Общероссийский математический портал

В. А. Скворцов, Аппроксимативная симметрическая вариация и N -свойство Лу-
зина, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1997, том 61, выпуск 4, 155–166

DOI: <https://doi.org/10.4213/im140>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и со-
гласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 04:30:54

УДК 517.518

В. А. Скворцов

Аппроксимативная симметрическая вариация и N -свойство Лузина

Построен пример непрерывной функции, которая всюду имеет аппроксимативную симметрическую производную, но в то же время не обладает N -свойством Лузина. На том же примере доказано существование непрерывной функции, у которой аппроксимативная вариация на некотором множестве нулевой меры отлична от нуля, а аппроксимативная симметрическая вариация равна нулю на том же множестве.

Библиография: 7 наименований.

Известно (см. [1]), что если функция аппроксимативно дифференцируема на некотором множестве, то она является АСГ-функцией на этом множестве и тем самым обладает на нем N -свойствами Лузина.

Здесь мы покажем, что этот результат не распространяется на симметрические аппроксимативные первообразные. Более того, в примере, который будет построен, аппроксимативная симметрическая производная построенной функции равна нулю на том множестве меры нуль, для которого нарушается N -свойство. Это позволяет на указанном примере провести также сравнение двух понятий вариации функции по множеству, определяемых с помощью двух соответствующих дифференциальных базисов: аппроксимативного и аппроксимативного симметрического.

Приведем необходимые определения (см. [2]–[4]).

Напомним, что по определению функция F обладает на множестве X N -свойством, если для любого подмножества $E \subset X$ меры нуль его образ $\mathcal{F}(E)$ также имеет меру нуль.

Дифференциальным базисом B назовем некоторое семейство подмножеств декартова произведения $J \times \mathbb{R}$, где J – множество всех невырожденных интервалов на действительной прямой $\mathbb{R}$. Базис B будем предполагать фильтрующимся, т.е. обладающим свойством: для любых двух элементов $\beta_1, \beta_2 \in B$ существует такой элемент β , что $\beta \subset \beta_1 \cap \beta_2$ (предполагается также, что пустое множество не содержится в B). Для $E \subset \mathbb{R}$ введем обозначение

$$\beta[E] = \{(I, x) \in \beta, \quad x \in E\}.$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 94-01-00417).

Пусть Φ – функция интервала, заданная на всех интервалах I таких, что $(I, x) \in \beta$ при некотором x и некотором β . Определим *верхнее* и *нижнее производные числа функции Φ в точке x относительно базиса B* , положив

$$\begin{aligned}\overline{D}_B \Phi(x) &= \inf_{\beta \in B} \sup_{(I, x) \in \beta[\{x\}]} \frac{\Phi(I)}{|I|}, \\ \underline{D}_B \Phi(x) &= \sup_{\beta \in B} \inf_{(I, x) \in \beta[\{x\}]} \frac{\Phi(I)}{|I|}.\end{aligned}$$

Будем предполагать, что для любой точки $x \in \mathbb{R}$ и для любого $\beta \in B$ справедливо $\beta[\{x\}] \neq \emptyset$. Тогда всегда $\overline{D}_B \Phi(x) \geq \underline{D}_B \Phi(x)$. Если $\overline{D}_B \Phi(x) = \underline{D}_B \Phi(x)$, то это общее значение называется *производной функции Φ по базису B в точке x* и обозначается $D_B \Phi(x)$.

Вариация функции интервала Φ по множеству $E \subset \mathbb{R}$ относительно $\beta \in B$ определяется соотношением

$$V(\Phi, E, \beta) = \sup \sum_j \Phi(I_j), \quad (1)$$

где $\sup$ берется по всевозможным конечным наборам неперекрывающихся интервалов I_j таких, что $(I_j, x_j) \in \beta[E]$.

Вариация функции Φ по множеству $E \subset \mathbb{R}$ относительно базиса B определяется соотношением

$$V(\Phi, E, B) = \inf_{\beta \in B} V(\Phi, E, \beta). \quad (2)$$

Для функции точки F понятия производных чисел и вариации определяются через соответствующие понятия для функции интервала, заданной для интервала $I = [a, b]$ равенством

$$\Phi(I) = F(b) - F(a). \quad (3)$$

Здесь мы будем рассматривать определенные выше понятия применительно к двум дифференциальным базисам: аппроксимативному и симметрическому аппроксимативному. Для описания этих базисов введем вспомогательное понятие плотностной шкалы.

Плотностной шкалой Δ на измеримом множестве $E \subset \mathbb{R}$ назовем измеримое подмножество плоскости $\mathbb{R}^2$ такое, что для каждого $x \in E$ множество $\Delta_x = \{h, h > 0, (x, h) \in \Delta\}$ имеет внутреннюю правую плотность 1 в точке 0 (предположение измеримости Δ используется лишь при определении аппроксимативного симметрического интеграла, оно не понадобится нам в данной статье).

Для фиксированной плотностной шкалы Δ на отрезке $[a, b]$ определим множество β_Δ всевозможных пар $([x, x \pm h], x)$, где $(x, h) \in \Delta$. Эти множества β_Δ и будут при всевозможных Δ выступать в качестве элементов *аппроксимативного базиса $B_{\text{ар}}$* . Аналогичным образом *аппроксимативный симметрический базис $B_{\text{ар,с}}$* определяется как набор элементов β_Δ^s для всевозможных шкал Δ , каждый из которых представляет собой множество всех пар $([x - h, x + h], x)$, где $(x, h) \in \Delta$ для фиксированной шкалы Δ .

Определение (1), примененное к элементу β_Δ аппроксимативного базиса B_{ap} и к функции множества Φ , заданной равенством (3) по функции точки F , определенной на некотором интервале, сводится к выражению

$$V(F, E, \beta_\Delta) = \sup \sum_j |F(x_j \pm h_j) - F(x_j)|, \quad (4)$$

где $\sup$ берется по множеству всех конечных наборов неперекрывающихся интервалов вида $[x_j - h_j, x_j]$ или $[x_j, x_j + h_j]$ при $x_j \in E$ и $(x_j, h_j) \in \Delta$. Тогда в соответствии с определением (2) *аппроксимативная вариация* функции F на множестве E определяется как

$$V_{\text{ap}}(F, E) = \inf (F, E, \beta_\Delta), \quad (5)$$

где $\inf$ берется по множеству всех элементов базиса B_{ap} , т.е. по множеству всех плотностных шкал.

Аналогичным образом конкретизируется определение аппроксимативной симметрической вариации. А именно, сначала полагаем

$$V(F, E, \beta_\Delta^s) = \sup \sum_j |F(x_j + h_j) - F(x_j - h_j)|, \quad (6)$$

где $\sup$ берется по множеству всех конечных наборов неперекрывающихся интервалов вида $[x_j - h_j, x_j + h_j]$ при $x_j \in E$ и $(x_j, h_j) \in \Delta$, а затем определяем *аппроксимативную симметрическую вариацию* как

$$V_{\text{ap.s}}(F, E) = \inf_{\Delta} V(F, E, \beta_\Delta^s). \quad (7)$$

Определение производных чисел и производной, примененное к базисам B_{ap} и $B_{\text{ap.s}}$, дает понятие *аппроксимативных* и соответственно *аппроксимативных симметрических производных чисел* и *производной* $D_{\text{ap.s}}F(x)$.

Непосредственно из определений производной и вариации легко выводится следующее утверждение.

ЛЕММА 1. *Если на множестве E аппроксимативная или аппроксимативная симметрическая производная функции F равна нулю, то соответствующая вариация функции F на множестве E также равна нулю.*

Приступим теперь к описанию конструкции примера, из которого будут получены основные результаты данной статьи.

Прежде всего построим на $[0, 1]$ совершенное симметричное множество канторовского типа с переменным отношением длины удаляемого интервала к длине отрезка, из которого он удаляется. Все интервалы и отрезки в нижеследующем построении имеют два индекса, где верхний означает ранг (шаг построения), а нижний – порядковый номер слева направо при фиксированном верхнем индексе. Поскольку все интервалы одного и того же ранга будут иметь одинаковую длину, то мы можем условиться обозначать длину интервала той же буквой, что и сам интервал, но без нижнего индекса. Так, $u^{(n)}$ будет обозначать длину любого из интервалов $u_j^{(n)}$.

Построение проведем по индукции. Пусть $s_0^{(1)} = [0, 1]$. Удалим из $s_0^{(1)}$ концентрический с ним интервал $u_0^{(1)}$ так, чтобы длина каждого из двух остающихся отрезков второго ранга, $s_0^{(2)}$ и $s_1^{(2)}$, была равна $s^{(2)} = 2^{-1} \cdot 2^{-2} = 2^{-1} \cdot 2^{-2} s^{(1)}$. Пусть после $n - 1$ шагов остались отрезки $s_j^{(n)}$, $j = 0, 1, \dots, 2^{n-1} - 1$, ранга n длины $s^{(n)}$. Удалим из каждого из них концентрический с ним интервал $u_j^{(n)}$ длины

$$u^{(n)} = (1 - (n + 1)^{-2}) s^{(n)}, \quad (8)$$

после чего останется 2^n отрезков $s_j^{(n+1)}$, $j = 0, 1, \dots, 2^n - 1$, ранга $n + 1$ длины

$$s^{(n+1)} = 2^{-1} (n + 1)^{-2} s^{(n)}, \quad (9)$$

причем

$$s_{2j}^{(n+1)} \cup u_j^{(n)} \cup s_{2j+1}^{(n+1)} = s_j^{(n)}. \quad (10)$$

Положим

$$S_n = \bigcup_{j=0}^{2^{n-1}-1} s_j^{(n)}, \quad S = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n.$$

Легко проверить, что

$$s^{(n+1)} \leq 2^{-1} \cdot 2^{-2} s^{(n)} \leq 2^{-n} \cdot 2^{-2n} s^{(1)} = 2^{-n} \cdot 2^{-2n},$$

откуда $|S_n| \leq 2^{-2(n-1)}$, и поэтому

$$|S| = 0. \quad (11)$$

Добавим к семейству смежных интервалов $\{u_j^{(n)}\}$ два несобственных интервала, $u_{-1}^{(0)} = (-1, 0)$ и $u_0^{(0)} = (1, 2)$, так что все дальнейшее построение осуществим на интервале $(-1, 2)$.

Заметим, что к каждому отрезку $s_j^{(n)}$, $n = 1, 2, \dots$; $j = 0, 1, \dots, 2^{n-1} - 1$, примыкают слева и справа смежные интервалы ранга, не превосходящего $n - 1$, причем ранг одного из них (при $n \geq 2$) в точности равен $n - 1$. На интервале $u_l^{(k)}$, расположенном слева от $s_j^{(n)}$, отложим интервал $t_{2j}^{(n)}$ так, чтобы его правый конец совпал с левым концом отрезка $s_j^{(n)}$, а на интервале $u_p^{(m)}$, примыкающем к $s_j^{(n)}$ справа, отложим интервал $t_{2j+1}^{(n)}$, левый конец которого совпадает с правым концом отрезка $s_j^{(n)}$. При этом длина откладываемых интервалов удовлетворяет соотношению

$$t^{(n+1)} = 4^{-1} \cdot n^{-1} u^{(n)} = 4^{-1} n^{-1} (1 - (n + 1)^{-2}) s^{(n)} \quad (12)$$

(второе равенство следует из (8)).

Отметим, что

$$t^{(n+1)} = o(u^{(n)}) \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty. \quad (13)$$

Поскольку каждый интервал $u_j^{(n)}$ по построению заключен между $s_{2j}^{(n+1)}$ и $s_{2j+1}^{(n+1)}$ (см. (10)), на нем будут отложены интервалы $t_{4j+1}^{(n+1)}$ и $t_{4j+2}^{(n+1)}$. Между ними будет заключен отрезок, концентрический с $u_j^{(n)}$, который мы обозначим $v_j^{(n)}$. Итак,

$$u_j^{(n)} = t_{4j+1}^{(n+1)} \cup v_j^{(n)} \cup t_{4j+2}^{(n+1)}.$$

В силу (12)

$$v^{(n)} = (1 - 2^{-1}n^{-1})u^{(n)} > 0 \quad \text{при всех } n = 1, 2, \dots \quad (14)$$

Но к интервалу $u_j^{(n)}$ примыкают также отрезки $s_k^{(m)}$ ранга m при всех $m \geq n+1$. Поэтому в результате построения на $u_j^{(n)}$ будут отложены интервалы длины $t^{(m)}$, $m \geq n+1$, образующие две последовательности вложенных интервалов:

$$\{t_{jm}^{(m)}\}_m \quad \text{и} \quad \{t_{jm+1}^{(m)}\}_m, \quad (15)$$

так что интервалы первой последовательности имеют с $u_j^{(n)}$ левый общий конец, а интервалы второй последовательности – правый общий конец. Тем самым интервал $u_j^{(n)}$, $n \geq 1$, может быть представлен в виде следующего объединения непересекающихся промежутков:

$$u_j^{(n)} = v_j^{(n)} \cup \left(\bigcup_{m=n+1}^{\infty} (t_{jm}^{(m)} \setminus t_{jm+1}^{(m+1)}) \right) \cup \left(\bigcup_{m=n+1}^{\infty} (t_{jm+1}^{(m)} \setminus t_{jm+1+1}^{(m+1)}) \right). \quad (16)$$

На интервале $u_{-1}^{(0)}$ отложены интервалы $t_0^{(n)} = (-t^{(n)}, 0)$, $n = 1, 2, \dots$, а на $u_0^{(0)}$ – интервалы $t_{2^{n+1}-1}^{(n)} = (1, 1 + t^{(n)})$, $n = 1, 2, \dots$, так что

$$\begin{aligned} u_{-1}^{(0)} &= (-1, 0) = (-1, -t^{(1)}] \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} t_0^{(n)} \right), \\ u_0^{(0)} &= (1, 2) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} t_{2^{n+1}-1}^{(n)} \right) \cup [1 + t^{(1)}, 2). \end{aligned} \quad (17)$$

Отметим следующие соотношения. Из (9) и (12) следует равенство

$$s^{(n)} = 2^{-1}n^{-2}s^{(n-1)} = 2(n+1)^{-1}t^{(n)}, \quad (18)$$

так что

$$s^{(n)} = o(t^{(n)}) \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (19)$$

$$s^{(n)} \leq 4^{-1}t^{(n)} \quad \text{при всех } n \geq 3. \quad (20)$$

Из (12) следует, что

$$t^{(n+1)} \leq 4^{-1} s^{(n)} \quad \text{при всех} \quad n \geq 1. \quad (21)$$

Отсюда при $n \geq 3$

$$s^{(n)} \leq 2^{-4} s^{(n-1)}, \quad t^{(n+1)} \leq 2^{-4} t^{(n)},$$

и поэтому

$$\sum_{k=n}^{\infty} t^{(k)} \leq 2t^{(n)}, \quad \sum_{k=n}^{\infty} s^{(k)} \leq 2s^{(n)}. \quad (22)$$

Определим на множестве S сингулярную меру μ так, чтобы для любого $n \geq 1$

$$\mu(S \cap s_j^{(n)}) = 2^{1-n}. \quad (23)$$

В частности,

$$\mu(S) = \mu(S \cap s_0^{(1)}) = 1. \quad (24)$$

Зададим на $(-1, 2)$ сингулярную непрерывную функцию

$$R(x) = \mu(S \cap (-1, x]). \quad (25)$$

Приступим теперь к построению основной функции F .

Положим $F(x) = R(x)$, если $x \in S$, и сразу отметим, что отсюда, из (11) и (24) следует

СВОЙСТВО 1. Функция F отображает множество S на отрезок $[0, 1]$ и тем самым не обладает N -свойством.

Пусть также

$$\begin{aligned} F(x) = R(x) \quad \text{при} \quad x \in v_j^{(n)}, \quad n = 1, 2, \dots, \\ j = 0, 1, \dots, 2^{n-1} - 1 \quad \text{и при} \quad x \in (-1, -t^{(1)}] \cup [1 + t^{(1)}, 2). \end{aligned} \quad (26)$$

В остальных точках каждого интервала $u_j^{(n)}$ определим функцию F с учетом представлений (16) и (17) и в зависимости от уже заданных значений F на отрезках $v_k^{(m)}$ в соседних смежных интервалах. Эти постоянные в силу (26) и (25) значения F в точках отрезка $v_k^{(m)}$ будет удобно обозначить $F(v_k^{(m)})$.

Легко проверить, что индексы в последовательностях (16) удовлетворяют соотношениям $j_{m+1} = 2j_m + 1$, $j_{m+1} + 1 = 2(j_m + 1)$. В частности, отсюда видно, что если $t_{2j}^{(m)}$ и $t_{2j+1}^{(m)}$ примыкают к отрезку $s_j^{(m)}$ соответственно слева и справа, то

$$t_{2j}^{(m)} \supset t_{4j}^{(m+1)}, \quad t_{2j+1}^{(m)} \supset t_{4j+3}^{(m+1)}.$$

Заметив это и вспомнив, что $v_j^{(m)} \subset u_j^{(m)} \subset s_j^{(m)}$, положим

$$F(x) = F(v_j^{(m)}) = R(v_j^{(m)}), \quad x \in (t_{2j}^{(m)} \setminus t_{4j}^{(m+1)}) \cup (t_{2j+1}^{(m)} \setminus t_{4j+3}^{(m+1)}). \quad (27)$$

Для дальнейшего отметим, что если $t_l^{(m+1)}$ и $t_i^{(m+2)} \subset t_l^{(m+1)}$ – интервалы, лежащие на некотором смежном интервале $u_q^{(m)}$, а к ним примыкает отрезок $s_p^{(m+1)}$ с лежащими на нем интервалом $u_p^{(m+1)}$, отрезком $v_p^{(m+1)} \subset u_p^{(m+1)}$ и отрезком $s_k^{(m+2)}$, отделяющим $u_q^{(m)}$ от $u_p^{(m+1)}$, то (см. (23) и (25))

$$|R(v_p^{(m+1)}) - R(v_q^{(m)})| = \mu(S \cap s_k^{(m+2)}) = 2^{-m-1},$$

и поэтому, с учетом (26) и (27),

$$|F(t_l^{(m+1)} \setminus t_i^{(m+2)}) - F(v_q^{(m)})| = 2^{-m-1}, \quad t_l^{(m+1)} \cup v_q^{(m)} \subset u_q^{(m)}. \quad (28)$$

Итак, функция F определена на всем интервале $(-1, 2)$, но, будучи кусочно постоянной на каждом смежном интервале $u_j^{(n)}$, она имеет изолированные разрывы в концах интервалов $t_k^{(m)}$, лежащих в $u_j^{(n)}$. Окружим каждую точку изолированного разрыва столь малой окрестностью, чтобы сумма всех этих окрестностей, взятая по всем смежным интервалам, образовывала множество P , имеющее нулевую плотность в каждой точке $x \in S$ и не влияющее тем самым на значения аппроксимативной производной в точках S . Изменяя далее значения функции F в указанных окрестностях, сгладим F так, чтобы она, принимая внутри каждой из этих окрестностей значения, промежуточные между значениями в концах окрестности, была дифференцируемой всюду внутри каждого смежного интервала $u_j^{(n)}$. Договоримся полученную в результате исправления функцию по-прежнему обозначать F .

Заметим, что в силу (16) и (27) и ввиду очевидной непрерывности функции R функция F непрерывна в концевых точках интервалов $u_j^{(n)}$ изнутри этих интервалов. Кроме того, из определения функции F видно, что ее значения на интервале $u_j^{(n)}$ определяются значениями функции R на примыкающих к $u_j^{(n)}$ отрезках $s_k^{(m)}$ ранга m при $m > n$. Поскольку все эти отрезки принадлежат отрезку $s_j^{(n)}$, то колебание функции F на $u_j^{(n)}$ не превосходит колебания функции R на $s_j^{(n)}$, т.е. в силу (23) и (25) не превосходит 2^{1-n} и, значит, стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Тем самым можно заключить, что функция F непрерывна на $(-1, 2)$.

Покажем теперь, что

$$D_{\text{ap.s}} F(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in S. \quad (29)$$

Для этого достаточно показать, что для каждой точки $x \in S$ плотность множества $E(x) = \{y : y > 0, F(x-y) \neq F(x+y)\}$ равна нулю в нуле.

Рассмотрим множество $E_n^{(1)}(x) = E(x) \cap (t^{(n)}, u^{(n-1)} - t^{(n)})$. Возьмем отрезок $s_j^{(n)}$, для которого $x \in s_j^{(n)}$. Один из примыкающих к $s_j^{(n)}$ смежных интервалов имеет ранг $n-1$. Пусть для определенности он примыкает к $s_j^{(n)}$ справа. Обозначим его $u_k^{(n-1)}$. Смежный интервал, примыкающий к $s_j^{(n)}$ слева, имеет в этом случае ранг $m < n-1$. На этих интервалах лежат, примыкая к $s_j^{(n)}$ слева и

справа, соответственно интервалы $t_{2j}^{(n)}$ и $t_{2j+1}^{(n)}$, а на левом смежном интервале находится также интервал $t_{2k}^{(n-1)} \supset t_{2j}^{(n)}$. В силу того, что при достаточно большом n справедливо неравенство $u^{(n-1)} - t^{(n)} = t^{(n)} + v^{(n-1)} < s^{(n-1)} < t^{(n-1)}$ (см. (20)), окрестность радиуса $u^{(n-1)} - t^{(n)}$ рассматриваемой точки $x \in S$ удовлетворяет соотношению

$$(x - u^{(n-1)} + t^{(n)}, x + u^{(n-1)} - t^{(n)}) \subset (t_{2k}^{(n-1)} \setminus t_{2j}^{(n)}) \cup t_{2j}^{(n)} \cup s_j^{(n)} \cup t_{2j+1}^{(n)} \cup v_k^{(n-1)}.$$

В силу (27) при $m = n - 1$, если $x + y \in v_k^{(n-1)}$ и $x - y \in t_{2k}^{(n-1)} \setminus t_{2j}^{(n)}$, то

$$F(x + y) = F(x - y) = F(v_k^{(n-1)}).$$

Таким образом, в рассматриваемом случае в $E_n^{(1)}(x)$ могут входить лишь точки y , при которых хотя бы одна из точек $x + y$ и $x - y$ попадает в множество $t_{2j}^{(n)} \cup s_j^{(n)} \cup t_{2j+1}^{(n)} \cup P$. Но поскольку $x \in s_j^{(n)}$, то это может случиться лишь тогда, когда $y < t^{(n)} + s^{(n)}$. Поэтому $E_n^{(1)}(x) \subset (t^{(n)}, t^{(n)} + s^{(n)})$ и, следовательно,

$$|E_n^{(1)}(x)| \leq s^{(n)}. \quad (30)$$

Далее рассмотрим множество $E_n^{(2)}(x) = E(x) \cap (u^{(n-1)} - t^{(n)}, t^{(n-1)}]$. Пусть $x \in s_j^{(n-1)}$. Окрестность точки x радиуса $t^{(n-1)}$ удовлетворяет соотношению

$$(x - t^{(n-1)}, x + t^{(n-1)}) \subset (t_{2j}^{(n-1)} \setminus t_{4j}^{(n)}) \cup t_{4j}^{(n)} \cup s_j^{(n-1)} \cup t_{4j+3}^{(n)} \cup (t_{2j+1}^{(n-1)} \setminus t_{4j+3}^{(n)}).$$

Вновь воспользуемся соотношением (27), заменяя в нем m на $n - 1$. Имеем

$$F(x + y) = F(x - y) = F(v_j^{(n-1)}), \quad x - y \in t_{2j}^{(n-1)} \setminus t_{4j}^{(n)}, \quad x + y \in t_{2j+1}^{(n-1)} \setminus t_{4j+3}^{(n)}.$$

Хотя бы одно из последних соотношений может не выполняться лишь в случае, когда $h < s^{(n-1)} + t^{(n)}$. Поэтому

$$E_n^{(2)}(x) \subset (u^{(n-1)} - t^{(n)}, s^{(n-1)} + t^{(n)}),$$

и, значит, с учетом (10) и (18) при достаточно большом n ,

$$|E_n^{(2)}(x)| \leq s^{(n-1)} - u^{(n-1)} + 2t^{(n)} < 4t^{(n)}. \quad (31)$$

В силу (30), (31), (20) и (22) получаем, что при

$$u^{(n-1)} - t^{(n)} < h \leq t^{(n-1)} \quad (32)$$

и достаточно большом n справедлива оценка

$$\begin{aligned} |E(x) \cap (0, h)| &\leq \sum_{k=n}^{\infty} |E_k^{(2)}(x)| + \sum_{k=n}^{\infty} |E_k^{(1)}(x)| \\ &\leq 4 \sum_{k=n}^{\infty} t^{(k)} + \sum_{k=n}^{\infty} s^{(k)} \leq 5 \sum_{k=n}^{\infty} t^{(k)} \leq 10t^{(n)}. \end{aligned}$$

Поэтому, с учетом (13),

$$\frac{|E(x) \cap (0, h)|}{h} \leq \frac{10t^{(n)}}{u^{(n-1)} - t^{(n)}} = o(1), \quad n \rightarrow \infty, \quad (33)$$

при h , удовлетворяющих (32).

При

$$t^{(n)} < h \leq u^{(n-1)} - t^{(n)} \quad (34)$$

в силу (30), (31), (21) и (22) имеем

$$\begin{aligned} |E(x) \cap (0, h)| &\leq \sum_{k=n}^{\infty} |E_k^{(1)}(x)| + \sum_{k=n+1}^{\infty} |E_k^{(2)}(x)| \\ &\leq \sum_{k=n}^{\infty} s^{(k)} + 4 \sum_{k=n+1}^{\infty} t^{(k)} \leq 2 \sum_{k=n}^{\infty} s^{(k)} \leq 4s^{(n)}, \end{aligned}$$

и поэтому в силу (19)

$$\frac{|E(x) \cap (0, h)|}{h} \leq \frac{4s^{(n)}}{t^{(n)}} = o(1), \quad n \rightarrow \infty, \quad (35)$$

при h , удовлетворяющих (34).

Из (33) и (35) следует, что множество $E(x)$ имеет плотность нуль в нуле для каждой точки $x \in S$, откуда, как уже отмечалось, следует (29).

Итак, с учетом свойства 1, мы доказали справедливость следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 1. *Существует непрерывная функция F , для которой аппроксимативная симметрическая производная $D_{\text{ар.с}}F(x)$ всюду конечна и $D_{\text{ар.с}}F(x) = 0$ на совершенном множестве S нулевой меры. При этом функция F отображает множество S в отрезок $[0, 1]$ и тем самым не обладает N -свойством.*

Рассмотрим теперь вариации $V_{\text{ар}}(F, S)$ и $V_{\text{ар.с}}(F, S)$ построенной функции F (см. (4)–(7)).

В силу леммы 1 $V_{\text{ар.с}}(F, S) = 0$. Покажем, что вариация $V_{\text{ар}}(F, S)$ отлична от нуля. Для этого оценим снизу вариацию $V(F, S, \beta_\Delta)$ для произвольной шкалы Δ . Для каждого $x \in S$ найдем $\delta(x) > 0$ так, чтобы

$$|\Delta_x \cap (0, h)| > \frac{3}{4}h \quad \text{при} \quad 0 < h < \delta(x). \quad (36)$$

Пусть $\{I_k\}_k = \{[x_i - h_i, x_i], [x_j, x_j + h_j]\}_{i,j}$ – конечный набор непересекающихся отрезков таких, что $x_i, x_j \in S$, $0 < h_i < \delta(x_i)$ и $0 < h_j < \delta(x_j)$, причем

$$S \subset \bigcup_k I_k \quad (37)$$

и x_k – конец отрезка I_k , для которого

$$|I_k| < \delta(x_k). \quad (38)$$

Существование такого покрытия доказывается стандартным способом. А именно, доопределим функцию $\delta(x)$ в точках дополнения к S на $[0, 1]$, положив ее в каждой такой точке x равной расстоянию от x до S . Затем возьмем покрытие всего отрезка непересекающимися отрезками вида

$$[x - h, x], \quad [x, x + h] \quad \text{при} \quad 0 < h < \delta(x) \quad (39)$$

(существование такого покрытия установлено, например, в [5]). При этом в силу определения $\delta(x)$ точки множества S будут покрыты лишь такими интервалами вида (39), для которых $x \in S$.

Для фиксированного интервала I_k из покрытия (37) возьмем минимальное n , при котором некоторый отрезок $s_{j_k}^{(n)}$ целиком содержится в I_k (мы, очевидно, можем исключить из покрытия отрезки, имеющие в пересечении с S лишь одну точку). Поскольку в этом случае I_k может иметь непустое пересечение лишь не более чем с двумя отрезками ранга $n - 1$, то (см. (23))

$$\mu(S \cap I_k) \leq 2\mu(S \cap s_j^{(n-1)}) = 2^{3-n}. \quad (40)$$

Пусть x_k – конец отрезка I_k , для которого выполняется (38), – лежит на отрезке $s_p^{(n+1)}$, и пусть $u_q^{(m)}$ – ближайший к x_k интервал ранга $m \leq n$, целиком содержащийся в I_k . Очевидно, $u_q^{(m)}$ примыкает к $s_p^{(n+1)}$, и поэтому расстояние от x_k до $u_q^{(m)}$ не превосходит $s^{(n+1)}$. К отрезку $s_p^{(n+1)}$ примыкают лежащие на $u_q^{(m)}$ и тем самым целиком расположенные внутри I_k интервалы $t_l^{(m+1)}$ и $t_i^{(m+2)} \subset t_l^{(m+1)}$. Поэтому при $m \geq 3$ (см. (20) и (38))

$$s^{(n+1)} + t^{(m+1)} \leq 2t^{(m+1)} < u^{(m)} < \delta(x_k),$$

и к x_k применимо (36) с $h = s^{(n+1)} + t^{(m+1)}$ и $h = u^{(m)}$. В то же время в силу (20), (21) и (14)

$$t^{(m+1)} - t^{(m+2)} \geq \frac{1}{2}(s^{(n+1)} + t^{(m+1)}) \quad \text{и} \quad v^{(m)} \geq \frac{1}{2}u^{(m)}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} |\Delta_{x_k} \cap \{|y - x_k| : y \in t_l^{(m+1)} \setminus t_i^{(m+2)}\}| &\geq \frac{1}{4}(s^{(n+1)} + t^{(m+1)}), \\ |\Delta_{x_k} \cap \{|y - x_k| : y \in v_q^{(m)}\}| &\geq \frac{1}{4}u^{(m)}, \end{aligned}$$

откуда следует, что найдется пара точек $y'_k \in t_l^{(m+1)} \setminus t_i^{(m+2)}$ и $y''_k \in v_q^{(m)}$ таких, что для них числа $|y'_k - x_k|$ и $|y''_k - x_k|$ принадлежат Δ_{x_k} . Ввиду (28) справедливо соотношение

$$|F(y''_k) - F(y'_k)| = 2^{-m-1} \geq 2^{-n-1}.$$

Тогда одна из разностей $|F(y'_k) - F(x_k)|$ и $|F(y''_k) - F(x_k)|$ должна быть не меньше 2^{-n-2} . Обозначим через y_k ту из точек y'_k и y''_k , для которой это неравенство реализуется. Тогда с учетом (40) справедливо неравенство

$$|F(y_k) - F(x_k)| \geq 2^{-n-2} \geq 2^{-5}\mu(S \cap I_k), \quad (41)$$

причем $|y_k - x_k| \in \Delta_{x_k}$. Если I'_k — интервал с концами x_k и y_k , то $(I'_k, x_k) \in \beta_\Delta$, и в соответствии с определением (4) и с учетом (24), (37) и (41) имеем

$$V(F, S, \beta_\Delta) \geq 2^{-5},$$

откуда в силу произвольности Δ получаем, что $V_{\text{ap}}(F, S) \geq 2^{-5}$.

Итак, доказана

ТЕОРЕМА 2. *Существует непрерывная функция, для которой аппроксимативная вариация на некотором множестве меры нуль отлична от нуля, а аппроксимативная симметрическая вариация равна нулю на том же множестве.*

Отметим к тому же, что в силу дифференцируемости построенной выше функции F всюду вне множества S мы можем утверждать, что вариация $V_{\text{ap.s}}(F, S)$ как функция множества σ -конечна на всем интервале $(-1, 2)$, абсолютно непрерывна относительно меры Лебега, но при этом, не обладая N -свойством, не является ACG-функцией на $(-1, 2)$ (см. по этому поводу проблему 29 из [4, с. 423], относящуюся к симметрической вариации).

В заключение воспользуемся построенной функцией F для сравнения аппроксимативного симметрического интеграла с интегралом Данжуа–Хинчина.

Поскольку производная $D_{\text{ap.s}}F(x) = f(x)$ существует и конечна всюду на $[0, 1]$, то $F(x)$, являясь точной аппроксимативной симметрической первообразной функции f , представляет собой неопределенный интеграл функции f как в смысле аппроксимативного симметрического интеграла Перрона (ASP-интеграла), так и в

смысле аппроксимативного симметрического интеграла Хенстока (ASH-интеграла) (определения этих интегралов см. в [4]).

Рассмотрим теперь функцию $\Phi(x) = F(x) - R(x)$. Поскольку $R'(x) = 0$ всюду вне S , то

$$\Phi'(x) = F'(x) = f(x) \quad \text{п.в. на } [0, 1]. \quad (42)$$

По построению F , а значит, и Φ являются ACG-функциями на каждом смежном интервале $u_j^{(n)}$. Кроме того, $\Phi(x) = 0$ при $x \in S$, и, значит, Φ абсолютно непрерывна на S . Тем самым Φ является ACG-функцией на $[0, 1]$. Вместе с (42) это показывает, что Φ является неопределенным интегралом функции f на $[0, 1]$ в смысле широкого интеграла Данжуа (см. [1]) и интеграла Данжуа–Хинчина (см. [5]), являющегося промежуточным между широким и узким интегралами Данжуа.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. *ASP-интеграл (и ASH-интеграл) и интеграл Данжуа–Хинчина (DX-интеграл) могут противоречить друг другу на классе точных аппроксимативных симметрических производных, т.е. существует всюду конечная интегрируемая в смысле DX-интеграла на $[0, 1]$ функция f , обладающая аппроксимативной симметрической первообразной F с $D_{\text{ap.s}}F(x) = f(x)$ всюду на $[0, 1]$, но для которой*

$$F(1) - F(0) = (\text{ASP}) \int_0^1 f \neq (\text{DX}) \int_0^1 f.$$

Заметим, что последнюю теорему другим способом можно также получить из результатов В. А. Скляренко (см. [6], а также [4, с. 401]).

Список литературы

1. *Сакс С.* Теория интеграла. М.: ИЛ, 1949.
2. *Ostaszewski K. M.* Henstock integration in the plane // Amer. Math. Soc. Memoirs. 1986. V. 63. № 353.
3. *Thomson B. S.* Derivates of Interval Functions // Amer. Math. Soc. Memoirs. 1991. V. 93. № 452.
4. *Thomson B. S.* Symmetric Properties of Real Functions // Monographs and Textbooks in Pure and Appl. Math. № 183. Marcel Dekker Inc., 1994.
5. *Henstock R.* Theory of Integration. London: Butterworth, 1963.
6. *Хинчин А. Я.* О процессе интегрирования Данжуа // Матем. сб. 1918. Т. 30. № 4. С. 548–557.
7. *Скляренко В. А.* Об интегрируемых по Данжуа суммах всюду сходящихся тригонометрических рядов // ДАН СССР. 1973. Т. 210. № 3. С. 533–536.

Поступило в редакцию
25.IX.1995