Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Добрынский, О полуунимодалых отображениях плоскости и структуре их множеств неблуждающих точек, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1997, том 61, выпуск 5, 3–34

DOI: <https://doi.org/10.4213/im148>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 15:17:51

УДК 517.9

В. А. Добрынский

О полуунимодальных отображениях плоскости и структуре их множеств неблуждающих точек

Для одного класса полуунимодальных эндоморфизмов плоскости установлено существование значений параметров, при которых их множества неблуждающих точек состоят из нескольких компонент, одна из которых нетривиально некомпактна (т.е. имеет уходящую на бесконечность траекторию), в то время как другие компактны и имеют в своем составе множество, которое является эквивариантным образом множества Кантора и таково, что часть его границы построена из самоподобных элементов (т.е. имеет структуру типа фрактальной). Кроме того, оказывается, есть такие значения параметров, что компактные и некомпактная компоненты этих множеств переплетаются между собой на осях координат.

Библиография: 19 наименований.

Введение

Несмотря на обилие работ, связанных с изучением свойств многомерных отображений, даже для двумерных эндоморфизмов (2-эндоморфизмов) плоскости $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ известно мало аналитических результатов в области глобального анализа структуры их множеств неблуждающих точек $NW(F)$ и фазового портрета в целом. Поэтому актуальной является задача классификации 2-эндоморфизмов и выделения “представительных” в определенном смысле классов отображений. Эта задача существенно упрощается в том случае, когда 2-эндоморфизм порождается нелинейным разностным уравнением второго порядка, т.е. отображениями вида

$$\Phi: (x, y) \rightarrow (\Phi(x, y), x), \quad (1)$$

где $\Phi(x, y)$ – функция от двух переменных x и y . Так, к виду (1) могут быть приведены такие отображения, как диффеоморфизм Хенона [1] и гомеоморфизм Лози [2], а также многие другие (см. [3]–[11]). Так что класс (1) очень широк. Поэтому целесообразно выделять более узкие классы отображений. Ниже изучается семейство 2-эндоморфизмов вида

$$F: (x, y) \rightarrow (A(\varphi(x) + B)f(y) + D\varphi(x), x), \quad (2)$$

где $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\varphi(t)$, $f(t)$ – гладкие на $\mathbb{R}^1$ функции такие, что $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$ и $\varphi'(t) > 0$ для $t \in \mathbb{R}^1$, а $f(0) = f(1) = 0$, и существует $q \in (0, 1)$ такая, что

$f(q) = 1$ и $(t - q)f'(t) < 0$ для $t \in \mathbb{R}^1 \setminus \{q\}$, а $f'(0) > 1$. Предполагается также, что $f''(t) \leq 0$, $\varphi''(t) \leq 0$ на $\mathbb{R}^1$ и $S(f(t)) < 0$ при $t \in \mathbb{R}^1 \setminus \{q\}$,

$$S(f(t)) = \frac{f'''(t)}{f'(t)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(t)}{f'(t)} \right)^2$$

– производная Шварца (шварциан) функции f .

Так как функция $A(\varphi(x) + B)f(y) + D\varphi(x)$ является унимодальной по y и монотонной по x , то по аналогии с [5], [6] отображения (2) мы будем называть *полуунимодальными эндоморфизмами плоскости*. Заменаи переменных к (2) сводятся отображения $(x, y) \rightarrow (y, y - cx + x^2)$ [7], [8], $(x, y) \rightarrow (bx + y, a + x^2)$ [9]–[11] и многие другие [10]. Далее (2) рассматриваются с $D = 0$, т.е. изучаются 2-эндоморфизмы вида

$$F: (x, y) \rightarrow (A(\varphi(x) + B)f(y), x). \quad (3)$$

Для них установлено, что множество неблуждающих точек $NW(F)$ отображений (3) сосредоточено в пределах двух полос вокруг полос осей координат и может иметь достаточно сложную структуру. В частности, доказано существование областей значений параметров A и B таких, что в $NW(F)$ в качестве его компонент могут входить как компакты, так и некомпактные множества. В свою очередь, среди компактов могут быть такие, которые либо являются эквивариантными образами множества Кантора, либо же в качестве границы имеют несвязное фракталоподобное множество, элементами которого являются дуги кусочно гладких кривых. И при этом функция $\Phi(x, y)$, которая задает отображение, может быть очень простой, скажем, $4A(x + B)y(1 - y)$. Кроме того, на простом примере (при $A > 0$, $B = 0$) показано, что структура $NW(f)$ существенно зависит от вида функций f и φ и при одних и тех же значениях параметров может быть как очень простой: $NW(F) \cap I^2$ (где I^2 – единичный квадрат), одна или две неподвижные точки, так и очень сложной, хаотической.

Изложение результатов подчинено логике последовательного (при разных A и B) изучения свойств (3), распадается на три части, соответствующие трем рассматриваемым областям значений параметров, и предваряется небольшим общим введением.

Аналогично [5] определим понятие критического множества отображения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Критическим* для отображения $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ называется множество точек K , в которых якобиан DF обращается в нуль.

Заметим, что K отличается от критического множества CL в [8], [12]. В рассматриваемом случае K состоит из двух ветвей: $K = K_x \cup K_y$, где $K_x = \{(x, y): \varphi(x) = -B, -\infty < y < +\infty\}$, а $K_y = \{(x, y): -\infty < x < +\infty, f'(y) = 0\}$, т.е. $K_y = \{(x, y): -\infty < x < +\infty, y = q\}$.

Обозначим $F(\mathbb{R}^2)$ образ $\mathbb{R}^2$ и посмотрим, как $F(\mathbb{R}^2)$ вкладывается в $\mathbb{R}^2$. Вычислим для этого $F((y = a))$ – образ прямой $y = a$ (здесь и далее символ $(y = a)$ обозначает множество точек прямой $y = a$), где a – произвольная постоянная. Так как $F: (t, a) \rightarrow (A(\varphi(t) + B)f(a), t)$, то

$$F((y = a)) = \{(x, y): x = Af(a)(\varphi(y) + B), -\infty < y < +\infty\}. \quad (4)$$

И поскольку $f(a): -\infty < f(a) \leq 1$, $f(q) = 1$ и $|f(a)| \rightarrow +\infty$ при $|a| \rightarrow +\infty$, то

$$F(\mathbb{R}^2) = H \cup \{(0, \varphi^{-1}(-B))\} \cup G,$$

где

$$\begin{aligned} H &\stackrel{\text{df}}{=} \{(x, y): A(\varphi(y) + B) \leq x < +\infty, \quad -\infty < y < \varphi^{-1}(-B)\}, \\ G &\stackrel{\text{df}}{=} \{(x, y): -\infty < x \leq A(\varphi(y) + B), \varphi^{-1}(-B) < y < +\infty\} \quad \text{при } A > 0; \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} H &\stackrel{\text{df}}{=} \{(x, y): -\infty < x \leq A(\varphi(y) + B), -\infty < y < \varphi^{-1}(-B)\}, \\ G &\stackrel{\text{df}}{=} \{(x, y): A(\varphi(y) + B) \leq x < +\infty, \varphi^{-1}(-B) < y < +\infty\} \quad \text{при } A < 0. \end{aligned}$$

Пусть $C_F \stackrel{\text{df}}{=} \mathbb{R}^2 \setminus F(\mathbb{R}^2)$ и $\text{Int}(C_F)$ – внутренность C_F . Очевидно, что $\text{Int}(C_F) \cap NW(F) = \emptyset$.

Вычислим $F(K)$. Так как $F(K_x) = \{(0, \varphi^{-1}(-B))\}$, $F(K_y) = \{(x, y): x = A(\varphi(y) + B), -\infty < y < +\infty\}$, то получается, что $F(K_y)$ образует границу $F(\mathbb{R}^2)$, а $F(K_x)$ отмечает на ней точку, через которую проходит другая, “недостижимая” ее граница – прямая ($y = \varphi^{-1}(-B)$).

ЛЕММА 1. $F^2((x = 0)) \subset (x = 0)$, $F^2((y = 0)) \subset (y = 0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $F: (0, t) \rightarrow (ABf(t), 0)$ и $F: (t, 0) \rightarrow (0, t)$, то $F^2: (0, t) \rightarrow (0, ABf(t))$ и $(t, 0) \rightarrow (ABf(t), 0)$. А потому $F^2((x = 0)) \subset (x = 0)$, $F^2((y = 0)) \subset (y = 0)$.

Таким образом, действие F^2 на осях координат определяется свойствами одномерного отображения $t \rightarrow ABf(t)$.

Из сказанного следует существование взаимно однозначного соответствия между прообразами критической точки q отображения $f_{AB}: t \rightarrow ABf(t)$ и “четными” прообразами K_y . Каждой точке множества $f^{-j}(q)$ ставится в соответствие именно тот единственный прообраз из множества $F^{-2j}(K_y)$, которому принадлежит данная точка. Аналогичное соответствие имеет место также между прообразами критической точки q отображения $f_{AB}: t \rightarrow ABf(t)$ и “нечетными” прообразами множества K_y .

Обозначим $\tilde{F}$ ограничение F на оси координат и $NW(\tilde{F})$ его множество неблуждающих точек. Очевидно, что, за исключением $(0, 0)$, каждая периодическая точка $\tilde{F}$ имеет период, кратный 2.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Компактное инвариантное множество $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ называется *множеством с неблуждаемостью, индуцированной одномерной динамикой*, если

$$\Lambda \subset NW(F) \cap \overline{\bigcup_{j=0}^{\infty} F^{-j}(NW(\tilde{F}))}.$$

Очевидно, $NW(\tilde{F}) \subset \Lambda$. И так как $NW(\tilde{F}) \subset (x = 0) \cup (y = 0)$, то

$$\Lambda \subset \overline{\bigcup_{j=0}^{\infty} F^{-j}((x = 0))}.$$

Поскольку свойства F существенным образом зависят от соотношения параметров A и B и, в частности, от их знаков, то целесообразно отдельно рассматривать случаи:

- 1) $A > 0, B > 0$;
- 2) $A > 0, B = 0$;
- 3) $A > 0, B < 0$;
- 4) $A < 0, B > 0$;
- 5) $A < 0, B = 0$;
- 6) $A < 0, B < 0$.

§ 1

Итак, пусть $A > 0, B > 0$. Обозначим $I^2 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, $L_x = (x = 0) \cap I^2$, $L_y = (y = 0) \cap I^2$, $M_x = (x = 1) \cap I^2$, $M_y = (y = 1) \cap I^2$. Вычислим $F(I^2)$. Учитывая, что, за исключением точек на $(x = \varphi^{-1}(-B))$, F — диффеоморфизм в каждой из полуплоскостей $\{(x, y) : y \leq q\}$ и $\{(x, y) : y \geq q\}$, а также ввиду $F((x = 1)) \subset (y = 1)$, $F((y = 1)) \subset (x = 0)$, $F((x = 0)) \subset (y = 0)$ и $F((y = 0)) = (x = 0)$ имеем

$$F(I^2) = \{(x, y) : 0 \leq x \leq A[\varphi(y) + B], 0 \leq y \leq 1\}.$$

Обозначим $\Delta \stackrel{\text{df}}{=} F(I^2) \setminus I^2$. Если A, B такие, что $A(1 + B) \leq 1$, то $F(I^2) \subset I^2$ и $\Delta = \emptyset$, а если $A(1 + B) > 1$, то $\Delta = \{(x, y) : 1 < x \leq A[\varphi(y) + B], y_B < y \leq 1\} \neq \emptyset$, где $y_B : A(\varphi(y_B) + B) = 1$.

Случай, когда $A(1 + B) \leq 1$, не рассматривается. Отметим только, что из $F(I^2) \subset I^2$ не следует, что $\bigcap_{j=0}^{\infty} F^j(I^2)$ — аттрактор. В самом деле, $(0, 0) \in \bigcap_{j=0}^{\infty} F^j(I^2)$, и это репеллер, если μ_i , $i = 1, 2$, — корни $\mu^2 = ABf'(0)$ — по модулю больше 1. Последнее возможно при $AB > |f'(0)|^{-1}$. По условию $A(1 + B) \leq 1$. Следовательно, если $|f'(0)| > 1$ и A, B такие, что $1 - A \geq AB \geq |f'(0)|^{-1}$, то $(0, 0)$ — репеллер. Очевидно, что при достаточно малых $A > 0$ и $B \sim 1/A$ этим требованиям можно удовлетворить.

Итак, пусть $A(1 + B) > 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Существуют A, B : $AB < 1 < A(1 + B)$ такие, что Δ не имеет прообразов j -го порядка для $j > 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем A и B так, что $A(1 + B) = 1$, и рассмотрим прообразы точки $(1, 1)$. Очевидно, $(1, q) = F^{-1}((1, 1))$, но прообразов 2-го порядка нет. Действительно, если существует $(x, y) : F((x, y)) = (1, q)$, то справедливы соотношения $x = q$ и $A[\varphi(x) + B]f(y) = 1$, из которых вытекает уравнение для y : $A[\varphi(q) + B]f(y) = 1$. По условию $A(1 + B) = 1$, и так как $0 < q < 1$, то

Рис. 1

$\varphi(q) < \varphi(1) = 1$ и, значит, $A[\varphi(q) + B] < 1$. Откуда получается, что $f(y) = \{A[\varphi(q) + B]\}^{-1} > 1$, что невозможно, поскольку $|f(y)| < 1$ при всех y .

В силу непрерывной зависимости Δ от A и B существуют такие $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$, что:

- 1) $(A + \delta)(1 + B + \delta) > 1$ и, значит, $\Delta \neq \emptyset$;
- 2) $\Delta \subset U_\varepsilon((1, 1))$, $F^{-1}(\Delta) \subset U_\varepsilon((1, q))$, где $U_\varepsilon(\cdot)$ — ε -окрестности соответствующих множеств;
- 3) для любой точки $(x, y) \in F^{-1}(\Delta)$ выполняется соотношение $x\{A[\varphi(q) + B]\}^{-1} > 1$.

Следовательно, для таких A и B множество $F^{-1}(\Delta)$ не имеет прообразов 1-го порядка, а Δ — 2-го и т.д.

С ростом AB наряду с прообразами 1-го порядка появляются прообразы Δ сначала 2-го порядка, затем 3-го и т.д.

ЛЕММА 2. Если $A, B: A \geq 1$, то для произвольных натуральных m и n существуют $F^{-m}(\Delta) \neq \emptyset$, $F^{-(m+n)}(\Delta) \neq \emptyset$ и $F^{-m}(\Delta) \cap F^{-(m+n)}(\Delta) = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование непустых $F^{-m}(\Delta)$, $F^{-(m+n)}(\Delta)$ вытекает из того, что при $AB \geq 1$ $I^2 \subset F(\mathbb{R}^2) \setminus \{(0, \varphi^{-1}(-B))\}$, а дизъюнктивность — из того, что согласно определению множеств Δ и $F^{-j}(\Delta)$ $\Delta \cap F^{-j}(\Delta) = \emptyset$ для любого натурального j .

Обозначим $\Delta_{-j} = F^{-j}(\Delta)$ и $\Delta^{(j)} = \bigcup_{k=1}^j \Delta_{-k}$. Из леммы 2 вытекает, что при $AB \geq 1$ Δ_{-j} существуют для всех $j \in \mathbb{Z}_+$. Обозначим $\Delta^* = \bigcup_{j=1}^\infty \Delta^{(j)} = \bigcup_{j=1}^\infty \Delta_{-j}$, $\Gamma(\Delta^*)$ — его границу: $\Gamma(\Delta^*) = \Delta^* \setminus \text{Int}(\Delta^*)$ и $\Delta_* = I^2 \setminus \Delta^*$. По построению Δ^* , $\Gamma(\Delta^*)$ и Δ_* инвариантны относительно F . Чтобы наглядно представить себе их внешний вид, заметим, что для любого j набор графиков кривых $\{F^{-i}(K_y)\}_{i=0}^j$ делит I^2 на 2^{j+1} частей таких, что каждая из них отображением F^{j+1} диффеоморфно преобразуется в I^2 . $\bigcup_{j=1}^\infty \Delta_{-j}$ можно рассматривать как предел $\Delta^{(j)}$ при $j \rightarrow \infty$. Каждое $\Delta^{(j)}$ представляет собой пару “склеенных” вдоль K_y прообразов Δ 1-го порядка, к каждому из которых “приклеено” по паре “склеенных” вдоль $F^{-1}(K_y)$ прообразов Δ 2-го порядка, к каждому из которых

Рис. 2

в свою очередь “приклеено” по паре “склеенных” вдоль соответствующей ветви $F^{-2}(K_y)$ прообразов Δ 3-го порядка, и т.д. вплоть до “приклейки” прообразов j -го порядка.

Получается связное и открытое в I^2 множество. При $AB \geq 1$ в силу леммы 2 $\Delta^{(j)}$ существуют для любого $j \in \mathbb{Z}_+$ и, следовательно, существует их предел – связное и открытое в I^2 множество Δ^* . Его дополнение Δ_* при $AB = 1$ – замкнутое множество с фракталоподобной границей, построенной из подобных друг другу, но с каждым шагом уменьшающихся элементов – криволинейных углов. Вершинами эти углы опираются как на стороны I^2 , так и на стороны ранее построенных углов. При $AB > 1$ вершины углов, построенных на j -м шаге, выходят за пределы $I^2 \setminus \Delta^{(j-1)}$, что порождает несвязность Δ_* . На рис. 1 и 2 изображены $\Delta^{(4)}$ и $I^2 \setminus \Delta^{(4)}$ при $AB = 1$ и $AB > 1$ соответственно.

ЛЕММА 3. Если $AB \geq 1$, то $F(\mathbb{R}^2 \setminus I^2) \cap I^2 = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $F((x, y)) \stackrel{\text{df}}{=} (\bar{x}, \bar{y}) \in I^2$. Это значит, что справедливы соотношения

$$0 \leq \bar{x} = A[\varphi(x) + B]f(y) \leq 1, \quad 0 \leq \bar{y} = x \leq 1.$$

Учитывая, что $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ при $0 \leq x \leq 1$, получаем

$$0 \leq f(y) \leq \{A[\varphi(x) + B]\}^{-1} \leq (AB)^{-1} \leq 1,$$

т.е. $0 \leq f(y) \leq 1$. По определению f это означает, что $0 \leq y \leq 1$. Таким образом, $(x, y) \in I^2$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $AB \geq 1$, то $F^{-1}(I^2) \subset I^2$.

СЛЕДСТВИЕ 2. При $AB \geq 1$ $\bigcup_{j=1}^{\infty} \Delta^{(j)} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Delta_{-j} \subset \mathbb{R}^2 \setminus NW(F)$.

Рис. 3

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду $\Delta = F^j(\Delta_{-j})$ и $\Delta \cap I^2 = \emptyset$ это очевидно.

Обозначим M_x^- замыкание объединения тех прообразов отрезка M_x , которые имеют непустое пересечение с $(x = 0)$ и $(y = 0)$, и пусть

$$\Delta_\star^- \stackrel{\text{df}}{=} \Delta_\star \cap (M_x^- \cup \Gamma(I^2)), \quad NW^-(F) \stackrel{\text{df}}{=} \Delta_\star^- \cap \overline{\bigcup_{j=0}^{\infty} F^{-j}(NW(\tilde{F}))}.$$

Таким образом, $\Delta_\star^-$ – это совокупность тех элементов границы $\Gamma(\Delta_\star)$, каждый из которых для любого $\varepsilon > 0$ имеет в ε -окрестности осей координат $U_\varepsilon((x = 0) \cup (y = 0))$ хотя бы один частичный прообраз, а $NW^-(F)$ – прообразы $NW(\tilde{F})$ на этих элементах. Заметим между прочим, что поскольку при $AB = 1$ $NW(\tilde{F}) = L_x \cup L_y$, то для таких A и B $NW^-(F) = \Delta_\star^-$.

Пусть $f_\lambda: t \rightarrow \lambda f(t)$ – семейство отображений $\mathbb{R}^1$ в себя и $\tilde{f}_\lambda = f_\lambda|_{[0,1]}$, а $NW(\tilde{f}_\lambda) = NW(f_\lambda) \cap [0, 1]$.

УТВЕРЖДЕНИЕ. Если $\lambda \geq 1$, то для любой окрестности U : $U \cap NW(f) \neq \emptyset$, существует $k = k(U)$ такое, что $f_\lambda^k(U) \supset [0, 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим прежде всего, что если $\lambda \geq 1$, то для любого $t \in \mathbb{R}^1 \setminus [0, 1]$ $f_\lambda^j(t) \rightarrow -\infty$ при $j \rightarrow +\infty$. Следовательно, $NW(f_\lambda) = NW(\tilde{f}_\lambda|_{[0,1]})$. Далее, при $\lambda = 1$ $f_\lambda([0, 1]) = [0, 1]$, а $h(\tilde{f}_\lambda|_{[0,1]}) = \log 2$, где $h(\tilde{f}_\lambda|_{[0,1]})$ – топологическая энтропия. (В самом деле, как известно (см. [13, с. 46]), $h(\tau) = \frac{1}{m} \log l_m$, где l_m – число участков монотонности отображения τ^m , причем для унимодальных отображений $h(\tau) \in [0, \log 2]$. С учетом сказанного, принимая во внимание, что $\lambda f(q) = 1$ при $\lambda = 1$, элементарные вычисления показывают, что $h(\tilde{f}|_{[0,1]}) = \log 2$.) Согласно [18, теорема A(d), п. 2(b)] в таком случае $f_\lambda|_{[0,1]}$ топологически сопряжено с кусочно линейным отображением $g: t \rightarrow g(t)$, где

$$g(t) \stackrel{\text{df}}{=} \begin{cases} \frac{t}{q} & \text{при } 0 \leq t \leq q, \\ \frac{1-t}{1-q} & \text{при } q \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Так как $0 < q < 1$, то $|g'(t)| > 1$, т.е. g – растягивающий эндоморфизм отрезка $[0, 1]$. Поэтому для любой $U \subset [0, 1]$ существует $k = k(U)$ такое, что $g^k(U) \supset [0, 1]$. В силу топологической сопряженности то же самое справедливо и для итераций f_1 .

Пусть теперь $\lambda > 1$ и t_-, t_+ такие, что $f_\lambda(t_-) = f_\lambda(t_+) = 1$. Обозначим

$$C = [0, 1] \setminus \bigcup_{j=0}^{\infty} f_\lambda^{-j}((t_-, t_+)).$$

В силу алгоритма построения C – множество Кантора, и это единственное максимальное инвариантное относительно f_λ подмножество $[0, 1]$. Но согласно [18, теорема А(с), п. 3] $f_\lambda|_C$ топологически сопряжено с автоморфизмом сдвига в пространстве с конечным числом символов, т.е. C – топологически транзитивное множество. Следовательно, $NW(f_\lambda) = C$. При этом для любой окрестности $U \cap C \neq \emptyset$ существует k : $f_\lambda^k(U) \stackrel{\text{df}}{=} \underline{U} \supset C$. Выбирая k : $[0, 1] \setminus \bigcup_{j=0}^k f_\lambda^{-j}((t_-, t_+)) \subset \underline{U}$, имеем $f_\lambda^{k+1}(\underline{U}) \supset [0, 1]$.

ТЕОРЕМА 1. Если $AB \geq 1$, то $NW^-(F) \subset NW(F) \cap I^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z \in NW^-(F)$ и $U_\varepsilon(z)$ – ε -окрестность z . По определению $NW^-(F)$ существует натуральное j : $z \in F^{-j}(NW(\tilde{F}))$. Поэтому $F^j(z) \in NW(\tilde{F})$. Согласно утверждению найдется тогда такое k , что

$$F^k(F^j(U_\varepsilon(z))) \cap [L_x \cup L_y] \supset L_x \cup L_y.$$

Ввиду компактности $L_x \cup L_y$ и открытости $F^{k+j}(U_\varepsilon(z))$ это значит, что существует $\delta > 0$ такое, что $U_\delta(L_x \cup L_y) \subset F^{k+j}(U_\varepsilon(z))$.

Теперь заметим, что для каждого “опирающегося” на оси координат прообраза M_x (т.е. принадлежащего множеству M_x^-) и, в частности, того, которому принадлежит z , существует по крайней мере один его прообраз, который опирается на оси координат. (Это следует из связности множеств и непрерывности отображения.) $\bigcup_{j=0}^{\infty} F^{-j}(K_y)$ порождает разбиение I^2 на “клетки”, каждая из которых содержит какой-либо прообраз M_x . При $AB > 1$

$$\{(q, 0) \cup (0, q)\} \cap \text{Per}(\tilde{F}) = \emptyset,$$

где $\text{Per}(\tilde{F})$ – множество периодических точек $\tilde{F}$. Поэтому на $L_x \cup L_y$ существует бесконечно много прообразов точек $(q, 0)$ и $(0, q)$, которые являются следами пересечения $\bigcup_{j=0}^{\infty} F^{-j}(K_y)$ с $L_x \cup L_y$. Существует последовательность $F^{-k}((0, q))$, где $k = k(j) > j$ для $j = 1, 2, \dots$, сходящаяся к $(0, 0)$. (В самом деле, на $[0, 1]$ прообразы q $(j+1)$ -го порядка отображения $f_\lambda: t \rightarrow \lambda f(t)$ при $\lambda > 1$ располагаются по одному на каждом из отрезков, на которые делят $[0, 1]$ прообразы q j -го порядка. С ростом j размер каждого интервала уменьшается, так как мера множества точек таких, что $(f_\lambda^j)' < 1$ (ввиду свойств $f(t)$), с ростом j стремится к 0.)

Действительно, покажем, что G_{2j} – ближайшая к $(y = 0)$ компонента $F^{-2j}(K_y) \cap I^2$ – такова, что $G_{2j} \subset \{(x, y) : 0 \leq y \leq f_{AB}^{-j}(q)\} \cap I^2$, где $f_{AB}^{-j}(q)$ обозначает ближайший к 0 j -й прообраз отображения $f_{AB}: t \rightarrow ABf(t)$. Доказательство

проводится по индукции. Поскольку $F^{-1}(K_y) = \{(x, y) : x = q\}$, то, вычисляя G_2 как $F^{-1}(\{(x, y) : x = q\}) \cap I^2$, имеем

$$G_2 = \{(x, y) : x = t, y = f^{-1}(q/\{A[\varphi(t) + B]\}), 0 \leq t \leq 1\},$$

где $f^{-1}()$ обозначает ту из ветвей функции, обратной к f , значения которой принадлежат интервалу $(-\infty, q]$. Поскольку $f^{-1}(t)$ монотонно возрастает, то

$$f^{-1}(q/\{A[\varphi(t) + B]\}) \leq f^{-1}(q/\{A[\varphi(t) + B]\})|_{t=0} \leq f^{-1}(q/(AB)) = f_{AB}^{-1}(q)$$

при $t \geq 0$. Следовательно, $G_2 \subset \{(x, y) : 0 \leq y \leq f_{AB}^{-1}(q)\} \cap I^2$. Таким образом, при $j = 1$ утверждение верно.

Предположим, что оно выполняется для некоторого $j = J \geq 1$, и покажем справедливость его при $j = J + 1$. Действительно, вычисляя, имеем

$$F^{-1}(\{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq f_{AB}^{-J}(q)\}) = \{(x, y) : 0 \leq x \leq f_{AB}^{-J}(q), 0 \leq y \leq 1\}.$$

Следовательно, $G_{2j+1} = F^{-1}(G_{2j}) \subset \{(x, y) : 0 \leq x \leq f_{AB}^{-J}(q), 0 \leq y \leq 1\}$. Учитывая, что

$$\begin{aligned} f^{-1}(f_{AB}^{-J}(q)/\{A[\varphi(t) + B]\}) &\leq f^{-1}(f_{AB}^{-J}(q)/\{A[\varphi(t) + B]\})|_{t=0} \\ &\leq f^{-1}(f_{AB}^{-J}(q)/(AB)) = f_{AB}^{-(J+1)}(q), \end{aligned}$$

видим, что $F^{-1}(\{(x, y) : 0 \leq x \leq f_{AB}^{-J}(q), 0 \leq y \leq 1\}) \subset \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq f_{AB}^{-(J+1)}(q)\}$. А потому

$$G_{2(J+1)} \subset \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq f_{AB}^{-(J+1)}(q)\}.$$

Аналогичное утверждение, очевидно, справедливо для G_{2j+1} и $(x = 0)$.

Из сказанного ясно, что существует J такое, что все “клетки”, прилегающие к осям координат, включаются в произвольно малую окрестность множества $L_x \cup L_y$. Последнее в свою очередь означает, что, начиная с $j = \tilde{J} + 1$, построенные нами самоподобные элементы, опирающиеся на оси координат, попадают в $F^{k+j}(U_\varepsilon(z))$. Неблуждаемость очевидна.

СЛЕДСТВИЕ 3. $NW^-(F) \subset \Lambda$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку по определению

$$NW^-(F) \subset \bigcup_{j=0}^{\infty} F^{-j}(NW(\tilde{F})),$$

а по теореме 1 $NW^-(F) \subset NW(F) \cap I^2$, то $NW^-(F) \subset \Lambda$.

Помимо $NW^-(F)$ в I^2 могут быть (и на самом деле есть) и другие точки множества $NW(F)$. Рассмотрим отображение $(x, y) \rightarrow (0.8(x+5)y(1-y), x)$. Вычисляя его неподвижные точки, видим, что кроме $(0, 0)$ у него есть еще пара неподвижных точек: $(-[4 + \sqrt{31}]/2, -[4 + \sqrt{31}]/2)$ и $([\sqrt{31} - 4]/2, [\sqrt{31} - 4]/2)$, последняя

из которых (учитывая, что $0.75 < [\sqrt{31} + 4]/2 < 0.8$) лежит в $\text{Int}(I^2)$ и, очевидно, не принадлежит $\bigcup_{j=0}^{\infty} F^{-j}(NW(\tilde{F}))$, а значит, и $NW^-(F)$. Более того, при $AB > 1$ Δ_* состоит из несчетного числа компонент связности, которые кодируются двоичными последовательностями. В самом деле, если обозначить J_0 и J_1 компоненты множества $I^2 \setminus \Delta^{(1)} = I^2 \setminus \Delta_{-1}$, то компоненты множеств $I^2 \setminus \Delta^{(n)}$ при $n > 1$ определяются по индукции как $J_{j_1 j_2 \dots j_{n-1} j_n} = F^{-1}(J_{j_1 j_2 \dots j_{n-1}}) \cap J_{j_n}$, где $j_k \in \{0, 1\}$ для любых $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Таким образом, между компонентами множества $I^2 \setminus \Delta^{(n)}$ и n -символьными наборами из 0 и 1 существует взаимно однозначное соответствие. По построению $\Delta_* = \bigcap_{n=1}^{\infty} (I^2 \setminus \Delta^{(n)})$. Поэтому каждой компоненте связности множества Δ_* для любого n может быть поставлена в соответствие компонента множества $I^2 \setminus \Delta^{(n)}$, в которую она включается. Взятые совместно (по всем n) эти компоненты определяют, с одной стороны, некоторую компоненту множества Δ_* , а с другой стороны, задают полубесконечную (ограниченную слева) последовательность из 0 и 1 таким образом, что ее первый символ определяет компоненту множества $I^2 \setminus \Delta^{(1)}$, первые два – компоненту множества $I^2 \setminus \Delta^{(2)}$, первые три – компоненту множества $I^2 \setminus \Delta^{(3)}$ и т.д.

Мы опускаем описание деталей процесса установления соответствия между элементами Δ_* и последовательностями из 0 и 1, поскольку они совпадают с деталями излагаемой в [13] системы кодирования (см. [13, с. 36, 37]). В результате получается, что всякой периодической периода k последовательности символов отвечает совокупность инвариантных относительно F^k компонент Δ_* , каждая из которых по теореме Брауэра имеет по крайней мере одну неподвижную относительно F^k точку. Обратим также внимание на то, что хотя алгоритм построения Δ_* напоминает алгоритм построения двумерного множества Кантора, но в отличие от последнего элементами Δ_* могут быть не точки, а множества. Поэтому соответствие между последовательностями из 0 и 1 и точками Δ_* в общем случае является эквивариантным.

СЛЕДСТВИЕ 4. *Если $AB > 1$, то $NW(F) \cap I^2$ имеет не менее чем счетное число замкнутых и непересекающихся между собой компонент связности.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По построению $NW^-(F)$ имеет не менее чем счетное число компонент связности, а Δ_* – структуру, аналогичную структуре двумерного множества Кантора, но с тем отличием, что его элементами являются множества. И поскольку согласно определению Δ_* и следствию 3 справедливы соотношения $NW^-(F) \subset NW(F) \cap I^2 \subset \Delta_*$, получаем следствие.

Покажем, что $NW(F) \neq NW(F) \cap I^2$.

ЛЕММА 4. *Если $ABf'(0) > 1$, то существует $(\bar{x}, \bar{x}) \in \mathbb{R}^2 \setminus I^2$: $F((\bar{x}, \bar{x})) = (\bar{x}, \bar{x})$, $\bar{x} < 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $ABf'(0) > 1$, то существует $\varepsilon > 0$ такое, что в $U_\varepsilon(0)$ график функции $z(t) = A[\varphi(t) + B]f(t)$ при $t < 0$ лежит ниже диагонали. А поскольку $A[\varphi(\varphi^{-1}(-B)) + B]f(\varphi^{-1}(-B)) = 0 > \varphi^{-1}(-B)$, то существует $\bar{t}$: $\varphi^{-1}(-B) < \bar{t} < 0$ такое, что $A[\varphi(\bar{t}) + B]f(\bar{t}) = \bar{t}$. Откуда $F((\bar{x}, \bar{x})) = (\bar{x}, \bar{x})$ при $\bar{x} = \bar{t}$.

Предполагая $AB > 1$, положим

$$E_0 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq A[\varphi(y) + B], \varphi^{-1}(-B) \leq y \leq 0\},$$

Рис. 4

$$\begin{aligned}
E_1 &= \{(x, y): 1 \leq x \leq A[\varphi(y) + B], 0 \leq y \leq 1\}, \\
E_2 &= \{(x, y): 1 \leq x \leq A[\varphi(y) + B], 1 \leq y < +\infty\}, \\
E_3 &= \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y < +\infty\}, \\
E_4 &= \{(x, y): \varphi^{-1}(-B) \leq x \leq 0, 1 \leq y < +\infty\}, \\
E_5 &= \{(x, y): -\infty < x \leq \varphi^{-1}(-B), 1 \leq y < +\infty\}, \\
E_6 &= \{(x, y): \varphi^{-1}(-B) \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq 1\}, \\
E_7 &= \{(x, y): -\infty < x \leq \varphi^{-1}(-B), 0 \leq y \leq 1\}, \\
E_8 &= \{(x, y): -\infty < x \leq \varphi^{-1}(-B), \varphi^{-1}(-B) \leq y \leq 0\}, \\
E_9 &= \{(x, y): A[\varphi(y) + B] \leq x \leq 0, -\infty < y \leq \varphi^{-1}(-B)\}, \\
E_{9-} &= E_9 \cap \{(x, y): -\infty < x \leq \varphi^{-1}(-B), -\infty < y \leq \varphi^{-1}(-B)\}, \\
E_{9+} &= E_9 \cap \{(x, y): -\infty < x \leq \varphi^{-1}(-B), \varphi^{-1}(-B) \leq y \leq 0\}, \\
E_{10} &= \{(x, y): 0 \leq x < +\infty, -\infty < y \leq \varphi^{-1}(-B)\}, \\
I_B^2 &= \{(x, y): \varphi^{-1}(-B) \leq x \leq 0, \varphi^{-1}(-B) \leq y \leq 0\}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Вычисляя образы E_i и I_B^2 , нетрудно убедиться, что при $AB > 1$

$$\begin{aligned}
F(E_1) &\subset E_2 \cup E_3, \quad F(E_2) \subset E_4 \cup E_5, \quad F(E_3) \subset E_6 \cup E_7, \quad F(E_4) \subset E_8 \cup I_B^2, \\
F(E_5) &\subset E_{10}, \quad F(E_6) = E_0, \quad F(E_7) \subset E_9, \quad F(E_8) = E_{10}, \quad F(E_{9-}) \subset E_{10}, \\
F(E_{9+}) &\subset E_8 \cup I_B^2, \quad F(E_0) \subset E_4 \cup E_5 \cup E_6 \cup E_7, \quad F(I_B^2) \subset E_8 \cup I_B^2, \\
F(E_{10}) &\subset E_5 \cup E_7, \quad F(I^2) \subset I^2 \cup E_1.
\end{aligned} \tag{6}$$

Видимый разрыв образа множества E_9 возникает в связи с некомпактностью E_9 и сильной невязимнооднозначностью отображения F .

Отметим, что соотношения (6), как и разбиение $\mathbb{R}^2$ на I^2 , I_B^2 и E_i , выписаны с учетом того, что $AB > 1$. В самом деле, если A и B такие, что $A[1 + B] < 1$, то $E_1 = \emptyset$, а E_2 и E_3 описываются другими формулами. С другой стороны, при A, B : $ABf(\varphi^{-1}(-B)) > \varphi^{-1}(-B)$ последние включения (6) упрощаются, приобретая вид

$$F(E_0) \subset E_6, \quad F(I^2) \subset I^2, \quad F(I_B^2) \subset I_B^2, \tag{7}$$

Рис. 5

который при A и B : $ABf(\varphi^{-1}(-B)) < \varphi^{-1}(-B)$, $AB < 1$, сменяется на

$$F(E_0) \subset E_6 \cup E_7, \quad F(I^2) \subset I^2, \quad F(I_B^2) \subset I_B^2 \cup E_8. \quad (8)$$

ЛЕММА 5. 1) Если A, B : $AB > 1$, то $f'(t) > 1$ и $f(t) < t$ при $t < 0$.

2) Если A, B : $ABf(\varphi^{-1}(-B)) > \varphi^{-1}(-B)$, то $ABf'(0) < 1$, $ABf(t) > t$ при $\varphi^{-1}(-B) < t < 0$, $f'(t) > 1$ при $t < \varphi^{-1}(-B)$ и $ABf(t) < t$ при $t > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Из $f''(t) \leq 0$ и $f'(q) = 0$ получаем, что $f'(\bar{t}) > f'(\tilde{t})$ при $-\infty < \bar{t} < \tilde{t} < q$. Применение на $[0, q]$ теоремы о среднем к $f''(t)$ с учетом $f(0) = 0$, $f(q) = 1$ и $0 < q < 1$ показывает, что $f'(0) > 1$. Следовательно, $f'(t) > 1$ при $t < 0$. Вторичное применение теоремы о среднем к $f'(t)$ при $t < 0$ дает $f(t) < t$.

2) Предположим от противного, что справедливы условия 2), но $ABf'(0) > 1$. Тогда, используя теорему о среднем для $f''(t)$ на $(-\infty, 0)$, видим, что $ABf'(t) > 1$ при $t < 0$. Вторично применяя теорему о среднем к $ABf'(t)$, получаем, что $ABf(t) < t$ при $t < 0$, что противоречит условию $ABf(\varphi^{-1}(-B)) > \varphi^{-1}(-B)$. Таким образом, $0 < ABf'(0) < 1$ и, значит, существует окрестность 0, в которой график функции $z(t) = ABf(t)$ левее $t = 0$ лежит выше диагонали $z = t$, а правее $t = 0$ — ниже ее. Поскольку $f''(t) < 0$, $f'(q) = 0$, то $ABf'(t) < ABf'(0) < 1$ для $t > 0$, и, следовательно, правее $t = 0$ нет точек пересечения графика $z(t) = ABf(t)$ с диагональю. Поэтому $ABf(t) < t$ при $t > 0$.

Обозначим $\tilde{t} < 0$ точку пересечения $z(t) = ABf(t)$ с $z = t$. Ясно, что $ABf'(\tilde{t}) > 1$ и $ABf'(\tilde{t}) < ABf'(t)$ при $t < \tilde{t}$. Поэтому левее $t = \tilde{t}$ графики функций $z = t$ и $z(t) = ABf(t)$ также не имеют точек пересечения. Таким образом, $\varphi^{-1}(-B) \in [\tilde{t}, 0)$ и $ABf(t) > t$ для $t \in (\varphi^{-1}(-B), 0)$.

ЛЕММА 6. Если $ABf(\varphi^{-1}(-B)) > \varphi^{-1}(-B)$, то $(0, 0)$ — аттрактор (сток).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Собственные числа DF в $(0, 0)$ — это корни уравнения $\mu^2 = ABf'(0)$. По лемме 5 $ABf'(0) < 1$. Следовательно, $|\mu_i| < 1$, $i = 1, 2$.

ЛЕММА 7. Если $AB > 1$, то $(0, 0)$ — репеллер (источник).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Собственные числа DF в $(0, 0)$ – это корни уравнения $\mu^2 = ABf'(0)$. Так как $ABf'(0) > 1$, то $|\mu_i| > 1$, $i = 1, 2$.

Из [6] видно, что $F^j(z) \notin \{(x, y): x > 0, y > 0\}$ для любой $z \in \bigcup_{j=1}^3 E_i$ и всех $j > 1$. Таким образом, $NW(F) \cap (\{(x, y): x > 0, y > 0\} \setminus I^2) = \emptyset$. Вычисления показывают также, что $F^j(E_4) \subset E_5 \cup E_7 \cup E_8 \cup E_9 \cup E_{10} \cup I_B^2$ для $j > 1$ и, значит, $F^j(\text{Int}(E_4)) \cap E_4 = \emptyset$. Поэтому $NW(F) \cap \text{Int}(E_4) = \emptyset$. Что же касается множеств E_0 и E_6 , то, учитывая, что $F^j(E_i) \cap \text{Int}(E_0) = \emptyset$ и $F^j(E_i) \cap \text{Int}(E_6) = \emptyset$ для $j \in \mathbb{Z}_+$ и $i \neq 0, i \neq 6$, и принимая во внимание, что $F(E_6) \subset E_0$ и $F(E_0) \subset \bigcup_{k=4}^7 E_k$, можно показать так же, как это сделано, например, ниже в лемме 10, что существует компактное инвариантное множество $\Sigma \subset E_0 \cup E_6$ такое, что $F(\Sigma \cap E_0) = \Sigma \cap E_6$, $F(\Sigma \cap E_6) = \Sigma \cap E_0$.

Изучим $F(E_0)$. Обозначим $\Pi_0 \stackrel{\text{df}}{=} E_0 \cap F(K_y)$ и рассмотрим $F(\Pi_0)$. Легко убедиться в том, что это множество соединяет точки $(ABf(\varphi^{-1}(-B)), 0)$ и $(0, AB)$ и взаимно однозначно проектируется на каждую из осей координат. Поэтому если $A, B: ABf(\varphi^{-1}(-B)) > \varphi^{-1}(-B)$ и, следовательно, $AB < 1$, то $F(\Pi_0) \subset E_6$. А поэтому (ввиду $F(E_6) = E_0$) $F^2(E_0) \subset E_0$ и $F^2(E_6) \subset E_6$. Если же A и B такие, что точка $(\varphi^{-1}(-B), 1)$ лежит выше $F(\Pi_0)$ – графика кривой $x = Af(\varphi(y) + B)f(\varphi^{-1}(-B + y/A))$, то $F(E_0) \supset E_6$, и поэтому $F^2(E_0) \supset E_0$, $F^2(E_6) \supset E_6$.

ЛЕММА 8. Если $AB \geq 1$, то для любой $z \in E_0 \setminus ((x = 0) \cup (y = 0))$ существует натуральное $i = i(z)$ такое, что $F^{2i}(z) \in E_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т.е. что существует точка $z_0 = (x_0, y_0) \in E_0$: $0 < x_0 \leq A[\varphi(y_0) + B]$, $\varphi^{-1}(-B) \leq y_0 < 0$, такая, что $z_{2i} = (x_{2i}, y_{2i}) \stackrel{\text{df}}{=} F^{2i}(z_0) \in E_0$ для любого натурального i . Выражая координаты $z_{2(i+1)}$ через координаты z_{2i} и $z_{2(i+1)}$, получаем

$$x_{2(i+1)} = A[\varphi(y_{2(i+1)}) + B]f(x_{2i}), \quad y_{2(i+1)} = A[\varphi(x_{2i}) + B]f(y_{2i}). \quad (9)$$

По предположению для любого i $x_{2i} > 0$ и $\varphi^{-1}(-B) \leq y_{2i} < 0$. Поэтому $A[\varphi(x_{2i}) + B] > AB > 1$. И так как согласно лемме 5 $f(y_{2i}) < y_{2i}$, то получается, что $y_{2(i+1)} = A[\varphi(x_{2i}) + B]f(y_{2i}) < ABf(y_{2i}) < AB y_{2i}$. Таким образом, $y_{2i} < (AB)^i y_0$ и, значит, существует i такое, что $F^{2i}(z_0) \notin E_0$. Следовательно, наше предположение неверно.

Ввиду $E_0 = F(E_6)$ аналогичное утверждение справедливо и для E_6 .

ЛЕММА 9. Если $ABf(\varphi^{-1}(-B)) > \varphi^{-1}(-B)$, то для любой $z \in E_0 \cup E_6$ имеем $\omega(z) \subset (x = 0) \cup (y = 0)$, где $\omega(z)$ – ω -предельное множество точки z .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $z \in (x = 0) \cup (y = 0)$, то $\omega(z) \subset (x = 0) \cup (y = 0)$ в силу инвариантности осей координат. Пусть $z \in E_0 \setminus [(x = 0) \cup (y = 0)]$. Рассмотрим $z_{2i} = F^{2i}(z)$. Выражая ее координаты x_{2i} , y_{2i} через координаты $z_{2(i-1)}$ и z_{2i} , получаем

$$x_{2i} = A[\varphi(y_{2i}) + B]f(x_{2(i-1)}), \quad y_{2i} = A[\varphi(x_{2(i-1)}) + B]f(y_{2(i-1)}). \quad (10)$$

Поскольку для любого i $z_{2i} \in E_0$ и, значит, $\varphi^{-1}(-B) \leq y_{2i} < 0$ и $x_{2i} > 0$, x_{2i} можно оценить так:

$$0 < x_{2i} = A[\varphi(y_{2i}) + B]f(x_{2(i-1)}) < ABf(x_{2(i-1)}) < ABx_{2(i-1)} < x_{2(i-1)}.$$

Таким образом, x_{2i} — монотонно убывающая, ограниченная снизу 0 последовательность. Очевидно, $\lim_{i \rightarrow \infty} x_{2i} = 0$.

Рассматривая $z_{2i+1} = F(z_{2i}) \in E_6$ и учитывая, что $y_{2i+1} = x_{2i}$, видим, что $\lim_{i \rightarrow \infty} y_{2i+1} = 0$. Следовательно, $\omega(z) \subset (x = 0) \cup (y = 0)$ для любой точки $z \in E_0 \cup E_6$.

ЛЕММА 10. *Если $ABf(\varphi^{-1}(-B)) < \varphi^{-1}(-B)$ и $(\varphi^{-1}(-B), 1) \notin F(E_0)$, то существует компактное инвариантное относительно F множество $\Sigma \subset E_0 \cup E_6$: $\Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_6$, где $\Sigma_i \stackrel{\text{df}}{=} \Sigma \cap E_i$, такое, что $F(\Sigma_0) = \Sigma_6$ и $F(\Sigma_6) = \Sigma_0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $F(E_6) = E_0$, то из условия леммы следует, что $F^2(E_0) \not\subset E_0$ и $F^2(E_6) \not\subset E_6$. Обозначим $\Theta \stackrel{\text{df}}{=} F^2(E_6) \setminus E_6$ и рассмотрим $E_6 \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} F^{-2j}(\Theta)$. Очевидно, что

$$F^2 \left(E_6 \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} F^{-2j}(\Theta) \right) \subset E_6 \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} F^{-2j}(\Theta) \subset E_6.$$

Тогда $\Sigma_6 = \bigcap_{i=1}^{\infty} F^{2i} \left(E_6 \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} F^{-2j}(\Theta) \right)$ — максимальное компактное инвариантное относительно F^2 подмножество E_6 , а $\Sigma_0 = F(\Sigma_6)$ — максимальное компактное инвариантное относительно F^2 подмножество E_0 .

Рассмотрим I_B^2 . Так как F переводит оси координат друг в друга, прямую $(x = \varphi^{-1}(-B))$ отображает в точку $(0, \varphi^{-1}(-B))$, а отрезок $\{(x, y) : \varphi^{-1}(-B) \leq x \leq 0, y = \varphi^{-1}(-B)\}$ — в дугу $\{(x, y) : x = A[\varphi(y) + B]f(\varphi^{-1}(-B)), \varphi^{-1}(-B) \leq y \leq 0\}$, то F -образом I_B^2 является криволинейный прямоугольный треугольник с катетами на осях координат $x = 0$ и $y = 0$ и “гипотенузой”, соединяющей точки $(0, \varphi^{-1}(-B))$ и $(ABf(\varphi^{-1}(-B)), 0)$. Ввиду определения $\varphi(t)$ и $f(t)$ эта гипотенуза $\{(x, y) : x = AB[\varphi(y) + B]f(\varphi^{-1}(-B)), \varphi^{-1}(-B) \leq y \leq 0\}$ взаимно однозначно проектируется на оси координат, и потому $(0, \varphi^{-1}(-B))$ — самая левая точка $F(I_B^2)$, а $(ABf(\varphi^{-1}(-B)), 0)$ — самая нижняя его точка.

СЛЕДСТВИЕ 5. *Если $ABf(\varphi^{-1}(-B)) > \varphi^{-1}(-B)$, то $F(I_B^2) \subset I_B^2$.*

Отметим между прочим, что при $ABf(\varphi^{-1}(-B)) = \varphi^{-1}(-B)$ точки $(0, \varphi^{-1}(-B))$ и $(\varphi^{-1}(-B), 0)$ образуют периодическую периода 2 орбиту отображения F .

ЛЕММА 11. *Если $ABf(\varphi^{-1}(-B)) > \varphi^{-1}(-B)$, то $\omega(z) = (0, 0)$ для любой $z \in I_B^2$, где $\omega(z)$ — ω -предельное множество точки z .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z_0 = (x_0, y_0) \in \text{Int}(I_B^2)$. Заметим прежде всего, что для любого натурального j $z_j = F^j(z_0) \in I_B^2$. Далее, для координат итераций $F^{2j}(z_0)$ выполняются рекуррентные соотношения (10), из которых (согласно условию леммы с учетом леммы 5) вытекает, что справедливы оценки

$$x_{2j+2} = A[\varphi(y_{2j+2}) + B]f(x_{2j}) \geq ABf(x_{2j}) > x_{2j}.$$

Следовательно, x_{2j} – монотонно возрастающая, ограниченная сверху 0 последовательность. Очевидно, $\lim_{j \rightarrow \infty} x_{2j} = 0$ ($= \lim_{j \rightarrow \infty} y_{2j+1}$ ввиду $y_{2j+1} = x_{2j}$). Таким образом, $\omega(z_0) \subset [(x = 0) \cup (y = 0)] \cap I_B^2$. Но динамика F на $[(x = 0) \cup (y = 0)] \cap I_B^2$ такова, что $\omega(\tilde{z}) = (0, 0)$ для любой $\tilde{z} \in [(x = 0) \cup (y = 0)] \cap I_B^2$. Поэтому $\omega(z_0) = (0, 0)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. При $ABf(\varphi^{-1}(-B)) < \varphi^{-1}(-B)$ лемма 11 справедлива на $I_B^2 \setminus [(0, \varphi^{-1}(-B) \cup (\varphi^{-1}(-B), 0)]$.

Пусть $A, B: ABf(\varphi^{-1}(-B)) < \varphi^{-1}(-B)$. Обозначим $\Delta_B = F(I_B^2) \setminus I_B^2$ и рассмотрим последовательность множеств

$$\Delta_B^{(n)} \stackrel{\text{df}}{=} F^{-1}(\Delta_B^{(n-1)} \cap [F(I_B^2) \cap I_B^2]),$$

где $\Delta_B^{(0)} = F^{-1}(\Delta_B)$ и $n \in \mathbb{Z}_+$. Очевидно, что $\Delta_B^{(i)} \cap \Delta_B^{(j)} = \emptyset$ при $i \neq j$. В самом деле, если это не так и существуют $i, j: j \geq i + 1$ и $\Delta_B^{(i)} \cap \Delta_B^{(j)} \neq \emptyset$, то $F^{(i+1)}(\Delta_B^{(i)} \cap \Delta_B^{(j)}) \neq \emptyset$. Но, с другой стороны,

$$F^{(i+1)}(\Delta_B^{(i)} \cap \Delta_B^{(j)}) \subset F^{(i+1)}(\Delta_B^{(i)}) \cap F^{(i+1)}(\Delta_B^{(j)}) = \Delta_B^{(j-i-1)} \cap \Delta_B = \emptyset,$$

так как $\Delta_B^{(j-i-1)} \subset I_B^2$ и $\Delta_B \cap I_B^2 = \emptyset$.

Положим $\Sigma^- \stackrel{\text{df}}{=} (F(I_B^2) \cap I_B^2) \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} \Delta_B^{(n)}$. Ясно, что Σ^- – замкнутое положительно инвариантное множество, т.е. $F(\Sigma^-) \subset \Sigma^-$. Положим

$$\Sigma_+^- \stackrel{\text{df}}{=} \bigcap_{m=1}^{\infty} F^m(\Sigma^-).$$

Очевидно, $F: \Sigma_+^- \rightarrow \Sigma_+^-$ – гомеоморфизм.

ЛЕММА 12. Если $AB > 1$, то $|F^j(z)| \rightarrow \infty$ при $j \rightarrow \infty$ для любой $z \in ((x = 0) \cup (y = 0)) \cap (I_B^2 \setminus (0, 0))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду $F((x = 0)) \subset (y = 0)$ и $F((y = 0)) = (x = 0)$ достаточно рассмотреть случай, когда $z = (x, 0)$, $\varphi^{-1}(-B) \leq x < 0$. Тогда из рекуррентных соотношений $x_{2j} = A[\varphi(y_{2j}) + B]f(x_{2j-2})$, $y_{2j} = A[\varphi(x_{2j-2}) + B]f(y_{2j-2})$ для координат итераций $F^j(z)$ точки z получается, что для любого j $y_{2j} = 0$, а x_{2j} (с учетом леммы 5) оценивается так:

$$x_{2j} = ABf(x_{2j-2}) < ABx_{2j-2} < (AB)^j x.$$

Откуда $\lim_{j \rightarrow \infty} x_{2j} < \lim_{j \rightarrow \infty} (AB)^j x = -\infty$. И поскольку $y_{2j+1} = x_{2j}$, то $\lim_{j \rightarrow \infty} y_{2j+1} = -\infty$. Таким образом, итерации $F^{2j}(z)$ и $F^{2j+1}(z)$ уходят на “минус бесконечность” по прямым $(y = 0)$ и $(x = 0)$ соответственно.

Отметим, что $NW(F) \cap \text{Int}(I_B^2) \neq \emptyset$, поскольку при $AB > 1$ в $\text{Int}(I_B^2)$ есть точка $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{x}): F(\bar{z}) = \bar{z}$ и $\varphi^{-1}(-B) < \bar{x} < 0$.

ЛЕММА 13. Если A, B : $ABf(\varphi^{-1}(-B)) < \varphi^{-1}(-B)$ и $AB < 1$, то в I_B^2 существует периодическая периода 2 орбита, точки которой стремятся к $(0, 0)$, если $ABf'(0) \rightarrow 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, как уже отмечалось, оси координат инвариантны относительно F^2 , причем действие на них F^2 эквивалентно действию на прямой отображения $t \rightarrow ABf(t)$. Нетрудно проверить, что в силу условия леммы функция $z(t) = ABf(t)$ на $(\varphi^{-1}(-B), 0)$ пересекает диагональ. Если $\tilde{t}$: $ABf(\tilde{t}) = \tilde{t}$, $\varphi^{-1}(-B) < \tilde{t} < 0$, то точки $(0, \tilde{t})$, $(\tilde{t}, 0)$ принадлежат I_B^2 и образуют периодическую периода 2 орбиту отображения F .

Рассмотрим $Z_j \stackrel{\text{df}}{=} F^j((x = \varphi^{-1}(-B)))$, j натуральное.

Если A, B : $ABf(\varphi^{-1}(-B)) > \varphi^{-1}(-B)$, то из лемм 9 и 11 вытекает, что $\omega(z) \subset [(x = 0) \cup (y = 0)] \cap (E_0 \cup E_6)$ для произвольной $z \in E_0 \cup E_6 \cup I_B^2$. С учетом динамики действия F на полуосях $\{(x, y): x = 0, y < 0\}$ и $\{(x, y): x < 0, y = 0\}$ отсюда нетрудно вывести $\omega(z) \subset \{(x, y): x \geq 0, y \geq 0\}$. И поскольку согласно лемме 6 $(0, 0)$ – устойчивый сток, то из сказанного вытекает существование такой $\varepsilon > 0$, что для любой $\tilde{z} \in U_\varepsilon((E_0 \cup E_6) \cap I_B^2)$ $\omega(\tilde{z}) = (0, 0)$. А потому $[U_\varepsilon((E_0 \cup E_6) \cap I_B^2) \setminus (0, 0)] \cap NW(F) = \emptyset$. Следовательно, в этом случае $F^j((x = \varphi^{-1}(-B))) \in \mathbb{R}^2 \setminus NW(F)$.

Если же A, B : $ABf(\varphi^{-1}(-B)) = \varphi^{-1}(-B)$, то для любого натурального j

$$F^{2j-1}((x = \varphi^{-1}(-B))) = (0, \varphi^{-1}(-B)), \quad F^{2j}((x = \varphi^{-1}(-B))) = (\varphi^{-1}(-B), 0)$$

и, значит, $F^j((x = \varphi^{-1}(-B)))$ принадлежит $\text{Per}(F)$ – множеству периодических точек F .

ТЕОРЕМА 2. Если $ABf(\varphi^{-1}(-B)) < \varphi^{-1}(-B)$, то $F^j((x = \varphi^{-1}(-B))) \in NW(F)$.

Прежде чем приступить к доказательству теоремы, изучим график множества $F^{-1}((x = \varphi^{-1}(-B)))$. Согласно определению F обратное к нему отображение F^{-1} задается формулами

$$F^{-1}: (x, y) \rightarrow \left(y, f^{-1}\left(\frac{x}{A[\varphi(y) + B]}\right) \right), \quad (11)$$

где f^{-1} обозначает определенную на $(-\infty, 1]$ обратную к f функцию. Подставляя в (11) $x = \varphi^{-1}(-B)$, $y = t$ и рассматривая значения аргумента функции f^{-1} , видим, что за исключением точки $(\varphi^{-1}(-B + \varphi^{-1}(-B)/A), q)$ график $F^{-1}((x = \varphi^{-1}(-B)))$ располагается вне полосы $\{(x, y): \varphi^{-1}(-B + \varphi^{-1}(-B)/A) \leq x \leq \varphi^{-1}(-B), -\infty < y < +\infty\}$. Выше $(x = \varphi^{-1}(-B))$ его компоненты находятся вне полуполосы $\{(x, y): \varphi^{-1}(-B) \leq x < +\infty, 0 \leq y \leq 1\}$. С ростом x от $\varphi^{-1}(-B)$ до $+\infty$ значения координаты y точек левой компоненты графика возрастают от $-\infty$ до -0 , а правой – убывают от $+\infty$ до $1+0$. Ниже $(x = \varphi^{-1}(-B + \varphi^{-1}(-B)/A))$ обе компоненты $F^{-1}((x = \varphi^{-1}(-B)))$ сливаются в одну кривую в точке $(\varphi^{-1}(-B + \varphi^{-1}(-B)/A), q)$, и при $x \rightarrow -\infty$ значение координаты y точек левой и правой ветвей графика монотонно сходятся соответственно к значениям $+0$ и $1-0$. На рис. 10 схематически представлено взаимное расположение компонент множества $F^{-1}((x = \varphi^{-1}(-B)))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть $\varepsilon > 0$. Обозначим x_j, y_i координаты точки $Z_j \stackrel{\text{df}}{=} F^j((x = \varphi^{-1}(-B)))$. Рассмотрим $F^i(U_\varepsilon(Z_1))$, $i = 1, 2, 3, \dots$. Возможна альтернатива:

а) существует $\underline{i} \in \mathbb{Z}_+$: $F^{\underline{i}}(U_\varepsilon(Z_1)) \cap F^{-1}((x = \varphi^{-1}(-B))) \neq \emptyset$;

б) такого $\underline{i}$ нет.

Если имеет место а), то $Z_j \in NW(F)$, $j = 1, 2, 3, \dots$. Действительно, а) означает существование $\tilde{Z} \in U_\varepsilon(Z_1)$: $F^{\underline{i}}(\tilde{Z}) \in F^{-1}((x = \varphi^{-1}(-B)))$. А потому $F^{\underline{i}+2}(\tilde{Z}) = Z_1$ и $F^{\underline{i}+j+1}(\tilde{Z}) = Z_j$.

Предположим, что имеет место б). Используя рекуррентные соотношения (10), связывающие координаты точек Z_{2j+2} и Z_{2j} , легко проверить, что при $ABf(\varphi^{-1}(-B)) < \varphi^{-1}(-B)$ последовательность Z_{2j} такова, что $y_{2j} = 0$, а $\lim_{j \rightarrow \infty} x_{2j} = -\infty$. Далее, рассматривая образы верхней и нижней полукрестностей точки Z_1 , нетрудно заметить, что F^4 отображает их в ту же полуплоскость, где и сами они находятся. Именно, если

$$U_\varepsilon^+ \stackrel{\text{df}}{=} F[(U_\varepsilon(Z_1)) \cap \{(x, y): x \geq 0\}], \quad U_\varepsilon^- \stackrel{\text{df}}{=} F[(U_\varepsilon(Z_1)) \cap \{(x, y): x \leq 0\}],$$

то $F^{4j}(U_\varepsilon^+) \subset F(\{(x, y): x \geq 0\})$, $F^{4j}(U_\varepsilon^-) \subset F(\{(x, y): x \leq 0\})$. Поэтому в силу существования компоненты графика $F^{-1}((x = \varphi^{-1}(-B)))$, которая при $x \rightarrow -\infty$ стремится к $(y = 0)$, предположение б) может выполняться только в том случае, если F^{2j} -образы множества $U_\varepsilon^+ \cup U_\varepsilon^-$ располагаются левее ее. Покажем, что это невозможно.

В самом деле, если все $F^{2j}(U_\varepsilon^+ \cup U_\varepsilon^-)$ лежат левее указанной компоненты множества $F^{-1}((x = \varphi^{-1}(-B)))$, то для любого $\gamma > 0$ существует J такое, что $F^{2j}(U_\varepsilon^+ \cup U_\varepsilon^-) \subset U_\gamma((y = 0))$ для произвольного $j > J$. Действительно, правые полукрестности множеств $F^{2j}(U_\varepsilon^+ \cup U_\varepsilon^-)$ принадлежат $U_\gamma((y = 0))$ в силу предположения б), а левые потому, что в противном случае правые полукрестности также будут выходить за пределы $U_\gamma((y = 0))$.

В самом деле, зафиксируем (пока произвольным образом) некоторое $\zeta > 1$ и выберем натуральное $J = J(\zeta)$ так, чтобы для любой $z = (x, y) \in U_\varepsilon^+ \cup U_\varepsilon^-$

$$\min\{A|\varphi(x) + B|f'(0), A|\varphi(x) + B|\} > \zeta.$$

Ввиду $\varphi'' \leq 0$ и $\varphi'(0) > 0$ это сделать можно. Допустим, что для некоторого $\hat{j} > J$ существует $\hat{Z} = (\hat{x}, \hat{y}) \in F^{2\hat{j}}(U_\varepsilon^+ \cup U_\varepsilon^-)$ такая, что $\hat{y} < -\gamma$, и рассмотрим $\hat{y}_2$ – значение координаты y точки $F^2(\hat{Z})$. Согласно (10) $\hat{y}_2 = A[\varphi(\hat{x}) + B]f(\hat{y})$, что по теореме о среднем значении дает $\hat{y}_2 = A[\varphi(\hat{x}) + B]f'(\theta\hat{y})\hat{y}$, где θ , $0 < \theta < 1$, – некоторая константа. Учитывая, что для любого $t < 0$ $f'(t) > f'(0)$, а также то, что $\hat{x} < x$ для любой $(x, y) \in U_\varepsilon^+ \cup U_\varepsilon^-$, окончательно получаем, что $\hat{y}_2 > A|\varphi(\hat{x}) + B|f'(0)\gamma > \zeta\gamma$.

Покажем теперь существование окрестности точки $Z_{2\hat{j}}$ такой, что под действием итераций отображения F^2 ее точки равномерно “уходят на бесконечность”.

Пусть $0 < \gamma < -\varphi^{-1}(-B)$ такое, что $A[\varphi(-\gamma) + B]f(\varphi^{-1}(-B)) < \varphi^{-1}(-B)$. (Из $Bf(\varphi^{-1}(-B)) < \varphi^{-1}(-B)$ и $\varphi(0) = 0$ ввиду непрерывности $\varphi(t)$ вытекает, что такое γ существует.) Зафиксируем $\sigma > 0$ такое, что

$$\hat{U}_\sigma \stackrel{\text{df}}{=} U_\sigma(Z_{2\hat{j}}) \subset F^{2\hat{j}}(U_\varepsilon^+ \cup U_\varepsilon^-) \cap U_\gamma((y = 0)),$$

и предположим, что $\zeta = A[\varphi(-\gamma) + B]f(\varphi^{-1}(-B))/\varphi^{-1}(-B)$. Оценим значение координаты x точки $z_2 = (x_2, y_2) = F^2(z)$, где $z = (x, y) \in \widehat{U}_\sigma$.

Так как (согласно выбору $\hat{j}$) $|y_2| < \gamma$ для любой $z_2 \in F^2(\widehat{U}_\sigma)$, то

$$x_2 = A[\varphi(y_2) + B]f(x) < A[\varphi(-\gamma) + B]f(x).$$

Чтобы произвести дальнейшие оценки, заметим, что в силу $f''(t) \leq 0$ угол наклона хорды, соединяющей точки $(0, 0)$ и $(A[\varphi(-\gamma) + B]f(\varphi^{-1}(-B)), \varphi^{-1}(-B))$ графика функции $T(t) = A[\varphi(-\gamma) + B]f(t)$, меньше угла наклона любой хорды, которая соединяет точки $(0, 0)$ и $(A[\varphi(-\gamma) + B]f(x), x)$ данного графика при $x < \varphi^{-1}(-B)$. Другими словами, справедливо соотношение

$$\frac{A[\varphi(-\gamma) + B]f(\varphi^{-1}(-B)) - 0}{\varphi^{-1}(-B) - 0} < \frac{A[\varphi(-\gamma) + B]f(x) - 0}{x - 0}.$$

Следовательно, $A[\varphi(-\gamma) + B]f(x) < xA[\varphi(-\gamma) + B]f(\varphi^{-1}(-B))/\varphi^{-1}(-B)$ при $x < \varphi^{-1}(-B)$. Откуда получается, что $x_2 < \zeta x$. Аналогичное соотношение между значениями координаты x имеет место для точек множеств $F^{2i}(\widehat{U}_\sigma)$ и $F^{2i+2}(\widehat{U}_\sigma)$ для любых натуральных i .

Таким образом, если справедливо предположение о равномерной малости координаты y точек $F^{2i}(z)$, $z \in \widehat{U}_\sigma$, то из него как следствие вытекает что значения их x -координат (равномерно по i и по z) увеличиваются по модулю не менее чем в ζ раз. В этом смысле $\widehat{U}_\sigma$ под действием F^{2i} равномерно уходит по оси x на “минус бесконечность”.

Оценим, как должна при этом изменяться величина координаты y точек $z \in \widehat{U}_\sigma^- \stackrel{\text{df}}{=} \widehat{U}_\sigma \cap \{(x, y) : y < 0\}$. В связи с тем, что F^4 отображает $\widehat{U}_\sigma^-$ в ту же полуплоскость, где находится и $\widehat{U}_\sigma^-$, удобно рассматривать и оценивать не y_2 , а y_4 — значение координаты y точки $F^4(z)$. Выражая y_4 через x_2, y_2 , а затем подставляя в полученное выражение вместо y_2 его выражение (10) через x и y , получаем, что

$$y_4 = A[\varphi(x_2) + B]f(A[\varphi(x) + B]f(y)),$$

где x, y и x_2, y_2 — координаты соответственно z и $F^2(z)$. Последовательно применяя дважды теорему о среднем значении к данному выражению и учитывая при этом, что значение координаты y для точек z на оси x равно 0, получаем, что

$$y_4 = -A^2[\varphi(x_2) + B][\varphi(x) + B]f'(\tilde{\theta}A[\varphi(x) + B])f'(\hat{\theta}y)(-y),$$

где $\tilde{\theta}, \hat{\theta}$: $0 < \tilde{\theta} < 1$, $0 < \hat{\theta} < 1$, — некоторые константы. Так как $A[\varphi(x) + B] < 0$, $y < 0$, то $f'(\tilde{\theta}[\varphi(x) + B]A) > f'(0)$, $f'(\hat{\theta}y) > f'(0)$, а потому

$$y_4 < -[Af'(0)]^2[\varphi(x_2) + B][\varphi(x) + B]|y| < \zeta^2|y|$$

(поскольку согласно выбору J, ζ и окрестности $U_\varepsilon^+ \cup U_\varepsilon^-$ $|A[\varphi(x_2) + B]f'(0)| > \zeta$ и $|A[\varphi(x) + B]f'(0)| > \zeta$).

Таким образом, под действием F^4 величина координаты y точки $F^4(z)$ по модулю не менее чем в ζ^2 раз больше по сравнению с модулем координаты y точки z .

Аналогично, величина координаты y точки $F^8(z)$ по модулю не менее чем в ζ^2 раз больше модуля координаты y точки $F^4(z)$ и т.д. Поэтому существует i такое, что модуль величины координаты y точки $F^{4i}(z)$ больше $|\zeta^{2i}y|$ и, как следствие, больше γ . А это значит, что $F^{4i}(\widehat{U}_\sigma) \cap F^{-1}((x = \varphi^{-1}(-B))) \neq \emptyset$. Следовательно, предположение б) неверно.

ЛЕММА 14. Если $ABf(\varphi^{-1}(-B)) \neq \varphi^{-1}(-B)$, то прообразы прямой $(x = \varphi^{-1}(-B))$ не пересекаются.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. От противного допустим, что существуют $1 \leq i < j$ и $z \in F^{-j}((x = \varphi^{-1}(-B))) \cap F^{-i}((x = \varphi^{-1}(-B)))$. По определению тогда $F^{j+1}(z) = (0, \varphi^{-1}(-B))$ и $F^{i+1}(z) = (0, \varphi^{-1}(-B))$. Ввиду $F^{j+1}() = F^{j-i}(F^{i+1}())$ это значит, что $(0, \varphi^{-1}(-B))$ – периодическая периода $j - i$ точка F . Но, как было показано, $(0, \varphi^{-1}(-B)) \notin \text{Per}(F)$, если $ABf(\varphi^{-1}(-B)) \neq \varphi^{-1}(-B)$. Следовательно, предположение неверно.

Обозначим $E_{11} = \{(x, y): x \leq -\Xi, y \geq \Xi\}$, $E_{13} = \{(x, y): x \geq \Xi, y \leq -\Xi\}$, $E_{12} = C_F \cap \{(x, y): x \leq -\Xi, y \leq -\Xi\}$, $E_{14} = C_F \cap \{(x, y): x \geq \Xi, y \leq \Xi\}$. При $\Xi > \max\{1, |\varphi^{-1}(-B)|\}$ имеем $E_{11} \subset E_5$, $E_{12} \subset E_{9-}$, $E_{13} \subset E_{10}$, $E_{14} \subset E_3$.

Пусть $\Xi > \max\{1, |\varphi^{-1}(-B)|\}$.

ЛЕММА 15. Если $\lim_{t \rightarrow \infty} A[\varphi(t) + B]f'(t) < -1$, то существует $\bar{\Xi}$ такое, что $F(E_{14}) \subset E_{11}$ при $\Xi \geq \bar{\Xi}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $\hat{t}$: $A[\varphi(\hat{t}) + B]f'(\hat{t}) < -1$, и положим

$$\bar{\Xi} = (A[\varphi(\hat{t}) + B]f'(\hat{t})) / (1 + A[\varphi(\hat{t}) + B]f'(\hat{t})).$$

Тогда для произвольного $t > \bar{\Xi}$

$$A[\varphi(\hat{t}) + B]f'(\hat{t})(t - \hat{t}) < -t.$$

Но из определения функций φ и f вытекает, что $A[\varphi(\bar{t}) + B]f'(\bar{t}) < A[\varphi(\hat{t}) + B]f'(\hat{t})$ для любых $\bar{t}, \bar{\hat{t}} > \hat{t}$.

Пусть $(x, y) \in E_{14}$. Оценивая x -координату точки $F((x, y)) = (\bar{x}, \bar{y})$, имеем

$$\begin{aligned} \bar{x} &= A[\varphi(x) + B]f(y) < A[\varphi(\bar{\Xi}) + B]f(\bar{\Xi}) < A[\varphi(\hat{t}) + B]f(\hat{t}) \\ &+ A[\varphi(\hat{t}) + B]f'(\hat{t} + \beta[\bar{\Xi} - \hat{t}])(\bar{\Xi} - \hat{t}) < A[\varphi(\hat{t}) + B]f'(\hat{t})(\bar{\Xi} - \hat{t}) < -\bar{\Xi}. \end{aligned}$$

И так как $\bar{y} = x > \bar{\Xi}$, то $F((x, y)) \in E_{11}$.

ЛЕММА 16. Существует $\bar{\Xi} > 0$ такое, что $F(E_{11}) \subset E_{13}$ при $\Xi > \bar{\Xi}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $\bar{\Xi}$ так, что $f(\bar{\Xi}) < -\bar{\Xi}$ и $A[\varphi(-\bar{\Xi}) + B] < -2$. Это сделать можно, поскольку из определения функций φ и f вытекает, что $\varphi'(t) > \varphi'(0)$ при $t < 0$ и $f'(t) < f'(1) < -1$ при $t > 1$. Полагая тогда $\Xi > \max\{-\hat{t}, \hat{t}\}$, где $\tilde{t}, \hat{t}$: $AB + A\varphi'(0)\tilde{t} = -2$, $\hat{t} = \frac{f'(1)}{f'(1)+1}$, видим, что при $t: |t| > \Xi$, выполняются оба неравенства.

Пусть $(x, y) \in E_{11}$; тогда $\bar{x} = A[\varphi(x) + B]f(y) > 2\bar{\Xi}$, $\bar{y} = x < -\bar{\Xi}$ и, значит, $F((x, y)) \in E_{13}$.

Аналогично леммам 15 и 16 имеем

ЛЕММА 17. Существует $\bar{\Xi} > 0$ такое, что $F(E_{12}) \subset E_{13}$ при $\Xi > \bar{\Xi}$.

ЛЕММА 18. Если $\lim_{t \rightarrow \infty} A[\varphi(t) + B] > 1$, то существует Ξ : $F(E_{13}) \subset E_{11}$.

ЛЕММА 19. Если $\lim_{t \rightarrow \infty} A[\varphi(t) + B] > 1$, то существует Ξ такое, что для любой $z \in E_{11} \cup E_{13}$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} |x_j| = \lim_{j \rightarrow \infty} |y_j| = +\infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, пусть Ξ такое, что $A[\varphi(-\Xi) + B] < -2$, $f(\pm\Xi) < -\Xi$, $A[\varphi(\Xi) + B] > C > 1$ и $z = (x_0, y_0) \in E_{11}$. Если обозначить x_j, y_j координаты точки $F^j(z)$, то легко показать, используя индукцию, что в зависимости от четности j их значения могут быть оценены по-разному: $x_{2k-1} > 2^k \Xi$ при $j = 2k - 1$ и $x_{2k} < -C^{k-1} \Xi$ при $j = 2k$, где k натуральное. (В самом деле, пусть $z = (x_0, y_0) \in E_{11}$ и Ξ такое, что $A[\varphi(\Xi) + B] = C$, $A[\varphi(-\Xi) + B] < -2$, $f(\Xi) < -\Xi$, $f(-\Xi) < -\Xi$. Тогда координаты $F(z), F^2(z), F^3(z), F^4(z)$ и т.д. оцениваются так:

$$\begin{aligned} x_1 &= A[\varphi(x_0) + B]f(y_0) > 2\Xi, & y_1 &= x_0 < -\Xi, \\ x_2 &= A[\varphi(x_1) + B]f(y_1) < -C\Xi, & y_2 &= x_1 > 2\Xi, \\ x_3 &= A[\varphi(x_2) + B]f(y_2) > A[\varphi(-C\Xi) + B]f(2\Xi) > 2^2\Xi, & y_3 &= x_2 < -C\Xi, \\ x_4 &= A[\varphi(x_3) + B]f(y_3) < A[\varphi(2^2\Xi) + B]f(-C\Xi) < -C^2\Xi, \\ y_4 &= x_3 > 2^2\Xi \end{aligned}$$

и т.д.) Учитывая, что $y_{2j+1} = x_{2j}$, и то, что (в силу лемм 16 и 18) выполняются соотношения $F(E_{13}) \subset E_{11}$ и $F(E_{11}) \subset E_{13}$, из данных неравенств вытекает, что $\lim_{j \rightarrow \infty} |x_j| = \lim_{j \rightarrow \infty} |y_j| = +\infty$.

СЛЕДСТВИЕ 6. Если $\lim_{t \rightarrow \infty} A[\varphi(t) + B] > 1$, то существует Ξ такое, что $NW(F) \subset F(\mathbb{R}^2) \setminus \left(\bigcup_{j=11}^{13} E_j \right)$.

§ 2

Рассмотрим теперь $A > 0$, $B = 0$. В этом случае $F(\mathbb{R}^2) = \{(0, 0)\} \cup \{(x, y) : -\infty < x \leq A\varphi(y), 0 < y < +\infty\} \cup \{(x, y) : A\varphi(y) < x < +\infty, -\infty < y < 0\}$.

Очевидно, что если $A < 1$, то $F(I^2) \subset I^2$.

ЛЕММА 20. При любых $A > 0$ $(0, 0)$ – аттрактор (сток).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, из формул, задающих отображение F , вытекает, что $F((x = 0)) = (0, 0)$ и $F^2((y = 0)) = F((x = 0)) = (0, 0)$. Таким образом, $\omega(z) = (0, 0)$ для любой z : $z = z(x, 0)$ или $z = (0, y)$. Рассмотрим случай, когда точка $z = (x, y)$ такая, что $x \neq 0$ и $y \neq 0$, и оценим расстояние между $F(z)$ и $(0, 0)$. Имеем

$$\text{dist}[F(z), (0, 0)] \stackrel{\text{df}}{=} \{A\varphi(x)f(y)\}^2 + x^2 < x^2 + y^2 = \text{dist}[z, (0, 0)]$$

при $z \in U_\varepsilon((0, 0))$ для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$. Последнее очевидно ввиду того, что при достаточно малых x и y $\varphi(x) \sim \varphi'(0)x$ и $f(y) \sim f'(0)y$. При этом получается, что $|A\varphi(x)f'(0)| < 1$ и, следовательно, $|A\varphi(x)f(y)| < |y|$. Поэтому $\omega(z) = (0, 0)$ для всех z из достаточно малой окрестности $(0, 0)$.

Помимо $(0, 0)$ у F могут быть и другие неподвижные точки. Их координаты являются решениями системы уравнений $x = A\varphi(x)f(y)$, $y = x$ или уравнения $x = A\varphi(x)f(x)$.

Рассмотрим график функции $z(t) \stackrel{\text{df}}{=} A\varphi(t)f(t)$.

ЛЕММА 21. Для любого $A > 0$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что в $U_\varepsilon(0)$ слева от 0 график $z(t)$ лежит выше диагонали $z = t$, а справа от 0 – ниже ее.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как при $t < 0$ $\varphi(t) < 0$, $f(t) < 0$, то $z(t) > 0 > t$. С другой стороны, поскольку $A\varphi(t)f(t) = A\varphi'(0)f'(0)t^2 + o(t^2)$, то существует $\varepsilon > 0$: $A\varphi(t)f(t) < t$ при $t > 0$.

Обозначим $\tilde{t}$: $\varphi'(\tilde{t})f(\tilde{t}) + \varphi(\tilde{t})f'(\tilde{t}) = 0$. Очевидно, что $\tilde{t}: q < \tilde{t} < 1$. Ясно также, что если $A\varphi(\tilde{t})f(\tilde{t}) > \tilde{t}$, то у F кроме $(0, 0)$ в I^2 есть еще две неподвижные точки, а если $A\varphi(\tilde{t})f(\tilde{t}) = \tilde{t}$, то одна – $(\tilde{t}, \tilde{t})$.

ЛЕММА 22. Для любой $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus I^2$ имеем $F(z) \notin \text{Int}(I^2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим от противного, что существует $z \in \mathbb{R}^2 \setminus I^2$: $F(z) = \bar{z} = (\bar{x}, \bar{y}) \in \text{Int}(I^2)$, т.е. $0 < \bar{x} < 1$, $0 < \bar{y} < 1$. Тогда из формул $\bar{x} = A\varphi(x)f(y)$, $\bar{y} = x$ вытекает, что $0 < x < 1$ и $f(y) = \bar{x}/[A\varphi(\bar{y})] > 0$. Ввиду определения $f(t)$ последнее означает, что $y: 0 < y < 1$. Следовательно, $z \in \text{Int}(I^2)$.

СЛЕДСТВИЕ 7. $NW(F)$ имеет не менее трех инвариантных и непересекающихся друг с другом компонент.

Это вытекает из предыдущей леммы и того, что $(0, 0)$ – сток, область притяжения которого включает в себя границу квадрата $\Gamma(I^2) = I^2 \setminus \text{Int}(I^2)$.

ЛЕММА 23. Если $\varphi'' \geq 0$ и $A < 1$, то $\omega(z) = (0, 0)$ для любой $z \in I^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем прежде всего, что из $\varphi'' \geq 0$, $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(1) = 1$ вытекает, что $\varphi(t) < t$ на $[0, 1]$. В самом деле, предположим от противного, что существует $\hat{t} \in (0, 1)$: $\varphi(\hat{t}) > \hat{t}$. В силу $\varphi'' \geq 0$ тогда существует $\hat{t} \in (0, \hat{t})$: $\varphi(\hat{t}) = \hat{t}$ и при этом $\varphi'(t) > \varphi'(\hat{t}) > 1$ для любого $t > \hat{t}$. Интегрируя последнее неравенство на интервале от $\hat{t}$ до 1, получаем

$$\varphi(1) - \varphi(\hat{t}) = \int_{\hat{t}}^1 \varphi'(t) dt > \int_{\hat{t}}^1 dt = 1 - \hat{t}.$$

Откуда, учитывая, что $\varphi(\hat{t}) = \hat{t}$, имеем $\varphi(1) > 1$. Но это невозможно.

Итак, пусть $z = (x, y) \in I^2$. Покажем, что для любого натурального j координаты x_j, y_j точки $F^j(z)$ можно оценить так: $x_j \leq A^j x$, $y_j \leq A^{j-1} x$. Действительно, при $j = 1$ имеем $x_1 = A\varphi(x)f(y) \leq A\varphi(x) \leq Ax$, $y_1 = x \leq x$. Предположим, что соотношения выполняются для всех $k < j - 1$, и покажем их справедливость и для $k = j$. Вычисляя и оценивая x_j , имеем

$$x_j = A\varphi(x_{j-1})f(y_{j-1}) \leq A\varphi(x_{j-1}) \leq A\varphi(A^{j-1}x) \leq A^j x.$$

Из $y_j = x_{j-1}$ вытекает $y_j \leq A^{j-1}x$. Следовательно, указанные оценки справедливы для любого j , а потому $\lim_{j \rightarrow \infty} x_j = \lim_{j \rightarrow \infty} y_j = 0$ и, значит, $\omega(z) = (0, 0)$.

При $A = 1$ в общем случае $NW(F) \cap \text{Int}(I^2) \neq \emptyset$. В самом деле, у отображения $(x, y) \rightarrow (xf(y), x)$ кроме $(0, 0)$ есть неподвижная точка (q, q) .

ЛЕММА 24. Если $\varphi'' \geq 0$ и $A = 1$, то $NW(F) \cap \text{Int}(I^2) = (q, q)$ при $\varphi(x) = x$ для любого $x \in [0, 1]$ и $NW(F) \cap \text{Int}(I^2) = \emptyset$, если на $[0, 1]$ есть $\tilde{x}$: $\varphi(\tilde{x}) \neq \tilde{x}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что если есть $\tilde{x}$: $\varphi(\tilde{x}) \neq \tilde{x}$, то $(0, 0)$ – единственная неподвижная точка F .

В самом деле, поскольку $\varphi(x) \leq x$ для любого $x \in [0, 1]$ и $f(y) < 1$ при $y \neq q$, то система $x = \varphi(x)f(y)$, $y = x$ имеет ненулевое решение только тогда, когда $\varphi(q) = q$. Докажем, что если $\varphi(x) \neq x$ на $[0, 1]$, то $\varphi(q) \neq q$.

Предположим от противного, что $\varphi(q) = q$, но $\varphi(x) \neq x$ на $[0, 1]$. Как уже отмечалось, из $\varphi''(x) \geq 0$ вытекает тогда, что для любых $\bar{t}, \hat{t}$: $0 < \bar{t} < \hat{t} < 1$, выполняются неравенства

$$0 \leq \varphi'(0) \leq \varphi'(\bar{t}) \leq \varphi'(\hat{t}) \leq \varphi'(1). \quad (12)$$

С учетом этого, с одной стороны,

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^1 \varphi'(t) dt = \int_0^q \varphi'(t) dt + \int_q^1 \varphi'(t) dt \\ &= \varphi(q) - \varphi(0) + \int_q^1 \varphi'(t) dt \geq q - 0 + \varphi'(q)(1 - q), \end{aligned}$$

и получается, что $\varphi'(q) \geq 1$. А с другой стороны,

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^1 \varphi'(t) dt = \int_0^q \varphi'(t) dt + \int_q^1 \varphi'(t) dt \\ &= \int_0^q \varphi'(t) dt + \varphi(1) - \varphi(q) \leq q\varphi'(q) + 1 - q, \end{aligned}$$

и значит, $\varphi'(q) \leq 1$. Таким образом, $\varphi'(q) = 1$.

Но если $\varphi(\tilde{x}) \neq \tilde{x}$, то на $[0, 1]$ есть $\hat{x}$: $\varphi''(\hat{x}) > 0$, и потому $\varphi'(0) < \varphi'(1)$. Ввиду (12) это значит, что $\varphi'(0) \leq \varphi'(q) = 1 \leq \varphi'(1)$, причем по крайней мере одно из неравенств строгое. Как следствие получается, что либо

$$q = \int_0^q \varphi'(t) dt < \varphi'(q) \int_0^q dt = q,$$

либо

$$1 - q = \int_q^1 \varphi'(t) dt > \varphi'(q) \int_q^1 dt = 1 - q.$$

Это невозможно, значит, наше предположение неверно.

Пусть $z \in \text{Int}(I^2)$. Аналогично тому, как это было сделано выше, можно показать, что для координат x_k, y_k точки $F^k(z)$ для любого натурального k имеет место следующая система оценок: $x_k \leq x_{k-1} \leq \dots \leq x_1 \leq x$. Таким образом, x_k – монотонно убывающая, ограниченная снизу последовательность, и поэтому существует $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \bar{x}$: $F(\bar{x}, \bar{x}) = (\bar{x}, \bar{x})$. Очевидно, $\bar{x} = 0$ или $x = q$, причем последнее возможно только тогда, когда $\varphi(x) = x$ для любого $x \in [0, 1]$. Следовательно, для произвольной $z \in \text{Int}(I^2)$ $\omega(z) = (0, 0)$ или $\omega(z) = (q, q)$, если $\varphi(x) = x$ на $[0, 1]$, и $\omega(z) = (0, 0)$ в противном случае.

Рис. 6

Рассматривая случай $\varphi'' < 0$, отметим прежде всего, что как структура $NW(F) \cap I^2$, так и свойства динамической системы в целом сильно зависят от конкретного вида функций φ и f . В этом легко убедиться, изучая зависимость свойств отображения F и структуры его множества $NW(F) \cap I^2$ от параметров β и γ , предполагая, что $\varphi(x) = x^\beta$ и $[f(y)]^\gamma = [4y(1-y)]^\gamma$.

Как известно [5], [6], знание образов и прообразов критического множества, их взаимного расположения, а также образов единичного квадрата иногда может существенно помочь при выяснении структуры множества неблуждающих точек отображения и фазового портрета в целом.

Непосредственными вычислениями устанавливается, что

$$\begin{aligned} F^{-2}(K_y) \cap I^2 &= \{(x, y) : (q/A)^{1/\beta} \leq x \leq 1, q = Ax^\beta(4y(1-y))^\gamma\}, \\ F^2(I^2) &= \{(x, y) : 0 \leq x \leq Ay^\beta, 0 \leq y \leq Aq^\beta\} \\ &\quad \cup \{(x, y) : 0 \leq x \leq \Psi(y), Aq^\beta \leq y \leq A\}, \\ F^3(I^2) &= \{(x, y) : \Psi_-(y) \leq x \leq \Psi_+(y), 0 \leq y \leq A[Aq^\beta]^\beta\}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Psi(y) &\stackrel{\text{df}}{=} Ay^\beta (f[(y/A)^{1/\beta}])^\gamma, \\ \Psi_+(y) &= \begin{cases} Ay^\beta & \text{при } 0 \leq y \leq Aq^\beta, \\ \Psi(y) & \text{при } Aq^\beta \leq y \leq A[Aq^\beta]^\beta, \end{cases} \end{aligned}$$

а $\Psi_-(y) = F(\Psi(y))$ при $y \in (Aq^\beta, A[Aq^\beta]^\beta)$.

Внешний вид $F^3(I^2)$ и его разбиения на подмножества прообразами K_y при малых β, γ и малых β и больших γ изображены на рис. 6 и 7 соответственно.

Штрихованные фигуры – это $F^3(I^2)$, а пересекающие их отрезки прямых и дуги кривых – это соответственно K_y , $F^{-1}(K_y)$ и $F^{-2}(K_y)$. Мы видим, что в первом случае K_y и его прообразы $F^{-1}(K_y)$ и $F^{-2}(K_y)$ рассекают $F^3(I^2)$ на четыре подмножества (1, 2, 3, 4), а во втором – на восемь (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8). Вычисляя образы компонент разбиения на рис. 6, видим, что $F(\underline{1}) \subset \underline{1} \cup \underline{2}$, $F(\underline{2}) \subset \underline{3}$, $F(\underline{3}) \subset \underline{4}$,

Рис. 7

$F(\underline{4}) \subset \underline{4}$. Таким образом, в этом случае $NW(F) \cap I^2 \subset \underline{1} \cup \underline{4}$ (и по теореме Брауэра о неподвижной точке из $F(\underline{4}) \subset \underline{4}$ вытекает существование в $\underline{4}$ неподвижной точки F).

Рис. 7 даже внешне выглядит сложнее, чем рис. 6. В [6], [14] для отображений с внешне похожим видом сечения $F^2(I^2)$ на подмножества при определенных условиях доказано существование репеллера с внезапным возвратом (snap-back repeller [15]) и как следствие хаоса по Ли-Йорку [16]. Аналогичное утверждение, по-видимому, справедливо и в данном случае. Основанием для такого заключения является то, что:

1) выполняются соотношения

$$\begin{aligned} F(\underline{1}) &\subset \underline{2} \cup \underline{6}, & F(\underline{2}) &\subset \underline{3} \cup \underline{7}, & F(\underline{3}) &\subset \underline{3} \cup \underline{7}, & F(\underline{4}) &\subset \underline{2} \cup \underline{6}, \\ F(\underline{5}) &\subset \underline{1} \cup \underline{5}, & F(\underline{6}) &\subset \underline{4} \cup \underline{8}, & F(\underline{7}) &\subset \underline{4} \cup \underline{8}, & F(\underline{8}) &\subset \underline{1} \cup \underline{5}; \end{aligned} \quad (13)$$

2) по теореме Брауэра в $\underline{3}$ есть неподвижная точка $(\bar{x}, \bar{x})$;

3) при малых β и больших γ эта точка является репеллером.

В самом деле, μ_i – собственные числа оператора DF в $(\bar{x}, \bar{x})$ – являются корнями уравнения

$$\mu^2 - \mu A \beta \bar{x}^{\beta-1} [f(\bar{x})]^\gamma - A \bar{x}^\beta \gamma [f(\bar{x})]^{\gamma-1} f'(\bar{x}) = 0, \quad (14)$$

где $\bar{x} > q$:

$$\bar{x} = A \bar{x}^\beta [f(\bar{x})]^\gamma. \quad (15)$$

Подставляя (15) в (14), получаем $\mu^2 - \mu \beta - \gamma \frac{\bar{x} f'(\bar{x})}{f(\bar{x})} = 0$. Откуда

$$\mu_{1,2} = \frac{\beta}{2} \mp \sqrt{\frac{\beta\beta}{4} + \gamma \frac{\bar{x} f'(\bar{x})}{f(\bar{x})}}.$$

Ввиду $\bar{x} > q$ корни комплексно-сопряженные. Покажем, что они по модулю больше 1 при малых β и $\gamma \rightarrow \infty$. Оценим величину выражения $\gamma \frac{\bar{x} f'(\bar{x})}{f(\bar{x})}$.

Перепишывая (15) в виде $\bar{x}^{1-\beta}/A = [f(\bar{x})]^\gamma$ и учитывая, что $[f(q)]^\gamma = 1$, по теореме о среднем значении имеем

$$\begin{aligned} |\bar{x}^{1-\beta}/A - 1| &= |[f(\bar{x})]^\gamma - [f(q)]^\gamma| = \gamma |[f(t)]^{\gamma-1} f'(t)|_{|t=q+\zeta(\bar{x}-q)} (\bar{x} - q) \\ &= \gamma \left| \frac{tf'(t)}{f(t)} \right|_{|t=q+\zeta(\bar{x}-q)} (\bar{x} - q), \end{aligned}$$

где $0 < \zeta < 1$. Так как (в силу выпуклости f)

$$\gamma \left| \frac{tf'(t)}{f(t)} \right|_{|t=q+\zeta(\bar{x}-q)} < \gamma \left| \frac{\bar{x}f'(\bar{x})}{f(\bar{x})} \right|,$$

то

$$\left| \frac{\bar{x}^{1-\beta}}{A} - 1 \right| < \gamma \left| \frac{\bar{x}f'(\bar{x})}{f(\bar{x})} \right| (\bar{x} - q).$$

В силу (15) при $0 < \beta \ll 1$ имеем $\bar{x} \rightarrow q$ при $\gamma \rightarrow \infty$. Поэтому

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \gamma \left| \frac{\bar{x}f'(\bar{x})}{f(\bar{x})} \right| > \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \left| \frac{\bar{x}^{1-\beta}}{A} - 1 \right| / (\bar{x} - q) = +\infty,$$

если $A \neq q$, а $0 < \beta \ll 1$.

4) Что же касается гомоклинической к точке $(\bar{x}, \bar{x})$ орбиты, то намеком на ее существование являются соотношения (13), допускающие существование в $\underline{3}$ точки P такой, что $F(P) \in \underline{7}$, $F^2(P) \in \underline{4}$, $F^3(P) \in \underline{2}$, $F^4(P) = (\bar{x}, \bar{x})$, для которой $\widehat{F}^{-j}(P) \rightarrow (\bar{x}, \bar{x})$ при $j \rightarrow \infty$, где $\widehat{F}^{-1}(P) = F^{-1}(P) \cap \underline{3}$ и $\widehat{F}^{-j}(P) = F^{-1}(\widehat{F}^{-j+1}(P)) \cap \underline{3}$ для $j > 1$. Но, по-видимому, без конкретных численных расчетов доказать это трудно. Ввиду отсутствия таковых данное утверждение остается (правдоподобной) гипотезой.

Пусть $A > 1$. Определим $y_A > 0$: $A\varphi(y_A) = y_A$, и положим

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(x, y): 1 \leq x \leq A\varphi(y), y_A \leq y \leq 1\}, \\ E_2 &= \{(x, y): 1 \leq x \leq A\varphi(y), 1 \leq y < +\infty\}, \\ E_3 &= \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y < +\infty\}, \\ E_4 &= \{(x, y): -\infty < x \leq 0, 1 \leq y < +\infty\}, \\ E_5 &= \{(x, y): -\infty < x \leq 0, 0 \leq y \leq 1\}, \\ E_6 &= \{(x, y): A\varphi(y) \leq x \leq 0, -\infty < y \leq 0\}, \\ E_7 &= \{(x, y): 0 \leq x < +\infty, -\infty < y \leq 0\}. \end{aligned} \tag{16}$$

На рис. 5 изображено разбиение $\mathbb{R}^2$ на E_i .

Вычисляя образы E_i , $i = \overline{1, 7}$, имеем

$$\begin{aligned} F(E_1) &\subset E_2 \cup E_3, \quad F(E_2) \subset E_4, \quad F(E_3) \subset E_5, \quad F(E_4) \subset E_7, \\ F(E_5) &\subset E_6, \quad F(E_6) \subset E_7, \quad F(E_7) \subset E_4 \cup E_5. \end{aligned} \tag{17}$$

Из (17) следует, что $NW(F) \subset I^2 \cup \bigcup_{j=4}^7 E_j$.

§ 3

Пусть $A > 0$ и $B < 0$. Рассматривая $C_F = F(\mathbb{R}^2) \setminus \mathbb{R}^2$, где $F(\mathbb{R}^2) = \{(x, y) : A[\varphi(y) + B] \leq x < +\infty, -\infty < y < \varphi^{-1}(-B)\} \cup \{(0, \varphi^{-1}(-B))\} \cup \{(x, y) : -\infty < x \leq A[\varphi(y) + B], \varphi^{-1}(-B) < y < \infty\}$, видим, что в этом случае для любого A $F(I^2) \not\subset I^2$ и, следовательно, $\Delta = F(I^2) \setminus I^2 \neq \emptyset$. При этом если $B: 0 < -B < 1$, то в общем случае $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$, где $\Delta_1 = F(\mathbb{R}^2) \cap \{(x, y) : x < 0\}$, $\Delta_2 = F(\mathbb{R}^2) \cap \{(x, y) : x > 1\}$. При $B < -1$ $\Delta = \Delta_1$. Таким образом, при $B < 0$ разрушается инвариантность I^2 . Вычисляя собственные числа DF в $(0, 0)$, видим, что они чисто мнимые и по модулю равны $\sqrt{|ABf'(0)|}$. Следовательно, $(0, 0)$ – неподвижная точка типа фокус, которая является устойчивой при $|ABf'(0)| < 1$ и неустойчивой при $|ABf'(0)| > 1$. Таким образом, в окрестности $(0, 0)$ отображение F действует как поворот вокруг $(0, 0)$ с одновременным сжатием (растяжением) вращаемых областей. И действительно, рассматривая образы Δ_1 , видим, что $\Delta_1, F(\Delta_1), F^2(\Delta_1)$ и $F^3(\Delta_1)$ принадлежат разным квадрантам $\mathbb{R}^2$ и, кроме того, существуют значения произведения AB такие, что $F^4(\Delta_1) \subset \Delta_1$.

Пусть $E_{11} = \{(x, y) : x \leq -\Xi, y \geq \Xi\}$, $E_{13} = \{(x, y) : x \geq \Xi, y \leq -\Xi\}$, $E_{12} = C_F \cap \{(x, y) : x \leq -\Xi, y \leq -\Xi\}$, $E_{14} = C_F \cap \{(x, y) : x \geq \Xi, y \geq \Xi\}$.

Аналогично леммам (15)–(18) имеем

ЛЕММА 25. Для любых $A > 0$, $B < 0$ существует $\bar{\Xi} > 0$ такое, что $F(E_{11}) \subset E_{13}$ и $F(E_{12}) \subset E_{13}$ при $\Xi > \bar{\Xi}$.

ЛЕММА 26. Для любых $A > 0$, $B < 0$: $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) > -B$, существует $\bar{\Xi} > 0$ такое, что $F(E_{13}) \subset E_{11}$ и $F(E_{14}) \subset E_{11}$ при $\Xi > \bar{\Xi}$.

Таким образом, описание динамики F распадается на описание действия F внутри “креста” $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{i=11}^{14} E_i$ и вне его, т.е. на множестве $\bigcup_{i=11}^{14} E_i$. Отметим, кстати говоря, что в $\bigcup_{i=11}^{14} E_i$ нет ни образов, ни прообразов прямой $(x = \varphi^{-1}(-B))$.

Пусть $-1 < B < 0$. Тогда $F^{-1}(\bar{\Delta}_1) = I^2 \cap \{(x, y) : x \leq \varphi^{-1}(-B)\}$ – компактное и связное подмножество I^2 . Но $F^{-2}(\bar{\Delta}_1)$ уже не является ни связным, ни компактным. В самом деле, из $-1 < B < 0$ вытекает, что $F^{-1}(\bar{\Delta}_1) \cap C_F \neq \emptyset$. А так как точки C_F не имеют прообразов, то

$$F^{-2}(\bar{\Delta}_1) = F^{-1}(F^{-1}(\bar{\Delta}_1) \setminus C_F) = F^{-1}(\Delta_{1l} \cup \Delta_{1r}),$$

где $\Delta_{1l} = F^{-1}(\bar{\Delta}_1) \cap \{(x, y) : y < \varphi^{-1}(-B)\}$, а $\Delta_{1r} = F^{-1}(\bar{\Delta}_1) \cap \{(x, y) : 0 \leq x \leq A[\varphi(y) + B], y \geq \varphi^{-1}(-B)\}$. Таким образом, Δ_{1l} – некомпактное подмножество I^2 , а Δ_{1r} – компакт. Соответственно их прообразы также являются некомпактными и компактными подмножествами в $\mathbb{R}^2$.

При этом $F^{-1}(\Delta_{1l})$ представляет собой пару односвязных и неограниченных в $\mathbb{R}^2$ множеств, примыкающих к $(x = \varphi^{-1}(-B))$ и простирающихся вдоль этой прямой неограниченно в обе стороны. На рис. 8 схематически изображены Δ_1 , $F^{-1}(\Delta_1)$, Δ_{1l} , Δ_{1r} , а также $F^{-1}(\Delta_{1l})$ и $F^{-1}(\Delta_{1r})$. Как мы видим, существуют неограниченные в $\mathbb{R}^2$ области, которые отображением F переводятся в ограниченные подмножества I^2 . Из рисунка ясно, что $NW(F|_{I^2}) \subset [F(I^2) \cap I^2] \setminus [F^{-1}(\Delta_1) \cup$

Рис. 8

$F^{-1}(\Delta_{1r})$. В общем случае $NW(F|_{I_2}) \neq \emptyset$. В самом деле, если $A > A_B$, где $A_B: A_B[\varphi(q) + B] = q$, то в $NW(F|_{I_2})$ есть неподвижные точки.

Ниже снова предполагается, что B меньше 0.

ЛЕММА 27. Если $A, B: \lim_{t \rightarrow \infty} AB \frac{f(t)}{t} > 1$ (или $\lim_{t \rightarrow \infty} AB f'(t) > 1$), то отображение F имеет периодическую периода 2 точку вида $(0, t_2)$, где $t_2 > 1: AB f(t_2) = t_2$, и при этом $AB f'(t_2) > 1$. Если $\lim_{t \rightarrow \infty} AB \frac{f(t)}{t} < 1$ (или $\lim_{t \rightarrow \infty} AB f'(t) < 1$), то такой точки у F нет.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, из свойств $f(t)$ вытекает, что при $t > q$ значения $AB f'(t)$ с ростом t не убывают. Поскольку $AB f(1) = 0 < 1$ и по условию существует $\hat{t} > 1$ такое, что либо $AB f(\hat{t}) > \hat{t}$, либо $AB f'(\hat{t}) > 1$, то нетрудно убедиться, что существует (и при том единственное) $t_2 > 1$ такое, что $AB f(t_2) = t_2$. Очевидно также, что $AB f'(t_2) > 1$.

ЛЕММА 28. Если $A, B: \lim_{t \rightarrow \infty} AB \frac{f(t)}{t} > 1$ (или $\lim_{t \rightarrow \infty} AB f'(t) > 1$), и $AB f(AB) \geq t_2 = AB f(t_2)$, где $t_2 > 1$, то существует гомоклиническая к $(0, t_2)$ траектория отображения F^2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $t_{-2} < 0: AB f(t_{-2}) = t_2$, и построим диаграммы Кёнигса–Ламерея отображения $t \rightarrow AB f(t)$ для $t = t_{-2}$ при различных значениях AB . А именно:

- 1) при $AB: AB f(AB) < t_2$;
- 2) при $AB: AB f(AB) \geq t_2$.

(Обращаем внимание, что график функции $T = AB f(t)$, изображенный на рис. 9, соответствует первому случаю.) Рассматривая эти диаграммы, мы видим, что в последнем случае через точку t_{-2} проходят траектории, гомоклинические к точке t_2 , которая является неподвижной для данного отображения.

Как известно [17], если $(0, t_2)$ – гиперболическая неподвижная точка отображения F^2 и $(0, y_n)_{n=-\infty}^0$ – гомоклиническая к $(0, t_2)$ траектория (т.е. такая, что $\lim_{n \rightarrow -\infty} y_n = t_2$ и $AB f(y_0) = t_2$), то на множестве $\Psi \stackrel{\text{df}}{=} (0, t_2) \cup \bigcup_{n=0}^{-\infty} (0, y_n)$

Рис. 10

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $ABf(ABf(q)) = ABf(AB) \geq 1$ и $ABf(AB \times f(1)) = 0$, то $f_{AB}^2([q, 1]) = [0, ABf(AB)] \supset [0, 1]$. Но тогда по теореме Брауэра существует $t_4 \in (q, 1)$: $ABf(ABf(t_4)) = t_4$. Очевидно, что $\bar{t}_4 = ABf(t_4) < 0$. Учитывая свойства $f(t)$, нетрудно показать, что t_4 – единственная на $(q, 1)$ точка такая, что $ABf(ABf(t)) = t$.

Вспомним теперь, что при доказательстве утверждения одновременно было доказано, что если $\lambda = 1$, то $[0, 1]$ – топологически транзитивное относительно $f_\lambda: t \rightarrow \lambda f(t)$ множество, а если $\lambda > 1$, то на $[0, 1]$ есть инвариантное множество, гомеоморфное множеству Кантора, на котором действие f_λ топологически транзитивно. Замечая, что если $|AB| \geq 1$, то для f_{AB}^2 выполняются все условия, которые налагались на отображения из семейства f_λ (а именно, шварцман $S(f^2(t))$, где он определен, меньше 0 и $f_{AB}^2([0, 1]) \supset [0, 1]$), видим, что те же выводы справедливы и для f_{AB}^2 при $|AB| \geq 1$. Как следствие получается, что при $|AB| \geq 1$ на осях координат есть инвариантное относительно F^2 топологически транзитивное множество, на котором плотны периодические точки. Таким образом, справедливо

СЛЕДСТВИЕ 9. Если A, B : $|AB| \geq 1$, то на $[(x = 0) \cup (y = 0)] \cap I^2$ есть инвариантное относительно F^2 топологически транзитивное множество, на котором плотны периодические точки.

Вычисляя μ_j , $j = 1, 2$, – собственные числа DF^4 в $(0, t_4)$, – имеем $\mu_1 = (AB)^2 \times f'(t_4)f'(\bar{t}_4) (< 0$, поскольку $f'(t) > 0$ при $t < 0$ и $f'(t) < 0$ при $t > q$) и $\mu_2 = [Af'(0)]^2[\varphi(t_4) + B][\varphi(\bar{t}_4) + B]$. Таким образом, если $B < -1$, то $\mu_2 > 0$. Действительно, если $B < -1$, то $[\varphi(t_4) + B] < 1 + B < 0$, и потому $[\varphi(t_4) + B] \times [\varphi(\bar{t}_4) + B] > 0$. Если же $-1 < B < 0$, то, сохраняя координаты точки $(0, t_4)$, можно изменять ее тип. В частности, при $B > -1$: $[\varphi(t_4) + B] > 0$, имеем $\mu_2 < 0$.

Рассмотрим $F^{-1}((x = \varphi^{-1}(-B)))$. Вычисляя компоненты $F^{-1}((x = \varphi^{-1}(-B)))$, нетрудно заметить, что если $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \infty$, то для любого $B < 0$

Рис. 11

существует $t_B = \varphi^{-1}(-B + \varphi^{-1}(-B)/A)$ такое, что $0 < \varphi^{-1}(-B)/\{A[\varphi(t) + B]\} < 1$ при $t > t_B$. Другими словами, в области $x \geq \varphi^{-1}(-B + \varphi^{-1}(-B)/A)$ существуют $y = y_i(x)$, $i = 1, 2$, — подмножества множества $F^{-1}((x = \varphi^{-1}(-B)))$ такие, что $y_1(x) \rightarrow +0$, а $y_2(x) \rightarrow 1 - 0$ при $x \rightarrow \infty$. А в целом график множества $F^{-1}((x = \varphi^{-1}(-B)))$ имеет вид, как рис. 11. Если же $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \varphi^*$, то:

а) если $B \leq B^* < 0$, где B^* : $A[\varphi^* + B^*] = \varphi^{-1}(-B^*)$, то в области $x > \varphi^{-1}(-B)$ нет точек множества $F^{-1}((x = \varphi^{-1}(-B)))$;

б) если же $B^* < B < 0$, то в области $x \geq \varphi^{-1}(-B + \varphi^{-1}(-B)/A)$ есть компоненты данного множества, но они таковы, что $\lim_{x \rightarrow \infty} y_1(x) > 0$, а $\lim_{x \rightarrow \infty} y_2(x) < 1$.

ТЕОРЕМА 3. Если $f(t)$ — строго выпуклая на $\mathbb{R}^1$ функция (т.е. существует $\beta > 0$: $f''(t) < -\beta$ для $t \in \mathbb{R}^1$), $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \infty$, $A > 0$ и $B < 0$ такие, что $A[1 + B] < -1$, а траектория точки $(0, \varphi^{-1}(-B))$ неограниченная, то она состоит из неблуждающих точек, т.е. $Z_j \stackrel{\text{df}}{=} F^j((0, \varphi^{-1}(-B))) \in NW(F)$ для любого натурального j .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем m так, чтобы значение координаты y точки $F^{2m}((0, \varphi^{-1}(-B)))$ превосходило t_2 , т.е. чтобы $f_{AB}^m(\varphi^{-1}(-B)) > t_2$. Тогда очевидно, что $f_{AB}^n(\varphi^{-1}(-B)) > f_{AB}^{n-1}(\varphi^{-1}(-B))$ для любого $n > m$ и, более того, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_{AB}^n(\varphi^{-1}(-B)) = \infty$. Дальнейшие рассуждения аналогичны приведенным при доказательстве теоремы 2.

Заметим прежде всего (проверяется вычислением), что если $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ такая, что $0 < x \ll \varphi^{-1}(-B)$, а $y \gg 0$, то $F(z) = (x_1, y_1) = (A[\varphi(x) + B]f(y), x)$, — такая точка, что $x_1 \gg 0$, а $y_1 > 0$ близко к 0. Верно и обратное, т.е. если $F(z)$ такая, как выше, то $F^2(z) = (x_2, y_2) = (A[\varphi(x_1) + B]f(y_1), x_1)$ — такая точка, что $x_2 > 0$ близко к 0, а $y_2 \gg 0$. Таким образом, при больших j и малых $r > 0$

$$F(U_r(Z_j) \cap \{(x, y): x \geq 0, y \geq 0\}) \subset \{(x, y): x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Пусть $Z_j \in (y = 0)$. Покажем, что существует $k \in \mathbb{Z}_+$ такое, что

$$F^{2k}(U_r(Z_j)) \cap F^{-1}((x = \varphi^{-1}(-B))) \neq \emptyset.$$

Обозначим $z = (x, y) \in U_r(Z_j)$ произвольную точку и $(x_{2k}, y_{2k}) = F^{2k}(z)$. Согласно (10) $y_2 = A[\varphi(x) + B]f(y)$. Откуда (по теореме о среднем) $y_2 > A[\varphi(x) + B]f'(\theta y)y$, где $0 < \theta < 1$, и $A[\varphi(x) + B]f'(\theta y)y > \zeta y$, где $\zeta > 1$, если только $x > x_B$, где $A[\varphi(x_B) + B] = 1$. Покажем, что если $\zeta y < 1$, то $x_2 > x$. Учитывая, что

$$x_2 = A(\varphi(A[\varphi(x) + B]f(y)) + B)f(x), \quad A[\varphi(x) + B]f(y) > \zeta y,$$

имеем $x_2 > A[\varphi(\zeta y) + B]f(x) > A[1 + B]f(x) > x$, если $x > x_f$, где $x_f > 1$: $|f(x_f)| = x_f$. (Отметим, что ввиду выпуклости $f(t)$ такое x_f всегда существует.)

Таким образом, если z такая, что $x > \max\{x_B, x_f\}$, то все сказанное выше и в самом деле имеет место. Применяя данные рассуждения к точке $F^2(z)$, видим, что они справедливы и для нее, если только $\varphi(\zeta y_2) < 1$. Следовательно, если j выбрано столь большим, что значение координаты x точки Z_j больше $\max\{x_B, x_f\}$, а $r > 0$ зафиксировано столь малым, что $x > \max\{x_B, x_f\}$ для любой $z \in U_r(Z_j)$, то под действием отображения F^2 все точки из $U_r^+(Z_j) = U_r(Z_j) \cap \{(x, y) : y \geq 0\}$ увеличивают значение своей y -координаты не менее чем в ζ раз, не уменьшая при этом значения координаты x . В результате получается, что:

а) либо для всех $z \in U_r^+(Z_j)$ при любом натуральном k выполняется соотношение $\zeta^k y < 1$, что, очевидно, невозможно;

б) либо (по крайней мере для некоторых из них) существует k такое, что $\zeta^k y > 1$.

Но это значит, что $y_{2k} > 1$, т.е. значение координаты y точки $F^{2k}(z)$ больше 1. Но, как ранее было установлено, существует компонента $F^{-1}((x = \varphi^{-1}(-B)))$, которая целиком располагается в полуполосе $\{(x, y) : x \geq 0, 0 \leq y \leq 1\}$. Следовательно,

$$F^{2k}(U_r(Z_j)) \cap F^{-1}((x = \varphi^{-1}(-B))) \neq \emptyset,$$

т.е. $Z_j \in NW(F)$.

Если A и B выбраны так, что $\varphi^{-1}(-B) < t_2$ и $ABf(AB) > t_2$, то в этом случае компактная и некомпактная части $NW(F)$ могут располагаться так, что на осях координат между Z_j могут находиться точки множества $NW(\tilde{F})$, и наоборот.

Так как в процессе доказательства теоремы устанавливается существование для любого $\varepsilon > 0$ точки $z_\varepsilon \in U_\varepsilon((0, \varphi^{-1}(-B)))$ такой, что для некоторого $n = n(\varepsilon)$ $F^n(z_\varepsilon) \in F^{-1}((x = \varphi^{-1}(-B)))$, то это значит, что $z_\varepsilon \in F^{-(n+1)}((x = \varphi^{-1}(-B)))$, т.е. в произвольной окрестности $(0, \varphi^{-1}(-B))$ есть прообразы множества $(x = \varphi^{-1}(-B))$.

Список литературы

1. *Hénon M.* A two-dimensional mapping with a strange attractor // Commun. Math. Phys. 1976. V. 50. P. 69–77.
2. *Lozi R.* Un attracteur étrange du type attracteur de Hénon // J. Phys. Paris. 1978. V. 39. Coll. C5. P. 9–10.
3. *Pounder J. R., Rogers T. D.* The geometry of chaos: Dynamics of a nonlinear second-order difference equation // Bull. Math. Biol. 1980. V. 42. P. 551–597.
4. *Aronson D. G., Chory M. A., Hall G. R., McGehee R. P.* Bifurcations from an invariant circle for two-parameter families of maps of the plane: A computer-assisted study // Commun. Math. Phys. 1982. V. 83. P. 303–354.
5. *Добрынский В. А.* Критические множества и унимодальные отображения квадрата // Докл. РАН. 1995. Т. 341. № 4. С. 442–445.
6. *Добрынский В. А.* Критические множества и унимодальные отображения квадрата // Матем. заметки. 1995. № 5. С. 669–680.
7. *Gumowski I., Mira C.* Dynamique chaotique. Transformations ponctuelles. Transition order-desorder. Editions Cepadues, Toulouse, 1980.
8. *Gumowski I., Mira C.* Recurrences and discrete dynamic systems // Lecture Notes in Mathematics. Springer, 1980.
9. *Cathala J. C., Kawakami H., Mira C.* Singular points with 2 multipliers $s_1 = -s_2 = 1$ in the bifurcation curves of maps // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 1992. V. 2. № 4. P. 1001–1004.
10. *Gardini L.* Absorbing areas and their bifurcations. Quaderno № 7. Istituto di Scienze Economiche. Facoltà di Economia e Commercio, Università di Urbino, March, 1992, 94 p. (Preprint.).
11. *Mira C., Fournier-Prunaret D., Gardini L., Kawakami H., Cathala J. C.* Basin bifurcations of two-dimensional non-invertible maps. Fractalization of basins // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 1994. V. 4. № 2. P. 343–381.
12. *Mira C.* Complex dynamics in two-dimensional endomorphisms // Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications. 1981. V. 4. № 6. P. 1167–1187.
13. *Шарковський А. Н., Коляда С. Ф., Сивак А. Г., Федоренко В. В.* Динамика одномерных отображений. Киев: Наук. думка, 1989.
14. *Добрынский В. А.* Свойства циклов отображений, порождаемых разностными уравнениями второго порядка с нелинейностью типа произведение. Препринт. Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1994.
15. *Marotto F. R.* Snap-back repellers imply chaos in $\mathbb{R}^n$ // J. of Math. Analysis and Applications. 1978. V. 63. № 1. P. 199–223.
16. *Li T.-Y., York J. A.* Period three imply chaos // Amer. Math. Monthly. 1975. V. 82. P. 985–992.
17. *Steinlein H., Walther H.-O.* Hyperbolic sets, transversal homoclinic trajectories, and symbolic dynamics for C^1 -maps in Banach spaces // J. of Dynamics and Differential Equations. 1990. V. 2. № 3. P. 325–365.
18. *Van Strien S. J.* On the bifurcations creating horseshoes // Dynamical Systems and Turbulence. Warwick, 1980; // Lecture Notes in Mathematics. 1981. V. 898. P. 316–351.
19. *Алексеев В. М.* Символическая динамика. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1976.

Поступило в редакцию
13.XI.1995