Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Скалыга, О гомотопическом методе в многокритериальных бесконечномерных задачах, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1997, том 61, выпуск 4, 137–154

DOI: <https://doi.org/10.4213/im139>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 15:49:28

УДК 517.977.58

В. И. Скалыга

О гомотопическом методе в многокритериальных бесконечномерных задачах

Устанавливается гомотопическая инвариантность оптимума в многокритериальных задачах.

Библиография: 14 наименований.

§ 1. Введение

Гомотопический метод исследования оптимизационных задач был предложен в работах [1]–[5]. В них исследовались безусловная минимизация гладких функционалов в гильбертовом пространстве и гладкие и негладкие конечномерные задачи на безусловный и условный минимум.

В этих работах выделены классы оптимизационных задач, зависящих от параметра и обладающих следующим свойством: если в процессе деформации оптимизационной задачи ее экстремаль изолирована и при каком-либо значении параметра является точкой минимума, то она является точкой минимума соответствующих оптимизационных задач при всех значениях параметра.

Этот общий принцип, названный *деформационным принципом минимума*, нашел многочисленные применения в анализе, вариационном исчислении, теории устойчивости, математической физике и т.д.

В дальнейшем деформационный принцип минимума был обобщен на бесконечномерные задачи математического программирования и бесконечномерные негладкие оптимизационные задачи (см. [6]–[11]).

В настоящей работе этот деформационный принцип обобщается для многокритериальных оптимизационных задач в банаховом пространстве. При этом число критериев может быть бесконечно.

§ 2. Деформационная теорема

Пусть X и Y – вещественные банаховы пространства с соответственно заданными нормами $|\cdot|$ и $|\cdot|_Y$. Пусть задано отображение $F(x): X \rightarrow Y$, имеющее строгую производную $D_S F(x)$ в каждой точке $x \in X$. Пусть на Y задан конус K , определяющий частичную упорядоченность на Y : для $u, v \in Y$ $u \leq v$, если $v - u \in K$, и $u < v$, если $u \leq v$ и $u \neq v$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 96-01-00767).

Будем называть точку $x_* \in X$ *локально K -оптимальной* точкой отображения $F(x)$, если существует окрестность V точки x_* , все точки которой не удовлетворяют неравенству

$$F(x) < F(x_*).$$

(Если Y конечномерно и K – конус векторов с неотрицательными координатами, то K -оптимальность называют *оптимальностью по Парето* [12].)

Точку $x_* \in X$ будем называть *локально оптимальной* точкой отображения $F(x)$, если существует окрестность V точки x_* , для всех точек которой выполнено неравенство

$$F(x_*) \leq F(x).$$

Если в этих определениях положить $V = X$, то соответственно получим определения K -оптимальной точки и оптимальной точки отображения $F(x)$.

Задачу нахождения локального K -оптимума отображения $F(x)$ будем обозначать

$$F(x) \rightarrow K\text{-opt.} \quad (1)$$

В настоящей работе изучается гомотопическая инвариантность решений задач (1). Для формулировки основного результата нам потребуется понятие обобщенного градиента Кларка.

Пусть $f(x)$ – локально липшицев функционал, определенный на X . *Обобщенной производной* функционала f по направлению v называется [12] число

$$f^0(x; v) = \lim_{y \rightarrow x} \sup_{t \rightarrow +0} t^{-1}(f(y + tv) - f(y)).$$

Обобщенным градиентом $\partial f(x)$ функционала f в точке x называется [12] такое множество в X^* , что при $\xi \in \partial f(x)$ и всех $v \in X$ выполнено неравенство

$$f^0(x; v) \geq \langle \xi, v \rangle. \quad (2)$$

Обобщенный градиент является непустым выпуклым слабо* компактным множеством в X^* , а обобщенная производная $f^0(x; v)$ полунепрерывна сверху как функция (x, v) и как функция v является опорной функцией обобщенного градиента $\partial f(x)$ [12]. Точка x_* называется *критической точкой* функционала f , если $0 \in \partial f(x_*)$.

Липшицев функционал $f(x)$ называется [12] *регулярным* в точке x , если для каждого $v \in X$ обобщенная производная $f^0(x; v)$ совпадает с классической производной $f'(x; v)$ по направлению v .

Пусть $\overset{\circ}{B}(R) = \{x \in X : |x| < R\}$ – шар в X . Будем говорить, что функционал f *удовлетворяет условию (ПС) Пале и Смейла* [13] на $\overset{\circ}{B}(R)$, если для каждого замкнутого множества $S \subset \overset{\circ}{B}(R)$ справедливо следующее свойство: если $0 \notin \partial f(x)$ для каждого $x \in S$, то

$$\inf_{y \in \partial f(x), x \in S} |y|_{X^*} > 0.$$

Класс функционалов, удовлетворяющих условию (ПС), достаточно широк. Например, ему принадлежат функционалы, определенные на рефлексивном банаховом пространстве и удовлетворяющие условию (S): если x_n слабо сходится к x_0 и

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \inf_{y \in \partial f(x_n)} \langle y, x_n - x_0 \rangle \leq 0,$$

то x_n сильно сходится к x_0 . Такие функционалы называются *X-правильными*; для гладких задач они исследовались в [1], [2], [6], [7]. Суммы X-правильного и X-правильного или выпуклого функционалов являются X-правильными функционалами.

Рассмотрим множества

$$K^* = \{p \in Y^* : p(u) \geq 0 \quad \forall u \in K\}, \quad \mathfrak{P} = \{p \in K^* : |p|_{Y^*} = 1\}$$

и функционал

$$f(x) = \sup_{p \in \mathfrak{P}} p(F(x) - F(x_*)),$$

где x_* – фиксированный элемент из X . Функционал $f(x)$ является локально липшицевым. Ниже будет доказана формула для обобщенного градиента Кларка

$$\partial f(x) = \overline{\text{co}} \left\{ \xi = \text{l.i.m.}_{i \rightarrow \infty} (D_S F(x))^{*} p_i : p_i \in \mathfrak{P}, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} p_i(F(x) - F(x_*)) = f(x) \right\}, \quad (3)$$

где l.i.m – обозначение слабо* предела последовательности $\xi_i \in X^*$; $(D_S F(x))^{*}$ – оператор, сопряженный к $D_S F(x)$; $\overline{\text{co}}$ – слабо* замкнутая выпуклая оболочка.

Если точка x_* является локально K -оптимальной точкой задачи (1), то в силу теоремы отделимости она будет точкой локального минимума $f(x)$. Тогда в силу (2) и (3) будет выполнено включение

$$0 \in \overline{\text{co}}((D_S F(x_*))^{*} p : p \in \mathfrak{P}). \quad (4)$$

Точку x_* , для которой удовлетворяется включение (4), будем называть *критической точкой* отображения $F(x)$.

В дальнейшем шар $B(1) = \bar{B}(1)$ будем обозначать просто через B .

Однопараметрическое семейство отображений $F(x; \lambda) : X \rightarrow Y$ и семейство конусов $K(\lambda) \subset Y$ ($0 \leq \lambda \leq 1$) назовем $\mathring{B}(R)$ -*невыврожденной деформацией* отображения $F(x; 0)$ и конуса $K(0)$ в отображение $F(x; 1)$ и конус $K(1)$, если:

- 1) отображение $F(x; \lambda)$ строго дифференцируемо по x на $B(R) = \bar{B}(R)$ при любом $\lambda \in [0, 1]$ и по λ равномерно непрерывно относительно $x \in B(R_1) \subset \mathring{B}(R)$;
- 2) отображение $D_S F(x; \lambda) : B(R) \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ равномерно ограничено по норме при каждом $\lambda \in [0, 1]$ относительно $x \in B(R_1) \subset \mathring{B}(R)$ и по λ равномерно непрерывно относительно $x \in B(R_1) \subset \mathring{B}(R)$;

3) многозначное отображение $\lambda \rightarrow K(\lambda) \cap B_Y: [0, 1] \rightarrow Y$ полунепрерывно сверху, т.е. для каждого $\varepsilon > 0$ и $\lambda_0 \in [0, 1]$ найдется окрестность $N(\lambda_0) \subset [0, 1]$ точки λ_0 такая, что для точек $\lambda \in N(\lambda_0)$ выполнено включение

$$K(\lambda) \cap B_Y \subset K(\lambda_0) \cap B_Y + \varepsilon B_Y;$$

4) многозначное отображение $\lambda \rightarrow K(\lambda) \cap B_Y: [0, 1] \rightarrow Y$ усиленно полунепрерывно снизу, а именно, для каждого $\lambda_0 \in [0, 1]$ и $\varepsilon > 0$ найдется окрестность $N(\lambda_0) \subset [0, 1]$ точки λ_0 такая, что для точек $\lambda \in N(\lambda_0)$ выполняется соотношение

$$(u + \varepsilon B_Y) \cap K(\lambda) \cap B_Y \neq \emptyset \quad \forall u \in K(\lambda_0) \cap B_Y;$$

5) при каждом $\lambda \in [0, 1]$ у отображения $F(x; \lambda)$ при конусе $K(\lambda)$ существует критическая точка $x_*(\lambda) \in \overset{\circ}{B}(R_1)$, непрерывно зависящая от λ ;

6) при каждом $\lambda \in [0, 1]$ функционал

$$f(x; \lambda) = \sup \left\{ p(F(x; \lambda) - F(x_*(\lambda), \lambda)) : p \in K^*(\lambda), \quad |p|_{Y^*} = 1 \right\}$$

удовлетворяет условию (ПС) на $\overset{\circ}{B}(R)$ и на множестве $\overset{\circ}{B}(R) \setminus \{x_*(\lambda)\}$ не имеет критических точек.

ТЕОРЕМА 1. Пусть существует $\overset{\circ}{B}(R)$ -невыврожденная деформация отображения $F(x; 0)$ и конуса $K(0)$ в отображение $F(x; 1)$ и конус $K(1)$. Пусть $x_*(0)$ является точкой локального K -оптимума отображения $F(x; 0)$. Тогда $x_*(1)$ является точкой локального K -оптимума отображения $F(x; 1)$. Если на $B(R) \setminus \{x_*(1)\}$ функционалы $p(F(x; 1))$, $p \in \mathfrak{P}(1)$, не имеют критических точек и удовлетворяют условию (ПС), то $x_*(1)$ является локально оптимальной точкой отображения $F(x; 1)$.

Доказательству теоремы 1 предположим несколько лемм. При доказательстве лемм и теоремы, не уменьшая общности, будем полагать, что $x_*(\lambda) \equiv 0$ и $F(0, \lambda) \equiv 0$ при $\lambda \in [0, 1]$.

ЛЕММА 1. Пусть $\lambda_0 \in [0, 1]$ и $f(x) = f(x, \lambda_0)$. Тогда $f(x)$ – регулярный функционал и для градиента Кларка $\partial f(x)$ имеет место формула (3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства совпадения двух слабо* замкнутых выпуклых множеств достаточно доказать равенство их опорных функций

$$f^0(x; v) = \sup_{\xi \in A} \langle \xi, v \rangle \quad \forall v \in X, \quad (5)$$

где A – множество в правой части равенства (3).

Пусть v фиксировано и $y_i \rightarrow x$, $t_i \downarrow 0$ – такие последовательности, что последовательность

$$\Delta_i = (f(y_i + t_i v) - f(y_i)) t_i^{-1}$$

сходится к $f^0(x; v)$. Пусть $\mathfrak{P} = \{p \in K^*(\lambda_0) : |p|_{Y^*} = 1\}$, $p_i \in \mathfrak{P}$ и

$$\varepsilon_i t_i + p_i(F(y_i + t_i v)) \geq f(y_i + t_i v) \quad \forall i > 0,$$

где $\varepsilon_i \downarrow 0$. Тогда

$$\Delta_i \leq (p_i(F(y_i + t_i v) - p_i(F(y_i))))t_i^{-1} + \varepsilon_i. \quad (6)$$

Пусть последовательность p_i слабо* сходится к p . Так как $(F(y_i + t_i v) - F(y_i))t_i^{-1}$ сходится к $D_S F(x)v$, а $p_i(F(x))$ сходится к $f(x)$, то из (6) следует

$$f^0(x; v) \leq \sup_{\xi \in A} \langle \xi, v \rangle \quad \forall v \in X. \quad (7)$$

Докажем теперь регулярность $f(x)$ и неравенство, противоположное неравенству (7). Пусть последовательность $t_i \downarrow 0$ такая, что

$$\alpha = \lim_{i \rightarrow \infty} (f(x + t_i v) - f(x))t_i^{-1} = \liminf_{t \downarrow 0} (f(x + tv) - f(x))t^{-1}.$$

Чтобы доказать регулярность f в x , достаточно показать, что $f^0(x; v) \leq \alpha$. Пусть p_j – произвольная последовательность такая, что $p_j \in \mathfrak{P}$ при всех $j > 0$, p_j слабо* сходится к p и $\lim_{j \rightarrow \infty} p_j(F(x)) = f(x)$. Тогда

$$\begin{aligned} \alpha_i &= (f(x + t_i v) - f(x))t_i^{-1} \geq (p_j(F(x + t_i v)) - \lim_{j \rightarrow \infty} p_j(F(x)))t_i^{-1}, \\ \alpha_i &\geq \lim_{j \rightarrow \infty} p_j(F(x + t_i v) - F(x))t_i^{-1}. \end{aligned} \quad (8)$$

В силу известной теоремы анализа имеют место равенства

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{j \rightarrow \infty \\ i \rightarrow \infty}} p_j(F(x + t_i v) - F(x))t_i^{-1} &= \langle p, D_S F(x)v \rangle \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \lim_{j \rightarrow \infty} p_j(F(x + t_i v) - F(x))t_i^{-1}. \end{aligned} \quad (9)$$

Поэтому из (7)–(9) следуют неравенства

$$\alpha \geq \sup_{\xi \in A} \langle \xi, v \rangle \geq f^0(x; v),$$

что и требовалось доказать.

Из условий 3) и 4) вытекает, что многозначное отображение $\lambda \rightarrow K^*(\lambda) \cap B_Y: [0, 1] \rightarrow Y^*$ полунепрерывно сверху и усиленно полунепрерывно снизу. Отсюда и из условий 1), 2) и леммы 1 вытекают следующие свойства однопараметрического семейства функционалов $f(x, \lambda)$:

1°) функционал $f(x; \lambda)$ липшицев по x на $B(R)$ при любом $\lambda \in [0, 1]$ и по λ равномерно непрерывен относительно $x \in B(R_1) \subset \overset{\circ}{B}(R)$;

2°) многозначное отображение $\partial_x f(x; \lambda): B(R) \times [0, 1] \rightarrow X^*$ полунепрерывно сверху по λ равномерно относительно $x \in B(R_1) \subset \overset{\circ}{B}(R)$.

Однопараметрическое семейство функционалов $f(x, \lambda)$, удовлетворяющее условиям 1°), 2°) и 6), называется $\overset{\circ}{B}(R)$ -невырожденной деформацией функционала $f(x; 0)$ в функционал $f(x; 1)$.

ЛЕММА 2. Пусть существует $\overset{\circ}{B}(R)$ -невыврожденная деформация функционала $f(x; 0)$ в функционал $f(x; 1)$. Пусть точка $x = 0$ реализует локальный минимум функционала $f(x; 0)$. Тогда точка $x = 0$ реализует локальный минимум функционала $f(x; 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, можно считать, что $f(0; \lambda) \equiv 0$. Зафиксируем $\lambda_0 \in [0, 1]$. Пусть $f(x) = f(x; \lambda_0)$. Построим множество $\mathfrak{M}$ непрерывных сплайнов $x(t)$ таких, что $x(t) \in B(R_1)$ при $t \geq 0$, функция $f(x(t); \lambda_0)$ убывает и каждое звено сплайна является прямолинейным отрезком

$$x(t) = x(t_{n-1}) + (t - t_{n-1})v_{n-1}, \quad t_{n-1} \leq t \leq t_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Из условий 2°) и 6) $\overset{\circ}{B}(R)$ -невыврожденной деформации вытекает неравенство

$$m(s) = \inf_{y \in \partial f(x; \lambda), R_1 \geq |x| \geq s > 0, \lambda \in [0, 1]} |y|_{X^*} > 0.$$

В силу теоремы отделимости [14] для каждого $x \in B(R_1) \setminus \{0\}$ найдется $v(x) \in X$ такой, что $|v(x)| = 1$ и

$$f^0(x; v(x)) \leq -m(|x|)c, \quad 1/2 < c < 1.$$

В силу полунепрерывности сверху $f^0(x; v)$ по x найдется число $r(x, v(x))$ такое, что для $u \in B(x, r(x, v(x)))$

$$f^0(u; v(x)) \leq -m(|x|)/2. \quad (10)$$

Обозначим через $S(x)$ множество таких v , для которых $|v| = 1$ и при $t \in [0, t(v))$, $x + tv \in B(R_1)$ выполняется неравенство

$$f^0(x + tv; v) \leq -m(k|x + tv|)/2, \quad k = 3/4. \quad (11)$$

(Через $t(v)$ обозначен максимальный правый конец таких отрезков.) Сплайн $x(t) \in \mathfrak{M}$ с началом в точке $x_0 \in B(R_1) \setminus \{0\}$ построим следующим образом. В качестве направления v_0 выберем вектор $v_0 \in S(x_0)$, для которого

$$t(v_0) \geq \sup_{v \in S(x_0)} t(v)/2, \quad (12)$$

и длина первого отрезка сплайна будет равняться $t(v_0)$. Для следующих звеньев сплайна поступаем аналогично. Если сплайн $x(t)$ пересекает в момент времени T границу шара $B(R_1)$, то сплайн в этой точке заканчивается.

Докажем следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Если значения сплайна $x(t) \in \mathfrak{M}$ на конечном отрезке $[0, T]$ принадлежат $\overset{\circ}{B}(R_1)$ и $x(T) \neq 0$, то на отрезке $[0, T]$ нет предельной точки узлов сплайна.

В предположении противного найдется последовательность узлов $t_n \rightarrow t_*$ при $n \rightarrow \infty$ и для точки $x(t_*)$ существуют радиус $r(x(t_*)) < |x(t_*)|/3$ и направление $v(x(t_*))$ такие, что для точек шара $B(x(t_*), r(x(t_*)))$ выполнено неравенство (10). Но тогда при достаточно больших n точки $x(t_n)$ принадлежат шару $B(x(t_*), r(x(t_*))/8)$, что противоречит конструкции сплайна, так как при этих n не выполняется неравенство (12).

Докажем еще одно вспомогательное

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть при $\lambda_0 \in [0, 1]$ в точке $x = 0$ функционал $f(x) = f(x; \lambda_0)$ имеет строгий минимум на шаре $B(\rho)$. Тогда для числа ρ_0 , где $0 < \rho_0 < \rho$, справедливо неравенство

$$\inf_{|x|=\rho_0} f(x) > 0.$$

В предположении противного на сфере $|x| = \rho_0$ найдется точка x_0 , для которой выполнено неравенство

$$f(x_0) < \delta m(k(\rho_0 - \delta))/4, \quad (13)$$

где $0 < \delta < \rho_0 < \rho_0 + \delta < \rho$. Пусть сплайн $x(t) \in \mathfrak{M}$ и $x(0) = x_0$. Рассмотрим функцию $\varphi(t) = f(x(t))$. Она почти всюду дифференцируема в классическом смысле и на отрезке сплайна (t_{n-1}, t_n) [12]

$$\dot{\varphi}(t) \in \langle \partial f(x_{n-1} + tv_{n-1}), v_{n-1} \rangle. \quad (14)$$

По построению сплайна $x(t)$ множество чисел в правой части включения (14) ограничено сверху числом $-m(k|x_{n-1} + tv_{n-1}|)/2$. Следовательно, сплайн $x(t)$ достигает в некоторый момент времени t_* границы шарового слоя $\rho_0 - \delta \leq |x| \leq \rho_0 + \delta$. Но тогда из (13) и (14) вытекает

$$f(x(t_*)) = \varphi(t_*) = f(x_0) + \int_0^{t_*} \dot{\varphi}(\tau) d\tau < -\delta m(k(\rho_0 - \delta))/4,$$

что противоречит условию минимума в точке $x = 0$ функционала $f(x)$ на $B(\rho)$.

Пусть Λ – множество тех $\lambda \in [0, 1]$, для которых $x = 0$ является точкой локального минимума функционала $f(x; \lambda)$. Множество Λ непусто. Покажем, что оно открыто. Пусть $\lambda_0 \in \Lambda$. В силу того, что на множестве $\overset{\circ}{B}(R) \setminus \{0\}$ нет критических точек функционала $f(x; \lambda)$, точка $x = 0$ является точкой его строгого минимума на некотором шаре $B(\rho)$. Следовательно,

$$\inf_{|x|=\rho_0} f(x; \lambda_0) = a > 0, \quad 0 < \rho_0 < \rho.$$

Тогда для некоторого $\varepsilon > 0$ при $\lambda \in [\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon] \cap [0, 1]$

$$\inf_{|x|=\rho_0} f(x; \lambda) > a/2. \quad (15)$$

Зафиксируем $\lambda_1 \in [\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon] \cap [0, 1]$. Пусть $f(x) = f(x; \lambda_1)$. Рассмотрим шар $B(\rho_1)$, для которого

$$\sup_{|x| \leq \rho_1} f(x) < a/2. \quad (16)$$

Тогда сплайн $x(t) \in \mathfrak{M}$ с началом в точке $x_0 \in B(\rho_1)$ в силу (15), (16) не выходит из шара $B(\rho_0)$ и для функции $\varphi(t) = f(x(t))$ в силу (11) найдется последовательность $t'_k \rightarrow \infty$, для которой $\dot{\varphi}(t'_k) \rightarrow 0$ и $x(t'_k) \rightarrow 0$. Следовательно, функционал $f(x; \lambda_1)$ имеет в точке $x = 0$ строгий минимум на шаре $B(\rho_1)$, т.е. множество Λ открыто. Установим теперь замкнутость Λ . Каждому сплайну $x(t) \in \mathfrak{M}$, числу $\varepsilon > 0$ и отрезку $[0, T]$ поставим в соответствие множество сплайнов $y(t)$ таких, что при $t \in [0, T]$ $|y(t) - x(t)| < \varepsilon$, узлы сплайнов $x(t)$ и $y(t)$ ($t_n \in [0, T]$) и направления звеньев совпадают. При $t > T$ сплайны $y(t)$ продолжают по той же конструкции, что и сплайны $x(t) \in \mathfrak{M}$. При малых ε для $y(t)$ на отрезке $(t_{n-1}, t_n) \in [0, T]$ выполнено неравенство

$$f^0(y(t); v_{n-1}) \leq -m(|y(t)|/2)/4. \quad (17)$$

Образует теперь множество сплайнов $\mathfrak{M}_1$ из сплайнов $x(t) \in \mathfrak{M}$ и построенных с их помощью для каждого $x(t)$ отрезка $[0, T]$ и $\varepsilon > 0$ сплайнов $y(t)$, удовлетворяющих неравенству (17). По построению сплайны из $\mathfrak{M}_1$ обладают аналогом непрерывной зависимости от начальных значений. В силу свойства 2°) $\overset{\circ}{B}(R)$ -невырожденной деформации справедливо неравенство

$$\sup_{y \in \partial f(x; \lambda), x \in B(R_1), \lambda \in [0, 1]} |y|_{X^*} = M < \infty.$$

Покажем, что при любом $\lambda \in \Lambda$ для точек шара $B(\rho_1)$, $\rho_1 = R_1 m(R_1/4)/(16M)$, выполняется неравенство $f(x; \lambda) \geq f(0; \lambda)$. Этим замкнутость Λ будет доказана. Зафиксируем $\lambda \in \Lambda$. Тогда точка $x = 0$ реализует строгий минимум функционала $f(x) = f(x; \lambda)$ на некотором шаре $B(\rho)$ и, как было показано выше, существует непустое максимальное множество Ω , из точек которого сплайны $x(t) \in \mathfrak{M}_1$ сходятся к нулю на бесконечности. Пусть $\overset{\circ}{B}(r)$ – максимальный открытый шар такой, что $\overset{\circ}{B}(r) \subset \Omega$. Для доказательства замкнутости Λ достаточно установить оценку $r \geq \rho_1$. Эта оценка очевидна, если $r \geq R_1/2$. Пусть $r < R_1/2$. Рассмотрим на сфере $|x| = r$ точку $y_0 \notin \Omega$ и сплайн $y(t) \in \mathfrak{M}_1$, $y(0) = y_0$, не сходящийся на бесконечности к нулю. Так как функция $f(y(t))$ квалифицированно убывает, то найдется $t'_0 > 0$, при котором $3R_1/4 < |y(t'_0)| < R_1$. В силу конструкции множества сплайнов $\mathfrak{M}_1$ найдется сплайн $x(t) \in \mathfrak{M}_1$ с начальным значением $x(0) \in \overset{\circ}{B}(r)$, для которого $3R_1/4 < |x(t'_0)| < R_1$. Так как $x(0) \in \Omega$, то найдутся такие t'_1 и t'_2 , $t'_1 < t'_2$,

что $|x(t'_1)| = 3R_1/4$, $|x(t'_2)| = R_1/2$ и $R_1/2 < |x(t)| < 3R_1/4$ при $t'_1 < t < t'_2$. Очевидно,

$$f(x(0)) - f(0) \leq M|x(0)| < Mr. \quad (18)$$

С другой стороны,

$$f(x(0)) - f(0) > f(x(t'_1)) - f(x(t'_2)) = - \int_{t'_1}^{t'_2} \dot{\varphi}(\tau) d\tau, \quad (19)$$

где $\varphi(t) = f(x(t))$. Из неравенств (17) и (19) следует

$$f(x(t'_1)) - f(x(t'_2)) \geq (t'_2 - t'_1)m(R_1/4)/4 \geq R_1m(R_1/4)/16. \quad (20)$$

Из неравенств (18) и (20) вытекает оценка $r > \rho_1$. Замкнутость Λ доказана. Но тогда $\Lambda = [0, 1]$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Для доказательства первого утверждения теоремы достаточно показать, что точка 0 является точкой строгого локального минимума функционала $f(x; 1)$. Но точка 0 является точкой локального минимума функционала $f(x; 0)$. Поэтому первое утверждение теоремы 1 следует из леммы 2.

Докажем второе утверждение теоремы. В силу отсутствия критических точек у функционалов $p(F(x; 1))$, $p \in \mathfrak{P}(1) = \{\xi \in K^*(1), |\xi|_{Y^*} = 1\}$, на множестве $B(R_1) \setminus \{0\}$ и условия (ПС) можно построить для каждого $p(F(x; 1))$, $p \in \mathfrak{P}(1)$, на $B(R_1) \setminus \{0\}$ множество сплайнов $\mathfrak{M}_p$, аналогичное множеству сплайнов $\mathfrak{M}$, построенного для функционала $f(x)$ при доказательстве леммы 2. Функционал $f(x) = \sup p(F(x; 1))$, $p \in \mathfrak{P}(1)$, имеет локальный минимум в нуле. Поэтому найдутся два шара $B(\rho_1) \subset B(\rho_0)$ такие, что для любого $p \in \mathfrak{P}(1)$ и $x_0 \in B(\rho_1) \setminus \{0\}$ сплайн $x(t) \in \mathfrak{M}_p$ с началом в точке x_0 не выходит за пределы шара $B(\rho_0)$. В силу условия (11) отсюда следует, что сплайн $x(t)$ сходится на бесконечности к нулю. Поэтому для любого $p \in \mathfrak{P}(1)$ и $x_0 \in B(\rho_1) \setminus \{0\}$ $p(F(x_0; 1)) > 0$, а это означает, что $F(x_0; 1) > 0$. Теорема доказана.

§ 3. Многокритериальные задачи с ограничениями

Рассмотрим задачу K -оптимизации с ограничениями

$$F(x) \rightarrow K - \text{opt}, \quad (21)$$

$$\psi(x) \leq 0, \quad (22)$$

$$x \in C, \quad (23)$$

где отображение $F(x)$ описано в § 2, $\psi(x)$ – липшицев функционал на каждом шаре в X , C – замкнутое выпуклое множество.

Заметим, что к задаче (21)–(23) сводится формально более общая задача K -оптимизации с n ограничениями типа неравенств $\psi_i(x) \leq 0$, $i = 1, \dots, n$, следующей заменой: $\psi(x) = \max \psi_i(x)$, $1 \leq i \leq n$.

Пусть $Q = \{x : \psi(x) \leq 0\}$, $D = Q \cap C$. Для задачи (21)–(23) естественным образом вводятся понятия локально K -оптимальной и локально оптимальной точек, а также K -оптимальной и оптимальной точек. Точку $x_* \in D$ назовем *экстремалью* задачи (21)–(23), если

$$0 \in \overline{\text{co}}((D_S F(x_*))^* p : p \in \mathfrak{P}) + \mu \partial \psi(x_*) + \alpha \partial d_C(x_*), \quad \mu \psi(x_*) = 0,$$

где $\mu, \alpha \geq 0$, $d_C(x) = \inf_{c \in C} |x - c|$.

Однопараметрическое семейство задач

$$F(x; \lambda) \rightarrow K - \text{opt}, \quad K(\lambda) \subset Y, \quad (24)$$

$$\psi(x; \lambda) \leq 0, \quad (25)$$

$$x \in C(\lambda), \quad x \in X, \quad \lambda \in [0, 1], \quad (26)$$

назовем *невыврожденной деформацией задачи*

$$F(x; 0) \rightarrow K - \text{opt}, \quad K(0) \subset Y, \quad (27)$$

$$\psi(x; 0) \leq 0, \quad (28)$$

$$x \in C(0) \quad (29)$$

в задачу

$$F(x; 1) \rightarrow K - \text{opt}, \quad K(1) \subset Y, \quad (30)$$

$$\psi(x; 1) \leq 0, \quad (31)$$

$$x \in C(1), \quad (32)$$

если:

А) отображения $F(x; \lambda)$ и конусы $K(\lambda)$ удовлетворяют условиям 1)–4) § 2 (при этом $B(R) = X$);

В) при каждом $\lambda \in [0, 1]$ $C(\lambda)$ – замкнутое выпуклое множество;

С) функционалы $\psi(x; \lambda)$ и $d_{C(\lambda)}(x)$ по λ равномерно непрерывны относительно x из каждого шара $B(r) \subset X$, а функционал $\psi(x; \lambda)$ липшицев по x на каждом шаре $B(r) \subset X$ при каждом $\lambda \in [0, 1]$;

Д) многозначные отображения $\partial_x \psi(x; \lambda)$, $\partial_x d_{C(\lambda)}(x) : X \times [0, 1] \rightarrow X^*$ полунепрерывны сверху по λ равномерно относительно x на каждом шаре $B(r) \subset X$;

Е) для каждого $\lambda \in [0, 1]$ и в каждой точке x , для которых $\psi(x; \lambda) = 0$, функционал $\psi(x; \lambda)$ регулярен;

Ф) задача (24)–(26) при каждом $\lambda \in [0, 1]$ имеет экстремаль $x_*(\lambda)$, непрерывно зависящую от λ ;

Г) существует $R > 0$ такое, что при каждом $\lambda \in [0, 1]$ и $x \in B(x_*(\lambda), R) \cap D(\lambda) \setminus \{x_*(\lambda)\}$

$$0 \notin \partial f(x; \lambda) + \mu \partial \psi(x; \lambda) + \alpha \partial d_{C(\lambda)}(x),$$

где $f(x; \lambda) = \sup p(F(x; \lambda) - F(x_*(\lambda); \lambda))$ ($p \in K^*(\lambda)$, $|p|_{Y^*} = 1$), $\mu \geq 0$, $\alpha > 0$, $\mu\psi(x; \lambda) = 0$;

Н) при каждом $\lambda \in [0, 1]$ и $\mu, \alpha > 0$ функционал

$$f(x; \lambda) + \mu\psi^+(x; \lambda) + \alpha d_{C(\lambda)}(x)$$

удовлетворяет условию (ПС) на каждом ограниченном множестве в X , $\psi^+(x, \lambda) = \max(0, \psi(x, \lambda))$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть существует невырожденная деформация задачи (27)–(29) в задачу (30)–(32). Пусть при каждом $\lambda \in [0, 1]$ и $\alpha \geq 0$ для функционалов $\psi(x; \lambda)$ и $d_{C(\lambda)}(x)$ выполнено условие регулярности

$$0 \notin \partial\psi(x_*(\lambda), \lambda) + \alpha \partial d_{C(\lambda)}(x_*(\lambda)). \quad (33)$$

Пусть точка $x_*(0)$ является точкой локального K -оптимума задачи (27)–(29).

Тогда точка $x_*(1)$ является точкой локального K -оптимума задачи (30)–(32).

Если функционалы $p(F(x; 1)) + \mu\psi^+(x; 1) + \alpha d_{C(1)}(1)$ ($p \in \mathfrak{P}(1)$, $\mu, \alpha \geq 0$) на каждом шаре удовлетворяют условию (ПС) и на $D(1) \cap B(x_*(1), R) \setminus \{x_*(1)\}$ не имеют критических точек, то $x_*(1)$ является локально оптимальной точкой задачи (30)–(32).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не уменьшая общности, можно считать, что $x_0(\lambda) \equiv 0$ и $F(0, \lambda) \equiv 0$ при $\lambda \in [0, 1]$. Положим

$$\begin{aligned} \varphi(x; \lambda, \alpha) &= \psi^+(x; \lambda) + \alpha d_{C(\lambda)}(x), \\ \Phi(x; \lambda, \alpha, k) &= f(x; \lambda) + k\varphi(x; \lambda, \alpha). \end{aligned}$$

Тогда $D(\lambda) = \{x \in X : \varphi(x; \lambda, \alpha) = 0\}$, $\alpha > 0$.

Для доказательства первого утверждения теоремы достаточно показать, что при достаточно больших α и k семейство функционалов $\Phi(x; \lambda, \alpha, k)$ удовлетворяет условиям леммы 2 и при $\lambda = 0$ функционал $\Phi(x; 0, \alpha, k)$ имеет в нуле локальный минимум. Зафиксируем $\lambda \in [0, 1]$. Пусть $x_0 \notin C(\lambda)$ и $y \in \partial d_{C(\lambda)}(x_0)$. Покажем, что $|y|_{X^*} = 1$. В [12] показано, что коэффициент Липшица у функции расстояния равен 1, и если C выпукло, то и $d_C(x)$ выпукла.

Пусть $v \in X$ такой, что $d_{C(\lambda)}(x_0 + v) = 0$, $|v| < (1 + \varepsilon)d_{C(\lambda)}(x_0)$, где $\varepsilon > 0$. Тогда при $0 < t < 1$

$$d_{C(\lambda)}((1 - t)x_0 + t(x_0 + v)) \leq (1 - t)d_{C(\lambda)}(x_0). \quad (34)$$

В [12] показано также, что выпуклая функция регулярна, поэтому из (34) вытекает

$$d_{C(\lambda)}^0(x_0; v) \leq -d_{C(\lambda)}(x_0) < -(1 + \varepsilon)^{-1}|v|. \quad (35)$$

Из (35) следует, что $|y|_{X^*} > (1 + \varepsilon)^{-1}$ для произвольного $\varepsilon > 0$, т.е. $|y|_{X^*} = 1$.

В силу свойства D) справедливо неравенство

$$\sup_{\substack{y \in \partial \psi(x; \lambda) \\ x \in B(R) \\ \lambda \in [0, 1]}} |y|_{X^*} = M_1 < \infty. \quad (36)$$

В [12] показано, что для функционала

$$g(x) = \max_i (g_i(x)), \quad i = 1, \dots, n; \quad I(x) = \{i : g_i(x) = g(x)\},$$

имеет место включение

$$\partial g(x) \subset \text{co}\{\partial g_i(x) : i \in I(x)\}. \quad (37)$$

В (37) имеет место равенство, если $g_i(x)$ ($i \in I(x)$) регулярны в точке x . Отсюда и из условий D) и E) вытекает, что многозначное отображение $\partial \psi^+(x; \lambda) : X \times [0, 1] \rightarrow X^*$ полунепрерывно сверху по λ равномерно относительно x на каждом шаре $B(r) \subset X$. Поэтому из (34)–(37) следует, что при $\alpha - M_1 = b_1 > 0$

$$\inf_{\substack{y \in \partial \varphi(x; \lambda; \alpha) \\ x \in B(R) \setminus C(\lambda) \\ \lambda \in [0, 1]}} |y|_{X^*} \geq b_1.$$

Из условий D) и (33) следует, что существует шар $B(\rho)$, для которого при $\alpha = M_1 + b_1$

$$\inf_{\substack{y \in \partial \psi(x; \lambda) + \alpha \partial d_{C(\lambda)}(x) \\ x \in B(\rho) \\ \lambda \in [0, 1]}} |y|_{X^*} = b_2 > 0.$$

Так как $B(\rho) \setminus D(\lambda) = (B(\rho) \setminus C(\lambda)) \cup (B(\rho) \setminus Q(\lambda))$, то

$$\inf_{\substack{y \in \partial \varphi(x; \lambda; \alpha) \\ x \in B(\rho) \setminus D(\lambda) \\ \lambda \in [0, 1]}} |y|_{X^*} \geq \min(b_1, b_2) \geq m_1 > 0. \quad (38)$$

Пусть

$$\sup_{\substack{y \in \partial f(x; \lambda) \\ x \in B(R) \\ \lambda \in [0, 1]}} |y|_{X^*} = M_2.$$

Покажем, что при $\alpha = M_1 + b_1$ и $k > 3M_2/m_1$ выполнены условия леммы 2 для функционалов $\Phi(x; \lambda, \alpha, k)$. Пусть точка $x = 0$ реализует локальный минимум функционала $f(x; 0)$ на множестве $D(0) \cap B(r)$, $2r < \rho < R$. Не ограничивая общности, можно считать, что точка $x = 0$ принадлежит границе множества $D(0)$. Пусть $\mathfrak{N}$ – множество сплайнов, построенных для функционала $\varphi(x) = \varphi(x; 0, \alpha)$ и множества $B(2r) \setminus D(0)$ по той же конструкции, что и сплайны из множества $\mathfrak{M}$, построенного при доказательстве леммы 2 для функционалов $f(x; \lambda)$ и шара $B(R_1)$.

Напомним, что на n -м звене непрерывного сплайна $x(t) \in \mathfrak{N}$ выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= v_{n-1}, \quad t_{n-1} < t < t_n, \quad |v_{n-1}| = 1, \\ \varphi^0(x(t); v_{n-1}) &\leq -\mu(\varphi; 3|x(t)|/4)/2, \end{aligned} \quad (39)$$

где

$$\mu(\varphi; s) = \inf_{\substack{y \in \partial\varphi(x) \\ s \leq x \leq R \\ X \notin D(0)}} |y|_{X^*}.$$

Для того же звена сплайна из (38), (39) вытекает неравенство

$$\Phi^0(x; 0, \alpha, k; v_{n-1}) \leq f^0(x; 0; v_{n-1}) + k\varphi^0(x; v_{n-1}) < 0.$$

Тогда для функций $\gamma(t) = \Phi(x(t); 0, \alpha, k)$, $\eta(t) = \varphi(x(t))$ почти везде справедливы неравенства

$$\dot{\gamma}(t) < 0, \quad (40)$$

$$\dot{\eta}(t) \leq -\mu(\varphi; 3|x(t)|/4)/2. \quad (41)$$

Если сплайн $x(t)$ начинается в точке $x_0 \in B(r) \setminus D(0)$, то для него возможны два варианта. Либо существует T (конечное или бесконечное) такое, что $x(T) \in B(2r) \cap D(0)$, либо найдется T_1 такое, что $|x(T_1)| = 2r$. В первом случае из (40) следует

$$\Phi(x_0; 0, \alpha, k) > f(0; 0). \quad (42)$$

Во втором случае из (41) вытекает

$$k\varphi(x_0) > k_1 r, \quad k_1 > M_2. \quad (43)$$

Из (43) следует, что

$$k\varphi(x_0) > k_1 d_{D(0)}(x_0). \quad (44)$$

В [12] показано, что функционал $f(x; 0) + k_1 d_{D(0)}(x)$ имеет минимум на шаре $B(r)$ в точке $x = 0$. Тогда из (42) и (44) следует $\Phi(x_0; 0, \alpha, k) > f(0; 0)$, т.е. функционал $\Phi(x; 0, \alpha, k)$ имеет минимум на шаре $B(r)$ в точке $x = 0$ при $\alpha = M_1 + b_1$ и $k > 3M_2/m_1$.

Пусть $\lambda \in [0, 1]$ и $0 < \rho < R/2$. В силу (38) получим для $x \in B(\rho) \setminus D(\lambda)$

$$\inf_{y \in \partial\Phi(x; \lambda, \alpha, k)} |y|_{X^*} \geq \inf_{y \in \partial f(x; \lambda) + k\partial\varphi(x; \lambda, \alpha)} |y|_{X^*} \geq km_1 - M_2 > 0.$$

Если $x \in B(\rho) \cap D(\lambda) \setminus \{0\}$, то $0 \notin \partial\Phi(x; \lambda, \alpha, k)$ по условию теоремы. Таким образом, условия леммы 2 выполнены и первое утверждение теоремы 2 доказано.

Для доказательства второго утверждения теоремы 2 применим схему доказательства второго утверждения теоремы 1 к функционалу $p(F(x; 1)) + k\varphi(x; 1, \alpha)$, $p \in \mathfrak{P}(1)$, $\alpha = M_1 + b_1$, $k > 3M_2/m_1$. Получим, что существует шар $B(\rho_1)$, для ненулевых точек которого $p(F(x; 1)) + k\varphi(x; 1, \alpha) > 0$ для $\forall p \in \mathfrak{P}(1)$, т.е. на множестве $B(\rho_1) \cap D(1) \setminus \{0\}$ имеет место неравенство $p(F(x; 1)) > 0$, т.е. $F(x; 1) > 0$. Теорема доказана.

**§ 4. Достаточные условия для
существования глобального K -оптимума**

Говорят [13], что локально липшицев функционал $\varphi(x)$ на банаховом пространстве X удовлетворяет слабому условию (ПС), если для любой последовательности x_n , $n \in \mathbb{N}$, в X , обладающей свойствами

$$\begin{aligned} |\varphi(x_n)| &\leq \text{const}, \quad 0 \notin \partial\varphi(x_n) \quad \forall n, \\ \inf_{y \in \partial\varphi(x_n)} |y|_{X^*} &\rightarrow 0, \end{aligned}$$

существует точка $x_* \in X$ такая, что

$$\liminf \varphi(x_n) \leq \varphi(x_*) \leq \limsup \varphi(x_n), \quad 0 \in \partial\varphi(x_*).$$

Для дальнейшего изложения нам потребуется обобщение результата Амброзетти и Рабиновича [13].

ТЕОРЕМА 3. Пусть X – банахово пространство и $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$ – локально липшицев функционал, удовлетворяющий на X слабому условию (ПС) и

$$\exists \alpha > 0 : m(\alpha) = \inf\{\varphi(x) : |x| = \alpha\} > \varphi(0), \quad (45)$$

$$\exists z \in X : |z| > \alpha \quad \text{и} \quad \varphi(z) < m(\alpha). \quad (46)$$

Тогда существует точка $x_* \in X$ такая, что

$$\varphi(x_*) \geq m(\alpha), \quad 0 \in \partial\varphi(x_*).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\mathfrak{G}$ совокупность всех непрерывных путей $c(t)$, $0 \leq t \leq 1$, из нуля в z , снабдив это множество расстоянием

$$d(c_1, c_2) = \max\{|c_1(t) - c_2(t)| : 0 \leq t \leq 1\}.$$

Мы получили полное метрическое пространство. Рассмотрим функцию $I: \mathfrak{G} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$I(c) = \max\{\varphi(c(t)) : 0 \leq t \leq 1\}. \quad (47)$$

Функция I полунепрерывна снизу и ограничена снизу величиной $m(\alpha)$. Из ε -вариационного принципа Экланда [13] следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется траектория c_ε такая, что

$$\begin{aligned} I(c_\varepsilon) &< \inf\{I(c) : c \in \mathfrak{G}\} + \varepsilon, \\ \forall c \in \mathfrak{G} \quad I(c) &\geq I(c_\varepsilon) - \varepsilon d(c, c_\varepsilon). \end{aligned}$$

Пусть $C^0([0, 1])$ – банахово пространство непрерывных отображений из $[0, 1]$ в X с нормой $|c|_C = \max\{|c(t)| : 0 \leq t \leq 1\}$. Пусть $\gamma \in C^0([0, 1])$, $|\gamma|_C = 1$ и $\gamma(0) = \gamma(1) = 0$. Тогда для любого $h \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$I(c_\varepsilon + h\gamma) - I(c_\varepsilon) \geq -\varepsilon h. \quad (48)$$

Функционал $I(c)$ формулой (47) определен на всем пространстве $C^0([0, 1])$, он локально липшицев и из (48) следует неравенство

$$I^0(c_\varepsilon; \gamma) \geq -\varepsilon. \quad (49)$$

Неравенство (49) равносильно неравенству

$$\max\{\langle \eta, \gamma \rangle : \eta \in \partial I(c_\varepsilon)\} \geq -\varepsilon. \quad (50)$$

Пусть $I_t(c) = \varphi(c(t))$. Тогда $I(c) = \max\{I_t(c) : 0 \leq t \leq 1\}$ и

$$I_t^0(c; \gamma) = \varphi^0(c(t); \gamma(t)). \quad (51)$$

Из теоремы о градиенте поточечного максимума [12] следует включение

$$\partial I(c_\varepsilon) \subset \left\{ \int_0^1 \partial I_t(c_\varepsilon) \mu(dt) : \mu \in P(M(c_\varepsilon)) \right\}, \quad (52)$$

где $M(c) = \{t \in [0, 1] : I_t(c) = I(c)\}$, $P(S)$ – множество вероятностных мер Радона, сосредоточенных на S . Из (50)–(52) следует неравенство

$$\sup \left\{ \int_0^1 \varphi^0(c_\varepsilon(t); \gamma(t)) \mu(dt) : \mu \in P(M(c_\varepsilon)) \right\} \geq -\varepsilon. \quad (53)$$

Покажем, что найдется точка $t_0 \in M(c_\varepsilon)$, для которой выполнено неравенство

$$\inf_{y \in \partial \varphi(c_\varepsilon(t_0))} |y|_{X^*} \leq 2\varepsilon. \quad (54)$$

В предположении противного в силу теоремы отделимости для каждой точки $t \in M(c_\varepsilon)$ найдется $\gamma_t \in X$, $|\gamma_t| = 1$, для которого выполнено неравенство

$$\varphi^0(c_\varepsilon(t), \gamma_t) \leq -3\varepsilon/2.$$

В силу полунепрерывности сверху обобщенной производной и компактности $M(c_\varepsilon)$ найдется конечная система Δ_i открытых отрезков, покрывающих $M(c_\varepsilon)$, и элементов $\gamma_i \in X$, $|\gamma_i| = 1$, таких, что для точек t каждого отрезка Δ_i выполнено неравенство

$$\varphi^0(c_\varepsilon(t), \gamma_i) \leq -5\varepsilon/4. \quad (55)$$

Построим непрерывную кусочно линейную функцию $\gamma(t)$, $\gamma(0) = \gamma(1) = 0$, равную γ_i для тех точек Δ_i , которые не принадлежат соседним отрезкам. В силу (55) для этой функции не выполняется неравенство (53). Мы пришли к противоречию. Но тогда в силу слабого условия (ПС) найдется точка $x_* \in X$, для которой

$$\varphi(x_*) \geq m(\alpha), \quad 0 \in \partial \varphi(x_*).$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполнены условия теоремы 2 и следующие соотношения:

$$\sup_{y \in \partial f(x,1), x \in X \setminus D(1)} |y|_{X^*} < \infty,$$

$$\inf_{y \in \partial \psi(x,1), x \in C(1) \setminus D(1)} |y|_{X^*} > 0,$$

для каждого $x \in D(1) \setminus \{x_*(1)\}$

$$0 \notin \partial f(x;1) + \mu \partial \psi(x;1) + \alpha \partial d_{C(1)}(x),$$

где $\mu \geq 0$, $\alpha > 0$, $\mu \psi(x;1) = 0$. Пусть для достаточно больших μ и α функционал

$$f(x;1) + \mu \psi^+(x;1) + \alpha d_{C(1)}(x)$$

удовлетворяет слабому условию (ПС).

Тогда точка $x_*(1)$ реализует глобальный K -оптимум задачи (30)–(32). Если функционалы

$$p(F(x;1)) + \mu \psi^+(x;1) + \alpha d_{C(1)}(x), \quad p \in \mathfrak{P}(1), \quad \mu, \alpha > 0,$$

не имеют критических точек на $D(1) \setminus \{x_*(1)\}$, удовлетворяют условию (ПС) на каждом шаре и слабому условию (ПС) на X , то точка $x_*(1)$ реализует глобальный оптимум задачи (30)–(32).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вследствие теоремы 2 точка $x_*(1)$ является точкой локального K -оптимума задачи (30)–(32). Из условий теоремы вытекает отсутствие критических точек, кроме $x_*(1)$, у функционала

$$f(x;1) + \mu \psi^+(x;1) + \alpha d_{C(1)}(x)$$

при достаточно больших μ и α . Отсюда и из теоремы 3 следует первое утверждение теоремы. Второе утверждение доказывается аналогично. $\square$

Пусть $\psi(x; \lambda) = \psi(x)$, $C(\lambda) = C$, $\lambda \in [0, 1]$, функционал $f(x; 1)$ тот же, что и в §3, а $f(x; 0)$ – некоторый липшицевый на каждом шаре функционал.

ТЕОРЕМА 5. Пусть X – рефлексивное пространство и функционалы $f(x; 0)$, $f(x; 1)$, $\psi(x)$ слабо полунепрерывны снизу. Пусть выполнены следующие условия:

а) семейство оптимизационных задач

$$g(x; \lambda) = (1 - \lambda)f(x; 0) + \lambda f(x; 1) \rightarrow \min,$$

$$\psi(x) \leq 0,$$

$$x \in C$$

не имеет экстремалей в X , отличных от нуля при $\lambda \in [0, 1]$;

б) обобщенные градиенты $\partial\psi(x)$ и $\partial d_C(x)$ удовлетворяют условию регулярности при $x \neq 0$:

$$0 \notin \mu\partial\psi(x) + \alpha\partial d_C(x), \quad \mu, \alpha > 0;$$

в) функционал $f(x; 0)$ является растущим на допустимом множестве $D = C \cap Q$

$$\lim_{x \in D, |x| \rightarrow \infty} f(x; 0) = \infty.$$

Тогда точка 0 реализует глобальный K -оптимум задачи (30)–(32).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем некоторое $A > 0$ и рассмотрим задачу

$$f(x; 1) \rightarrow \min, \quad (56)$$

$$\psi(x) \leq 0, \quad (57)$$

$$x \in C \quad (58)$$

$$f(x; 0) - A \leq 0. \quad (59)$$

В силу условий теоремы множество, выделяемое неравенствами $\psi(x) \leq 0$ и $f(x; 0) \leq A$ и включением $x \in C$, слабо компактно. Поэтому задача (56)–(59) имеет решение x_0 . Покажем, что $x_0 = 0$. Согласно [12] точка x_0 является экстремалью задачи (56)–(59), т.е. для нее выполнены соотношения

$$0 \in \alpha\partial f(x_0; 1) + \beta\partial f(x_0; 0) + \mu\partial\psi(x_0) + \nu\partial d_C(x_0), \quad (60)$$

$$\mu\psi(x_0) = 0, \quad (61)$$

$$\beta(f(x_0; 0) - A) = 0,$$

где $\alpha, \beta, \mu \geq 0$, $\nu > 0$, $\alpha + \beta + \mu > 0$.

В силу условия б) справедливо неравенство $\alpha + \beta > 0$, и соотношения (60), (61) можно переписать в виде

$$0 \in (1 - \lambda_0)\partial f(x_0; 0) + \lambda_0\partial f(x_0; 1) + \bar{\mu}\partial\psi(x_0) + \bar{\nu}\partial d_C(x_0),$$

$$\bar{\mu}\psi(x_0) = 0,$$

где $\lambda_0 = \alpha/(\alpha + \beta)$, $\bar{\mu} = \mu/(\alpha + \beta)$, $\bar{\nu} = \nu/(\alpha + \beta)$.

В силу условия а) имеем $x_0 = 0$. Поскольку константа A произвольна, то в силу условия в) 0 – точка глобального K -оптимума задачи (30)–(32). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Все приведенные теоремы без труда распространяются на случай, когда Y конечномерно, а компоненты вектора $F(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ являются локально липшицевыми функционалами.

Список литературы

1. *Бобылёв Н. А.* О деформационном методе исследования функционалов качества систем с бесконечным числом степеней свободы // Автоматика и телемеханика. 1981. № 7. С. 11–13.
2. *Бобылёв Н. А.* О деформации функционалов, имеющих единственную критическую точку // Матем. заметки. 1983. Т. 34. № 3. С. 387–398.
3. *Бобылёв Н. А.* Деформационный метод исследования задач нелинейного программирования. I // Автоматика и телемеханика. 1989. № 7. С. 82–90.
4. *Бобылёв Н. А.* Деформационный метод исследования задач нелинейного программирования. II // Автоматика и телемеханика. 1989. № 8. С. 24–33.
5. *Бобылёв Н. А., Кондаков Г. В.* Деформационный метод исследования негладких оптимизационных задач // Автоматика и телемеханика. 1991. № 5. С. 46–57.
6. *Барбакадзе Т. Н., Бобылёв Н. А., Кондаков Г. В.* Деформационный принцип минимума для функционалов на банаховых пространствах // Динамика неоднородных систем. Сб. трудов ВНИИСИ. 1991. Вып. 15. С. 6–15.
7. *Скалыга В. И.* О деформационном методе исследования на условный минимум функционалов качества систем с бесконечным числом степеней свободы // Автоматика и телемеханика. 1991. № 6. С. 47–55.
8. *Скалыга В. И.* Деформационный метод исследования экстремальных задач с ограничениями // Динамика неоднородных систем. Сб. трудов ВНИИСИ. 1991. Вып. 14. С. 59–63.
9. *Скалыга В. И.* Деформационный метод исследования бесконечномерных оптимизационных задач // Матем. заметки. 1993. Т. 53. № 2. С. 175–176.
10. *Скалыга В. И.* Деформационный метод исследования негладких бесконечномерных оптимизационных задач // Автоматика и телемеханика. 1993. № 11. С. 66–69.
11. *Скалыга В. И.* О деформациях негладких оптимизационных задач, имеющих изолированную экстремаль // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 4. С. 186–193.
12. *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988.
13. *Обен Ж. П., Экланд И.* Прикладной нелинейный анализ. М.: Мир, 1988.
14. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы, общая теория. М.: ИЛ, 1962.

Поступило в редакцию
25.X.1995