{1 \leq d \leq T_1} d^{kL} + \sum_{d>T_1} d^{kL} r^{d^k}\right) \\ &= O\left(T_1^{kL+1} + \int_{T_1}^{\infty} t^{kL} e^{-\delta t^k} dt\right) = O((1-r)^{-(L+1/k)}). \end{aligned}$$

Таким образом, получим равенство

$$\sum^{(2)} = O((1-r)^{-(L+1/k)}). \quad (16)$$

При оценке $\sum^{(0)}$ разобьем внутреннюю сумму из определения $\sum^{(0)}$ на два слагаемых: $d \leq T$ и $d > T$. Первое из полученных слагаемых оцениваем так:

$$\begin{aligned} \sum_{N=1}^L \sum_{d \leq T} d^{kL} \left(\frac{r^{d^k}}{1 - r^{d^k}} \right)^N &= O \left(\sum_{N=1}^L (1-r)^{-N} \sum_{d \leq T} d^{k(L-N)} r^{d^k} \right) \\ &= O \left(\sum_{N=1}^L (1-r)^{-N} T^{k(L-N)+1} \right) = O((1-r)^{-(L+1/k)}); \end{aligned}$$

а второе – так же, как при оценке $\sum^{(1)}$:

$$\begin{aligned} \sum_{N=1}^L \sum_{d > T} d^{kL} \left(\frac{r^{d^k}}{1 - r^{d^k}} \right)^N &= O \left(\sum_{N=1}^L ((1-r)T^k)^{-N} \sum_{d > T} d^{kL} r^{d^k} \right) \\ &= O \left(\delta^{-(L+1/k)} \left(\ln \frac{1}{1-r} \right)^L \right) = O \left((1-r)^{-(L+1/k)} \left(\ln \frac{1}{1-r} \right)^L \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Пользуясь равенствами (12), (13) и (15)–(17), получим (9) при $L \geq 1$. Произведя в приведенных рассуждениях соответствующие упрощения, легко убедиться в том, что равенство (9) будет выполняться и при $L = 0$.

Согласно лемме 2 существует простое p_0 такое, что для всех простых $p > p_0$ и $p \in \Lambda$ выполняется условие

$$\sum_{\substack{d=1 \\ p \nmid d}}^{\infty} \frac{\psi(d)}{d^k} \neq 0.$$

Значит, для таких p из (9) получим

$$\lim_{r \rightarrow 1} |f(re^{2\pi i \frac{a}{p}})| = \infty.$$

Следовательно, точка $z = e^{2\pi i \frac{a}{p}}$ для функции $f(z)$ является особой. Если $p \in \Lambda$ и $p \rightarrow \infty$, то множество точек $e^{2\pi i \frac{a}{p}}$, где a – целое число и $1 \leq a \leq p-1$, всюду плотно на окружности $|z| = 1$. Значит, эта окружность является границей аналитичности для функции $f(z)$. Теорема 1 доказана.

§ 4. Доказательство теоремы 2

Пусть

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n+1}}.$$

Известно, что $g\left(\frac{1}{z}\right)$ – целая функция. Причем если γ – порядок роста на бесконечности функции $g\left(\frac{1}{z}\right)$, то из условия 2) теоремы 2 следует равенство $\gamma = \frac{\sigma}{1-\sigma}$, где σ – порядок роста на бесконечности функции $G(z)$. Кроме того, если

$$M_2(R) = \max_{|z|=R} \left| g\left(\frac{1}{z}\right) \right|,$$

то выполняется равенство

$$\overline{\lim}_{R \rightarrow \infty} R^{-\gamma} \ln M_2(R) = B, \quad (18)$$

где B , вообще говоря, зависит от A . Известно также, что при любом $\rho > 0$ выполняется равенство

$$G(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=\rho} g(t) e^{zt} dt. \quad (19)$$

Пользуясь (19) и определением класса Ψ , получим

$$f(z) = \sum_{m \in M} G(m) z^m = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=\rho} g(t) \Phi(z, t) dt,$$

где $|z|e^\rho < 1$ и $\Phi(z, t) = \sum_{d=1}^{\infty} \psi(d) \frac{(ze^t)^{d^k}}{1 - (ze^t)^{d^k}}$.

Пусть $z = re^{2\pi ia/p}$, где $0 < r < 1$, p – простое число, целое a удовлетворяет условию $1 \leq a \leq p-1$. Тогда если $re^\rho < 1$ и $u = \ln(1/r) - t$, то

$$\Phi(re^{2\pi ia/p}, t) = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3, \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \sum_{\substack{d \leq T \\ p|d}} \frac{\psi(d)}{e^{ud^k} - 1}, & \Sigma_2 &= \sum_{\substack{d \leq T \\ p \nmid d}} \psi(d) \frac{e^{2\pi i ad^k/p}}{e^{ud^k} - e^{2\pi i ad^k/p}}, \\ \Sigma_3 &= \sum_{d > T} \psi(d) \frac{e^{2\pi i ad^k/p}}{e^{ud^k} - e^{2\pi i ad^k/p}}. \end{aligned}$$

Известно [4, с. 33], что для любого комплексного V

$$\frac{1}{e^V - 1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{V} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2V}{V^2 + (2\pi m)^2}.$$

Значит, если $|V| \leq \pi N$, где целое $N \geq 1$, то

$$\frac{1}{e^V - 1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{V} + \sum_{m=1}^N \frac{2V}{V^2 + (2\pi m)^2} + O\left(\frac{|V|}{N}\right). \quad (21)$$

Пусть

$$\begin{aligned} \ln \frac{1}{r} &= \frac{1}{R}, & |t| = \rho &= \frac{1}{R} - \delta, & \delta &= R^{-k} (\ln R)^{2\alpha}, \\ T &= R (\ln R)^{-\alpha/k}, & N &= [R^{k-1} (\ln R)^{-\alpha}], \end{aligned}$$

где $\alpha > 1$ – фиксированное число. Тогда для Σ_1 из (21) получим ($V = ud^k$)

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \sum_{\substack{d \leq T \\ p|d}} \frac{\psi(d)}{e^{ud^k} - 1} = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{d \leq T \\ p|d}} \psi(d) + \frac{1}{u} \sum_{\substack{d \leq T \\ p|d}} \frac{\psi(d)}{d^k} \\ &\quad + 2u \sum_{\substack{d \leq T \\ p|d}} \frac{\psi(d)}{d^k} \sum_{m=1}^N \frac{1}{u^2 + (2\pi m/d^k)^2} + O(T). \end{aligned} \quad (22)$$

Оценим Σ_2 . Согласно определению

$$\Sigma_2 = \sum_{\lambda=1}^{p-1} \sum_{\substack{d \leq T \\ d \equiv \lambda \pmod{p}}} \psi(d) \frac{e^{2\pi i a d^k / p}}{e^{ud^k} - e^{2\pi i a d^k / p}}.$$

Следовательно, если в (21) считать $V = ud^k - b$, где $b = 2\pi i \frac{a\lambda^k}{p}$, то

$$\begin{aligned} \Sigma_2 &= -\frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^{p-1} \sum_{\substack{d \leq T \\ d \equiv \lambda \pmod{p}}} \psi(d) + \sum_{\lambda=1}^{p-1} \sum_{\substack{d \leq T \\ d \equiv \lambda \pmod{p}}} \frac{\psi(d)}{d^k} \frac{1}{u - 2\pi i \frac{a\lambda^k}{pd^k}} \\ &\quad + \sum_{\lambda=1}^{p-1} \sum_{\substack{d \leq T \\ d \equiv \lambda \pmod{p}}} \frac{\psi(d)}{d^k} \sum_{m=1}^N \frac{2 \left(u - 2\pi i \frac{a\lambda^k}{pd^k} \right)}{\left(u - 2\pi i \frac{a\lambda^k}{pd^k} \right)^2 + \left(2\pi \frac{m}{d^k} \right)^2} + O(T). \end{aligned} \quad (23)$$

Теперь оценим Σ_3 . Из неравенства $\operatorname{Re} u = \frac{1}{R} - \operatorname{Re} t \geq \frac{1}{R} - \rho = \delta$ согласно определению имеем

$$|\Sigma_3| \leq \sum_{d>T} \frac{1}{e^{d^k \operatorname{Re} u} - 1} \leq \sum_{d>T} \frac{1}{e^{\delta d^k} - 1} < \frac{1}{\delta} \sum_{d>T} d^{-k} = O\left(\frac{T^{1-k}}{\delta}\right). \quad (24)$$

Легко видеть, что из определения δ и T следует равенство $T^{-k}/\delta = O(1)$, $R \rightarrow \infty$. Значит, пользуясь (19)–(24), получим

$$\begin{aligned} f(re^{2\pi i a/p}) &= \frac{C_k(p, T)}{2\pi i} \int_{|t|=\rho} \frac{g(t)}{\ln \frac{1}{r} - t} dt \\ &\quad + \sum_{\substack{d \leq T \\ p|d}} \frac{\psi(d)}{d^k} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=\rho} g(t) \left(\sum_{m=1}^N \frac{2 \left(\ln \frac{1}{r} - t \right)}{\left(\ln \frac{1}{r} - t \right)^2 + \left(2\pi \frac{m}{d^k} \right)^2} \right) dt \\ &\quad + \sum_{\lambda=1}^{p-1} \sum_{\substack{d \leq T \\ d \equiv \lambda \pmod{p}}} \frac{\psi(d)}{d^k} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=\rho} \frac{g(t)}{\ln \frac{1}{r} - t - 2\pi i \frac{a\lambda^k}{pd^k}} dt + \sum_{\lambda=1}^{p-1} \sum_{\substack{d \leq T \\ d \equiv \lambda \pmod{p}}} \frac{\psi(d)}{d^k} \\ &\quad \times \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=\rho} g(t) \left(\sum_{m=1}^N \frac{2 \left(\ln \frac{1}{r} - t - 2\pi i \frac{a\lambda^k}{pd^k} \right)}{\left(\ln \frac{1}{r} - t - 2\pi i \frac{a\lambda^k}{pd^k} \right)^2 + \left(2\pi \frac{m}{d^k} \right)^2} \right) dt \\ &\quad + O\left(T\rho M_2 \left(\frac{1}{\rho}\right)\right), \end{aligned}$$

где

$$C_k(p, T) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\substack{d \leq T \\ p|d}} \frac{\psi(d)}{d^k} = C_k(p) + O(T^{1-k}), \quad C_k(p) = \sum_{\substack{d=1 \\ p|d}}^{\infty} \frac{\psi(d)}{d^k}.$$

Ясно, что из $\rho < 1/R = \ln 1/r$ следует равенство

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=\rho} \frac{g(t) dt}{\ln \frac{1}{r} - t} = g\left(\ln \frac{1}{r}\right).$$

Значит,

$$\begin{aligned} f(re^{2\pi i a/p}) &= C_k(p)g\left(\ln \frac{1}{r}\right) \\ &+ O\left(\sum_{d \leq T} d^{-k} \sum_{m=1}^N M_2\left(R\left(1 + \left(2\pi \frac{mR}{d^k}\right)^2\right)^{-1/2}\right)\right) \\ &+ \sum_{\lambda=1}^{p-1} \sum_{\substack{d \leq T \\ d \equiv \lambda \pmod{p}}} d^{-k} M_2\left(R\left(1 + 2\pi \frac{a\lambda^k R}{pd^k}\right)^{-1/2}\right) \\ &+ \sum_{\lambda=1}^{p-1} \sum_{\substack{d \leq T \\ d \equiv \lambda \pmod{p}}} d^{-k} \sum_{m=1}^N M_2\left(R\left(1 + 4\pi^2 \left(\frac{a\lambda^k}{p} + m\right)^2 \left(\frac{R}{d^k}\right)^2\right)^{-1/2}\right) \\ &+ O\left(T^{1-k} M_2\left(\frac{1}{\rho}\right) + T\rho M_2\left(\frac{1}{\rho}\right)\right). \end{aligned} \quad (25)$$

Первая и третья суммы в (25) согласно лемме 4 оцениваются сверху величиной $o(M_2(R))$, $R \rightarrow \infty$. Вторая сумма по лемме 3 не превосходит величины

$$\begin{aligned} &\sum_{\lambda=1}^{p-1} \sum_{\substack{d \leq R^{1/k} \\ d \equiv \lambda \pmod{p}}} d^{-k} M_2\left(R\left(1 + \left(\frac{2\pi}{p}\right)^2\right)^{-1/2}\right) \\ &+ pM_2(R) \sum_{d > R^{1/k}} d^{-k} = o(M_2(R)). \end{aligned}$$

Из условия $\gamma < k - 1$ следует, что при $R > R_0$ выполняется неравенство

$$M_2\left(\frac{1}{\rho}\right) < M_2\left(R + \frac{2R(\ln R)^{2\alpha}}{R^{k-1}}\right) < M_2\left(R + \frac{2}{R^{\gamma-1}(\ln R)^\alpha}\right).$$

Значит, согласно лемме 6 существуют R_n такие, что $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \infty$ и

$$M_2\left(\frac{1}{\rho_n}\right) = O(M_2(R_n)),$$

где $\rho_n = R_n^{-1} - R_n^{-k}(\ln R_n)^{2\alpha}$. Поэтому если $R_n^{-1} = \ln 1/r_n$, то из (25) при $n \rightarrow \infty$ получим

$$f(r_n e^{2\pi i a/p}) = C_k(p)g\left(\ln \frac{1}{r_n}\right) + o\left(M_2\left(\ln^{-1} \frac{1}{r_n}\right)\right).$$

Из неотрицательности тейлоровских коэффициентов функции $G(z)$ следует равенство $g\left(\ln \frac{1}{r}\right) = M_2\left(\ln^{-1} \frac{1}{r}\right)$, а из $G(z) \not\equiv 0$ следует $g(z) \not\equiv C$. Значит,

$$\lim_{r \rightarrow 1} g\left(\ln \frac{1}{r}\right) = \infty.$$

Поэтому если $C_k(p) \neq 0$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f(r_n e^{2\pi i a/p})| = \infty.$$

Следовательно, точка $z = e^{2\pi i a/p}$ является особой точкой функции $f(z)$. Значит, как при доказательстве теоремы 1, теорема 2 следует из леммы 2.

Список литературы

1. Бибербах Л. Аналитическое продолжение. М.: Наука, 1967.
2. Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций. М.-Л.: Гостехиздат, 1950.
3. Титчмарш Э. Ч. Теория функций. М.: Наука, 1980.
4. Титчмарш Э. Ч. Теория дзета-функции Римана. М.: ИЛ, 1953.
5. Dienes P. The Taylor series. New York: Dover Publ., 1957.
6. Hecke E. Über analytische Funktionen und die Verteilung von Zahlen mod Eins // Abh. Math. Sem. Hamburg. 1922. № 1. S. 54–76.
7. Mordell L. J. Irrational power series. III // Proceed. Amer. Math. Soc. 1965. V. 16. № 4. P. 819–821.
8. Caroll F. W., Kemperman J. H. B. Noncontinuale analytic functions // Duke Math. J. 1965. V. 32. P. 65–84.
9. Salem R. Power series with integral coefficients // Duke Math. J. 1945. V. 12. P. 153–172.
10. Wallisser R. Einige Satze über nichtforsetzbare Potenzreien // Math. Z. 1970. B. 113. S. 61–67.
11. Lucht L. Power Series with Multiplicative Coefficients // Math. Z. 1981. B. 177. S. 359–374.
12. Kövari T. A gap-theorem for entire functions of infinite order // Michig. Math. J. 1965. V. 12. P. 133–140.

Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило в редакцию
2.XII.1995