Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Ю. Стернин, В. Е. Шаталов, Стороннее дифференциальное исчисление и ресургентные уравнения, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1997, том 61, выпуск 4, 167–202

DOI: <https://doi.org/10.4213/im141>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 03:41:40

УДК 517.9

Б. Ю. Стернин, В. Е. Шаталов

Стороннее дифференциальное исчисление и резургентные уравнения

В работе описываются методы исследования явления Стокса для резургентных функций нескольких переменных, основанные на понятиях сторонней производной и резургентных уравнений. Разработанные методы могут быть применены к асимптотическому исследованию решений дифференциальных уравнений, интегралов типа Лапласа и др.

Библиография: 20 наименований.

Введение

В этой статье мы описываем методы исследования явления Стокса для резургентных функций. Понятие резургентной функции одной переменной было введено Ж. Экалем [1] в контексте теории суммирования расходящихся рядов. Впоследствии оказалось, что теория резургентной функции является чрезвычайно удобным аппаратом для исследования асимптотических свойств решений дифференциальных уравнений (как обыкновенных, так и в частных производных) с точностью до функций, имеющих сколь угодно быстрое экспоненциальное убывание. При этом могут рассматриваться как асимптотики по малому (большому) параметру, так и асимптотики при больших значениях аргумента. В последнем случае необходимо привлечь понятие резургентной функции нескольких переменных, введенное авторами в работах [2]–[5].

Естественные рамки исследования экспоненциальных асимптотик решений дифференциальных уравнений состоят в том, что эти уравнения рассматриваются при *комплексных* значениях аргументов (как это имеет место в аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений). При этом возникает вопрос об аналитическом продолжении в комплексную область как самого решения (реальная монодромия), так и его асимптотического разложения (формальная монодромия). Соотношение между этими двумя видами монодромии не является прямым: известно, что при аналитическом продолжении решения его асимптотическое разложение может претерпевать скачки (явление Стокса). Данная работа и посвящена аппарату, позволяющему исследовать явление Стокса, – аппарату, известному в литературе под названием “стороннее дифференциальное исчисление” и “сторонние дифференциальные уравнения” – дифференциальные уравнения в сторонних производных (см. [6]–[14]).

Поддержано Université de Nice – Sophia Antipolis. Laboratoire Jean-Alexandre Dieudonné – URA au CNRS N 168, France.

Прежде чем приступить к изложению, напомним основные понятия теории ресургентных функций.

Пусть $\mathbf{C}_x^n$ – комплексное арифметическое пространство с координатами $(x^1, \dots, x^n)$. Рассмотрим в пространстве $\mathbf{C}_x^n$ некоторое коническое (т.е. инвариантное относительно умножения на положительные вещественные числа) множество $K \subset \mathbf{C}_x^n$. Через $E_\alpha(K)$ мы обозначим множество голоморфных в K функций $f(x)$, удовлетворяющих оценке

$$|f(x)| \leq C e^{\alpha|x|}$$

в любом коническом подмножестве $K' \subset K$ с некоторой положительной константой C , зависящей, вообще говоря, от K'^1 . Ниже мы используем обозначения

$$E(K) = \bigcup_{\alpha \in \mathbf{R}} E_\alpha(K), \quad E_{-\infty}(K) = \bigcap_{\alpha \in \mathbf{R}} E_\alpha(K).$$

Пусть $f(x) \in E(K)$. Тогда для любого $x \in K$ функция

$$f_x(\eta) = f(\eta x^1, \dots, \eta x^n)$$

есть функция экспоненциального типа переменной $\eta \in \mathbf{C}$, голоморфная в некоторой конической окрестности $\tilde{K}$ положительной части вещественной оси. Обозначим через

$$F(s, x) = \mathcal{B}[f_x(\eta)] = \frac{1}{2\pi i} \int_A^\infty e^{\eta s} f_x(\eta) d\eta \quad (1)$$

преобразование Бореля функции $f_x(\eta)$ по переменной η ; $F(s, x)$ есть *гиперфункция* (см. [15]), не зависящая от выбора нижнего предела интегрирования A в формуле (1). Интегрирование в (1) проводится по лучу, идущему от точки $A \in \tilde{K}$ в бесконечность внутри сектора $\tilde{K}$.

Обратное преобразование к (1) задается интегралом

$$f(x) = \mathcal{L}[F(s, x)] = \int_\gamma e^{-s} F(s, x) ds \quad (2)$$

по контуру γ , охватывающему особенности функции $F(s, x)$ и уходящему в бесконечность в направлении возрастания $\operatorname{Re} s$.

Мы напомним определение ресургентной функции нескольких переменных (см. [3]–[5]).

¹Мы пишем $K' \subset K$ для конических подмножеств K' и K , если $K'/\mathbf{R}_+$ компактно вложено в $K/\mathbf{R}_+$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функция $f(x)$ называется *ресургентной*, если ее преобразование Бореля $F(s, x)$ бесконечно продолжимо² по переменной s . Пространство ресургентных функций мы будем обозначать через $\mathcal{R}$.

Если функция $f(x)$ является ресургентной, то, деформируя контур γ в направлении положительной вещественной полуоси, формулу (2) можно переписать в виде

$$f(x) = \sum_k \int_k e^{-s} F(s, x) ds, \quad (3)$$

где суммирование ведется по всем особым точкам $S_k(x)$ функции $F(s, x)$, “захваченным” при описанной выше деформации контура γ , а каждый из контуров Γ_k есть контур, приходящий из бесконечности вдоль луча $\operatorname{Re} s = \operatorname{Re} S_k(x)$, охватывающий особую точку $S_k(x)$ в положительном направлении и уходящим на бесконечность вдоль этого луча.

Выражения, стоящие под знаком суммы в формуле (3), есть не что иное как преобразования Лапласа микрофункций³, определяемых функцией $F(s, x)$ в точках $s = S_k(x)$ (см. [15]). Множество бесконечно продолжимых микрофункций в точке $s \in \mathbb{C}$ мы будем обозначать через $\mathcal{M}_{s, \text{cont}}$. Формула (3) задает изоморфизм

$$\mathcal{R} \cong \bigoplus'_{s \in \mathbb{C}} \mathcal{M}_{s, \text{cont}},$$

где $\bigoplus'_{s \in \mathbb{C}}$ есть подпространство прямой суммы $\bigoplus_{s \in \mathbb{C}} \mathcal{M}_{s, \text{cont}}$, состоящее из элементов этой прямой суммы, носители которых заключены в угле раствора, меньшего π , с биссектрисой, параллельной положительной части вещественной оси (под носителем элемента понимается множество тех $s \in \mathbb{C}$, для которых соответствующая компонента этого элемента отлична от нуля).

Остановимся в заключение на понятии ресургентной функции с простыми особенностями.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Функция $f(x)$ называется *ресургентной функцией с простыми особенностями*, если ее преобразование Бореля $F(s, x)$ имеет вид

$$\frac{1}{2\pi i} \left[\frac{a_0^{(k)}(x)}{s - S_k(x)} + \ln(s - S_k(x)) \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}^{(k)}(x) \frac{(s - S_k(x))^n}{n!} \right] \quad (4)$$

в окрестности каждой своей особой точки.

²Грубо говоря, функция $F(s)$ называется *бесконечно продолжимой*, если она имеет дискретное множество особенностей на своей римановой поверхности. Более строгое определение читатель может найти, например, в [16].

³В данном контексте под микрофункцией в точке $s = S_k(x)$ мы понимаем росток особенности аналитической (многозначной) функции в этой точке, т.е. класс-вычет аналитической функции $F(s, x)$ по модулю функций, голоморфных в окрестности $s = S_k(x)$. Точные определения читатель может найти в [17], [15].

Известно (см. [2]), что в этом случае функция $f(x)$ имеет асимптотическое разложение вида

$$f(x) \simeq \sum_k e^{-S_k(x)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)}(x), \quad (5)$$

причем разложение ведется по убывающим степеням однородности функций $a_n^{(k)}(x)$.

§ 1. Монодромия ресургентных функций

Цель этого параграфа⁴ – исследовать соотношение между формальной и реальной монодромиями ресургентной функции. Постановка задачи следующая.

Рассмотрим ресургентную функцию $f(x)$ с простыми особенностями (см. выше определение 2). Тогда, как это было уже указано выше, эта функция имеет асимптотическое разложение вида (5), по крайней мере, вне множества $\mathcal{F}$ своих фокальных точек. Здесь $S_k(x)$ для различных k являются значениями (вообще говоря, ветвящейся) функции $S(x)$ (действия), и функции $a_n^{(k)}(x)$ – однородными функциями относительно переменной x (амплитудные функции) с убывающими по n порядками однородности. Эти функции для различных значений k представляют собой значения (ветви) многозначной функции $a_n(x)$.

Члены

$$e^{-S_k(x)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)}(x),$$

входящие в правую часть выражения (5), соответствуют микрофункциям вида (4), которые входят в разложение функции $F(s, x) = \mathcal{B}[f(x)]$ в данной точке x .

Если мы аналитически продолжим функцию $f(x)$ вдоль некоторой петли l , окружающей множество $\mathcal{F}$ ее фокальных точек, то придем, вообще говоря, к другому листу римановой поверхности функции $f(x)$. Таким образом, фундаментальная группа дополнения $\mathbf{C}_x^n \setminus \mathcal{F}$ действует как группа преобразований на римановой поверхности $f(x)$. Это действие называется *реальной монодромией* ресургентной функции $f(x)$.

С другой стороны, фундаментальная группа дополнения $\mathbf{C}_x^n \setminus \mathcal{F}$ действует, очевидно, на множестве микрофункций, определяемых гиперфункцией $F(s, x)$. В силу соотношений между этими микрофункциями и членами асимптотического разложения (5) это действие может быть рассмотрено как действие на пространстве асимптотических рядов, которые могут входить в асимптотическое разложение функции $f(x)$. Поэтому это действие мы будем называть *формальной монодромией*, отвечающей данной ресургентной функции.

В силу явления Стокса соотношение между реальной и формальной монодромиями одной и той же ресургентной функции $f(x)$ не является прямым. Другими словами, асимптотическое разложение аналитического продолжения функции вдоль петли l не совпадает с аналитическим продолжением асимптотического разложения. В частности, функции $S(x)$ и $a_n(x)$ могут иметь ветвления вдоль петли l даже

⁴Результаты этого параграфа, а также §5 получены совместно с А. Ю. Борисовичем.

в случае, когда сама функция $f(x)$ однозначна вдоль этой петли. Такая ситуация является типичной в ресургентном анализе.

Итак, возникает задача нахождения условий на ветвящиеся асимптотические представления ресургентных функций, необходимые и достаточные для того, чтобы функция была однозначна. Такие условия в ресургентном анализе называются *ресургентными уравнениями*, они могут быть выписаны в терминах так называемого “связывающего гомоморфизма” (см. [1]), и здесь мы дадим общий метод построения этих уравнений.

Отметим, что локальная структура римановой поверхности гиперфункции $F(s, x)$, отвечающей данной ресургентной функции $f(x)$, фиксируется требованием, чтобы эта ресургентная функция имела простые особенности. В этом случае ветвление функции $F(s, x)$ вблизи каждой из ее особых точек $S_k(x)$ дается формулой (4). Однако это требование не дает нам никакой информации о глобальной структуре римановой поверхности. Как мы увидим ниже, упомянутые ресургентные уравнения и доставляют нам такого типа глобальную информацию и позволяют исследовать явление Стокса.

Перейдем теперь к построению ресургентных уравнений. Для простоты предположим, что рассматриваемая ресургентная функция имеет только конечное число особых точек

$$\Sigma_F = \{S_1(x), \dots, S_N(x)\} \quad (6)$$

(т.е. функция $S(x)$, описывающая множество особенностей функции $F(s, x)$, имеет ветвление конечной кратности).

Пусть l – петля, охватывающая множество $\mathcal{F}$ фокальных точек с началом (и концом) в некоторой точке x_0 . Предположим, что для любого данного значения $x \in l$ каждая особая точка $S_j(x)$ может освещать⁵ не более одной особой точки $S_k(x)$. Заметим, что особые точки (6) не могут быть перенумерованы сразу одним и тем же способом для всех значений x . Однако, поскольку эти особые точки меняют свои значения регулярным образом вдоль петли l , можно зафиксировать некоторую нумерацию в точках этой петли, имея в виду, что номера одних и тех же особых точек в концевых точках этой петли могут быть различны. Это соотношение между номерами особых точек в x_0 , отвечающих начальной и концевой точке петли l , задается перестановкой σ множества $\{1, \dots, N\}$ так, что точка $S_j(x)$ переходит в точку $S_{\sigma(j)}(x)$ в процессе аналитического продолжения вдоль петли l . Ясно, что перестановка σ описывает формальную монодромию рассматриваемой ресургентной функции вдоль петли l .

Далее, не уменьшая общности, можно предположить, что петля l трансверсально пересекает поверхность Стокса функции $f(x)$. Мы обозначим через $x_0, \dots, x_M$ точки пересечения петли l с поверхностью Стокса в том порядке, в котором они возникают при движении вдоль l (мы предполагаем, что начальная точка x_0 петли l есть одна из точек пересечения этой петли с поверхностью Стокса). В силу сделанных выше предположений разложение (3) функции $f(x)$ в сумму преобразо-

⁵Мы говорим, что точка A освещает точку B , если последняя принадлежит лучу, выпущенному из точки A в направлении положительной части вещественной оси.

ваний Лапласа микрофункций имеет вид

$$f(x) \simeq \sum_{k=1}^N \mathcal{L}[F_k], \quad (7)$$

где $F_k = F_k(s, x)$ есть микрофункция в точке $s = S_k(x)$, $k = 1, \dots, N$, определенная преобразованием Бореля $\mathcal{B}[f] = F(s, x)$ функции $f(x)$. Ясно, что разложение вида (7) имеет место во всех точках $x \in l$, за исключением точек $x_0, \dots, x_M$ пересечения петли l с поверхностью Стокса.

Чтобы записать вид разложения (3) в точках поверхности Стокса в более явной форме, мы сделаем некоторые построения. Зафиксируем ориентацию поверхностей Стокса так, чтобы петля l переходила с отрицательной на положительную сторону этой поверхности, когда точка движется вдоль пути l в положительном направлении. Обозначим через l_k луч, выходящий из особой точки S_k в направлении положительной части вещественной оси. Для любой точки x_j , $j = 0, 1, \dots, N$, обозначим через $\Sigma_{S_k}^+(x_j)$ (соответственно $\Sigma_{S_k}^-(x_j)$) множество особых точек функции $F(s, x)$, приходящих сверху на луч l_k , если точка x приближается к x_j с положительной (соответственно отрицательной) стороны поверхности Стокса. Пусть $\omega_+^k(x_j)$ – набор (индекс),

$$\omega_+^k(x_j) = (+, +, -, +, \dots),$$

где знак “–” стоит на всех местах, соответствующих точкам из $\Sigma_{S_k}^+$. Через $\omega_-^k(x_j)$ обозначим индекс такого же типа со знаками “–”, стоящими на всех местах, отвечающих точкам из $\Sigma_{S_k}^-$. Для любого набора ω плюсов и минусов описанного выше типа обозначим через $\mathcal{L}_\omega$ преобразование Лапласа микрофункций (см. выше формулу (3)), в котором интегрирование ведется вдоль контура Γ , обходящего особые точки подынтегрального выражения в соответствии со знаками, входящими в ω (знак “+” отвечает обходу особой точки сверху, знак “–” – снизу). Ясно, что разложение, использующее преобразование Лапласа типа $\mathcal{L}_{\omega_+^k(x_j)}$, будет аналитически меняться, когда точка x движется из точки x_j внутрь области Стокса в положительную сторону (т.е. вдоль пути l в положительном направлении), а разложение, использующее преобразование Лапласа типа $\mathcal{L}_{\omega_-^k(x_j)}$, будет аналитически меняться, когда точка x движется из точки x_j внутрь области Стокса в отрицательную сторону (т.е. вдоль пути l в отрицательном направлении). Мы обозначим через $F_j^k = F_j^k(s, x)$, $k = 1, \dots, N$, множество микрофункций в точках $s = S_k(x)$, входящих в разложение

$$f(x) \simeq \sum_{k=1}^N \mathcal{L}_{\omega_+^k(x_j)} [F_j^k] \quad (8)$$

для каждой точки пересечения x_j , $j = 0, \dots, M$. Таким образом, F_j^k является компонентой разложения функции $f(x_j)$ с носителем в особой точке $S_k(x)$ (мы используем процедуру разложения, отвечающую положительной стороне соответствующей поверхности Стокса).

Если мы обозначим через $\mathcal{A}_j$ оператор аналитического продолжения вдоль пути l из точки $x_j + 0$ в точку $x_{j+1} - 0$ для $j = 0, \dots, M$ (мы полагаем $x_{M+1} = x_0$), то микрофункции $\mathcal{A}_j F_j^k$, $k = 1, \dots, N$, будут, очевидно, компонентами разложения функции $f(x_{j+1})$, если мы будем использовать процедуру разложения, соответствующую подходу к поверхности Стокса с ее отрицательной стороны:

$$f(x) \simeq \sum_{k=1}^N \mathcal{L}_{\omega_{\pm}(x_{j+1})} [\mathcal{A}_j F_j^k]. \quad (9)$$

Таким образом, сравнивая формулы (8) для j , замененного на $j+1$, и (9), можно видеть, что наборы $(F_{j+1}^1, \dots, F_{j+1}^N)$ и $(\mathcal{A}_j F_j^1, \dots, \mathcal{A}_j F_j^N)$ для $j = 0, \dots, M-1$, равно как и наборы $(F_0^{\sigma(1)}, \dots, F_0^{\sigma(N)})$ и $(\mathcal{A}_j F_M^1, \dots, \mathcal{A}_j F_M^N)$ должны быть связаны друг с другом с помощью гомоморфизма τ :

$$\begin{aligned} (F_{j+1}^1, \dots, F_{j+1}^N) &= \tau(\mathcal{A}_j F_j^1, \dots, \mathcal{A}_j F_j^N), \\ (F_0^{\sigma(1)}, \dots, F_0^{\sigma(N)}) &= \tau(\mathcal{A}_j F_M^1, \dots, \mathcal{A}_j F_M^N), \quad j = 0, \dots, M-1, \end{aligned} \quad (10)$$

который называется *связывающим гомоморфизмом* (см. [1], [2], [16]). Последние соотношения являются, очевидно, необходимыми и достаточными для того, чтобы функция $f(x)$ была (по крайней мере с точностью до быстроубывающих членов) однозначной вдоль пути l .

Для того чтобы записать уравнения (10) в более явном виде, мы напомним, что рассматривается случай, когда для любого данного значения x каждая особая точка $S_j(x)$ может освещать, самое большее, еще одну точку $S_k(x)$. Кроме того, чтобы сделать дальнейшие вычисления более явными, мы представим соотношения между различными особыми точками $S_1(x), \dots, S_N(x)$ посредством диаграммы, показанной на рис. 1, которую мы будем называть *диаграммой освещенности*.

Рис. 1. Диаграмма освещенности

Опишем эту диаграмму более детально. Ее левая вертикальная линия представляет петлю l . Оставшиеся вертикальные линии представляют аналитическое продолжение вдоль пути l точек $S_1(x), \dots, S_N(x)$ — особенностей функции $F(s, x) = \mathcal{B}[f(x)]$. Мы напомним, что обход вдоль пути l преобразует особые точки с помощью подстановки σ . Поэтому нижние и верхние конечные точки вертикальных линий, исключая первую, должны быть отождествлены в соответствии с этой подстановкой. Далее, если точка $x \in l$ совпадает с одной из точек $x_0, \dots, x_M$, то имеется одна (или более) пара особых точек $S_j(x)$ таких, что одна из них освещает другую. Отметим каждую освещенную точку маленьким кружком; горизонтальные строки связывают освещаемую и освещающие точки. Особые точки, которые не входят в такие пары, называются *нейтральными*, они помечены на диаграмме маленькими крестиками. Например, диаграмма, изображенная на рис. 1, показывает, что точка $S_3(x_0)$ освещает точку $S_1(x_0)$, а точка $S_2(x_0)$ нейтральна. Таким образом, диаграмма освещенности описывает эволюцию точек особенности функции $F(s, x)$ (*ресургентную структуру* функции $f(x)$) при движении вдоль петли l .

Теперь мы в состоянии записать систему (10) в виде системы так называемых ресургентных уравнений, для которых неизвестными являются функции F_j^k . Каждая точка $S_k(x_j)$ порождает в точности одно ресургентное уравнение. В силу определения связывающего гомоморфизма τ очевидно, что если точка $S_k(x_j)$ не является конечной точкой некоторой горизонтальной стрелки, то имеет место равенство

$$F_j^k = \mathcal{A}_{j-1} F_{j-1}^k \quad (11)$$

(при этом не нужно забывать об указанных выше отождествлениях). С другой стороны, если точка $S_k(x_j)$ является конечной точкой некоторой горизонтальной стрелки (например, на рис. 1 эта ситуация имеет место в точке $S_k(x_j)$), то соотношение между микрофункциями F_j^k и аналитическим продолжением микрофункции F_{j-1}^k вдоль пути l имеет следующий вид:

$$F_j^k = \mathcal{A}_{j-1} F_{j-1}^k - \delta F_j^l, \quad (12)$$

где F_j^l есть микрофункция, соответствующая точке $S_l(x_j)$, которая освещает рассматриваемую точку $S_k(x_j)$.

Из наших рассуждений ясно, что система уравнений (11) или (12), записанная для каждой точки $S_k(x_j)$, эквивалентна системе (10), и поэтому эта система дает необходимые и достаточные условия для того, чтобы функция $f(x)$ была однозначной вдоль пути l . Таким образом мы получили следующий результат.

ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы система MN уравнений типа (11), (12) удовлетворялась во всех точках $S_k(x_j)$ диаграммы освещенности, необходимо и достаточно, чтобы соответствующая функция $f(x)$ была однозначна вдоль данного пути l .*

Система уравнений, упомянутая в формулировке теоремы 1, называется *системой ресургентных уравнений*, ассоциированной с данной диаграммой освещенности. Как мы увидим ниже, эта система накладывает определенные ограничения на структуру римановой поверхности функции $F(s, x)$ при условии, что эта

Рис. 2. Исключение неосвещенных точек

система выполняется для любой ресургентной функции, имеющей вид (8) в некоторой точке пути l (например, в точке x_0).

Выведенная система уравнений может быть сведена к другой системе меньшего порядка, записанной для функций F_j^k , которые соответствуют освещенным точкам этой диаграммы. Для того чтобы провести эту редукцию, мы рассмотрим часть диаграммы, включающей освещенную точку $S_k(x_j)$ (см. рис. 2). На этом рисунке через F_{j-t}^k обозначена микрофункция, соответствующая первой освещенной точке, лежащей над рассматриваемой точкой $S_k(x_j)$ (это означает, что точка $S_k(x_{j-t})$ является последней освещенной точкой, которая встретила на пути l перед точкой $S_k(x_j)$). Аналогично, F_{j-r}^l есть микрофункция, соответствующая точке $S_l(x_{j-r})$, которая является первой освещенной точкой, лежащей над точкой $S_l(x_j)$, которая освещает $S_k(x_j)$. Для упрощения наших обозначений мы будем писать $\mathcal{A}$ вместо $\mathcal{A}_j$ так, что, например, выражение $\mathcal{A}_{j-1} \cdots \mathcal{A}_{j-r} F_{j-r}^k$ будет обозначаться просто $\mathcal{A}^r F_{j-r}^k$. Итак, в силу уравнения (11) мы имеем

$$F_{j-1}^k = \mathcal{A} F_{j-2}^k = \cdots = \mathcal{A}^{t-1} F_{j-t}^k$$

и, аналогично,

$$F_j^l = \mathcal{A} F_{j-1}^l = \cdots = \mathcal{A}^r F_{j-r}^l.$$

Подставляя полученные соотношения в уравнение (12), мы приведем его к виду

$$F_j^k = \mathcal{A}^t F_{j-t}^k - \delta(\mathcal{A}^r F_{j-r}^l), \quad (13)$$

который содержит только микрофункции, отвечающие освещенным точкам. Множество уравнений (13) по всем освещенным точкам, очевидно, эквивалентно полученной выше системе ресургентных уравнений.

Теперь возникает вопрос: как можно решить построенную систему ресургентных уравнений? Оказывается, что в некоторых случаях это может быть сделано

с помощью некоторого нового понятия анализа – понятия *сторонних производных* (см. следующий пункт). Мы увидим, что в этих терминах полученная система ресургентных уравнений допускает трактовку как система дифференциальных уравнений, правда относительно некоторого нового – ресургентного – понятия производной. К полученной системе дифференциальных уравнений можно применить методы, обычные в теории обыкновенных дифференциальных уравнений и систем, и с их помощью изучить разрешимость системы ресургентных (дифференциальных) уравнений. Подчеркнем еще раз, что производные, которые входят в систему ресургентных уравнений, не являются обычными производными, хотя, как мы покажем ниже, и являются дифференцированием некоторой алгебры. Эти производные были введены Ж. Экалем, который и назвал их *сторонними производными*. В следующем параграфе мы детально рассмотрим это понятие. Будут также приведены примеры решений системы ресургентных уравнений.

§ 2. Стороннее дифференциальное исчисление

1. В предыдущем параграфе мы вывели условия единственности ресургентной функции в терминах множества микрофункций, входящих в разложение этой ресургентной функции в зависимости от областей Стокса (см. формулу (13)). Эти условия (или, другими словами, ресургентные уравнения) включают два типа операторов. Это операторы аналитического продолжения и “разностные” операторы

$$\delta = \tau - \text{id}, \quad (14)$$

где τ – связывающий гомоморфизм. Эти операторы описывают соответственно два типа поведения асимптотического разложения данной ресургентной функции. Именно, операторы аналитического продолжения описывают *аналитическую зависимость* разложения по переменным x , а операторы δ описывают *скачки*, которые может иметь разложение в точках поверхностей Стокса соответствующих функций. В этом параграфе мы исследуем этот, второй, тип операторов, входящих в ресургентные уравнения.

Прежде всего, мы заметим, что оператор (14) аналогичен обычному разностному оператору. В самом деле, действие этого оператора равно разности двух разложений соответствующих ресургентных функций с двух различных сторон поверхности Стокса; связывающий гомоморфизм τ играет роль соответствующего оператора сдвига. Далее, из обычного анализа хорошо известно, что разностные операторы являются гораздо более сложным объектом для изучения, чем дифференциальные. Таким образом, возникает идея переписать ресургентные уравнения как (в некотором смысле) дифференциальные уравнения. Эта идея основана на том, что, как хорошо известно, дифференциальные операторы тесно связаны с соответствующим оператором сдвига (или, что то же самое) с соответствующим разностным оператором. Проиллюстрируем эту связь на примере обычной производной.

Формула Тейлора

$$f(x+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(h \frac{d}{dx} \right)^n f(x)$$

(справедливая, например, для вещественно-аналитических функций) может быть переписана в виде

$$T_h f(x) = f(x + h) = e^{h \frac{d}{dx}} f(x),$$

так что оператор сдвига T_h может быть представлен следующим образом:

$$T_h = e^{h \frac{d}{dx}}. \quad (15)$$

Последняя формула наглядно объясняет связь между производной и оператором сдвига. Мы заметим, что классическое определение производной по существу основывается на формуле

$$\frac{d}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(e^{h \frac{d}{dx}} - 1 \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (T_h - 1).$$

Однако использование последнего определения производной возможно только в случае, когда мы можем вычислить оператор сдвига T_h для произвольно малого шага h . К сожалению, иначе обстоит дело в случае оператора “сдвига” τ (этот оператор не содержит малого параметра типа h). Таким образом, мы должны понять, как, используя формулу (15) с *фиксированным* h , определить производную d/dx . В обычном анализе такая процедура может оказаться полезной, например, в случае, когда функция $f(x)$, подвергаясь дифференцированию, может быть вычислена лишь в точках некоторой сетки с фиксированным шагом h (ниже для определенности мы используем значение $h = 1$ и соответствующий оператор сдвига обозначим через $T = T_1$). Для того чтобы это сделать, мы используем формулу

$$\frac{d}{dx} = \ln T, \quad (16)$$

которая является (по крайней мере формально) прямым следствием формулы (15). Логарифм в правой части выражения (16) понимается в следующем смысле:

$$\ln T \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (T - 1)^n.$$

Проверим теперь на примере $e^{\alpha x}$, что применение формулы (16) дает правильный результат. В соответствии с этой формулой имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} e^{\alpha x} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (T - 1)^n e^{\alpha x} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k e^{\alpha(x+k)} \right). \end{aligned}$$

Последнее выражение может быть переписано в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} e^{\alpha x} &= e^{\alpha x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k e^{\alpha k} \right) \\ &= e^{\alpha x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (e^{\alpha} - 1)^n = e^{\alpha x} \ln e^{\alpha} = \alpha e^{\alpha x}, \end{aligned}$$

и, таким образом, нужное утверждение показано.

Заметим, что сходимость логарифмических рядов в последней формуле имеет место только для достаточно малых α , так что в приложении формулы (16) для вычисления производных надо еще позаботиться о сходимости. Формула (16) может быть легко проверена для всех вещественно-аналитических функций, например для полиномов.

2. Опишем общую алгебраическую схему, которая будет использоваться ниже для определения понятия сторонней производной (т.е. производной, соответствующей оператору “сдвига” τ). Рассмотрим коммутивную и ассоциативную алгебру $\mathcal{A}$ с единицей и предположим, что эта алгебра фильтрована с помощью идеалов $\mathcal{A}_{\alpha}$, $\alpha \in \mathbf{R}$, так, что $\mathcal{A}_{\alpha'} \subset \mathcal{A}_{\alpha''}$ для $\alpha' > \alpha''$. Ниже в качестве алгебры $\mathcal{A}$ будет выступать алгебра ресургентных функций, в качестве $\mathcal{A}_{\alpha}$ – алгебра ресургентных функций с ресургентным типом не более чем $-\alpha$. Другими словами, алгебра $\mathcal{A}$ может быть отождествлена с алгеброй $\bigoplus'_{s \in \mathbf{C}} \mathcal{M}_{s, \text{cont}}$, а $\mathcal{A}_{\alpha}$ – с идеалом в этой алгебре, элементы которого имеют носитель в полуплоскости $\text{Re } s > \alpha$. Преобразование Лапласа микрофункций доставляет (с точностью до быстроубывающих функций) изоморфизм между этими двумя алгебрами. Мы обозначим через $\mathcal{A}_{-\infty}$ пересечение идеалов $\mathcal{A}_{\alpha}$ по всем вещественным α и определим *порядок* $\text{ord } a$ элемента $a \in \mathcal{A}$ как точную верхнюю грань чисел α таким, что $a \in \mathcal{A}_{\alpha}$. Предположим, что выполнено следующее условие.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 1. *Для любой последовательности $a_n \in \mathcal{A}$ такой, что*

$$\text{ord}(a_n - a_m) \rightarrow +\infty$$

при $n, m \rightarrow \infty$, существует такой элемент $a \in \mathcal{A}$, что

$$\text{ord}(a - a_n) \rightarrow +\infty$$

при $n \rightarrow \infty$. Элемент a определяется с точностью до элементов из идеала $\mathcal{A}_{-\infty}$.

Это условие будет использовано ниже для проверки сходимости соответствующих рядов.

Нам понадобится также следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Линейное отображение $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ называется *отображением строго отрицательного порядка*, если для любого элемента $a \in \mathcal{A}$ порядок $\text{ord}(\varphi^n a)$ элемента $\varphi^n a$ стремится к $+\infty$ при $n \rightarrow \infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Введенные понятия могут быть переформулированы в терминах обычной топологии в $\mathcal{A}/\mathcal{A}_{-\infty}$, связанной с введенной фильтрацией. Фундаментальной системой окрестностей нуля в этой топологии является множество $\{\mathcal{A}_\alpha/\mathcal{A}_{-\infty}\}$ идеалов, входящих в рассматриваемую фильтрацию. Если мы используем эту топологию, то предположение 1 означает просто, что алгебра $\mathcal{A}/\mathcal{A}_{-\infty}$ полна как топологическое пространство во введенной топологии. Определение 3 в этой ситуации может быть переформулировано следующим образом: линейное отображение $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ называется *отображением строго отрицательного порядка*, если последовательность $\{\varphi^n a\}$ стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ для любого данного элемента $a \in \mathcal{A}$.

Теперь мы можем сформулировать утверждение о связи между алгеброй гомоморфизмов и дифференцированиями. Для краткости мы предположим здесь, что $\mathcal{A}_{-\infty} = 0$; это попросту означает, что мы рассматриваем фактор $\mathcal{A}/\mathcal{A}_{-\infty}$ с фильтрацией $\{\mathcal{A}_\alpha/\mathcal{A}_{-\infty}\}$ вместо алгебры $\mathcal{A}$ с фильтрацией $\{\mathcal{A}_\alpha\}$.

ТЕОРЕМА 2. *Множество гомоморфизмов $\tau: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ алгебры таких, что $\delta = \tau - 1$ является оператором строго отрицательного порядка, находится во взаимно однозначном соответствии с множеством дифференцирований $\Delta: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ строго отрицательного порядка. Это множество задается следующими соотношениями:*

$$\tau = e^\Delta, \quad \Delta = \ln \tau = \ln(1 + \delta).$$

Здесь функции e^Δ и $\ln(1 + \delta)$ понимаются как степенные ряды по Δ и δ соответственно. Эти ряды сходятся в силу полноты алгебры $\mathcal{A}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если Δ является дифференцированием алгебры $\mathcal{A}$ строго отрицательного порядка, то

$$\Delta^n(ab) = \sum_{k=0}^n C_n^k \Delta^k a \Delta^{n-k} b$$

для любого натурального n и любых элементов $a, b \in \mathcal{A}$. Поэтому для оператора $\tau = e^\Delta$ мы получаем

$$\begin{aligned} \tau(ab) &= e^\Delta(ab) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \Delta^n(ab) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!(n-k)!} \Delta^k a \Delta^{n-k} b \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \Delta^k a \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \Delta^m b \right) = (e^\Delta a)(e^\Delta b) = (\tau a)(\tau b), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Обратно, предположим, что τ есть такой гомоморфизм алгебры, что $\tau = 1 + \delta$ с некоторым оператором δ строго отрицательного порядка. Мы определим оператор Δ соотношением

$$\Delta = \ln(1 + \delta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \delta^n. \quad (17)$$

Тогда обычное вычисление со степенным рядом показывает, что $\tau = e^\Delta$, и нужно только показать, что оператор Δ , определенный равенством (17), является дифференцированием алгебры $\mathcal{A}$. Поскольку τ является гомоморфизмом алгебры, то мы получаем, что

$$e^{m\Delta}(ab) = (e^{m\Delta}a)(e^{m\Delta}b)$$

для любого $m = 1, 2, \dots$ и любых $a, b \in \mathcal{A}$. Это означает, что

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m^n}{n!} \Delta^n(ab) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{m^k}{k!} \Delta^k a \right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{m^l}{l!} \Delta^l b \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m^n}{n!} \sum_{k=0}^n C_n^k \Delta^k a \Delta^{n-k} b \end{aligned} \quad (18)$$

для любого положительного числа m . Так как оператор Δ имеет строго отрицательный порядок, то лишь конечное число членов последнего соотношения не обращается в нуль в факторалгебре $\mathcal{A}/\mathcal{A}_\alpha$ для данного α . Обозначим через $N(\alpha)$ максимальное значение индекса суммирования, для которого члены в правой и левой частях в (18) не обращаются с нуль в факторе $\mathcal{A}/\mathcal{A}_\alpha$. Тогда мы имеем

$$\sum_{n=0}^{N(\alpha)} \frac{m^n}{n!} \left[\Delta^n(ab) - \sum_{k=0}^n C_n^k \Delta^k a \Delta^{n-k} b \right] = 0 \in \mathcal{A}/\mathcal{A}_\alpha. \quad (19)$$

Рассмотрим систему уравнений (19) для $m = 1, 2, \dots, N(\alpha)$. Полученная система линейных уравнений имеет не обращающийся в нуль детерминант, и, следовательно, для любого $\alpha \in \mathbf{R}$ мы получаем соотношения

$$\Delta^n(ab) - \sum_{k=0}^n C_n^k \Delta^k a \Delta^{n-k} b = 0 \in \mathcal{A}/\mathcal{A}_\alpha.$$

Поскольку $\cap \mathcal{A}_\alpha = 0$, мы приходим к соотношениям

$$\Delta^n(ab) = \sum_{k=0}^n C_n^k \Delta^k a \Delta^{n-k} b,$$

справедливым для $n = 1, 2, \dots$, и, в частности,

$$\Delta(ab) = (\Delta a)b + a(\Delta b).$$

Этим завершается доказательство теоремы.

3. Теперь применим предыдущую теорему к подалгебре $\mathcal{A}$ алгебры $\bigoplus'_{s \in \mathbf{C}} \mathcal{M}_{s, \text{cont}}$, состоящей из элементов, носители которых содержатся в полуплоскости $\text{Re } s > 0$, с фильтрацией $\mathcal{A}_\alpha$, $\alpha \in \mathbf{R}_+$, где идеалы $\mathcal{A}_\alpha$ состоят из элементов, носители которых расположены в области $\text{Re } s > \alpha$. Ограничение на носители рассматриваемых элементов не является существенным, поскольку,

как мы увидим ниже, соответствующие производные инвариантны относительно операторов сдвига комплексной области $\mathbf{C}_s$.

Пусть x_0 – точка в пространстве ресургентных переменных $\mathbf{C}_x$, лежащая на поверхности Стокса (см., например, [1], [16], [18]). Рассмотрим соответствующий связывающий гомоморфизм

$$\tau: \bigoplus'_{s \in \mathbf{C}} \mathcal{M}_{s, \text{cont}} \rightarrow \bigoplus'_{s \in \mathbf{C}} \mathcal{M}_{s, \text{cont}}.$$

Мы утверждаем, что разностное отображение $\delta = \tau - 1$ является оператором строго отрицательного порядка относительно введенной выше фильтрации. Для того чтобы показать это, рассмотрим микрофункцию $F \in \mathcal{M}_{s, \text{cont}}$ для некоторого значения s такого, что $\text{Re } s > 0$.

Пусть Σ_s^ω – множество особых точек функции F , видимых из точки s вдоль луча, выходящего из этой точки в положительном направлении и окружающего особые точки F в соответствии с индексом $\omega = (+, +, -, \dots)$. Здесь знак “+” обозначает, что соответствующая особая точка обходится сверху, и знак “−” показывает, что эта точка обходится снизу. Обозначим через Σ_s объединение Σ_s^ω по всем положительным индексам ω . Мы напомним, что через Σ_s^+ мы обозначаем множество особых точек, приходящих сверху на путь интегрирования, входящий в преобразование Лапласа, при приближении точки x к точке x_0 с положительной стороны поверхности Стокса. Аналогично, через Σ_s^- обозначается множество, определенное так же, как и Σ_s^+ , но при приближении x к x_0 с отрицательной стороны этой поверхности.

Соответствующие индексы ω_+ и ω_- определяются так, что знаки “+” и “−” стоят на всех местах, отвечающих особым точкам из Σ_s^+ и Σ_s^- соответственно (мы предполагаем, что особые точки на контуре интегрирования занумерованы в порядке их появления на луче, параллельном положительной части вещественной оси и выходящем из точки s).

Теперь ясно, что носитель элемента δF может содержать все точки из Σ_s , за исключением самой точки s . Аналогично, носитель элемента $\delta^2 F$ может содержать все точки из Σ_s , за исключением первых двух ее точек и т.д. Поскольку множество Σ_s является дискретным множеством на луче интегрирования, то, как легко видеть, минимальные вещественные части точек s , входящие в носитель элементов $\delta^n F$, стремятся к бесконечности, когда $n \rightarrow \infty$. Таким образом, требуемое утверждение доказано.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Дифференцирование алгебры $\mathcal{A}$, отвечающее в силу теоремы 2 связывающему гомоморфизму, называется *сторонней производной*.

Мы обозначим через ΔF стороннюю производную элемента $F \in \bigoplus'_{s \in \mathbf{C}} \mathcal{M}_{s, \text{cont}}$.

Следующее утверждение описывает основные свойства введенного понятия.

ТЕОРЕМА 3. *Справедливы следующие формулы коммутации:*

$$\begin{aligned} T_{s_0} \Delta &= \Delta T_{s_0}, & \frac{\partial}{\partial s} \Delta &= \Delta \frac{\partial}{\partial s}, \\ \frac{\partial}{\partial x^j} \Delta &= \Delta \frac{\partial}{\partial x^j}, & j &= 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Здесь T_{s_0} – оператор сдвига в комплексной плоскости $\mathbf{C}_s$:

$$(T_{s_0}F)(s) = F(s + s_0).$$

Мы оставляем простое доказательство этой теоремы читателю. Здесь же мы заметим только, что результаты этой теоремы позволяют, в частности, распространить определение сторонней производной на всю алгебру $\bigoplus'_{s \in \mathbf{C}} \mathcal{M}_{s, \text{cont}}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Используя гомоморфизм между алгеброй $\bigoplus'_{s \in \mathbf{C}} \mathcal{M}_{s, \text{cont}}$ и фактором $\mathcal{R}/(\mathcal{R} \cap E_{-\infty})$ алгебры $\mathcal{R}$ ресургентных функций по подалгебре $\mathcal{R} \cap E_{-\infty}$ быстро убывающих ресургентных функций, можно рассмотреть стороннюю производную как дифференцирование алгебры:

$$\Delta: \mathcal{R}/(\mathcal{R} \cap E_{-\infty}) \rightarrow \mathcal{R}/(\mathcal{R} \cap E_{-\infty}).$$

4. Теперь мы попытаемся понять, как могут быть вычислены компоненты сторонней производной данной микрофункции $F(s, x) \in \mathcal{M}_{s, \text{cont}}$ в различных точках комплексной плоскости $\mathbf{C}_s$. Прежде всего ясно, что сторонняя производная $\Delta F(s, x)$ имеет свои компоненты только в тех точках комплексной плоскости $\mathbf{C}_s$, которые являются видимыми из начальной точки $s = S(x)$ вдоль лучей r , исходящих из этой точки в направлении положительной вещественной оси и обходящих особые точки функции $F(s, x)$, встречающиеся на этом луче, любыми возможными способами. Далее, носитель элемента δF не содержит точки s . Носитель элемента $\delta^2 F$ не содержит точки s , а также первой особой точки функции F , встречающейся на луче r . Элемент $\delta^3 F$ не содержит точки s , а также двух первых особых точек функции F , встречающихся на этом луче, и т.д. Поэтому компонента сторонней производной

$$\Delta F = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \delta^n F,$$

соответствующая первой особой точке $s_1 = S_1(x)$ функции F , встречающейся на луче r , есть просто компонента элемента δF в точке s_1 , компонента ΔF во второй особой точке $s_2 = S_2(x)$ есть компонента элемента $\delta F - \delta^2 F/2$ и т.д. Таким образом, компонента сторонней производной в любой особой точке $s_j = S_j(x)$, встречающейся на луче r , может быть вычислена с помощью конечной процедуры.

В частности, как это следует из определения связывающего гомоморфизма, компонента элемента $\delta F = \tau F - F$ равна разности между аналитическими продолжениями функции F вдоль верхней и нижней границ разреза, начинающегося в точке s вдоль луча r (знак этой разности зависит от направления, в котором соответствующая особая точка пересекает контур интегрирования, когда точка x переходит из отрицательной стороны соответствующей поверхности Стокса на ее положительную, для определенности мы предположим, что все сторонние точки подходят к контуру интегрирования сверху). Обозначая эти продолжения через $\mathcal{A}_+ F$ и $\mathcal{A}_- F$ соответственно, приходим к выражению

$$(\Delta F)_{s_1} = (\delta F)_{s_1} = (\mathcal{A}_+ F - \mathcal{A}_- F). \quad (20)$$

Далее, подобным же образом мы имеем

$$\begin{aligned}(\delta F)_{s_2} &= \mathcal{A}_+(\mathcal{A}_- F) - \mathcal{A}_-(\mathcal{A}_+ F), \\ \delta(\mathcal{A}_\pm F)_{s_2} &= (\mathcal{A}_+(\mathcal{A}_\pm F) - \mathcal{A}_-(\mathcal{A}_\pm F)),\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}(\Delta F)_{s_2} &= \left(\delta F - \frac{1}{2} \delta^2 F \right)_{s_2} = \frac{3}{2} \mathcal{A}_+(\mathcal{A}_- F) - \frac{3}{2} \mathcal{A}_-(\mathcal{A}_+ F) \\ &\quad - \frac{1}{2} \mathcal{A}_+(\mathcal{A}_+ F) + \frac{1}{2} \mathcal{A}_-(\mathcal{A}_- F).\end{aligned}$$

Итак, компонента сторонней производной ΔF в любой точке s_j есть линейная комбинация аналитических продолжений функции F вдоль различных путей этой функции, приходящих из точки s в точку s_j . Мы оставляем читателю вычисление соответствующих коэффициентов в точках $s_3, s_4, \dots$, а также вычисления для случая, когда особые точки подходят к контуру интегрирования с различных сторон.

5. Рассмотрим теперь подробно оператор Δ_{s_j} , переводящий микрофункцию $F \in \mathcal{M}_{0,\text{cont}}$ в компоненту ее сторонней производной $(\Delta F)_{s_j}$, сдвинутую в начало координат:

$$\Delta_{s_j} F \stackrel{\text{def}}{=} T_{s_j}(\Delta F)_{s_j}. \quad (21)$$

Имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4. *Оператор $\Delta_{s_j}: \mathcal{M}_{0,\text{cont}} \rightarrow \mathcal{M}_{0,\text{cont}}$ определенный равенством (21), задает дифференцирование алгебры $\mathcal{M}_{0,\text{cont}}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку оператор Δ является дифференцированием алгебры $\bigoplus'_{s \in \mathbb{C}} \mathcal{M}_{s,\text{cont}}$, для любых двух элементов F, G , принадлежащих $\mathcal{M}_{0,\text{cont}}$, мы имеем

$$\Delta(FG) = G\Delta F + F\Delta G.$$

Принимая во внимание то, что функции F и G , рассматриваемые как элементы алгебры $\bigoplus'_{s \in \mathbb{C}} \mathcal{M}_{s,\text{cont}}$, имеют носители в одной точке $s = 0$, и взяв компоненты обеих частей (22) в точке s_j , приходим к следующему соотношению:

$$\Delta(FG)_{s_j} = G(\Delta F)_{s_j} + F(\Delta G)_{s_j}.$$

Применяя оператор сдвига T_{s_j} к обеим сторонам последнего соотношения, получаем

$$\Delta_{s_j}(FG) = T_{s_j}(\Delta(FG)_{s_j}) = T_{s_j}(G(\Delta F)_{s_j}) + T_{s_j}(F(\Delta G)_{s_j}).$$

Используя соотношения

$$T_{s_j}(FG) = (T_{s_j}F)G = F(T_{s_j}G),$$

справедливые для любых элементов $F, G \in \bigoplus'_{s \in \mathbf{C}} \mathcal{M}_{s, \text{cont}}$ (напомним, что оператор сдвига T_{s_j} соответствует умножению на e^{s_j} при действии преобразования Бореля–Лапласа), получаем

$$\Delta_{s_j}(FG) = G\Delta_{s_j}F + F\Delta_{s_j}G,$$

что и требовалось доказать.

Заметим, что оператор Δ_{s_j} может быть определен даже в случае, когда точка s_j имеет не исчезающую мнимую часть и, следовательно, не лежит на луче r , выходящем из начала координат в направлении положительной оси x (в нашем случае начальная точка есть $s = 0$ и, следовательно, луч r совпадает с положительной вещественной осью). Это может быть сделано с помощью формулы

$$\Delta_{s_j}F = \rho_{-\theta}\Delta_{e^{-i\theta}s_j}(\rho_{\theta}F),$$

где $(\rho_{\theta}F)(s, x) = F(e^{i\theta}s, x)$ и $\theta = \arg s_j$, так что правая часть последней формулы хорошо определена (поскольку $e^{-i\theta}s_j$ является положительным вещественным числом). Ясно, что оператор Δ_{s_j} , определенный таким образом, является, как и выше, дифференцированием алгебры $\mathcal{M}_{0, \text{cont}}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Определенный выше оператор Δ_{s_j} на пространстве микрофункций $\mathcal{M}_{0, \text{cont}}$, сосредоточенных в начале координат, называется *сторонней производной в точке s_j* .

Формально сторонняя производная $\Delta_{s_j}F$ определена только в случае, если точка s_j является особой точкой функции F . Однако если мы определим $\Delta_{s_j}F = 0$ во всех точках s_j , в которых функция F регулярна, то полученный оператор будет дифференцированием алгебры $\mathcal{M}_{0, \text{cont}}$. Таким образом, связь между операторами Δ и Δ_s может быть записана соотношением⁶

$$\Delta F = \sum_{s \in \mathbf{C}_s} \Delta_s F,$$

которое должно выполняться для любой микрофункции $F \in \mathcal{M}_{s, \text{cont}}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Легко видеть, что введенная сторонняя производная коммутирует с обычной производной как относительно ресургентных переменных, так и относительно параметров (если последние имеют место для рассматриваемой ресургентной функции).

6. В заключение этого параграфа мы дадим простой пример вычисления сторонней производной. Рассмотрим микрофункцию

$$F(s, x) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{\ln s/x}{s - x} \in \mathcal{M}_{0, \text{cont}}. \quad (24)$$

⁶Мы заметим, что сторонние производные $\Delta_s F$ отличны от нуля лишь в особых точках микрофункции F , видимых из начала координат вдоль лучей, из него выходящих.

Эта микрофункция (см., например, [2]) возникает при рассмотрении известного примера Эйлера. Единственной фокальной точкой для этой микрофункции является точка $x = 0$, а линией Стокса является положительная вещественная ось. Ориентируем линию Стокса так, как это показано на рис. 3, а) и рассмотрим ветвь (многозначной) функции (24), выбирая аргумент $\arg s$ переменной s так, как это показано на рис. 3, б). Теперь в силу формул (20) для вещественных положительных значений x имеем

$$\begin{aligned}\Delta_{s=x}F(s, x) &= \left(\frac{1}{2\pi i} \frac{\ln s/x}{s-x} \right)_{s=xe^{i0}} - \left(\frac{1}{2\pi i} \frac{\ln s/x}{s-x} \right)_{s=xe^{2\pi i}} \\ &= -\frac{1}{s-x} = -2\pi i \delta_x(s),\end{aligned}\quad (25)$$

поскольку особенность функции (24) равна нулю в точке $s = xe^{i0}$ и равна $2\pi i \delta_x(s)$ в точке $s = xe^{2\pi i}$. Используя формулу (23), можно проверить, что соотношение (25) остается справедливым также для любых значений переменной x (исключая, разумеется, фокальную точку $x = 0$).

Рис. 3. Пересечение контура интегрирования

§ 3. Сторонние дифференциальные уравнения

Остановимся теперь на изучении *сторонних дифференциальных уравнений*, которые являются понятием, аналогичным понятию обыкновенных дифференциальных уравнений, если в последних заменить обычные производные на сторонние.

Сторонние дифференциальные уравнения играют важную роль в ресургентном анализе, в частности, как это будет показано ниже, ресургентные уравнения, введенные в § 1, могут быть записаны в виде сторонних дифференциальных уравнений.

В этом параграфе⁷ мы покажем, что теория сторонних дифференциальных уравнений в большой степени подобна теории обыкновенных дифференциальных уравнений, что наглядно видно из следующих двух примеров линейных сторонних дифференциальных уравнений с ресургентными коэффициентами.

⁷Здесь мы используем результаты статьи [9].

ПРИМЕР 1. Рассмотрим сторонние линейные дифференциальные уравнения вида

$$\Delta_{s_0} F(s, x) = A(s, x) F(s, x), \quad (26)$$

где $A(s, x) \in \mathcal{M}_{0, \text{cont}}$ является заданной микрофункцией. Прежде всего мы докажем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $F_0(s, x)$ – решение уравнения (26), которое является обратимым элементом в алгебре $\mathcal{M}_{0, \text{cont}}$. Тогда общее решение уравнения (26) имеет вид

$$F(s, x) = C(s, x) F_0(s, x), \quad (27)$$

где $C(s, x)$ – произвольная константа рессургенции, т.е. такой элемент из пространства $\mathcal{M}_{0, \text{cont}}$, что $\Delta_s C = 0$ для любой точки $s \in \mathbf{C}_s$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, функция (27) определяет решение уравнения (26) при любом выборе постоянной C . Обратно, если $F(s, x)$ есть произвольное решение уравнения (26), то оно может быть представлено в виде (27) с

$$C(s, x) = F_0^{-1}(s, x) F(s, x).$$

Чтобы доказать, что $C(s, x)$, заданное последней формулой, есть постоянная рессургенции, мы вычислим ее стороннюю производную в точке s_0 :

$$\begin{aligned} \Delta_{s_0} C &= (\Delta_{s_0} F_0^{-1}) F + F_0^{-1} \Delta_{s_0} F \\ &= -F_0^{-2} (\Delta_s F_0) F + F_0^{-1} \Delta_{s_0} F \\ &= -A F_0^{-1} F + A F_0^{-1} F = 0. \end{aligned}$$

Ясно, что $\Delta_s C = 0$ при всех $s \neq s_0$. Таким образом, теорема доказана.

Заметим теперь, что если $F(s, x)$ – нетривиальное решение уравнения (26), то эта функция должна иметь особенность в точке s_0 (в противном случае мы будем иметь $\Delta_{s_0} F = 0$). Однако точка s_0 не является единственной точкой особенности решения уравнения (26). В самом деле, в силу этого уравнения вариация решения F имеет особенность в точке s_0 вида $A(s - s_0, x) F(s - s_0, x)$. Но это решение имеет также особенность в точке $2s_0$. По индукции мы получаем, что функция $F(s, x)$ имеет особенности в точках $s = ks_0$, $k = 1, 2, 3, \dots$ (на шлейфе). Таким образом, особенность в точке s_0 порождает особенности во всех точках шлейфа – эта ситуация является типичной для рессургентного анализа.

Теперь попытаемся построить решение $F_0(s, x)$ уравнения (26). Для простоты мы предположим, что $A(s, x)$ является константой рессургенции. Тогда функция

$$B(s, x) = \frac{1}{2\pi i} A(s - s_0, x) \ln s \in \mathcal{M}_{0, \text{cont}}$$

удовлетворяет соотношениям

$$\Delta_{s_0} B(s, x) = A(s, x).$$

Очевидно, $B(s, x)$ является регулярной микрофункцией в точке $s = 0$. Теперь мы определим решение $F_0(s, x)$ формулой⁸

$$F_0(s, x) = e^{B(s, x)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (B(s, x))^k \quad (28)$$

(все произведения являются произведениями в сверточной алгебре $\mathcal{M}_{0, \text{cont}}$).

Функция $B(s, x)$ имеет единственную особенность (за исключением начала координат) в точке $s = s_0$. Читатель может проверить, что сверточные степени $(B(s, x))^k$ будут иметь особенности в точках $s = s_0 j$, $j = 1, 2, \dots, k$, и что структура римановой поверхности функций $(B(s, x))^k$ стабилизируется в каждой точке $s = s_0 j$ при достаточно больших значениях k .

Таким образом, все (сверточные) степени функции $B(s, x)$ могут быть определены на одной и той же римановой поверхности со следующей структурой. Эта структура имеет ветвления логарифмического типа в точке $s = 0$. Затем на каждом листе этой поверхности над точкой $s = s_0$ имеется снова точка ветвления логарифмического типа, и так далее.

Обычные оценки для сверток дают нам следующее неравенство:

$$|(B(s, x))^k| \leq \frac{C}{k!} [l(s, x)]^k \ln l(s, x),$$

где $l(s, x)$ – расстояние от начала координат до точки (s, x) вдоль описанной выше римановой поверхности. Последняя оценка показывает, что ряды (28) сходятся и, следовательно, функция $F_0(s, x)$ является корректно определенной.

Проведенные выше рассуждения являются частным случаем следующего общего результата (см. [1], [16]).

ТЕОРЕМА 6. *Если $B(s, x)$ является бесконечно продолжимой регулярной микрофункцией в точке $s = 0$ и если ряд*

$$\varphi(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi^k \quad (29)$$

сходится в окрестности начала координат, то функция

$$\varphi(B(s, x)) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k [B(s, x)]^k$$

является корректно определенной, бесконечно продолжимой микрофункцией из пространства $\mathcal{M}_{0, \text{cont}}$.

В частности, из последней теоремы следует, что любой ряд типа (29) с необращающимся в нуль коэффициентом a_0 определяет обратимый элемент алгебры $\mathcal{M}_{0, \text{cont}}$, и, следовательно, функция $F_0(s, x)$, заданная формулой (28), обратима. Поэтому формула (27) с такой функцией F_0 задает общее решение уравнения (26).

⁸Эта формула совершенно аналогична формуле

$$y(x) = \exp \left\{ \int_0^x a(x) dx \right\},$$

которая дает частное решение обыкновенного дифференциального уравнения $y' = a(x)y$.

ПРИМЕР 2. Наш второй пример есть пример системы второго порядка линейных сторонних дифференциальных уравнений⁹

$$\begin{aligned}\Delta_{s_1}F &= A_1(x)F + B_1(x)G, \\ \Delta_{s_2}G &= A_2(x)F + B_2(x)G, \\ \Delta_s F &= 0 \text{ для } s \neq s_1, \quad \Delta_s G = 0 \text{ для } s \neq s_2.\end{aligned}\tag{30}$$

Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 7. Пусть (F_1, G_1) и (F_2, G_2) – два решения системы (30) такие, что¹⁰

$$D \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} F_1 & F_2 \\ G_1 & G_2 \end{vmatrix} = F_1 G_2 - F_2 G_1 \tag{31}$$

есть обратимый элемент в алгебре $\mathcal{M}_{0,\text{cont}}$. Тогда общее решение уравнения (30) имеет вид

$$\begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} F_1 \\ G_1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} F_2 \\ G_2 \end{pmatrix}, \tag{32}$$

где C_1 и C_2 – константы ресургенции, т.е. такие элементы $C_1, C_2 \in \mathcal{M}_{0,\text{cont}}$, что $\Delta_s C_j = 0$ для любой точки $s \in \mathbb{C}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что любая пара (F, G) , определенная соотношением (32), является решением уравнения (30). Докажем, что верно и обратное. Поскольку детерминант (31) является обратимым элементом в алгебре $\mathcal{M}_{0,\text{cont}}$, уравнения (32) разрешимы относительно неизвестных C_1, C_2 для любой пары (F, G) элементов из алгебры $\mathcal{M}_{0,\text{cont}}$. Покажем, что если (F, G) – решение системы (30), то микрофункции C_1 и C_2 , определенные таким образом, являются в действительности константами ресургенции. Чтобы это сделать, мы заметим, что прямое вычисление показывает, что сторонние производные микрофункции D , определенной соотношением (31), равны

$$\Delta_{s_1} D = A_1(x)D, \quad \Delta_{s_2} D = B_2(x)D.$$

Далее, мы имеем

$$C_1 = D^{-1}(FG_2 - GF_2), \quad C_2 = D^{-1}(GF_1 - FG_1),$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}\Delta_{s_1} C_1 &= -D^{-2}(FG_2 - GF_2)\Delta_{s_1} D + D^{-1}(G_2\Delta_{s_1} F - G\Delta_{s_1} F_2) \\ &= -D^{-1}A_1(x)(FG_2 - GF_2) + D^{-1}[G_2(A_1(x)F + B_1(x)G) \\ &\quad - G(A_1(x)F_2 + B_1(x)G_2)] = -A_1(x)C_1 + A_1(x)C_1 = 0,\end{aligned}$$

⁹В последующем мы будем для краткости опускать последние уравнения в ресургентной системе. Мы предполагаем, что все сторонние производные, за исключением тех, которые явно входят в ресургентную систему, тождественно обращаются в нуль.

¹⁰Мы подчеркнем, что все произведения, рассматриваемые ниже, являются произведениями в сверточной алгебре $\mathcal{M}_{0,\text{cont}}$.

что и требовалось доказать. Соотношения

$$\Delta_{s_2} C_1 = 0, \quad \Delta_{s_1} C_2 = 0, \quad \Delta_{s_2} C_2 = 0$$

вместе с соотношениями $\Delta_s C_j = 0$ для $s \neq s_1, s_2$ могут быть установлены аналогичным образом. Это завершает доказательство теоремы.

Имеется некоторый момент в проведенных выше вычислениях, который выглядит (по крайней мере на первый взгляд) как некое противоречие. Дело в том, что произведения $F_1 G_2$ и $F_2 G_1$, входящие в определение детерминанта D , имеют особенности в точках s_1 , s_2 и $s_1 + s_2$ в то время, когда сторонняя производная $\Delta_s D$ не обращается в нуль лишь для значений $s = s_1$ и $s = s_2$. Причина такого феномена состоит в том, что при вычислении сторонней производной учитываются только те точки особенности, которые видны из начала координат вдоль прямых линий. В то же самое время особенность функции D в точке $s_1 + s_2$ расположена на другом листе римановой поверхности этой функции и, следовательно, не видна из начала координат.

В заключение мы отметим, что все решения (F, G) системы (30) имеют особенности в точках $ks_1 + ms_2$ для любых положительных чисел k и m . Однако, поскольку из начала координат вдоль прямой видны только точки $s = s_1$ и $s = s_2$, сторонние производные функций F и G не обращаются в нуль лишь в точках $s = s_1$ и $s = s_2$ соответственно, *исключая случай, когда точки s_1 и s_2 лежат на одном и том же луче, выходящем из начала координат*. В этом последнем случае сторонние производные функций F и G отличны от нуля во всех точках решетки $\{ks_1 + ms_2, k, m \in \mathbf{N}\}$ и, следовательно, система уравнений (30) не разрешима (по крайней мере, если мы требуем, чтобы $\Delta_s F = 0$ для $s \neq s_1$ и $\Delta_s G = 0$ для $s = s_2$). Подобная ситуация имела место в первом примере этого параграфа.

§ 4. Явление Стокса и однозначность

Рассмотрим ресургентную функцию $f(x, q)$, которая а priori является однозначной в окрестности некоторой своей фокальной точки q_0 . Мы предположим, что функция $f(x, q)$ является классической ресургентной функцией, т.е. что ее преобразование Бореля $F(s, x, q)$ – бесконечно продолжимая гиперфункция, однородная по переменным (s, x) степени -1 . Тогда множество особенностей функции F описывается уравнением

$$s = S(x, q) \tag{33}$$

с ветвящейся аналитической функцией $S(x, q)$, однородной степени 1 по x , и, следовательно, множество фокальных точек функции $f(x, q)$ может быть рассмотрено как аналитическое множество в комплексной плоскости $\mathbf{C}_q^1$. Для простоты предположим, что функция $S(x, q)$ имеет конечное число значений

$$S_1(x, q), \dots, S_N(x, q),$$

хотя нумерация этих значений не может быть выбрана естественным образом для всех нефокальных точек q .

Как было показано в §1, для того чтобы функция $f(x)$ была однозначной функцией в окрестности фокальной точки q_0 , функция $F(s, x, q)$ должна удовлетворять некоторым дополнительным условиям, которые могут быть записаны в форме соответствующих ресургентных уравнений. Таким образом, для того чтобы получить информацию о структуре функции $F(s, x, q)$, необходимо обычным образом найти общее решение построенных ресургентных уравнений. Ясно, что ресургентная структура рассматриваемой ресургентной функции (т.е. множество особенностей (33) ее преобразования Бореля) должна быть задана заранее, поскольку эта информация необходима для выписывания соответствующей системы ресургентных уравнений. Мы предположим (так же, как и в § 1), что для любой точки q , лежащей на поверхности Стокса, каждая точка $S_j(x, q)$ может быть освещена самое большее одной из других особых точек $S_k(x, q)$. (Разумеется, это предположение введено для простоты.) Используя понятие сторонней производной, мы можем переписать систему (13) ресургентных уравнений для микрофункций, соответствующих освещенным точкам диаграммы освещения функции $f(x)$, следующим образом:

$$F_j^k = \mathcal{A}^t F_{j-t}^k - \Delta_{S_k(x, q_j)} (\mathcal{A}^r F_{j-r}^l)$$

(по поводу обозначений см. рис. 1 и 2). Ниже мы дадим несколько примеров решения системы уравнений (34).

§ 5. Примеры

В этом параграфе мы представим несколько примеров, показывающих, какую информацию можно получить из ресургентных уравнений, полученных в предыдущем параграфе. Мы увидим, что запись этих уравнений с помощью введенных выше сторонних производных позволяет, используя методы, аналогичные методам решения обыкновенных дифференциальных уравнений, вывести общий вид соответствующей ресургентной функции.

5.1. Ресургентные функции типа Эйри. В качестве первого примера этого параграфа мы рассмотрим пример ресургентных функций типа Эйри см. [19], т.е. ресургентной функции $f(x, q)$, множество особенностей преобразования Бореля которой задается уравнением

$$s = S(x, q) = \frac{2}{3} x q^{\frac{3}{2}}. \quad (35)$$

Очевидно, что единственной фокальной точкой такой функции в q -плоскости является начало координат $q = 0$. Поэтому в качестве петли l , которая была использована для построения системы ресургентных уравнений, можно взять единичную окружность $q = e^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Опишем теперь диаграмму освещенности для функций рассматриваемого типа. Очевидно, одна из двух точек (35) освещает другую, если и только если $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ или $\varphi = \frac{4\pi}{3}$. (Мы будем проводить наши рассуждения для вещественных положительных значений x .) Соответствующие линии Стокса показаны на рис. 4, а). Можно легко проверить, что соответствующая диаграмма освещения

Рис. 4. Диаграмма освещенности для ресургентной функции типа Эйри

имеет вид, показанный на рис. 4, b). Двигаясь вдоль петли l , точки $S_1(x, q)$ и $S_2(x, q)$ трижды меняют свои положения.

Нетрудно видеть, что система ресургентных уравнений для диаграммы освещения этого типа (записанная для микрофункций F_0^1 , F_1^2 и F_2^1 , отвечающим освещенным точкам этой диаграммы) есть

$$\begin{aligned} F_0^1 &= \mathcal{A}^2 F_1^2 - \Delta(\mathcal{A} F_2^1), \\ F_1^2 &= \mathcal{A}^2 F_2^1 - \Delta(\mathcal{A} F_0^1), \\ F_2^1 &= \mathcal{A}^2 F_0^1 - \Delta(\mathcal{A} F_1^2). \end{aligned} \quad (36)$$

Мы подчеркнем, что для любой гиперфункции $F(s, x, q)$, имеющей в качестве точек ветвления (35), можно выбрать множество микрофункций F_0^1 , F_1^2 и F_2^1 , определенных особыми точками функции $F(s, x, q)$ таким образом, чтобы соответствующая ресургентная функция $f(x)$ была однозначной в окрестности начала координат, и, следовательно, ресургентные уравнения (36) были выполнены. Для того чтобы это сделать, достаточно определить функцию $f(x)$ как интеграл вида (2) с контуром интегрирования Γ , окружающим обе точки ветвления, как это показано на рис. 5. Тогда разложение полученной функции даст нам требуемые микрофункции, которые удовлетворяют системе (36). Однако если мы потребуем, чтобы аналитическое продолжение преобразования Лапласа любой микрофункции, определяемое функцией $F(s, x, q)$ в некоторой точке q (скажем, $q = q_0$), было однозначной функцией, то ресургентная система (36) налагает некоторые ограничения на функцию $F(s, x, q)$.

Для определенности мы рассмотрим систему ресургентных уравнений для микрофункции, соответствующей рецессивной компоненте функции $f(x)$ в точке q_0 . Для этого мы положим $F_0^2 = 0$ в (36). Тогда имеем $F_1^2 = \mathcal{A} F_0^2 = 0$, а в силу первого уравнения в (36) мы имеем $F_0^1 = \mathcal{A}^2 F_1^2$. Теперь, исключая микрофункцию F_1^2 из построенной системы, мы получаем следующую систему ресургентных

Рис. 5. Контур интегрирования для однозначной функции

уравнений:

$$\begin{aligned}\Delta(\mathcal{A}F_0^1) &= -\mathcal{A}^{-2}F_0^1, \\ \Delta(\mathcal{A}^{-1}F_0^1) &= \mathcal{A}^2F_0^1.\end{aligned}$$

Обозначая через F_d и F_r доминантные и соответственно рецессивные компоненты в точке $q = q_1$:

$$F_d = \mathcal{A}F_0^1 = F_1^1, \quad F_r = \mathcal{A}^{-2}F_0^1 = F_1^2,$$

мы можем переписать последнюю систему в виде

$$\begin{aligned}\Delta F_d &= -F_r, \\ (\mathcal{A}^{-1}\Delta\mathcal{A})F_r &= F_d.\end{aligned}$$

Заметим теперь, что оператор $\mathcal{A}^{-1}\Delta\mathcal{A}$ в первом уравнении есть не что иное как сторонняя производная микрофункции F_r в точке $s_1 = -\frac{4}{3}xq^{3/2}$ (а оператор Δ в последнем уравнении может быть трактован как сторонняя производная микрофункции F_d в точке $s_2 = -\frac{4}{3}xq^{3/2}$). Таким образом, последняя система может быть рассмотрена как система ресургентных уравнений

$$\begin{aligned}\Delta_{s_2}F_d &= -F_r, \\ \Delta_{s_1}F_r &= F_d\end{aligned}\tag{37}$$

при одном и том же значении параметра q .

Следующий этап в исследовании полученной системы ресургентных уравнений состоит в том, чтобы показать, что классическая функция Эйри является ресургентной функцией, удовлетворяющей системе (37). Как хорошо известно, функция Эйри, т.е. решение $u(x, q)$ уравнения

$$x^{-2}\frac{d^2u}{dq^2} - qu = 0,\tag{38}$$

может быть записана в виде интеграла:

$$u(x, q) = \int_{\gamma} e^{x\left(\xi q - \frac{\xi^3}{3}\right)} d\xi. \quad (39)$$

Здесь контур γ есть любой контур, уходящий на бесконечность в направлениях убывания вещественной части функции $\xi q - \xi^3/3$. Производя замену переменных

$$x\left(\xi q - \frac{\xi^3}{3}\right) = -s, \quad (40)$$

мы приведем последнее соотношение к виду

$$u(x, q) = \int_{\gamma'} e^{-s} \frac{d\xi(s, x, q)}{ds} ds,$$

где $\xi = \xi(s, x, q)$ – ветвящееся решение уравнения (40).

Исследуем особенности функции $\xi(s, x, q)$. Эта функция может быть записана в виде $\xi(s, x, q) = \Xi\left(\frac{s}{x}, q\right)$, причем функция $\Xi(\sigma, q)$ определяется из уравнения

$$\Xi q - \frac{\Xi^3}{3} = -\sigma.$$

Решение этого уравнения имеет особенности в точках, где

$$\frac{\partial\left(\Xi q - \frac{\Xi^3}{3}\right)}{\partial\Xi} = q - \Xi^2 = 0,$$

т.е. для

$$\sigma = -\Xi q + \frac{\Xi^3}{3} \Big|_{\Xi=\sqrt{q}} = \frac{2}{3} q^{\frac{3}{2}}$$

при некотором выборе знака функции $q^{\frac{3}{2}}$. Поэтому особые точки функции $\xi(s, x, q)$ расположены при

$$\frac{s}{x} = \frac{2}{3} q^{\frac{3}{2}}, \quad \text{т.е. для } s = \frac{2}{3} x q^{\frac{3}{2}},$$

что совпадает с формулой (35). Далее, можно легко проверить, что функция $\partial\xi(s, x, q)/\partial s$ имеет особенности типа

$$F(s, x, q) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k^{(j)}(x, q) (s - S_j(s, q))^{k-1/2}}{2\Gamma(k+1/2)}$$

в каждой точке $s = S_j(x, q)$. Кроме того, прямо из определения функции $u(x, q)$ следует, что эта функция является однозначной в окрестности соответствующих фокальных точек. (В действительности функция, определенная формулой (39),

является целой функцией переменной q .) Поэтому две микрофункции, $F_d^{(1)}$ и $F_r^{(1)}$, определенные функцией $\partial\xi(s, x, q)/\partial s$, образуют решение ресургентной системы (37).

Используя результаты замечания 3, можно легко построить другое решение $(F_d^{(2)}, F_r^{(2)})$ уравнения (37), где $F_d^{(2)}$ и $F_r^{(2)}$ – доминантные и рецессивные компоненты функции $\partial u(x, q)/\partial q$. Соответствующий определитель

$$D = \begin{vmatrix} F_d^{(1)} & F_d^{(2)} \\ F_r^{(1)} & F_r^{(2)} \end{vmatrix} \quad (41)$$

является преобразованием Бореля вронскиана

$$W = \begin{vmatrix} u_d(x, q) & \frac{\partial u_d(x, q)}{\partial q} \\ u_r(x, q) & \frac{\partial u_r(x, q)}{\partial q} \end{vmatrix},$$

где $u_d(x, q)$ и $u_r(x, q)$ – преобразования Лапласа микрофункций $F_d^{(1)}$ и $F_r^{(1)}$. Поскольку u_d и u_r – два линейно независимых решения уравнения (38), функция W является необращающейся в нуль константой и, следовательно, микрофункция D , определенная формулой (41), является обратимым элементом алгебры $M_{0, \text{cont}}$. Теперь, используя теорему 7, можно написать общее решение ресургентной системы (37):

$$\begin{pmatrix} F_d \\ F_r \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} F_d^{(1)} \\ F_r^{(1)} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} F_d^{(2)} \\ F_r^{(2)} \end{pmatrix}$$

с произвольными константами ресургенции C_1 и C_2 .

Последняя формула позволяет исследовать явление Стокса для любого решения (F_d, F_r) ресургентной системы (37). Действительно, легко видеть, что риманова поверхность всех функций $F_d^{(j)}$, $F_r^{(j)}$, $j = 1, 2$, такая, как показано на рис. 6. Поэтому не составляет труда вычислить сторонние производные (и, следовательно, связывающие гомоморфизмы) этих функций. А эти формулы, в свою очередь, позволяют вычислить сторонние производные и связывающие гомоморфизмы для произвольного решения ресургентных уравнений (37).

Рис. 6. Риманова поверхность для ресургентной функции типа Эйри

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Рассмотрение этого примера (так же, как и двух последующих) может быть проведено аналогичным образом для случая, когда ресургентная структура рассматриваемых функций редуцируется к виду (35) с помощью голоморфной замены переменных.

5.2. Специальные функции высшего порядка. В предыдущем пункте мы изучили функции, имеющие ресургентную структуру, совпадающую с ресургентной структурой функции Эйри

$$u(x, q) = \int_{\gamma} e^{x\left(\xi q - \frac{\xi^3}{3}\right)} d\xi.$$

Фазовая функция $\Phi = \xi q - \frac{\xi^3}{3}$ этого интеграла имеет при $q = 0$ стационарную точку типа A_2 (см., например, [20]). Здесь мы исследуем функции, имеющие ресургентную структуру, совпадающую с ресургентной структурой функции

$$u_k(x, q) = \int_{\gamma} e^{x\left(\xi q - \frac{\xi^{k+1}}{k+1}\right)} d\xi. \quad (42)$$

Фазовая функция последнего интеграла имеет для $q = 0$ стационарную точку типа A_k . Для простоты мы рассмотрим ниже случай $k = 3$; общий случай исследуется вполне аналогично.

Вначале исследуем ресургентную структуру интеграла (42). Как и выше, используем замену переменных

$$s = x\left(\frac{\xi^4}{4} - \xi q\right), \quad (43)$$

которая приводит правую часть интеграла (42) к виду

$$u_3(x, q) = \int_{\gamma'} e^{-s} \frac{d\xi_3(s, q, x)}{ds} ds,$$

где $\xi = \xi_3(s, q, x)$ – решение уравнения (43). Последняя функция может быть записана в виде $\xi_3(s, x, q) = \Xi_3\left(\frac{s}{x}, q\right)$, где функция $\Xi_3(\sigma, q)$ определяется из уравнения

$$\Xi_3 q - \frac{\Xi_3^4}{4} = -\sigma.$$

Решение этого уравнения имеет особенности в точках, где

$$\frac{\partial\left(\Xi_3 q - \frac{\Xi_3^4}{4}\right)}{\partial\Xi_3} = q - \Xi_3^3 = 0,$$

т.е. для

$$\sigma = -\Xi_3 q + \frac{\Xi_3^4}{4} \Big|_{\Xi=\sqrt{q}} = \frac{3}{4} q^{\frac{4}{3}}$$

при определенном выборе знака в правой части. Поэтому особые точки функции $\xi_3(s, x, q)$ расположены при

$$\frac{s}{x} = \frac{3}{4}q^{\frac{4}{3}}, \quad \text{т.е. для } s = \frac{3}{4}xq^{\frac{4}{3}}.$$

Как и выше, нетрудно проверить, что функция $u_3(x, q)$, определенная интегралом (42), является однозначной ресургентной функцией с простыми особенностями, которая (для любого допустимого выбора контура γ') удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$x^{-3} \frac{d^3 u}{dq^3} - qu = 0.$$

Рис. 7. Особенности преобразования Бореля ресургентной функции типа A_2

Исследуем теперь общую ресургентную функцию $f(x, q)$ такую, что ее преобразование Бореля $F(s, x, q)$ имеет особенности в точках

$$s = \frac{3}{4}xq^{\frac{4}{3}},$$

и которая является однозначной функцией в окрестности своей фокальной точки $q = 0$. Как и выше, мы используем единичную окружность в плоскости $\mathbf{C}_q$ в качестве петли, окружающей соответствующую фокальную точку для построения соответствующих ресургентных уравнений. Эта петля и соответствующие линии Стокса

$$L_j = \left\{ q : \arg q = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}j \right\}$$

показаны на рис. 7, а) (на рис. 7, б) указано положение особых точек функции $F(s, q, x)$ для соответствующих значений параметра q). Мы оставляем читателю легкую проверку того факта, что диаграмма освещенности для рассматриваемой ресургентной структуры имеет вид, указанный на рис. 8 (картина повернута на

180° по часовой стрелке). Мы также не будем давать здесь всех вычислений, поскольку они проводятся аналогично предыдущему пункту. Приведем лишь окончательный результат – систему резургентных уравнений

$$\begin{aligned}
 F_1^1 &= \mathcal{A}F_8^3 - \Delta(\mathcal{A}^2 F_7^1), \\
 F_3^2 &= \mathcal{A}^5 F_5^2 - \Delta(\mathcal{A}^3 F_7^1), \\
 F_3^3 &= \mathcal{A}F_2^3 - \Delta(\mathcal{A}^2 F_1^1), \\
 F_4^2 &= \mathcal{A}^5 F_7^1 - \Delta(\mathcal{A}^3 F_1^1), \\
 F_5^2 &= \mathcal{A}F_8^3 - \Delta(\mathcal{A}^2 F_3^3), \\
 F_6^1 &= \mathcal{A}^5 F_1^1 - \Delta(\mathcal{A}^3 F_3^3), \\
 F_7^1 &= \mathcal{A}F_6^1 - \Delta(\mathcal{A}^2 F_5^2), \\
 F_8^3 &= \mathcal{A}F_3^3 - \Delta(\mathcal{A}^3 F_5^2).
 \end{aligned}$$

Рис. 8. Диаграмма освещенности для резургентной функции типа A_2

Далее, запишем резургентные уравнения для микрофункции F_0^1 , определенной функцией $F(s, q, x)$ в особой точке $s = S_1(q, x)$ (для того чтобы сделать это, мы должны положить $F_5^2 = F_7^1 = 0$):

$$\begin{aligned}
 \Delta_{s_1^3} G_1 &= -G_3, \\
 \Delta_{s_3^1} G_3 &= G_1, \\
 \Delta_{s_3^2} G_3 &= -G_2.
 \end{aligned}$$

Здесь через G_j , $j = 1, 2, 3$, мы обозначили микрофункции, определенные в точках $S_j(x, q)$, $j = 1, 2, 3$, функцией $F(s, q, x)$ при $q = q_4$, сдвинутые в начало координат, а через s_j^i , $i = 1, 2, 3$, – особенности полученной функции G_j .

Однако в рассматриваемом случае полученная система резургентных уравнений не является полной. Для получения полной системы резургентных уравнений необходимо записать резургентные уравнения для микрофункций F_0^2 и F_0^3 (это

можно сделать обычным путем) и добавить эти уравнения к полученной системе. В результате мы придем уже к полной системе резургентных уравнений для специальных функций типа A_3 :

$$\begin{aligned}\Delta_{s_1^3} G_1 &= -G_3, \\ \Delta_{s_3^1} G_3 &= G_1, \\ \Delta_{s_3^2} G_3 &= -G_2, \\ \Delta_{s_2^3} G_2 &= G_3, \\ \Delta_{s_2^1} G_2 &= -G_1, \\ \Delta_{s_1^2} G_1 &= G_2.\end{aligned}$$

Далее, так же, как и в предыдущем пункте, мы получим общее решение последней системы резургентных уравнений в виде

$$\begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} G_1^{(1)} \\ G_2^{(1)} \\ G_3^{(1)} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} G_1^{(2)} \\ G_2^{(2)} \\ G_3^{(2)} \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} G_1^{(3)} \\ G_2^{(3)} \\ G_3^{(3)} \end{pmatrix},$$

где $(G_1^{(j)}, G_2^{(j)}, G_3^{(j)})$, $j = 1, 2, 3$, – микрофункции, определенные в точках $S_1(q, x)$, $S_2(q, x)$, $S_3(q, x)$ функциями $u_3(x, q)$, $\partial u_3(x, q)/\partial q$ и $\partial^2 u_3(x, q)/\partial q^2$ соответственно, и C_1 , C_2 и C_3 – константы резургенции.

5.3. Функции параболического цилиндра¹¹. В этом пункте мы исследуем функции, у которых резургентная структура совпадает с резургентной структурой функции параболического цилиндра [10]. Мы напомним, что эти функции определены как решения уравнения Вебера

$$x^{-2} \frac{d^2 u}{dx^2} - q^2 u = 0 \quad (44)$$

и имеют следующее интегральное представление:

$$u(x, q) = \int_{\gamma} e^{x \left(2p^2 q + \frac{q^2}{2} + p^4 \right)} dp,$$

причем контур γ выбирается таким образом, чтобы экспонента под знаком интеграла убывала вдоль этого контура, когда $|p| \rightarrow \infty$. Как и выше, замена переменных

$$s = -x \left(2p^2 q + \frac{q^2}{2} + p^4 \right)$$

приводит к формуле

$$u(x, q) = x^{\frac{1}{2}} \int_{\gamma} e^{-s} \frac{dp}{ds}(s, x, q) ds.$$

¹¹Такие функции называются также *функциями Вебера*.

Функция $p = p(s, q, x)$ может быть вычислена явным образом:

$$p(s, q, x) = \sqrt{-q + \sqrt{\frac{s}{x} + \frac{q^2}{2}}}$$

и, как легко видеть, имеет две точки ветвления $s = \pm xq^2/2$. Риманова поверхность этой функции показана на рис. 9. Можно проверить, что две микрофункции, соответствующие особым точкам $s = -xq^2/2$, отличаются друг от друга только знаком, и поэтому формула (45) доставляет два линейно независимых решения уравнения (44), если мы выберем два контура γ таким образом, чтобы выражение (45) представляло собой преобразование Лапласа микрофункций, определенных функцией $p(s, q, x)$ в точках $s = \pm xq^2/2$. Таким образом, строятся два линейно независимых решения уравнения Вебера с резургентной структурой, определенной соотношением

$$s = \pm xq^2/2. \quad (46)$$

Рис. 9. Риманова поверхность для резургентной функции типа Вебера A_2

Исследуем теперь общий вид резургентных функций с резургентной структурой, заданной равенством (46). Петля l и диаграмма освещенности показаны на рис. 10. Соответствующая система резургентных уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} F_1^1 &= \mathcal{A}^2 F_3^1 - \Delta(\mathcal{A} F_4^2), \\ F_3^1 &= \mathcal{A}^2 F_1^1 - \Delta(\mathcal{A} F_2^2), \\ F_2^2 &= \mathcal{A}^2 F_4^2 - \Delta(\mathcal{A} F_1^1), \\ F_4^2 &= \mathcal{A}^2 F_2^2 - \Delta(\mathcal{A} F_3^1). \end{aligned}$$

Для того чтобы записать систему уравнений для доминантной (в точке q_1) микрофункции, положим $F_1^1 = 0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{-1} \Delta(\mathcal{A} F_3^1) &= \mathcal{A}^3 F_4^2 - \mathcal{A}^{-1} F_4^2, \\ \mathcal{A}^{-2} \Delta(\mathcal{A} F_4^2) &= -F_3^1, \\ \Delta(\mathcal{A}^3 F_4^2) &= F_3^1. \end{aligned}$$

Рис. 10. Диаграмма освещенности для резургентной функции типа Вебера

Если ввести обозначения

$$G_1 = F_3^1, \quad G'_2 = \mathcal{A}^3 F_4^2, \quad G''_2 = \mathcal{A}^{-1} F_4^2,$$

то последняя система примет вид

$$\begin{aligned} \Delta_{s_1} G_1 &= G'_2 - G''_2, \\ \Delta_{s_2} G'_2 &= G_1, \\ \Delta_{s_2} G''_2 &= -G_1, \end{aligned} \tag{47}$$

где $s_1 = -xq^2$ и $s_2 = xq^2$ — особые точки соответствующих микрофункций. Нетрудно видеть, что полученная система содержит (в отличие от систем, полученных в предыдущих примерах) *две* микрофункции G'_2 и G''_2 в *одной и той же особой точке*. Причину этого явления читатель может усмотреть из рис. 9, где показана риманова поверхность типичного решения построенной системы резургентных уравнений. В самом деле, ясно, что функция с такой римановой поверхностью определяет в одной из своих особых точек две (вообще говоря, различные) микрофункции.

Попробуем теперь построить общее решение системы (47). Прежде всего, добавляя второе уравнение этой системы к третьему, получим соотношение

$$\Delta_{s_2} (G'_2 + G''_2) = 0,$$

из которого следует, что функция $G'_2 + G''_2$ является константой резургенции:

$$G'_2 + G''_2 = C_1.$$

Исключая микрофункцию G''_2 из системы (47) с помощью последнего соотношения, мы получаем систему

$$\begin{aligned} \Delta_{s_1} G_1 &= 2G'_2 - C_1, \\ \Delta_{s_2} G'_2 &= G_1. \end{aligned}$$

Теперь, используя подстановку $G'_2 = G''_2 + C_1/2$, сведем рассматриваемую систему к системе вида

$$\begin{aligned}\Delta_{s_1} G_1 &= 2G''_2, \\ \Delta_{s_2} G''_2 &= G_1.\end{aligned}\tag{48}$$

Нетрудно проверить, что две микрофункции, $H_1^{(1)}$ и $H_2^{(1)}$, определенные функцией (45), а также две микрофункции, $H_1^{(2)}$ и $H_2^{(2)}$, определенные производными от функции (45), удовлетворяют последней системе. Как и в предыдущем пункте, мы видим, что общее решение уравнения (48) имеет вид

$$\begin{pmatrix} G_1 \\ G''_2 \end{pmatrix} = C_2 \begin{pmatrix} H_1^{(1)} \\ H_2^{(1)} \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} H_1^{(2)} \\ H_2^{(2)} \end{pmatrix}$$

и, следовательно, общее решение уравнения (47) задается формулами

$$\begin{aligned}G_1 &= C_2 H_1^{(1)} + C_3 H_1^{(2)}, \\ G'_2 &= \frac{C_1}{2} + C_2 H_2^{(1)} + C_3 H_2^{(2)}, \\ G''_2 &= \frac{C_1}{2} - C_2 H_2^{(1)} - C_3 H_2^{(2)},\end{aligned}$$

где C_j , $j = 1, 2, 3$, – произвольные константы ресургенции. Очевидно, для того чтобы описать общий вид функций с ресургентной структурой веберовского типа, необходимо добавить к полученному общему решению аналогичное, отвечающее случаю, когда особые точки $s = S_1(x, q)$ и $s = S_2(x, q)$ переставлены. Соответствующие вычисления мы оставляем читателю. Пожалуй, единственное, что мы отметим в заключении этого пункта, это то, что в отличие от предыдущих примеров полученная здесь ресургентная система имеет в качестве решений константы. Причина этого явления состоит в том, что монодромия особых точек ресургентных функций типа Вебера тривиальна, что и дает тривиальное решение ресургентной системы.

Список литературы

1. *Écalle J.* Les Fonctions Résurgentes. I, II, III. Paris: Publications Mathématiques d'Orsay, 1981–1985.
2. *Sternin B., Shatalov V.* Resurgent analysis in several variables. I. General theory // Partial Differential Equations. Models in Physics and Biology. V. 82 of Mathematical Research. Berlin: Akademie Verlag, 1994. P. 351–377.
3. *Sternin B., Shatalov V.* On a notion of resurgent function of several variables // Abstracts of the Conference “Partial Differential Equations”. Potsdam. September, 1993 / Eds. Demuth M. and B.-W. Schulze. Potsdam: Max-Planck-Institut für Mathematik, 1993.
4. *Sternin B., Shatalov V.* On a notion of resurgent function of several variables // Mathematische Nachrichten 1995. V. 171. P. 283–301.
5. *Sternin B., Shatalov V.* On a notion of resurgent function of several variables. Preprint 78–93. Bonn: Max-Planck-Institut für Mathematik, 1993.
6. *Pham F.* Résurgence d'un thème de Huygens-Fresnel // Publ. Math. IHES. 1988. V. 68.
7. *Pham F.* Resurgence, quantized canonical transformations, and multiinstanton expansions // Algebraic Analysis. Acad. Press. 1988. V. II.

8. *Delabaere E.* Etude de l'opérateur de Schrödinger stationnaire unidimensionnel pour un potentiel polynôme trigonométrique // R. C. Acad. Sci. Paris. Série I. 1992. V. 314. P. 807–810.
9. *Delabaere E.* Introduction to the Écalle theory // Computer algebra and differential equations / Ed. E. Tournier. London Mathem. Soc. Lecture Note Series, 1994. V. 193. P. 59–102.
10. *Delabaere E., Dillinger H.* Contribution à la Résurgence quantique: Thèse de doctorat. Université de Nice-Sophia-Antipolis, 1991.
11. *Delabaere E., Dillinger H., Pham F.* Développements semi-classiques exacts des niveaux d'énergie d'un oscillateur à une dimension // R. C. Acad. Sci. Paris. Série I. 1990. V. 310. P. 141–146.
12. *Delabaere E., Dillinger H., Pham F.* Resurgent methods in semi-classical asymptotics. Preprint № 441. Université de Nice, 1996.
13. *Delabaere E., Dillinger H., Pham F.* Exact semi-classical expansions for one-dimensional quantum oscillator. 1994.
14. *Delabaere E., Dillinger H., Pham F.* Résurgence de Voros et périodes des courbes hyperelliptiques // Annales de l'Institut Fourier. 1993. V. 43. № 1. P. 163–199.
15. *Tougeron J.-C.* An introduction to the theory of Gevrey expansions and to Borel–Laplace transform with some applications. Canada University of Toronto: Preprint, 1990.
16. *Candelpergher B., Nosmas J.C., Pham F.* Approche de la Résurgence // Hermann éditeurs des sciences et des arts. 1993.
17. *Sato M., Kawai T., Kashiwara M.* Hyperfunctions and pseudo-differential equations // Lecture Notes in Math. 1973. V. 287. P. 265–529.
18. *Стернин Б. Ю., Шаталов В. Е.* Преобразование Бореля–Лапласа и ресургентные функции // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1994. Т. 3. С. 37–49.
19. *Jidoutou A. O.* Modèles de résurgence paramétrique, fonctions d'Airy et cylindro-paraboliques // J. Math. Pures et Appl. 1994. V. 73. № 2.
20. *Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М.* Особенности дифференцируемых отображений. Гл. 1. М.: Наука, 1982.

Поступило в редакцию
26.IV.1995,
28.XI.1996