Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Л. Эдельштейн, Асимптотическое расщепление краевых задач для уравнения Гельмгольца в полосе с “проницаемыми” границами, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1997, том 61, выпуск 4, 203–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/im142>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 12:31:36

УДК 517.9+534.231

С. Л. Эдельштейн

**Асимптотическое расщепление краевых задач
для уравнения Гельмгольца
в полосе с “проницаемыми” границами**

Рассматривается краевая задача для уравнения Гельмгольца, которая является математической моделью гидроакустического волновода с проницаемой границей. Граничное условие содержит трансляционно-инвариантный оператор, символ которого имеет смысл импеданса границы. Предполагается, что коэффициент уравнения Гельмгольца медленно изменяется вдоль полосы. Доказаны теоремы об однозначной разрешимости задачи, получены асимптотические (по параметру медленности) формулы для ее решения, объяснено прикладное значение полученных результатов.

Библиография: 16 наименований.

Настоящая статья продолжает цикл работ [1]–[3], посвященных корректности и асимптотическому расщеплению дифференциальных уравнений с операторнозначными коэффициентами.

Здесь рассматриваются задачи для уравнения Гельмгольца в полосе с медленно изменяющимися вдоль полосы коэффициентами. Некоторая нестандартность краевых задач заключается в нелокальном граничном условии на одной из прямых, ограничивающих полосу. Оно задается с помощью трансляционно-инвариантного оператора. Доказывается корректность задач и асимптотическое по параметру медленности расщепление краевых задач парой эволюционных.

С помощью техники [4] расширений операторов (с выходом из исходного пространства), зависящих от параметра, рассматриваемые задачи сводятся к уравнениям

$$d^2y/dx^2 - Q(\xi x)y = F(x), \quad \xi \ll 1,$$

с операторнозначными коэффициентами в некотором абстрактном гильбертовом пространстве. Важным обстоятельством является то, что операторы $Q(t)$ при всех t оказываются необратимыми из-за принадлежности нуля к абсолютно непрерывному спектру. Таким образом, мы не можем непосредственно применить результаты [2], [3], описывающие регулярную ситуацию; не удастся воспользоваться и [1], где изучались случаи, когда необратимость $Q(t)$ возникает при некоторых t из-за обращения в нуль собственных чисел. Основой техники здесь является некоторая процедура трансформации операторов, использующая тонкую аналитическую структуру резольвент в окрестности нуля и преобразующая $Q(t)$ в обратимые операторы.

Полученные результаты представляют некоторое математическое обоснование моделей волноводов с проницаемыми границами, в частности моделей однонаправленного распространения волн.

В настоящей работе опубликованы некоторые результаты исследования, поддержанного грантом J4J100 Международного научного фонда и Российского правительства.

§ 1. Постановка краевой задачи в полосе

1.1. Мы будем использовать следующие обозначения: $L_p(G)$, когда $1 \leq p < \infty$ и $G \subset \mathbb{R}^n$ – измеримое (по Лебегу) множество, есть пространство (классов эквивалентности) измеримых комплекснозначных функций, интегрируемых со степенью p ; $L_\infty(G)$ – пространство измеримых существенно ограниченных функций; $W_p^m(G)$ ($\subset L_p(G)$), если $m = 1, 2, \dots$, $1 \leq p \leq \infty$, G – открытое множество, обозначает соболевское пространство, состоящее из функций, обобщенные производные которых до порядка m включительно принадлежат $L_p(G)$. Для $p = 2$ пространства $W_p^m(G)$ и $L_p(G)$ мы рассматриваем как комплексные гильбертовы. В случае когда G – неограниченное множество, через $L_{p,\text{loc}}(G)$, $W_{p,\text{loc}}^m(G)$ будем обозначать классы функций F , принадлежащие пространствам $W_p^m(G)$, $L_p(G)$ локально.

Всюду в работе h обозначает некоторое положительное число, $\Pi = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}, z \in (0, h)\}$ – горизонтальную полосу. Вместо $L_2(0, h)$ часто будем для краткости писать H .

Функции двух переменных $F = F(x, z)$ ($x \in \mathbb{R}, z \in [0, h]$) нам удобно будет рассматривать иногда и как вектор-функции $\mathcal{F}(x) = F(x, \cdot)$ одной переменной x со значениями в некотором функциональном пространстве.

Когда B – некоторое банахово пространство, $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $1 \leq p \leq \infty$, будем использовать следующие обозначения для пространств вектор-функций:

$L_p((a, b), B)$ – пространство сильно измеримых (классов эквивалентности) вектор-функций f , подчиненных условию

$$\|f(\cdot)\|_B \in L_p(a, b), \quad \|f\|_{L_p((a, b), B)} = \|\|f(\cdot)\|_B\|_{L_p(a, b)};$$

$W_p^m((a, b), B)$ – пространство, содержащее все такие вектор-функции $f \in L_p((a, b), B)$, для которых существуют обобщенные производные $f^{(j)} \in L_p((a, b), B)$ для $j = 0, 1, \dots, m$;

$$\|f\|_{W_p^m((a, b), B)} = \left(\sum_{j=0}^m \|f^{(j)}\|_{L_p((a, b), B)}^2 \right)^{1/2};$$

$L(\mathbb{R}, B)$ ($W^m(\mathbb{R}, B)$) – пространство, состоящее из тех вектор-функций $f: \mathbb{R} \rightarrow B$, для каждой из которых $f|_{(c, d)} \in L_1((c, d), B)$ (или соответственно $f|_{(c, d)} \in W_1^m((c, d), B)$) для всех $-\infty < c < d < \infty$.

Когда B_1, B_2 – банаховы пространства, пространство линейных ограниченных операторов, действующих из B_1 в B_2 , будем обозначать $\mathcal{L}(B_1, B_2)$; $\mathcal{L}(B) = \mathcal{L}(B, B)$.

1.2. Пусть $a \in L_\infty(\Pi)$, $F \in L_2(\Pi)$; рассмотрим семейство зависящих от $\varepsilon > 0$ краевых задач

$$\Delta u_\varepsilon + (a(x, z) + i\varepsilon)u_\varepsilon = F(x, z), \quad u_\varepsilon \in W_2^2(\Pi), \quad (1.1)$$

$$u_\varepsilon(x, 0) = 0, \quad (1.2)$$

$$\hat{u}'_\varepsilon(\mu, h) = p(\mu^2 - i\varepsilon)\hat{u}_\varepsilon(\mu, h). \quad (1.3)$$

Здесь и далее $\hat{f}(\mu) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \exp(i\mu x) f(x) dx$ – преобразование Фурье по x , штрих обозначает производную по z .

Всюду будем считать, что имеет место следующее

УСЛОВИЕ 1.1. Функция p аналитична в полуплоскостях $\mathbb{C}_\pm = \{\lambda \in \mathbb{C} : \pm \operatorname{Im} \lambda > 0\}$, $p(\lambda) = \overline{p(\bar{\lambda})}$, и $\operatorname{Im} p(\lambda) > 0$ для $\lambda \in \mathbb{C}_-$. Существует $a_0 \in \mathbb{R}$ такое, что p аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda > a_0$, и $p(\lambda) < 0$ для $\lambda \in (a_0, \infty)$.

В §3 будет доказано

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. Если выполнено условие 1.1, то для любых $\varepsilon > 0$, $F \in L_2(\Pi)$ существует единственное решение u_ε задачи (1.1)–(1.3), для которого справедлива оценка

$$\|u_\varepsilon\|_{L_2(\Pi)} \leq c\varepsilon^{-1} \|F\|_{L_2(\Pi)}.$$

УСЛОВИЕ 1.2. Функции $p^\pm = p|_{\mathbb{C}_\pm}$ аналитически продолжаются в некоторую окрестность $\mathcal{O} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < d\}$ точки $\lambda = 0$ и $p^+(\lambda) \neq p^-(\lambda)$ для $\lambda \in (-d, d)$.

Важным примером функции p является $p(\lambda) = -(\lambda - a_0)^{1/2}$, где $a_0 > 0$ и ветвь функции $\tau^{1/2}$ определена для $\arg \tau \in [-\pi, \pi)$ таким образом, что $\operatorname{Re} \tau^{1/2} \geq 0$. Задача (1.1)–(1.3) с такой функцией p эквивалентна задаче вида (1.1), (1.2) в полуплоскости $\mathbb{R} \times (0, \infty)$, когда a доопределяется значением a_0 на (h, ∞) (некоторые другие примеры и комментарии см. в §6).

УСЛОВИЕ 1.3. $a(x, z) = b(\xi x, z)$, где $b \in L_\infty(\Pi)$, ξ – малый асимптотический параметр, и существуют производные $\partial b(t, \cdot)/\partial t$, $\partial^2 b(t, \cdot)/\partial t^2$, принадлежащие $L_1(\mathbb{R}, L_\infty(0, h))$.

1.3. Сформулируем один из основных результатов работы.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть выполнены условия 1.1–1.3. Тогда существуют такие $\xi_0 > 0$ и $c > 0$, что для всех $\xi_0 > \xi > 0$ и всех $F \in L_2(\Pi)$ таких, что $F(x, \cdot) \in L_1(\mathbb{R}, L_2(0, h))$, справедливы следующие утверждения.

1. Существует $u_0 \in W_{2, \text{loc}}^2(\Pi)$ такая, что при любых $a < b$ на множестве $(a, b) \times (0, h)$ решения u_ε задачи (1.1)–(1.3) при $\varepsilon \rightarrow 0$ сходятся в норме пространства $L_2((a, b) \times (0, h))$ к u_0 . Функция u_0 удовлетворяет (1.1) для $\varepsilon = 0$ и (1.2).

2. Вектор-функции $u_\varepsilon(x, \cdot)$ для $\varepsilon \geq 0$ принадлежат $L_\infty(\mathbb{R}, L_2(0, h))$, и имеет место оценка

$$\|u_\varepsilon(x, \cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}, L_2(0, h))} \leq c \|F(x, \cdot)\|_{L_1(\mathbb{R}, L_2(0, h))}.$$

Другим важным результатом работы является теорема 5.1 об асимптотическом расщеплении. Для доказательства этих теорем используются результаты работы [3], которые приведены в §2. В §3 будет построена эквивалентная (1.1)–(1.3) задача для дифференциального уравнения с операторнозначным коэффициентом в некотором абстрактном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, более широком, чем $H = L_2(0, h)$. Пространство $\mathcal{H}$ является естественным для задачи с точки зрения теории расширений операторов, зависящих от параметра, но полученная задача не относится к классу регулярных, и непосредственно применить к ней результаты работ [2], [3] нельзя. Это будет сделано в §5 после того, как в §4 задача будет преобразована в регулярную в некотором новом гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_\Gamma$.

§2. Краевые задачи для дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве

В этом параграфе мы приведем те результаты статьи [3], на которые опирается доказательство основных теорем настоящей работы.

2.1. Будем говорить, что семейство $Q(t)$, $t \in \mathbb{R}$, замкнутых в B операторов с плотной областью определения *регулярно*, если существует $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ такое, что операторы $(Q(t) - \lambda_0)$ обратимы для $t \in \mathbb{R}$, $\|(Q(t) - \lambda_0)^{-1}\|$ равномерно по $t \in \mathbb{R}$ ограничены, и семейство операторов $Q(t) - Q(0) \in \mathcal{L}(B)$ равномерно ограничено.

Иногда в связи с семейством операторов $Q(t)$ мы будем рассматривать семейство норм $\|\cdot\|_{B(t)}$, эквивалентных норме $\|\cdot\|_B$ основного пространства. Если это семейство норм таково, что существует функция $m \in L_1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ такая, что для всех $f \in B$, $t \in \mathbb{R}$ верхняя производная от $\|f\|_{B(t)}$ удовлетворяет неравенству

$$\bar{d}\|f\|_{B(t)}/dt \leq m(t)\|f\|_{B(t)}, \quad \|f\|_{B(t)} \in C(\mathbb{R}), \quad (2.1)$$

то для любых $s, t \in \mathbb{R}$

$$\|f\|_{B(t)} \leq \exp(\|m(t)\|_{L_1(\mathbb{R})})\|f\|_{B(s)},$$

т.е. нормы $\|\cdot\|_{B(t)}$ равномерно эквивалентны.

2.2. Обобщенно корректные задачи Коши. Пусть $M(t)$ – регулярное семейство операторов и $M - M(0) \in L_\infty(\mathbb{R}, \mathcal{L}(B))$. Определим пространства $B^j(t)$; к ним отнесем элементы областей определения операторов $M^j(t)$; $\|f\|_{j,t} = \|M^j(t)f\|_B + \|f\|_B$, $j = 1, 2, \dots$. Определим аналогичные пространства для отрицательных степеней. Выберем λ_0 , для которого $(M(t) - \lambda_0)^{-1}$ равномерно по t ограничены, и обозначим через $B^{-j}(t)$, $j = 1, 2, \dots$, пополнение пространства B по норме

$$\|f\|_{-j,t} = \|(M(t) - \lambda_0)^{-j}f\|_B.$$

Выбор λ_0 для нас несуществен; кроме того, при разных t соответствующие пространства изоморфны и нормы равномерно эквивалентны. Во многих случаях мы будем писать $\|f\|_j$, B^{-j} без указания t ; это означает, что t может быть любым.

Замыкание оператора $M^j(t): \mathcal{D}(M^j) \rightarrow (B \subset) B^{-j}$ ($j = 1, 2, \dots$) в пространстве B^{-j} обозначим $M_*^j(t)$. Очевидно, $\mathcal{D}(M_*^j(t)) = B$.

Нам часто удобно будет говорить одновременно о двух задачах Коши

$$du_{\pm}/dx = \mp M(x)u_{\pm}(x) + \Psi, \quad u_{\pm}(\mp\infty) = 0. \quad (2.2)$$

В соответствующих формулировках всюду следует понимать один из возможных знаков: либо всюду верхний, либо всюду нижний.

Если $\Psi \in L(\mathbb{R}, B^{-1})$, то *обобщенным B -решением* задачи назовем вектор-функцию $u_{\pm} \in L(\mathbb{R}, B) \cap W^1(\mathbb{R}, B^{-1})$, удовлетворяющую равенству

$$du_{\pm}/dx = \mp M_*(x)u_{\pm}(x) + \Psi,$$

для которой $\lim_{t \rightarrow \mp\infty} \|u_{\pm}(t)\|_{B^{-1}} = 0$.

Будем говорить, что задача Коши (2.2) *обобщенно равномерно B -корректна*, если для любой $\Psi \in L_1(\mathbb{R}, B)$ существует единственное решение $u_{\pm} = \mathcal{E}^{\pm}\Psi$, $u_{\pm} \in L_{\infty}(\mathbb{R}, B)$, и для любого $l \in \mathbb{R}$ на полупрямой $I_{\pm}(l) = \{t \in \mathbb{R} : \pm t < \pm l\}$ имеет место оценка

$$\|u_{\pm}\|_{L_{\infty}(I_{\pm}(l), B)} \leq c \|\Psi\|_{L_1(I_{\pm}(l), B)}, \quad (2.3)$$

в которой $c > 0$ не зависит от Ψ, l .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть $M - M(0) \in L_{\infty}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(B))$, существуют $m \in L_1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ и семейство норм $\|\cdot\|_{B(t)}$, эквивалентных $\|\cdot\|_B$, удовлетворяющих (2.1), таких, что в соответствующих пространствах $B(t)$ оператор $-M(t)$ является генератором сжимающей полугруппы. Тогда задача (2.2) равномерно обобщенно B -корректна, и в оценке (2.3) c зависит лишь от $\|m\|_{L_1(\mathbb{R})}$.

2.3. Уравнения второго порядка. Предположим, что определенная на $\mathbb{R}$ оператор-функция Q удовлетворяет следующим условиям.

УСЛОВИЕ 2.1. $Q - Q(0) \in W^2(\mathbb{R}, \mathcal{L}(B))$, $Q' \in W_1^1(\mathbb{R}, \mathcal{L}(B))$.

УСЛОВИЕ 2.2. Существуют функция $m \in L_1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ и семейство норм $\|\cdot\|_{B(t)}$, эквивалентных $\|\cdot\|_B$ и удовлетворяющих (2.1), таких, что соответствующие пространства $B(t)$ являются гильбертовыми для каждого t , и $Q(t) = Q_1(t) - iQ_2(t)$, где $Q_1(t)$ – равномерно ограниченные снизу самосопряженные операторы, а $Q_2(t) \geq 0$ – равномерно ограниченные (сверху) операторы в $B(t)$.

Очевидно, что операторы $iQ(t)$ являются максимальными аккретивными операторами в $B(t)$, и мы можем (см., например, [5, гл. 4, § 5]) определить дробные степени ($\alpha \in [0, 1]$) этих операторов таким образом, что

$$|\arg((iQ(t))^{\alpha}h, h)| \leq \alpha\pi/2, \quad h \in \mathcal{D}(iQ(t)^{\alpha}),$$

и полугруппа сжатий $\exp(-(iQ(t))^{\alpha}s)$ аналитически продолжается с сохранением оценки $\|\exp(-(iQ(t))^{\alpha}s)\|_{\mathcal{L}(B(t))} \leq 1$ в сектор $|\arg(s)| \leq (1 - \alpha)\pi/2$. Это означает, в частности, что определены операторы

$$Q^{\alpha}(t) = (Q(t))^{\alpha} = \exp(-\pi\alpha i/2)(iQ(t))^{\alpha},$$

и $-Q^{1/2}(t)$ порождают сжимающие полугруппы.

УСЛОВИЕ 2.3. При каждом t операторы $Q(t)$ обратимы и $\|Q^{-1}(t)\|$ равномерно по t ограничены.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. При выполнении условий 2.1–2.3 для $\alpha = 1/2, 1/4$ справедливо $Q^\alpha - Q^\alpha(0) \in W^2(\mathbb{R}, \mathcal{L}(B))$, $(Q^\alpha)' \in W_1^1(\mathbb{R}, \mathcal{L}(B))$ и имеет место оценка

$$\|(Q^\alpha)'\|_{W_1^1(\mathbb{R}, \mathcal{L}(B))} \leq c \|Q'\|_{W_1^1(\mathbb{R}, \mathcal{L}(B))}.$$

Из предложения следует, что существуют $Q^\alpha(\pm\infty)$, причем $Q^\alpha(t) - Q^\alpha(\pm\infty) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \pm\infty$ по норме $\mathcal{L}(B)$.

Обозначим $Q^{1/2}(t) = M(t)$, и по этому регулярному семейству операторов построим, как и выше, B^j .

Обобщенным B -решением (или просто решением) уравнения $d^2y/dt^2 - Q(t)y = F(t)$ в случае, когда $F \in L(\mathbb{R}, B^{-2})$, мы называем вектор-функцию $y \in W^2(\mathbb{R}, B^{-2}) \cap W^1(\mathbb{R}, B^{-1}) \cap L(\mathbb{R}, B)$, для которой $d^2y/dt^2 - M_*^2(t)y = F(t)$.

2.4. Операторные аналоги ВКБ-оценок. Рассмотрим краевую задачу

$$d^2y/dx^2 - Q(\xi x)y = F(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \|dy/dx \pm Q^{1/2}(\pm\infty)y\|_{-1} = 0, \quad (2.5)$$

а также пару вспомогательных уравнений первого порядка

$$du_\pm/dx = \mp Q^{1/2}(\xi x)u_\pm(x) + \Psi, \quad u_\pm(\mp\infty) = 0. \quad (2.6)$$

Из предложения 2.1 следует, что задачи (2.6) равномерно обобщенно B -корректны для любых ξ , причем в оценке (2.3) константа от ξ не зависит.

Определим для $F \in L_1(\mathbb{R}, B)$ операторы

$$\mathcal{G}_*(\xi)F = 2^{-1}M^{-1/2}(\xi \cdot)(-\mathcal{E}^+ + \mathcal{E}^-)(M^{-1/2}(\xi \cdot)F),$$

где $(M^{\pm 1/2}(\xi \cdot)F)(x) = M^{\pm 1/2}(\xi x)F(x)$, $\mathcal{E}^\pm \Psi$ – решения задач (2.6).

Заметим, что в скалярном случае решения $\mathcal{E}^\pm \Psi$ задач (2.6) выражаются через экспоненты от фазовых интегралов, что позволяет формулируемый ниже результат рассматривать как обобщение ВКБ-оценок.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть выполнены условия 2.1–2.3. Тогда существует такое $\xi_0 > 0$, что для всех $\xi_0 > \xi > 0$ и для любой $F \in L_1(\mathbb{R}, B)$ у задачи (2.4), (2.5) существует единственное решение $y = \mathcal{G}(\xi)F \in L_\infty(\mathbb{R}, B)$, и справедливы следующие утверждения.

1. Имеют место асимптотические по ξ оценки $\|\mathcal{G}(\xi)\| = O(1)$, $\|\mathcal{G}(\xi) - \mathcal{G}_*(\xi)\| = O(\xi)$ в норме пространства $\mathcal{L}(L_1(\mathbb{R}, B), L_\infty(\mathbb{R}, B))$.

2. Если $F \in L_2(\mathbb{R}, B)$, то решение y принадлежит пространству $W_2^2((\alpha, \alpha + \Delta), B) \cap W_2^1((\alpha, \alpha + \Delta), B^1) \cap L_2((\alpha, \alpha + \Delta), B^2)$ для любых $\alpha \in \mathbb{R}$, $\Delta > 0$, и в норме этого пространства имеют место оценки

$$\begin{aligned} \|y\| &\leq c(\|F\|_{L_2(\mathbb{R}, B)} + \|F\|_{L_1(\mathbb{R}, B)}), \\ \|y - \mathcal{G}_*(\xi)F\| &\leq c\xi(\|F\|_{L_2(\mathbb{R}, B)} + \|F\|_{L_1(\mathbb{R}, B)}), \end{aligned}$$

где $c = c(\Delta) > 0$ не зависит от F , α , ξ .

2.5. Принцип предельного поглощения. Рассмотрим семейство уравнений, зависящих (кроме ξ) от параметра ε ,

$$d^2y/dx^2 - (Q(\xi x) - i\varepsilon)y = F(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.7)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Пусть выполнены условия 2.1–2.3. Тогда для достаточно малых ξ , любых $\varepsilon > 0$, $F \in L_2(\mathbb{R}, B)$ существует единственное в $L_2(\mathbb{R}, B)$ решение $y_\varepsilon = \mathcal{G}_\varepsilon(\xi)F$ уравнения (2.7). Оператор $\mathcal{G}_\varepsilon(\xi)$ действует из $L_2(\mathbb{R}, B) \cap L_1(\mathbb{R}, B)$ в $L_\infty(\mathbb{R}, B)$, и имеет место оценка $\|\mathcal{G}_\varepsilon(\xi)F\|_{L_\infty(\mathbb{R}, B)} \leq c\|F\|_{L_1(\mathbb{R}, B)}$, в которой $c > 0$ не зависит от F , ξ , ε .

Таким образом, $\mathcal{G}_\varepsilon(\xi)$ продолжается с множества $L_2(\mathbb{R}, B) \cap L_1(\mathbb{R}, B)$ до оператора класса $\mathcal{L}(L_1(\mathbb{R}, B), L_\infty(\mathbb{R}, B))$; для этого оператора будем использовать прежнее обозначение $\mathcal{G}_\varepsilon(\xi)$.

ТЕОРЕМА 2.2. При выполнении условий 2.1–2.3 существует такое ξ_0 , что для любых $0 < \xi \leq \xi_0$, $F \in L_1(\mathbb{R}, B)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеет место сходимость $(\mathcal{G}_\varepsilon F)(t) \rightarrow (\mathcal{G}F)(t)$ по норме B , и эта сходимость равномерна на компактах.

§ 3. Редукция к уравнению с операторнозначным коэффициентом

3.1. Обобщенные резольвенты и порожденные ими операторы. Пусть $g \in L_\infty(0, h)$ – некоторая вещественная функция. Рассмотрим на отрезке $[0, h]$ краевую задачу

$$y'' + (g(z) - \lambda)y = f(z), \quad (3.1)$$

$$y(0) = 0, \quad (3.2)$$

$$y'(h) = p(\lambda)y(h) \quad (3.3)$$

с параметром $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Ясно, что для любой $f \in H = L_2(0, h)$ существует единственное решение этой задачи, которое можно записать в виде

$$\begin{aligned} y(z) = (R(\lambda)f)(z) = & -(e(\lambda, 0))^{-1} \left(s(\lambda, z) \int_z^h e(\lambda, t)f(t) dt \right. \\ & \left. + e(\lambda, z) \int_0^z s(\lambda, t)f(t) dt \right). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь и далее $s(\lambda) = s(\lambda, z)$, $e(\lambda) = e(\lambda, z)$ – решения однородного уравнения

$$y'' + (g(z) - \lambda)y = 0, \quad (3.5)$$

причем $s(\lambda, z)$ удовлетворяет условиям

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad (3.6)$$

а $e(\lambda, z)$ – условиям

$$y(h) = 1, \quad y'(h) = p(\lambda). \quad (3.7)$$

Как следует из [4], условие 1.1 является достаточным для того, чтобы $R(\lambda)$ была бы обобщенной резольвентой (см. [6]) симметричного в H оператора A_0 с областью определения $\{y \in W_2^2(0, h) : y(0) = 0, y(h) = y'(h) = 0\}$, действующего по правилу $(A_0 y)(z) = y''(z) + g(z)y(z)$.

Это, напомним, означает, что существуют гильбертово пространство $\mathcal{H}$, более широкое, чем H , и самосопряженный оператор A в нем, являющийся расширением A_0 , такой, что

$$R(\lambda) = P(A - \lambda E)^{-1} |_H. \quad (3.8)$$

Здесь P – ортогональный проектор $\mathcal{H}$ на H , E – тождественный оператор в $\mathcal{H}$.

Оператором задачи (3.1)–(3.3) будем называть самосопряженный в $\mathcal{H}$ оператор A , удовлетворяющий (3.8), такой, что в $\mathcal{H} \ominus H$ нет подпространств, приводящих A (т.е. не существует ортогонального проектора Q , коммутирующего с A на области определения $\mathcal{D}(A)$, такого, что $Q\mathcal{H} \subseteq \mathcal{H} \ominus H$).

Отметим также, что условие 1.1 обеспечивает ограниченность снизу оператора $-A$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Для любого $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ множество (конечных) линейных комбинаций элементов вида $(A - \bar{\lambda}E)^{-m}(A - \lambda E)^{-n}f$, где m, n – произвольные неотрицательные числа, а f – произвольный элемент H , всюду плотно в $\mathcal{H}$.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *Если A_1 и A_2 – два оператора в пространствах $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$, отвечающих одной и той же задаче (3.1)–(3.3), то существует унитарный обратимый оператор $\mathcal{U}$, совпадающий с тождественным на H , такой, что*

$$A_2 = \mathcal{U}^{-1}A_1\mathcal{U}. \quad (3.9)$$

Различные реализации операторов одной и той же задачи (связанные соотношением (3.9)) будем отождествлять.

Рассмотрим теперь пару задач (3.1)–(3.3) с одной и той же функцией $p(\lambda)$ и разными g_1 и g_2 . Объекты, соответствующие этим задачам, будем снабжать индексами 1 и 2, в частности, A_1 и A_2 – операторы этих задач.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. $A_2 = A_1 + vP_1$, где v – оператор умножения на функцию $g_2 - g_1$ в $H = L_2(0, h)$.

Доказательство этих предложений несложно и опускается.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *Пусть $a \in L_\infty(\mathbb{R} \times (0, h))$. Тогда существуют гильбертово пространство $\mathcal{H} \supset L_2(0, h)$ и семейство самосопряженных в $\mathcal{H}$ операторов $\{A(x)\}_{x \in \mathbb{R}}$ таких, что:*

- 1) $A(x)$ – оператор задачи (3.1)–(3.3) для $g = a(x, \cdot)$;
- 2) для всех $x, s \in \mathbb{R}$ справедливо представление $A(x) = A(s) + v(x, s)P$, где $v(x, s)$ – оператор умножения на функцию $a(x, \cdot) - a(s, \cdot)$ в $L_2(0, h)$, P – ортогональный проектор в $\mathcal{H}$ с образом $L_2(0, h)$.

3.2. Задача с операторнозначным коэффициентом. Рассмотрим задачу

$$d^2U_\varepsilon/dx^2 + (A(x) + i\varepsilon)U_\varepsilon = \mathcal{F}(x), \quad U_\varepsilon \in L_2(\mathbb{R}, \mathcal{H}), \quad (3.10)$$

где $\{A(x)\}_{x \in \mathbb{R}}$ – описанное в следствии 3.1 семейство операторов $A(x)$, отвечающих задаче (3.1)–(3.3) для $g(z) = a(x, z)$.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть выполняется условие 1.1 и $a \in L_\infty(\mathbb{R} \times (0, h))$. Тогда задача (1.1)–(1.3) для любого $\varepsilon > 0$ и любого $F \in L_2(\mathbb{R} \times (0, h))$ имеет единственное решение, которое связано с решением (3.10) для $\mathcal{F}(x) = F(x, \cdot)$ формулой

$$u_\varepsilon(x, \cdot) = PU_\varepsilon(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оператор $d^2/dx^2 + A(\cdot)$ является самосопряженным, и, следовательно, (3.10) имеет единственное решение для всех $\varepsilon > 0$. Для a , не зависящих от x , обе рассматриваемые задачи допускают аналитическое решение в терминах преобразования Фурье по x , и их эквивалентность устанавливается непосредственным вычислением. Опираясь на этот частный случай и следствие 3.1, несложно доказать теорему в полном объеме.

Аналогично может быть доказана и

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть выполняется условие 1.1, $a \in L_\infty(\mathbb{R} \times (0, h))$, $l \in \mathbb{R}$, $b > 0$, $\varepsilon > 0$, $F \in L_2(\Pi)$, $\mathcal{F}(x) = F(x, \cdot)$. Тогда каждая из задач

$$dU/dx - i(l + bA(x))U + \varepsilon U = \mathcal{F}(x), \quad U(-\infty) = 0, \quad (3.11)$$

и

$$\begin{aligned} \partial u / \partial x - i(b(\partial^2 u / \partial z^2) + (ba(x, z) + l)u) + \varepsilon u &= F(x, z), \\ u &\in W_2^1(\Pi), \quad \partial^2 u / \partial z^2 \in L_2(\Pi), \quad u(x, 0) = 0, \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\hat{u}'(\mu, h) = p(b^{-1}(\mu + l + i\varepsilon))\hat{u}(\mu, h) \quad (3.13)$$

однозначно разрешима и $u(x, z) = (PU(x))(z)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Поскольку $p(b^{-1}(\mu + l + i\varepsilon))$ аналитична в верхней полуплоскости, обратное преобразование Фурье $m_\varepsilon(x)$ от этой функции равно нулю на полуоси $x < 0$. Поэтому условие (3.13) эквивалентно следующему:

$$\frac{\partial}{\partial z} u_\varepsilon(x, h) = \int_{-\infty}^x m_\varepsilon(x - t) u_\varepsilon(t, h) dt. \quad (3.14)$$

3.3. Доказательство предложения 1.1. Из самосопряженности оператора $d^2/dx^2 + A(\cdot)$ в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ вытекает оценка $\|U_\varepsilon\| \leq c\varepsilon^{-1}\|\mathcal{F}\|$ для решений задачи (3.10). Применяя теперь теорему 3.1, получим предложение 1.1.

§ 4. Аналитические деформации операторов

4.1. Спектр на разрезах p . Предположим, что выполняются условия 1.1, 1.2, а $\mathcal{O}$, d имеют тот же смысл, что в последнем условии. Аналитические продолжения функции p из $\mathbb{C}_{\pm}$ в $\mathbb{C}_{\pm} \cup \mathcal{O}$ будем обозначать $p^{\pm}$. Подставляя $p^{\pm}$ в условие (3.7) вместо p , можно в $\mathbb{C}_{\pm} \cup \mathcal{O}$ определить $e^{\pm}(\lambda)$ как решения задач (3.5), (3.7). Нетрудно видеть, что $e^{\pm}(\lambda)$ аналитически зависят от λ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Функции $s(\lambda, z)$ аналитичны по λ во всей комплексной плоскости, и для $\lambda \in \mathcal{O}$ имеет место равенство*

$$s(\lambda, z) = -(e^{+}(\lambda, z)e^{-}(\lambda, 0) - e^{+}(\lambda, 0)e^{-}(\lambda, z)) / (p^{-}(\lambda) - p^{+}(\lambda)).$$

Для доказательства формулы заметим, что $e^{+}(\lambda, z)e^{-}(\lambda, 0) - e^{+}(\lambda, 0)e^{-}(\lambda, z)$ — решение уравнения (3.5), удовлетворяющее условию $y(0) = 0$; поэтому

$$e^{+}(\lambda, z)e^{-}(\lambda, 0) - e^{+}(\lambda, 0)e^{-}(\lambda, z) = r(\lambda)s(\lambda, z).$$

Остается вычислить производные левой и правой частей последнего равенства.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. *Для любого компактного множества $K \subset L_{\infty}(0, h)$ и любого отрезка $[a, b] \subset (-d, d)$ существуют $\delta > 0$ и область $\Omega \supset [a, b]$ такие, что при всех $g \in K$, $\lambda \in \Omega$ справедлива оценка $|e^{\pm}(\lambda, 0)| > \delta$.*

Доказательство несложно провести, опираясь на представление $-e(\lambda, 0) = s'(\lambda, h) - p(\lambda)s(\lambda, h)$ (следствие того, что вронскиан двух решений уравнения (3.5) не зависит от z), а также на то, что $s(\lambda, h)$ вещественные для $\lambda \in [a, b]$, и $(s'(\lambda, h))^2 + (s(\lambda, h))^2 \geq c > 0$, $\operatorname{Im} p^{-}(\lambda) > 0$.

Всюду далее мы будем полагать, что $[a, b]$ — некоторый отрезок, вложенный в $\mathcal{O}$ и содержащий нуль, K — компактное в $L_{\infty}(0, h)$ множество (при доказательстве основных теорем это будет $\{a(t, \cdot)\}_{t \in \mathbb{R}}$), все рассматриваемые коэффициенты g в уравнениях (3.1) и (3.5) принадлежат K , а Ω — область, существование которой утверждается в предложении 4.2.

Теперь, заменяя в формуле (3.4) $e(\lambda)$ на $e^{\pm}(\lambda)$, мы можем для $\lambda \in \Omega \cup \mathbb{C}_{\pm}$ определить ограниченные в H операторы $R^{\pm}(\lambda)$. Это будут аналитические продолжения из $\mathbb{C}_{\pm}$ операторов $R(\lambda)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. *Для всех $\lambda \in [a, b]$ существуют пределы $R^{\pm}(\lambda) = R(\lambda + i0)$ (по операторной норме в H) и*

$$\begin{aligned} & ((R^{+}(\lambda) - R^{-}(\lambda))f)(z) \\ &= (e^{+}(\lambda, 0)e^{-}(\lambda, 0))^{-1} (2i \operatorname{Im} p^{-}(\lambda)) s(\lambda, z) \int_0^h s(\lambda, t) f(t) dt. \end{aligned}$$

Это предложение — следствие предложения 4.1 и определения $R^{\pm}$.

Обозначим $\nu(\lambda) = (e^+(\lambda, 0)e^-(\lambda, 0))^{-1/2}$ и определим для $\lambda \in (a, b)$ функции на $(0, h)$:

$$\begin{aligned}\phi(\lambda, z) &= \pi^{-1/2}(\operatorname{Im} p^-(\lambda))^{1/2} \nu(\lambda) s(\lambda, z), \\ \psi(\lambda, z) &= \pi^{-1/2}(\operatorname{Im} p^-(\lambda))^{-1/2} \nu(\lambda) s(\lambda, z),\end{aligned}$$

где

$$c(\lambda, z) = (e^+(\lambda, z)e^-(\lambda, 0) + e^+(\lambda, 0)e^-(\lambda, z))/2.$$

Будем обозначать $\phi(\lambda) = \phi(\lambda, \cdot)$, $\psi(\lambda) = \psi(\lambda, \cdot)$.

Далее, через $E_{[\alpha, \beta]}^\oplus$ обозначим спектральный проектор оператора A , соответствующий отрезку $[\alpha, \beta]$; $E_{[\alpha, \beta]}^\ominus = E - E_{[\alpha, \beta]}^\oplus$ – дополнительный проектор.

Для любой $f \in H$ положим $(\Phi f)(\lambda) = \int_0^h f(z) \phi(\lambda, z) dz$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. Для любых $f, r \in H$, $a \leq \alpha < \beta \leq b$

$$(E_{[\alpha, \beta]}^\oplus f, E_{[\alpha, \beta]}^\oplus r)_{\mathcal{H}} = \int_\alpha^\beta (\Phi f)(\lambda) (\Phi \bar{r})(\lambda) d\lambda. \quad (4.1)$$

Это предложение – следствие формулы Стоуна (см., например, [7, теорема VII.13]), предложения 4.3, а также того, что для любых $f, r \in H$ и $\lambda \in (a, b)$ имеет место

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} ((A - \lambda \mp i\varepsilon)f, r)_{\mathcal{H}} = (R^\pm(\lambda)f, r)_H.$$

Обозначим $\mathcal{H}_{[\alpha, \beta]}^\oplus = E_{[\alpha, \beta]}^\oplus \mathcal{H}$. Для любой борелевской функции ρ и $q \in H$ положим $(\Phi \rho(A)q)(\lambda) = \rho(\lambda)(\Phi q)(\lambda)$. Нетрудно показать, что для элементов вида $f = \rho(A)q$

$$\|E_{[\alpha, \beta]}^\oplus f\|_{\mathcal{H}} = \|\Phi f\|_{L_2(\alpha, \beta)}. \quad (4.2)$$

Поэтому из предложения 3.1 следует, что Φ продолжается до ограниченного оператора (его мы по-прежнему обозначаем Φ) из $\mathcal{H}$ в $L_2(\alpha, \beta)$ с сохранением (4.2).

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Для любых $f, r \in \mathcal{H}$, $a \leq \alpha < \beta \leq b$ имеют место (4.1), (4.2), и для любой борелевской функции ρ имеет место представление $(\Phi \rho(A)f)(\lambda) = \rho(\lambda)(\Phi f)(\lambda)$.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Для любой $f \in \mathcal{H}$ функция $PE_{[\alpha, \beta]}^\oplus f$ принадлежит $W_2^2(0, h)$, $(PE_{[\alpha, \beta]}^\oplus f)(0) = 0$ и

$$(PE_{[\alpha, \beta]}^\oplus f)(z) = \int_\alpha^\beta (\Phi f)(\lambda) \phi(\lambda, z) d\lambda. \quad (4.3)$$

Для доказательства заметим, что $\Phi f \in L_2(a, b) \subset L_1(a, b)$, а $\phi(\lambda, 0) = 0$, $\phi(\lambda) \in W_2^2(0, h)$, и нормы этих функций ограничены по λ . Следовательно, интеграл $\int_\alpha^\beta (\Phi f)(\lambda) \phi(\lambda) d\lambda$ сходится в $W_2^2(0, h)$. То, что имеет место (4.3), нетрудно получить, если умножить скалярно рассмотренный интеграл на произвольную g и сравнить результат с (4.1).

4.2. Аналитические деформации операторов. Пусть $0 \in [\alpha, \beta] \subset (a, b)$; обозначим через $\Gamma = \Gamma(\alpha, \beta)$ некоторую гладкую дугу, соединяющую α и β , лежащую, за исключением концевых точек, в $\Omega \cap \mathbb{C}_+$. Будем полагать (для определенности), что вещественная ось и Γ пересекаются под прямыми углами. Область, ограниченную контуром $\Gamma \cup [\alpha, \beta]$, обозначим $G = G[\alpha, \beta]$.

Пусть $\mathcal{N}^* = \mathcal{N}^*(G)$ – класс функций, непрерывных в $\overline{G}$, аналитических в G , удовлетворяющих условию Гёльдера с некоторым положительным показателем на границе G . Через $\mathcal{N} = \mathcal{N}(\alpha, \beta)$ обозначим класс таких $f \in \mathcal{H}_{[\alpha, \beta]}^\oplus$, что $(\Phi f)(\lambda)$ является сужением на $[\alpha, \beta]$ некоторой функции $\Phi^- f$ из $\mathcal{N}^*$.

На $\mathcal{N}$ определим две нормы:

$$\|f\|_G^2 = \int_{\Gamma \cup [\alpha, \beta]} |(\Phi^- f)(\lambda)|^2 |d\lambda|, \quad \|f\|_\Gamma^2 = \int_\Gamma |(\Phi^- f)(\lambda)|^2 |d\lambda|.$$

Пополнения $\mathcal{N}$ по этим нормам будем обозначать $\mathcal{H}_G^\oplus$ и $\mathcal{H}_\Gamma^\oplus$ соответственно. Очевидно, что пространство $\mathcal{H}_G^\oplus$ всюду плотно и в $\mathcal{H}_{[\alpha, \beta]}^\oplus$, и в $\mathcal{H}_\Gamma^\oplus$; кроме того, оно переводится оператором A в себя. Сужение A на $\mathcal{H}_G^\oplus$ будем обозначать $A_G^\oplus$. Нетрудно видеть, что $(\Phi^- A_G^\oplus f)(\lambda) = \lambda(\Phi^- f)(\lambda)$; этот оператор принадлежит $\mathcal{L}(\mathcal{H}_G^\oplus)$, и его норма оценивается сверху через $c = \max\{|\lambda| : \lambda \in \Gamma\}$. Для всех f из $\mathcal{H}_G^\oplus$ имеет место оценка

$$\|A_G^\oplus f\|_\Gamma \leq c \|E_{[\alpha, \beta]}^\oplus f\|_\Gamma,$$

откуда следует, что $A_G^\oplus$ индуцирует оператор $A_\Gamma^\oplus \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\Gamma^\oplus)$.

Сходимость $f_n \in \mathcal{N}$ к $f \in \mathcal{H}_\Gamma^\oplus$ по норме $\|f\|_\Gamma$ эквивалентна сходимости $\Phi^- f_n$ по норме $L_2(\Gamma)$. Соответствующий предел будем обозначать $\Phi_\Gamma^- f$. Таким образом, Φ_Γ^- – оператор, осуществляющий изоморфизм пространств $\mathcal{H}_\Gamma^\oplus$ и $L_2(\Gamma)$.

Если рассматривать $\mathcal{H}$ как прямую сумму $\mathcal{H}_{[\alpha, \beta]}^\ominus \oplus \mathcal{H}_{[\alpha, \beta]}^\oplus$, то оператор A может быть представлен в форме

$$A = \begin{pmatrix} A_{[\alpha, \beta]}^\ominus & 0 \\ 0 & A_{[\alpha, \beta]}^\oplus \end{pmatrix}.$$

Обозначим $\mathcal{H}_\Gamma = \mathcal{H}_{[\alpha, \beta]}^\ominus \oplus \mathcal{H}_\Gamma^\oplus$, $\mathcal{H}_G = \mathcal{H}_{[\alpha, \beta]}^\ominus \oplus \mathcal{H}_G^\oplus$. Соответствующие этим разложением проекторы будем обозначать $E_\Gamma^\oplus$, $E_\Gamma^\ominus$ и $E_G^\oplus$, $E_G^\ominus$.

Определим также операторы

$$A_\Gamma = \begin{pmatrix} A_{[\alpha, \beta]}^\ominus & 0 \\ 0 & A_\Gamma^\oplus \end{pmatrix}, \quad A_G = \begin{pmatrix} A_{[\alpha, \beta]}^\ominus & 0 \\ 0 & A_G^\oplus \end{pmatrix},$$

действующие в пространствах $\mathcal{H}_\Gamma$ и $\mathcal{H}_G$. Отметим, что пространства $\mathcal{H}_G$ и $\mathcal{H}_\Gamma \cap \mathcal{H}$ могут быть отождествлены, а A_Γ и A – замыкания A_G в пространствах $\mathcal{H}_\Gamma$ и $\mathcal{H}$ соответственно.

Функции $\phi(\lambda, z)$, $\psi(\lambda, z)$, как следует из их определения, аналитически продолжаются в $\Omega \cap \mathbb{C}_+$ с (a, b) . Соответствующие аналитические продолжения будем обозначать $\phi^-(\lambda, z)$, $\psi^-(\lambda, z)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.5. *Пространство H непрерывно вложено в $\mathcal{H}_G(\alpha, \beta)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для всех $f \in H$ $(\Phi f)(\lambda)$ является граничным значением функции $(\Phi^- f)(\lambda) = \int_0^h f(z) \phi^-(\lambda, z) dz$ из $\mathcal{N}^*$. При этом $|(\Phi^- f)(\lambda)| \leq c \|f\|_H$ и $c > 0$ не зависит от $\lambda \in \bar{G}$, $g \in K$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.6. *Оператор P может быть продолжен с $\mathcal{H}_G$ до ограниченного оператора из $\mathcal{H}_\Gamma$ в $W_2^2(0, h)$ (для этого оператора мы будем использовать прежнее обозначение P), $(PE_\Gamma^\oplus f)(0) = 0$ и справедливо представление*

$$(PE_\Gamma^\oplus f)(z) = \int_\Gamma (\Phi_\Gamma^- f)(\lambda) \phi^-(\lambda, z) d\lambda. \quad (4.4)$$

Доказательство проведем сначала в случае $f \in \mathcal{H}_G$. Для этого достаточно на основании теоремы Коши продеформировать в (4.3) контур интегрирования. Из получившегося представления видно, что

$$\|PE_\Gamma^\oplus f\|_{W_2^2(0, h)} \leq c \|\Phi_\Gamma^- f\|_{L_2(\Gamma)}.$$

Поскольку $\mathcal{H}_G$ всюду плотно в $\mathcal{H}_\Gamma$, то (4.4) имеет место для всех $f \in \mathcal{H}_\Gamma$.

При рассмотрении дифференциальных уравнений нам удобнее будет пользоваться оператором $Q = -A$. Определим, как и в §2, корни $M = (-A)^{1/2}$, $M_\Gamma = (-A_\Gamma)^{1/2}$ из самосопряженного и диссипативного операторов и рассмотрим для $j = 1, 2$ пространства $\mathcal{H}^j$, $\mathcal{H}_\Gamma^j$, являющиеся областями определения операторов M^j , M_Γ^j с соответствующими нормами.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.7. *Если $f \in \mathcal{H}_\Gamma^j$ для $j = 1, 2$, то:*

1) $Pf \in W_2^j(0, h)$ и $f(0) = 0$, причем $\|Pf\|_{W_2^j(0, h)} \leq c \|f\|_{\mathcal{H}_\Gamma^j}$ и $c > 0$ не зависит от f ;

2) для любых $f \in \mathcal{H}_\Gamma^2$ и функции $q \in W_2^2(0, h)$ с носителем, являющимся подмножеством $(0, h)$, имеет место представление

$$(Q_\Gamma f, q)_{\mathcal{H}_\Gamma} = -(d^2 Pf/dz^2 + gPf, q)_H.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим сначала, что $Pf \in W_2^j(0, h)$ и $f(0) = 0$ для всех $f \in \mathcal{H}_\Gamma^j$. Поэтому $PE_\Gamma^\ominus f \in W_2^j(0, h)$ и $(PE_\Gamma^\ominus f)(0) = 0$ для любой $f \in \mathcal{H}_\Gamma^j$. Чтобы завершить доказательство, воспользуемся предложением 4.6 для оценки проекции на $\mathcal{H}_\Gamma^\oplus$.

Докажем второй пункт сначала для $r = PE_\Gamma^\ominus f$. Проведем следующие вычисления:

$$\begin{aligned} (Q_\Gamma r, q)_{\mathcal{H}_\Gamma} &= (Qr, q)_{\mathcal{H}} = (r, Qq)_{\mathcal{H}} \\ &= -(Pr, d^2 q/dz^2 + gq)_H = -(d^2 Pr/dz^2 + gPr, q)_H. \end{aligned}$$

Остается доказать, что эта формула верна для $PE_\Gamma^\oplus f$. Это устанавливается непосредственным вычислением на основании формулы (4.4), определения $\phi(\lambda)$ как решения уравнения (3.5) и того, что $(\Phi_\Gamma^- Q_\Gamma f)(\lambda) = -\lambda(\Phi_\Gamma^- f)(\lambda)$.

СЛЕДСТВИЕ 4.3. Пусть $U \in W_2^2(\mathbb{R}, \mathcal{H}_\Gamma) \cap W_2^1(\mathbb{R}, \mathcal{H}_\Gamma^1) \cap L_2(\mathbb{R}, \mathcal{H}_\Gamma^2)$ и $d^2U/dx^2 - Q_\Gamma U = \mathcal{F}$. Тогда функция двух переменных $u(x, z) = (PU(x))(z)$ принадлежит $W_2^2(\Pi)$, $u(x, 0) = 0$ и $\Delta u + g(z)u = P\mathcal{F}$.

4.3. Возмущение аналитических деформаций. Рассмотрим пару задач (3.1)–(3.3) для g_1 и g_2 . Соответствующие этим задачам объекты будем снабжать индексами 1 и 2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.8. Для любого компактного множества $K \subset L_\infty(0, h)$ существует $c > 0$ такое, что для всех $g_1, g_2 \in K$ справедливы следующие утверждения.

1. Для любой функции $f \in \mathcal{H}_{1,[a,b]}^\ominus$ имеет место $E_{2,[\alpha,\beta]}f \in \mathcal{H}_{2,G}^\oplus$ и справедлива оценка

$$\|E_{2,[\alpha,\beta]}^\oplus E_{1,[a,b]}^\ominus\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}_{2,G})} \leq c\|g_1 - g_2\|_{L_\infty(0,h)}.$$

2. Для любой функции $f \in \mathcal{H}_{1,G}^\oplus$ справедлива оценка

$$\|E_{1,[a,b]}^\ominus f\|_{\mathcal{H}} \leq c\|g_1 - g_2\|_{L_\infty(0,h)}\|f\|_{\mathcal{H}_{1,\Gamma}^\oplus},$$

и, следовательно, оператор $E_{2,[a,b]}^\ominus E_{1,[\alpha,\beta]}^\oplus$ индуцирует оператор из класса $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{1,\Gamma}, \mathcal{H})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оператор $S = E_{2,[\alpha,\beta]}^\oplus E_{1,[a,b]}^\ominus$ является решением операторного уравнения

$$SA_{1,[a,b]}^\ominus - A_{2,[\alpha,\beta]}^\oplus S = E_{2,[\alpha,\beta]}^\oplus vE_{1,[a,b]}^\ominus, \quad (4.5)$$

где v – оператор умножения на функцию $g_1 - g_2$.

Поскольку спектры операторов $A_{1,[a,b]}^\ominus$ и $A_{2,[\alpha,\beta]}^\oplus$ не пересекаются, это уравнение имеет единственное решение (см., например, [8, гл. 4, § 3, лемма 3.1]).

В соответствии с предложением 4.5 левая часть уравнения индуцирует оператор, ограниченно действующий из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_{2,G}$, причем его норма ограничена сверху величиной $c\|g_1 - g_2\|_{L_\infty(0,h)}$. Поэтому наряду с (4.5) можно рассмотреть и уравнение

$$S_1 A_{1,[a,b]}^\ominus - A_{2,G}^\oplus S_1 = E_{2,[\alpha,\beta]}^\oplus vE_{1,[a,b]}^\ominus. \quad (4.6)$$

Вновь воспользовавшись разрешимостью операторного уравнения, получаем ограниченность S_1 из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_{2,G}$ и соответствующие оценки для норм. Однако, как отображения, операторы, являющиеся решениями уравнений (4.5) и (4.6), совпадают. Таким образом, п. 1 доказан.

Пункт 2 доказывается аналогично. Надо рассматривать уравнение

$$SA_{2,[a,b]}^\ominus - A_{1,[\alpha,\beta]}^\oplus S = -E_{2,[\alpha,\beta]}^\oplus vE_{1,[a,b]}^\ominus,$$

поочередно считая правую часть и операторы S из классов $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{1,G}, \mathcal{H})$, $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$, $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{1,\Gamma}, \mathcal{H})$. Все эти уравнения однозначно разрешимы, и соответствующие операторы, как отображения на $\mathcal{H}_{1,G}$, совпадают.

Обозначим через $\mathcal{W}_{12}$ оператор умножения на функцию

$$w_{12}(\lambda) = \frac{\nu_2(\lambda)}{\nu_1(\lambda)} - \int_0^h (g_2(z) - g_1(z)) \psi_1(\lambda, z) \phi_2(\lambda, z) dz$$

(ϕ, ψ, ν определены в п. 4.1). Через $\mathcal{K}_{12}$ обозначим сингулярный интегральный оператор:

$$(\mathcal{K}_{12}\eta)(\lambda) = \int_a^b (\lambda - \mu)^{-1} k_{12}(\lambda, \mu) \eta(\mu) d\mu,$$

где

$$k_{12}(\lambda, \mu) = \int_0^h (g_2(z) - g_1(z)) \phi_1(\mu, z) \phi_2(\lambda, z) dz.$$

Очевидно, $\mathcal{W}_{12}, \mathcal{K}_{12} \in \mathcal{L}(L_2(a, b))$.

Определим также ограниченный оператор $\mathcal{V}_{12}$, действующий из $\mathcal{H}_{1,[a,b]}^\ominus$ в $L_2(a, b)$ по правилу

$$(\mathcal{V}_{12}f^\ominus)(\lambda) = ((A_1^\ominus - \lambda)^{-1}f^\ominus, (g_2 - g_1)\phi_2(\lambda))_{\mathcal{H}}.$$

Предложение 4.9. *Для любой $f \in \mathcal{H}$ справедливо представление*

$$\Phi_2 f = \mathcal{W}_{12}\Phi_1 f + \mathcal{K}_{12}\Phi_1 f + \mathcal{V}_{12}E_{1,[a,b]}^\ominus f. \quad (4.7)$$

Доказательство. Докажем (4.7) для $f \in H$. Напомним, что

$$(\Phi_2 f)(\lambda) = \int_0^h f(z) \phi_2(\lambda, z) dz,$$

а $\phi_2(\lambda, z)$ является решением дифференциального уравнения

$$y'' + (g_2(z) - \lambda)y = 0. \quad (4.8)$$

Кроме того, в силу представления

$$\phi(\lambda) = \phi(\lambda, z) = \pi^{-1/2} (\operatorname{Im} p^-(\lambda))^{1/2} \nu(\lambda) s(\lambda, z)$$

и (3.6) эта функция удовлетворяет граничным условиям

$$y(0) = 0, \quad (4.9)$$

$$y'(0) = \pi^{-1/2} (\operatorname{Im} p^-(\lambda))^{1/2} \nu_2(\lambda). \quad (4.10)$$

Преобразуем (4.8) к следующему виду: $y'' + (g_1(z) - \lambda)y = (g_1(z) - g_2(z))y$, и рассмотрим задачу Коши с условиями (4.9), (4.10) для уравнения

$$y'' + (g_1(z) - \lambda)y = r. \quad (4.11)$$

Определим частное решение:

$$u = R_1^-(\lambda)r = -[e_1^-(\lambda, 0)]^{-1} \times \left(s_1(\lambda, z) \int_z^h e_1^-(\lambda, t)r(t) dt + e_1^-(\lambda, z) \int_0^z s_1(\lambda, t)r(t) dt \right).$$

Поскольку

$$u'(0) = -[e_1^-(\lambda, 0)]^{-1} \int_0^h e_1^-(\lambda, t)r(t) dt,$$

то решение (4.9)–(4.11) может быть представлено в виде

$$y = u + \phi_1(\lambda)(\nu_2(\lambda)/\nu_1(\lambda)) + \pi^{1/2}(\operatorname{Im} p^-(\lambda))^{-1/2} \times (e_1^+(\lambda, 0))^{1/2}(e_1^-(\lambda, 0))^{-1/2} \int_0^h e_1^-(\lambda, t)r(t) dt.$$

Вычислим теперь u другим способом. Определим $R_1^-(\lambda)r$ как предел $R_1^-(\lambda - i\varepsilon)r$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Для всех $r \in L_2(0, h)$, $\varepsilon > 0$ решение задачи

$$y'' + (g_1(z) + i\varepsilon - \lambda)y = r, \quad y(0) = 0, \quad y'(h) = p(\lambda - i\varepsilon)y(h)$$

можно записать в форме

$$u_\varepsilon = P(A_1 + i\varepsilon - \lambda)^{-1}r = PE_{1,[a,b]}^\oplus(A_1 + i\varepsilon - \lambda)^{-1}r + PE_{1,[a,b]}^\ominus(A_1 + i\varepsilon - \lambda)^{-1}r.$$

На основании следствий 4.1, 4.2 имеем

$$PE_{1,[a,b]}^\oplus(A_1 + i\varepsilon - \lambda)r = \int_a^b \phi_1(\mu)(\Phi_1 r)(\mu)(\mu - \lambda + i\varepsilon)^{-1} d\mu.$$

Для $r \in H$ функция $\Phi_1 r$ дифференцируема на $[a, b]$, и можно найти предельные значения интеграла Коши при $\varepsilon \rightarrow +0$:

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^b \phi_1(\mu)(\Phi_1 r)(\mu)(\mu - \lambda + i\varepsilon)^{-1} d\mu \\ &= \int_a^b \phi_1(\mu)(\Phi_1 r)(\mu)(\mu - \lambda)^{-1} d\mu - \pi i \phi_1(\lambda)\Phi_1(\lambda), \end{aligned}$$

где последний интеграл понимается в смысле главного значения.

Таким образом, поскольку $A_1 - \lambda$ обратим на $\mathcal{H}_{(a,b)}^\ominus$, то

$$\begin{aligned} u = R_1^-(\lambda)r &= P(A_{1,[a,b]}^\ominus - \lambda)^{-1}E_{1,[a,b]}^\ominus r - \pi i \phi_1(\lambda)(\Phi_1 r)(\lambda) \\ &+ \int_a^b \phi_1(\mu)(\Phi_1 r)(\mu)(\mu - \lambda)^{-1} d\mu. \end{aligned}$$

Найдем сумму

$$\pi i(\Phi_1 r)(\lambda) - \pi^{1/2}(\operatorname{Im} p^-(\lambda))^{-1/2}(e_1^+(\lambda, 0))^{1/2}(e_1^-(\lambda, 0))^{-1/2} \int_0^h e_1^-(\lambda, t)r(t) dt. \quad (4.12)$$

Первое слагаемое можно привести к виду

$$\pi^{1/2}i(\operatorname{Im} p^-(\lambda))^{-1/2}(e_1^+(\lambda, 0)e_1^-(\lambda, 0))^{-1/2} \int_0^h s_1(\lambda, t)r(t) dt.$$

Воспользовавшись предложением 4.1, преобразуем сумму (4.12) и получим

$$-\pi^{1/2}i(\operatorname{Im} p^+(\lambda))^{-1/2}\nu_1(\lambda) \int_0^h \psi_1(\lambda, t)r(t) dt.$$

Таким образом, для всех $\lambda \in (a, b)$ справедливо представление

$$\begin{aligned} \phi_2(\lambda) = & \int_a^b \phi_1(\mu)(\Phi_1 \delta \phi_2(\lambda))(\mu)(\mu - \lambda)^{-1} d\mu \\ & + P(A_1^\ominus - \lambda)E_{1,[a,b]}^\ominus(\delta(\lambda)) + w_{12}(\lambda)\phi(\lambda), \end{aligned}$$

где $\delta = g_1 - g_2$. Это представление показывает, что формула (4.7) действительно справедлива для $f \in H$.

Несложно показать, что если формула (4.7) справедлива для q , то она также справедлива для $f = (A_1 - l)^{-1}q$ при любом $l \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Затем, опираясь на предложение 3.1, можно доказать предложение 4.9 в полном объеме.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть K – компактное множество в $L_\infty(0, h)$. Тогда существует такое $c > 0$, что для всех $g \in K$ пространства $\mathcal{H}_G$ (или $\mathcal{H}_\Gamma$) совпадают (могут быть отождествлены) и для любых $g_1, g_2 \in K$ имеет место оценка

$$|\|f\|_1 - \|f\|_2| \leq c\|g_1 - g_2\|_{L_\infty(0,h)}\|f\|_1, \quad (4.13)$$

где $\|\cdot\|_j$ – норма пространства $\mathcal{H}_G$ (или $\mathcal{H}_\Gamma$), построенного для g_j .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что функция $w_{12}(\lambda)$ аналитична в Ω , а $k_{12}(\lambda, \mu)$ аналитична в этой области и по λ , и по μ .

Предположим, что $f \in \mathcal{H}_{1,G}$ и $f^\oplus = E_{1,[\alpha,\beta]}^\oplus f \in \mathcal{N}_1$, и воспользуемся представлением (4.7). Первое и последнее слагаемые, очевидно, принадлежат $\mathcal{N}_2^*(G)$. Рассмотрим теперь второе слагаемое, полагая $\eta_1 = \Phi_1 f$. Его можно представить в виде

$$(\mathcal{K}_{12}\eta_1)(\lambda) = \int_a^b k_{12}^0(\lambda, \mu)\eta(\mu) d\mu + k_{12}(\lambda, \lambda) \int_a^b (\lambda - \mu)^{-1}\eta_1(\mu) d\mu,$$

где $k_{12}^0(\lambda, \mu) = k_{12}(\lambda, \mu)(\lambda - \mu)^{-1}$ аналитична в $\overline{G}$ по λ и по μ . Первый интеграл представляет функцию, аналитическую в $\overline{G}$. Поскольку $\eta_1 \in \mathcal{N}^*(G)$, то и особый

интеграл Коши является предельным значением функции из $\mathcal{N}^*(G)$, и, кроме того, для любого $\lambda \in \Lambda = [a, \alpha] \cup \Gamma \cup [\beta, b]$

$$(\mathcal{K}_{12}\eta_1)(\lambda) = \int_{\Lambda} (\lambda - \mu)^{-1} k_{12}(\lambda, \mu) \eta_1(\mu) d\mu. \quad (4.14)$$

Таким образом, мы получаем, что в рассматриваемом случае $f \in \mathcal{H}_{2,G}$. С помощью (4.14), используя ограниченность сингулярного оператора в $L_2(\Lambda)$ и предложение 4.6, несложно получить оценку

$$\|\Phi_{2,\Gamma}^- f\|_{L_2(\Gamma)} \leq c \|f\|_{\mathcal{H}_{1,\Gamma}}.$$

Этого достаточно для доказательства оценки (4.13) в нормах $\mathcal{H}_G$. Чтобы доказать аналогичное неравенство в нормах $\mathcal{H}_\Gamma$, надо оценить еще $\|E_{2,[\alpha,\beta]} f\|_{\mathcal{H}}$ через $\|f\|_{\mathcal{H}_{1,\Gamma}}$. Для этого заметим, что

$$\begin{aligned} E_{2,[\alpha,\beta]}^\ominus - E_{1,[\alpha,\beta]}^\ominus &= E_{2,[\alpha,\beta]}^\ominus E_{1,[\alpha,\beta]}^\oplus - E_{2,[\alpha,\beta]}^\oplus E_{1,[\alpha,\beta]}^\ominus \\ &= (E_{2,[a,b]}^\ominus E_{1,[\alpha,\beta]}^\oplus - E_{2,[\alpha,\beta]}^\oplus E_{1,[a,b]}^\ominus) + (E_{2,\sigma}^\ominus E_{1,[\alpha,\beta]}^\oplus - E_{2,[\alpha,\beta]}^\oplus E_{1,\sigma}^\ominus), \end{aligned}$$

где $\sigma = (a, \alpha) \cup (\beta, b)$. Выражение в первых скобках оценивается с помощью предложения 4.8, а во-вторых – на основе (4.7), (4.14).

СЛЕДСТВИЕ 4.4. *Нормы пространств $\mathcal{H}_\Gamma(t)$, $\mathcal{H}_G(t)$, построенные по $g = a(t, \cdot)$, удовлетворяют оценке (2.1) с $m(t) = \|\partial a(t, \cdot)/\partial t\|_{L_\infty(0,h)}$, а семейства операторов $Q_\Gamma(t) = -A_\Gamma(t)$, $Q_G(t) = -A_G(t)$ удовлетворяют условиям 2.1, 2.2.*

Заметим, что операторы $Q_\Gamma(t)$, кроме того, равномерно обратимы, т.е. удовлетворяют еще и условию 2.3.

§ 5. Завершение доказательства основных теорем

5.1. Пусть, как и ранее, $A(t)$ – оператор, отвечающий задаче (3.1)–(3.3) для $g = a(t, \cdot)$, $A_\Gamma(t)$ и $A_G(t)$, как и в § 4, – операторы, построенные с помощью процедуры аналитической деформации.

Располагая тремя семействами операторов: $Q_\Gamma(t) = -A_\Gamma(t)$, $Q_G(t) = -A_G(t)$, $Q(t) = -A(t)$, можно рассмотреть три задачи:

$$d^2 U_\varepsilon / dx^2 - (Q(\xi x) - i\varepsilon) U_\varepsilon = \mathcal{F}(x), \quad U_\varepsilon \in L_2(\mathbb{R}, \mathcal{H}), \quad (5.1)$$

$$d^2 U_\varepsilon / dx^2 - (Q_\Gamma(\xi x) - i\varepsilon) U_\varepsilon = \mathcal{F}(x), \quad U_\varepsilon \in L_2(\mathbb{R}, \mathcal{H}_\Gamma), \quad (5.2)$$

$$d^2 U_\varepsilon / dx^2 - (Q_G(\xi x) - i\varepsilon) U_\varepsilon = \mathcal{F}(x), \quad U_\varepsilon \in L_2(\mathbb{R}, \mathcal{H}_G). \quad (5.3)$$

Для $\mathcal{F} \in L_2(\mathbb{R}, \mathcal{H}_G)$ каждая из этих задач в соответствии с предложением 2.3 однозначно разрешима для $\varepsilon > 0$.

К первой задаче, как установлено в § 3, сводится задача (1.1)–(1.3); вторая удобна тем, что $Q_\Gamma(\xi x)$ обратимы для всех x , и к ней применима теорема 2.2; относительно третьей можно утверждать, что если $\mathcal{F} \in L_2(\mathbb{R}, \mathcal{H}_G)$, то ее решения также

являются решениями первой и второй задач. Таким образом, если $\mathcal{F}(x) \in H$ для всех $x \in \mathbb{R}$, то задачи (5.1) и (5.2) имеют одинаковые решения.

Как и в § 2, определим корни $M_\Gamma(t) = (Q_\Gamma(t))^{1/2}$ и соответствующие пространства $\mathcal{H}_\Gamma^j$.

Предположим, что $F \in L_2(\Pi)$ такая, что $F(x, \cdot) \in L_1(\mathbb{R}, H)$. Определим $\mathcal{F}(x) = F(x, \cdot)$ и рассмотрим задачу

$$d^2U/dx^2 - Q_\Gamma(\xi x)U = \mathcal{F}(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (5.4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (dU_0/dx \pm M_\Gamma(\pm\infty)U_0) = 0. \quad (5.5)$$

Рассмотрим также пару вспомогательных задач Коши

$$du_\pm(x)/dt = \mp M_\Gamma(\xi x)u_\pm(x) + \Psi(x), \quad u_\pm(\mp\infty) = 0, \quad (5.6)$$

где $\Psi(x) = M_\Gamma^{-1/2}(\xi x)\mathcal{F}(x)$. Как следует из предложения 2.1 и следствия 4.4, эти задачи обобщенно равномерно $\mathcal{H}_\Gamma$ -корректны.

Обозначим через $\mathcal{E}_\Gamma^\pm$ разрешающие операторы этих задач и определим вектор-функцию W_* и функцию двух переменных w_* по формулам

$$W_*(x) = 2^{-1}PM_\Gamma^{-1/2}(\xi x)((-\mathcal{E}_\Gamma^+ + \mathcal{E}_\Gamma^-)\Psi), \quad w_*(x, z) = (W_*(x))(z). \quad (5.7)$$

В соответствии с теоремой 2.1 задача (5.4), (5.5) однозначно разрешима, и для ее решения U_0 имеет место оценка в $L_\infty(\mathbb{R}, \mathcal{H}_\Gamma)$. Кроме того, в соответствии с предложением 2.3 решения задач (5.2) U_ε принадлежат $L_\infty(\mathbb{R}, \mathcal{H}_\Gamma)$ и ограничены по ε , а из теоремы 2.2 следует, что $U_\varepsilon(x) \rightarrow U_0(x)$ в $\mathcal{H}_\Gamma$ при $\varepsilon \rightarrow +0$ равномерно на компактах. В силу предложения 4.6 имеет место сходимость $PU_\varepsilon(x) \rightarrow PU_0(x)$.

Напомним, что согласно теореме 3.1 $u_\varepsilon(x, z) = (PU_\varepsilon(x))(z)$ являются решениями задач (1.1)–(1.3), и определим функцию двух переменных $u_0(x, z) = (PU_0(x))(z)$. Таким образом, из сказанного выше следует, что u_0 является пределом u_ε в L_2 на компактных подобластях Π , а также второе утверждение теоремы 1.1.

Остается доказать, что u_0 принадлежит $W_{2,\text{loc}}^2(\Pi)$ и удовлетворяет (1.1) для $\varepsilon = 0$ и (1.2). Это вытекает из п. 2 теоремы 2.1 и следствия 4.3.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть выполнены условия 1.1–1.3. Тогда существуют такие $\xi_0 > 0$ и $c > 0$, что для всех $\xi_0 > \xi > 0$ и всех $F \in L_2(\Pi)$ таких, что $F(x, \cdot) \in L_1(\mathbb{R}, L_2(0, h))$, справедливы следующие утверждения.

1. Функция u_0 , являющаяся пределом решений u_ε задач (1.1)–(1.3), может быть представлена в виде $u_0(x, z) = (PU_0(x))(z)$, где U_0 – решение задачи (5.4), (5.5) для $\mathcal{F}(x) = F(x, \cdot)$.

2. Имеет место оценка

$$\|u_0(x, \cdot) - w_*(x, \cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}, L_2(0, h))} \leq c\xi \|F(x, \cdot)\|_{L_1(\mathbb{R}, L_2(0, h))}.$$

3. Для любого $\delta > 0$ существует $c_1 = c_1(\delta) > 0$ такая, что для всех описанных выше F и $\alpha \in \mathbb{R}$ имеет место оценка

$$\|u_0 - w_*\|_{W_2^2((a, b) \times (0, h))} = c\xi (\|F(x, \cdot)\|_{L_1(\mathbb{R}, L_2(0, h))} + \|F\|_{L_2(\Pi)}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункт 1 уже доказан выше. Чтобы доказать пп. 2 и 3, воспользуемся оценками для $U_0 - W_*$, содержащимися в теореме 1.1, и предложением 4.7.

Заметим, что если $\Psi(x) \in \mathcal{H}_G$, то решения (5.6) и задачи

$$du_{\pm}(x)/dt = \mp M_{\Gamma}(\xi x)u_{\pm}(x) + \Psi(x), \quad u_{\pm}(\mp\infty) = 0,$$

совпадают.

§ 6. Некоторые замечания, примеры и следствия

6.1. Задача (1.1)–(1.3) описывает процесс распространения гармонических по времени волн в гидроакустических волноводах типа океанического. При этом условие вида (1.3) – это наиболее общий способ описания границы с областью $z > h$ (дном), заполненной изотропной средой, свойства которой зависят лишь от z и в которой нет источников возбуждения волн. Функция $p(\mu^2)$ в этом случае пропорциональна импедансу [9] границы.

ПРИМЕР 6.1. Граница с однородным жидким полупространством: $p(\lambda) = -\varkappa(\lambda - a_0)^{1/2}$, где $\varkappa$ – отношение плотностей сред в слое и полупространстве, a_0 – квадрат волнового числа в полупространстве.

ПРИМЕР 6.2. Граница с упругим однородным полупространством:

$$p(\lambda) = -\varkappa a_t^2(\lambda - a_l)^{1/2}((a_t - 2\lambda)^2 - 4\lambda(\lambda - a_l)^{1/2}(\lambda - a_t)^{1/2})^{-1}.$$

Здесь a_l, a_t – квадраты волновых чисел продольных и поперечных волн, распространяющихся в упругой среде, $0 < 2a_l < a_t$.

В примере 6.1 условие (1.3) заменяет уравнение Гельмгольца в полуплоскости $z > h$, а в примере 6.2 это условие заменяет векторные уравнения теории упругости. Задача в полуплоскости, соответствующая примеру 6.1, рассматривалась нами ранее в [10] (некоторые результаты см. также в [11]).

Следует отметить, что даже для приведенных примеров изучаемые в статье вопросы не являются простым. Однако основной практический смысл полученных здесь результатов состоит в том, что они представляют математическое обоснование модели волноводов, которая в тех случаях, когда описание области $z > h$ с помощью уравнений неизвестно, позволяет избежать решения обратных задач о восстановлении свойств сред, заполняющих область $z > h$ по импедансу.

6.2. Уравнения стандартной однонаправленной модели волновода с проницаемыми границами. Физический смысл теоремы 5.2 состоит в том, что в главном приближении поле в волноводе, описываемом задачей (3.1)–(3.3), расщепляется на поля волн, независимо друг от друга распространяющихся в направлениях $+\infty$ и $-\infty$. Такое расщепление создает основу для построения однонаправленных моделей волноводов. Однако даже когда сами операторы Q описываются вполне конкретно, задачи Коши с коэффициентом $(Q(\xi x))^{1/2}$ непригодны для вычислений. Стандартной в физической литературе (см., например, [12], [13])

является линейная аппроксимация корня. Она приводит к замене $(Q(\xi x))^{1/2}$ на $-ik_0/2 + iQ(\xi x)/(2k_0)$, где k_0 – некоторое положительное число, выбор которого диктуется интересом к тому или иному участку спектра $Q(\xi x)$.

Интересным моментом в нашем случае является то, что хотя операторы $Q(t) = -A(t)$ уже на этапе постановки задачи описываются совершенно неконструктивно, тем не менее, как следует из теоремы 3.2, все уравнения стандартной однонаправленной модели волновода с проницаемыми границами задаются вполне конкретно.

Из предложения 2.1 следует, что задача (3.11) или эквивалентная ей задача (3.12), (3.14) может быть корректно поставлена и для $\varepsilon = 0$. Мы не будем здесь обсуждать вопросы регуляризации условия (3.13) (или (3.14)) при $\varepsilon = 0$. Отметим лишь, что некоторые вычислительные аспекты, связанные с использованием таких условий (в конкретных случаях, соответствующих примеру 6.1), обсуждаются в работах [14], [15], где граничные условия типа (3.14) и были, по-видимому, впервые использованы как альтернатива рассмотрению задач с неограниченными поперечными сечениями.

6.3. Аналитичность p в окрестности нуля. Предположим, что выполнены условия 1.1 и 1.3, но вместо условия 1.2 предполагается, что для некоторого $d > 0$ функция $p(\lambda)$ мероморфна в области $\mathcal{O} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < d\}$. При сделанных предположениях на $(-d, d)$ существует не более конечного числа простых собственных значений λ_j оператора A задачи (3.1)–(3.3), а остальные точки отрезка регулярны.

Если для всех $x \in \mathbb{R}$ собственные числа оператора $A(x)$ не обращаются в нуль, то к задаче (3.12) можно применить теоремы 2.1 и 2.2 непосредственно, не прибегая к процедуре аналитической деформации, и получить совершенно аналогичные теоремам 1.1 и 5.1 результаты. Для обращающихся в нуль собственных чисел можно применить результаты [1] о расщеплении исходной краевой задачи парой краевых, одна из которых конечномерна, а другая расщепляется парой эволюционных.

6.4. Асимптотика, определяемая дискретным спектром. В дополнение к предположениям теоремы 5.1 предположим, что функция $p(\lambda)$ аналитична в окрестности некоторого отрезка $[c, l]$ ($c > 0$), и для $g = a(t, \cdot)$ при всех $t \in \mathbb{R}$ существует такое $\lambda = \lambda_1(t) \in [c, l]$, что однородная задача (3.1)–(3.3) имеет нетривиальное решение $\psi_1(t) = \psi_1(t, z)$, непрерывно зависящее от t . Предположим, что функция $\psi_1(t, z)$ нормирована условием

$$\int_0^h (\psi_1(t, z))^2 dz - (\psi_1(t, h))^2 (dp/d\lambda)(\lambda_1(t)) = 1$$

при каждом t .

Можно доказать в этом случае, что $\lambda_1(t)$ является простым собственным числом оператора $-Q(t) = A(t)$, а $\psi_1(t)$ – проекцией на $L_2(0, h)$ соответствующего нормированного собственного вектора.

Обозначим через $E_1(t)$ ортогональный проектор на собственное подпространство оператора $Q(t)$, отвечающее $\lambda_1(t)$, и через $P_1(t)$ – произведение проекторов, $P_1(t) = PE_1(t)$.

Из теоремы 5.1 и результатов работы [8] об асимптотическом расщеплении задач Коши следует, что при сделанных предположениях для проекции $v_0(x) =$

$P_1(\xi x)U_0(x)$ решения U_0 задачи (5.4), (5.5) имеет место асимптотическая оценка

$$\|v_0(x) - v_*(x)\|_{L_\infty(\mathbb{R}, L_2(0, h))} = O(\xi)\|F\|_{L_1(\mathbb{R}, L_2(0, h))},$$

где

$$v_*(x) = \psi_1(\xi x) \int_{\mathbb{R}} G_{01}(x, s) (F(s), \psi_1(\xi s))_{L_2(0, h)} ds,$$

$$G_{01}(x, s) = -2^{-1} \lambda_1^{-1/4}(\xi x) \lambda^{-1/4}(\xi s) \exp\left(\mp i \int_s^x \lambda_1^{1/2}(\xi r) dr\right)$$

для $\pm x > \pm s$.

Этот результат является математическим обоснованием адиабатической теории нормальных волн, построенной формально в [16].

Список литературы

1. Эдельштейн С. Л. Асимптотическое расщепление краевых задач для дифференциальных уравнений в банаховых пространствах // Матем. заметки. 1993. Т. 54. № 4. С. 140–148.
2. Эдельштейн С. Л. Асимптотическое расщепление краевых задач для абстрактных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравн. 1994. Т. 30. № 5. С. 805–977.
3. Эдельштейн С. Л. Асимптотическое расщепление краевых задач для абстрактных дифференциальных уравнений // Сиб. матем. журн. 1994. Т. 35. № 6. С. 1401–1420.
4. Штраус А. В. О расширениях симметрического оператора, зависящих от параметра // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1965. Т. 29. № 6. С. 1389–1416.
5. Сёкефальви-Надь Б., Фояш Ч. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. М.: Мир, 1970.
6. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. Т. 2. Харьков: Изд-во ХГУ, 1978.
7. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 1. М.: Мир, 1977.
8. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967.
9. Исакович М. А. Общая акустика. М.: Наука, 1973.
10. Эдельштейн С. Л. Априорные оценки полей в двумерных открытых почти стратифицированных волноводах. Метод параболического уравнения. Асимптотика. Ростов-на-Дону, 1988. 51 с. Деп. в ВИНТИ 19.04.88, № 2957-в.
11. Эдельштейн С. Л. Оценки и асимптотика решений двумерной краевой задачи для уравнения Гельмгольца со слабо зависящим от одной переменной коэффициентом // Дифференц. уравн. 1990. № 4. С. 727–729.
12. Тапперт Ф. Д. Метод параболического уравнения // Распространение волн и подводная акустика. М., 1980. С. 180–226.
13. McDaniel S. T. Parabolic approximation in underwater sound propagation // J. Acoust. Soc. Am. 1975. V. 58. № 6. P. 1178–1185.
14. Baskakov V. A., Popov A. V. Implimentation of transparent boundaries for numerical solution of the Schrödinger equation // Wave Motion. 1991. V. 14. P. 123–128.
15. Marcus S. W. A generalized impedance method for application of the parabolic approximation to underwater acoustics // J. Acoust. Soc. Am. 1991. V. 90. № 1. P. 391–398.
16. Эдельштейн С. Л. Асимптотика мод плавно нерегулярного волновода с проницаемыми границами // Акуст. журн. 1990. Т. 36. № 2. С. 355–359.