Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. А. Камынин, Б. Н. Химченко, О слабом (алгебраическом) принципе экстремума для параболической системы 2-го порядка, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1997, том 61, выпуск 5, 35–62

DOI: <https://doi.org/10.4213/im150>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 15:04:54

УДК 517.96

Л. И. Камынин, Б. Н. Химченко

О слабом (алгебраическом) принципе экстремума для параболической системы 2-го порядка

Вводится понятие слабого “алгебраического” принципа экстремума (САПЭ) для параболических систем 2-го порядка, основанного на представлении матриц (коэффициентов системы) в виде суммы матриц, подобных диагональным, и нильпотентных матриц и сведении системы к одному уравнению. Справедливость САПЭ доказана для достаточно широкого класса параболических систем 2-го порядка с “полным перемешиванием”. САПЭ применен к доказательству единственности решения I-ой краевой задачи для рассматриваемых параболических систем.

Библиография: 10 наименований.

Известно, что для параболического уравнения 2-го порядка с неотрицательной характеристической формой имеет место (см. [1]–[6]) в той или иной форме слабый принцип экстремума, играющий важную роль в качественной теории таких уравнений. Вопрос о справедливости слабого принципа экстремума для параболических систем также поднимался в ряде работ (см., например, [7]–[9]), причем чаще исследовались системы с перемешиванием лишь в младших членах, не содержащих производных. В нашей статье вопрос о слабом принципе экстремума рассматривается для параболических систем 2-го порядка с полным перемешиванием членов при новой трактовке самой постановки принципа экстремума. Вводится понятие “алгебраического” слабого принципа экстремума, основанного на разложении матриц (коэффициентов системы) как в матрицы простой структуры (подобные диагональным), так и в нильпотентные матрицы (см. лемму 1) и сведении матрично-векторных уравнений к системе скалярных уравнений специального вида (см. лемму 2). Основной идеей при этом является сведение принципа экстремума для параболической системы 2-го порядка к обычному принципу экстремума для одного параболического уравнения 2-го порядка.

В статье доказана теорема 1 о слабом принципе экстремума в его “алгебраической” постановке для достаточно широкого класса параболических систем 2-го порядка с “полным перемешиванием”. В теоремах 2–4 приводятся приложения установленного слабого принципа экстремума к проблеме о единственности решения I-ой краевой задачи для параболических систем 2-го порядка.

Пусть

$$G \subset \{0 < t < T < +\infty\} \subset \mathbb{R}_{x,t}^{n+1}, \quad n \geq 1,$$

– ограниченная область, для которой

$$\partial G = \gamma_0(G) \cup \Sigma(G) \cup \gamma(G),$$

где нижняя крышка

$$\gamma_0(G) = \text{int}(\partial G \cap \{t = 0\}) \subset \mathbb{R}_x^n$$

является областью на гиперплоскости $\{t = 0\}$, верхняя крышка

$$\gamma(G) = \text{int}(\overline{G} \cap \{t = T > 0\}) \subset \mathbb{R}_x^n$$

является областью на гиперплоскости $\{t = T > 0\}$ и

$$\Gamma(G) = \partial G \setminus \gamma(G) \equiv \gamma_0(G) \cup \Sigma(G)$$

– параболическая граница области G с боковой частью $\Sigma(G) = \Gamma(G) \setminus \gamma_0(G)$.

Рассмотрим на множестве $G \cup \gamma(G) \subset \mathbb{R}_{x,t}^{n+1}$ параболическую систему 2-го порядка из m ($m \geq 2$) уравнений с “полным перемешиванием” вида

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_r(u) \equiv \sum_{k=1}^m \left(\sum_{i,j=1}^n a_{k,ij}^{(r)}(M) D_i D_j u_k + \sum_{i=1}^n b_{k,i}^{(r)}(M) D_i u_k \right. \\ \left. + c_k^{(r)}(M) u_k - D_t u_k \right) = \Phi_r(M), \quad r = \overline{1, m}, \end{aligned} \quad (1)$$

где при $M = (x, t) \equiv (x_1, \dots, x_n; t)$ действительные функции $a_{k,ij}^{(r)}$, $b_{k,i}^{(r)}$, $c_k^{(r)}$ принадлежат $C(G \cup \gamma(G))$, $r, k = \overline{1, m}$, $i, j = \overline{1, n}$, причем матрица

$$a_k^{(r)}(M) = [a_{k,ij}^{(r)}(M)] \in M_{n \times n}, \quad r, k = \overline{1, m},$$

предполагается симметрической и неотрицательно определенной на множестве $G \cup \gamma(G)$, так что ее собственные значения

$$0 \leq \lambda_{k,1}^{(r)}(M) \leq \dots \leq \lambda_{k,n}^{(r)}(M) < +\infty$$

$$\forall M = (x, t) \in G \cup \gamma(G), \quad r, k = \overline{1, m},$$

неотрицательны.

Введем матрицы

$$\begin{aligned} A_{ij}(M) = [a_{k,ij}^{(r)}(M)], \quad B_i(M) = [b_{k,i}^{(r)}(M)], \\ C(M) = [c_k^{(r)}(M)], \quad I_m(M) = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \in M_{m \times m}, \quad i, j = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (2)$$

и векторы

$$\begin{aligned} u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_m \end{bmatrix}, \quad D_i u = \begin{bmatrix} D_i u_1 \\ \dots \\ D_i u_m \end{bmatrix}, \quad D_i D_j u = \begin{bmatrix} D_i D_j u_1 \\ \dots \\ D_i D_j u_m \end{bmatrix}, \\ D_t u \equiv I_m(M) D_t u = \begin{bmatrix} D_t u_1 \\ \dots \\ D_t u_m \end{bmatrix}, \quad \Phi(M) = \begin{bmatrix} \Phi_1(M) \\ \dots \\ \Phi_m(M) \end{bmatrix} \in M_{m \times 1}. \end{aligned} \quad (3)$$

Тогда параболическую систему 2-го порядка (1) можно записать в векторно-матричном виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u) \equiv \sum_{i,j=1}^n A_{ij}(M) D_i D_j u + \sum_{i=1}^n B_i(M) D_i u \\ + C(M)u - I_m(M) D_t u = \Phi(M) \quad \forall M \in G \cup \gamma(G). \end{aligned} \quad (4)$$

Рассмотрим фиксированные векторы

$$\begin{aligned} p = \begin{bmatrix} s_1 \\ \dots \\ s_m \end{bmatrix} > 0, \quad f_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad f_2 = \begin{bmatrix} -s_2 \\ s_1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -s_3 \\ s_2 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, \\ f_{l+1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ -s_{l+1} \\ s_l \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \in M_{m \times 1}, \quad l = \overline{1, m-1}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $s_k > 0$, $k = \overline{1, m}$, и $\sum_{k=1}^m s_k = 1$ (так что (см. [10]) вектор $p > 0$ положительный и стохастический). Введем матрицу

$$E_1 = f_1 p^T = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_1 & s_2 & \dots & s_m \end{bmatrix} = [s_1 f_1 \ s_2 f_1 \ \dots \ s_m f_1] \in M_{m \times m}, \quad (6)$$

для которой в силу (5) имеем

$$\begin{aligned} E_1 f_1 &= \lambda_1 f_1 \quad \text{при } \lambda_1 = 1, \\ E_1 f_k &= \lambda_k f_k \quad \text{при } \lambda_k = 0, \quad k = \overline{2, m}, \end{aligned} \quad (7)$$

так что матрица простой структуры E_1 из (6) подобна диагональной матрице

$$F_1 = [e_1 \theta_2 \dots \theta_m] \in M_{m \times m}, \quad (8)$$

где $\theta_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$ — i -й столбец нулевой матрицы $[\theta]_m = [\theta_1 \dots \theta_m] \in M_{m \times m}$ и $e_i = [\delta_{ki}]$ — i -й столбец единичной матрицы $I_m = [e_1 \dots e_m] \in M_{m \times m}$. Для вектора e_i ($i = \overline{1, m}$) имеем

$$F_1 e_i = \lambda_i e_i, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_i = 0, \quad i = \overline{2, m}, \quad (9)$$

так что матрица E_1 из (6) имеет собственные векторы f_k из (5), соответствующие собственным значениям λ_k из (7), а матрица F_1 имеет собственные векторы e_i из (9), соответствующие собственным значениям λ_i из (9). Для матрицы $S_m \in M_{m \times m}$ (см. [5, с. 63]) перехода от E_1 к $F_1 = S_m^{-1} E_1 S_m$ имеем (см. (5)) представление

$$S_m = [f_1 f_2 \dots f_m] \in M_{m \times m}, \quad (10)$$

где в силу (9), (5) имеем

$$S_m e_k = f_k, \quad S_m^{-1} f_k = e_k, \quad k = \overline{1, m},$$

так что матрица S_m переводит канонический базис $\{e_1, \dots, e_m\}$ из $L_{e_1 \dots e_m}^m \equiv \mathbb{R}^m$ в базис $\{f_1, \dots, f_m\}$ (5) (состоящий из собственных векторов матрицы E_1) из пространства $L_{f_1 \dots f_m}^m$, причем

$$F_1 = S_m^{-1} E_1 S_m, \quad E_1 = S_m F_1 S_m^{-1}.$$

Рассмотрим совокупность всех матриц из $M_{m \times m}$, образующую линейное пространство $L_{F_1 \dots F_{m^2}}^{m^2}$ с базисом $\{F_1, F_2, \dots, F_{m^2}\}$, где

$$F_{lm+k} = [\theta_1 \dots \theta_{k-1} e_{l+1,k} \theta_{k+1} \dots \theta_m] \in M_{m \times m}, \quad l = \overline{0, m-1}, \quad k = \overline{1, m}. \quad (11)$$

Здесь вектор-столбец $\theta_i \in M_{m \times 1}$ взят из (8), кроме того,

$$e_{l+1,k} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \left. \vphantom{\begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}} \right\}^{l+1} \\ \left. \vphantom{\begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}} \right]_k \end{matrix} \in M_{m \times 1}, \quad l = \overline{0, m-1}, \quad k = \overline{1, m}. \quad (12)$$

Отметим, что матрица

$$F_{lm+l+1} = [\theta_1 \dots \theta_l e_{l+1,l+1} \theta_{l+2} \dots \theta_m] \in M_{m \times m} \quad (13)$$

диагональная при $l = \overline{0, m-1}$, причем

$$\sum_{l=0}^{m-1} F_{lm+l+1} \equiv I_m \in M_{m \times m}, \quad (14)$$

а матрица F_k нильпотентная при $k \neq lm + l + 1$, $l = \overline{0, m-1}$ (см. [10]), поскольку при $k \neq l + 1$

$$F_{lm+k}F_{lm+k} = [\theta]_m = [\theta_1 \dots \theta_m] \in M_{m \times m}. \quad (15)$$

Имеет место следующая таблица умножения:

$$\begin{aligned} F_{lm+p}F_{(p-1)m+k} &= F_{(p-1)m+k} && \text{при } p, k = \overline{1, m}, \quad l = \overline{0, m-1}, \\ F_qF_r &= [\theta]_m && \text{для остальных произведений.} \end{aligned} \quad (16)$$

Из (10), учитывая, что $s_k \neq 0$ ($k = \overline{1, m}$), имеем

$$\Delta_m = \det S_m = \begin{cases} 1 & \text{при } m = 2, \\ s_2 s_3 \dots s_{m-1} & \text{при } m \geq 3, \end{cases} \quad (17)$$

и тогда

$$S_m^{-1} = \frac{1}{\Delta_m} [A_{ij}]^T = \frac{1}{\Delta_m} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{m1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1m} & A_{2m} & \dots & A_{mm} \end{bmatrix}, \quad (18)$$

где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы $S_m = [a_{ij}] = [f_1 f_2 \dots f_m] \in M_{m \times m}$ из (10).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При $m = 2$ имеем

$$S_2 = [f_1 f_2] = \begin{bmatrix} 1 & -s_2 \\ 1 & s_1 \end{bmatrix}, \quad \Delta_2 = 1, \quad S_2^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

т.е. $A_{11} = s_1$, $A_{12} = -1$, $A_{21} = s_2$, $A_{22} = 1$.

При $m = 3$ имеем

$$\begin{aligned} S_3 &= [f_1 f_2 f_3] = \begin{bmatrix} 1 & -s_2 & 0 \\ 1 & s_1 & -s_3 \\ 1 & 0 & s_2 \end{bmatrix}, \\ \Delta_3 &= s_2 \neq 0, \quad S_3^{-1} = \frac{1}{s_2} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

где $A_{11} = s_1 s_2$, $A_{21} = s_2^2$, $A_{31} = s_2 s_3$, $A_{12} = -(s_1 + s_3)$, $A_{22} = s_2$, $A_{32} = s_3$, $A_{13} = -s_1$, $A_{23} = -s_2$, $A_{33} = s_1 + s_2$.

Введем представления

$$E_k = S_m F_k S_m^{-1}, \quad k = \overline{1, m^2}. \quad (19)$$

Тогда имеем, учитывая (11), (10) (см. (12), (5)),

$$\begin{aligned} S_m F_{lm+k} &= S_m [\theta_1 \dots \theta_{k-1} e_{l+1, k} \theta_{k+1} \dots \theta_m] \\ &= [\theta_1 \dots \theta_{k-1} f_{l+1} \theta_{k+1} \dots \theta_m], \quad l = \overline{0, m-1}, \quad k = \overline{1, m}. \end{aligned} \quad (20)$$

Учитывая (19), (20), имеем при $m \geq 2$

$$\begin{aligned} E_1 &= f_1 p^T = [s_1 f_1 s_2 f_1 \dots s_m f_1] = (S_m F_1) S_m^{-1} \\ &= \frac{1}{\Delta_m} [f_1 \theta_2 \dots \theta_m] [A_{ij}]^T = \frac{1}{\Delta_m} [A_{11} f_1 A_{21} f_1 \dots A_{m1} f_1], \end{aligned}$$

так что

$$\begin{aligned} A_{11} &= s_1 s_2 \dots s_{m-1}, \quad A_{21} = s_2^2 s_3 \dots s_{m-1}, \quad \dots, \quad A_{m1} = s_2 \dots s_{m-1} s_m, \\ \frac{1}{\Delta_m} A_{i1} &= s_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad \forall m \geq 2, \end{aligned} \quad (21)$$

и при $k = \overline{1, m}$, $l = 0$

$$\begin{aligned} E_k &= S_m F_k S_m^{-1} = [\theta_1 \dots \theta_{k-1} f_1 \theta_{k+1} \dots \theta_m] S_m^{-1} \\ &\equiv \frac{1}{\Delta_m} [\theta_1 \dots \theta_{k-1} f_1 \theta_{k+1} \dots \theta_m] [A_{ij}]^T \\ &= \frac{1}{\Delta_m} [A_{1k} f_1 A_{2k} f_1 \dots A_{mk} f_1], \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} E_{m+k} &= S_m F_{m+k} S_m^{-1} = \frac{1}{\Delta_m} [\theta_1 \dots \theta_{k-1} f_2 \theta_{k+1} \dots \theta_m] [A_{ij}]^T \\ &= \frac{1}{\Delta_m} [A_{1k} f_2 A_{2k} f_2 \dots A_{mk} f_2], \quad k = \overline{1, m}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} E_{lm+k} &= S_m F_{lm+k} S_m^{-1} = [\theta_1 \dots \theta_{k-1} f_{l+1} \theta_{k+1} \dots \theta_m] S_m^{-1} \\ &= \frac{1}{\Delta_m} [A_{1k} f_{l+1} A_{2k} f_{l+1} \dots A_{mk} f_{l+1}], \quad l = \overline{2, m-1}, \quad k = \overline{1, m}. \end{aligned} \quad (24)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При $m = 2$

$$f_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad f_2 = \begin{bmatrix} -s_2 \\ s_1 \end{bmatrix}, \quad \Delta_2 = 1, \quad s_1 + s_2 = 1,$$

и поэтому

$$\begin{aligned} E_1 &= [s_1 f_1 \quad s_2 f_1], \quad E_2 = [-f_1 \quad f_1], \\ E_3 &= [s_1 f_2 \quad s_2 f_2], \quad E_4 = [-f_2 \quad f_2]. \end{aligned} \quad (25)$$

При $m = 3$

$$f_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad f_2 = \begin{bmatrix} -s_2 \\ s_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -s_3 \\ s_2 \end{bmatrix}, \quad \Delta_3 = s_2, \quad s_1 + s_2 + s_3 = 1,$$

и поэтому

$$\begin{aligned}
E_1 &= [s_1 f_1 \quad s_2 f_1 \quad s_3 f_1], & E_2 &= \frac{1}{s_2} [-(s_2 + s_3) f_1 \quad s_2 f_1 \quad s_3 f_1], \\
E_3 &= \frac{1}{s_2} [-s_1 f_1 \quad -s_2 f_1 \quad (s_1 + s_2) f_1], & E_4 &= \frac{1}{s_2} [s_1 s_2 f_2 \quad s_2^2 f_2 \quad s_2 s_3 f_2], \\
E_5 &= \frac{1}{s_2} [-(s_2 + s_3) f_2 \quad s_2 f_2 \quad s_3 f_2], & E_6 &= \frac{1}{s_2} [-(s_2 + s_3) f_3 \quad s_2 f_3 \quad s_3 f_3], \\
E_7 &= \frac{1}{s_2} [s_1 s_2 f_3 \quad s_2^2 f_3 \quad s_2 s_3 f_3], & E_8 &= \frac{1}{s_2} [-(s_2 + s_3) f_3 \quad s_2 f_3 \quad s_3 f_3], \\
E_9 &= \frac{1}{s_2} [-s_1 f_3 \quad -s_2 f_3 \quad (s_1 + s_2) f_3].
\end{aligned} \tag{26}$$

Поскольку в силу (19)

$$E_k E_l = S_m F_k S_m^{-1} S_m F_l S_m^{-1} \equiv S_m F_k F_l S_m^{-1},$$

то из таблицы умножения (16) для матриц F_k получаем таблицу умножения для матриц E_k :

$$\begin{aligned}
E_{lm+p} E_{(p-1)m+k} &= E_{(p-1)m+k}, \quad p, k = \overline{1, m}, \quad l = \overline{0, m-1}, \\
E_q E_r &= [\theta]_m \in M_{m \times m}
\end{aligned} \tag{27}$$

для остальных индексов q и r . В частности, поскольку $E_{lm+l+1} = S_m F_{lm+l+1} S_m^{-1}$, то матрица E_{lm+l+1} является матрицей простой структуры, подобной диагональной матрице F_{lm+l+1} при $l = \overline{0, m-1}$, а матрица $E_{lm+k} \quad \forall l = \overline{0, m-1}, \quad k \neq l+1$, будет в силу (15) нильпотентной (как и матрица F_{lm+k} при $l = \overline{0, m-1}, \quad k \neq l+1$). Поскольку $\{F_1, F_2, \dots, F_{m^2}\}$ является базисом в $L^{m^2} \equiv L_{F_1 \dots F_{m^2}}^{m^2}$, то в силу (19) $E_k \sim F_k, \quad k = \overline{1, m^2}$, и поэтому $\{E_1, E_2, \dots, E_{m^2}\}$ будет базисом в $L^{m^2} \equiv L_{E_1 \dots E_{m^2}}^{m^2}$. Тогда имеем разложение

$$L_{E_1 \dots E_{m^2}}^{m^2} = L_{E_1 E_{m+2} E_{2m+3} \dots E_{(m-1)m+m}}^m \bigoplus_{\substack{r \neq lm+l+1 \\ l = \overline{0, m-1}}} L_{E_r}^1.$$

Докажем лемму о разложении матрицы из $M_{m \times m}$ в сумму матриц простой структуры и нильпотентных матриц по базису $\{E_1, \dots, E_{m^2}\}$.

ЛЕММА 1. Пусть $E_1 = [s_1 f_1 \dots s_m f_1]$ из (6), S_m из (10), S_m^{-1} из (12) – матрицы перехода от $L_{e_1 \dots e_m}^m$ к $L_{f_1 \dots f_m}^m$ и от $L_{f_1 \dots f_m}^m$ к $L_{e_1 \dots e_m}^m$ соответственно (см. (5) и (9)), причем $E_k \quad (k = \overline{1, m^2})$ взяты из (19), где матрицы $E_{lm+l+1} \quad (l = \overline{0, m-1})$ простой структуры, а матрицы E_r при $r \neq lm+l+1 \quad (l = \overline{0, m-1})$ нильпотентны.

Тогда для любой матрицы

$$b = [b_{ij}] \in M_{m \times m} \quad (28)$$

в базисе $\{E_1, \dots, E_{m^2}\}$ имеет место представление

$$b = \sum_{r=1}^{m^2} \beta_r E_r. \quad (29)$$

При $m = 2$ (см. (25) из замечания 2)

$$b = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \sum_{r=1}^4 \beta_r E_r, \quad (30)$$

причем

$$\begin{aligned} \beta_1 &= s_1(b_{11} + b_{12}) + s_2(b_{21} + b_{22}), \\ \beta_2 &= s_1^2 b_{12} + s_1 s_2(b_{22} - b_{11}) - s_2^2 b_{21}, \\ \beta_3 &= b_{22} + b_{21} - b_{11} - b_{12}, \\ \beta_4 &= s_1(b_{22} - b_{12}) + s_2(b_{11} - b_{21}). \end{aligned}$$

При $m = 3$ (см. (26) замечания 2), $\Delta_2 = s_2 \neq 0$

$$b = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \sum_{r=1}^9 \beta_r E_r, \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \sum_{k=1}^3 s_k \sum_{r=1}^3 b_{kr}, & \beta_2 &= \sum_{k=1}^3 s_k (-s_2 b_{k1} + s_1 b_{k2}), \\ \beta_3 &= \sum_{k=1}^3 s_k (-s_3 b_{k2} + s_2 b_{k3}), & s_2 \beta_4 &= \sum_{k=1}^3 \left(s_k \sum_{r=1}^3 b_{kr} - b_{k1} \right), \\ s_2 \beta_5 &= \sum_{k=1}^3 s_k (-s_2 b_{k1} + s_1 b_{k2}) + s_2 b_{11} - s_1 b_{12}, \\ s_2 \beta_6 &= \sum_{k=1}^3 s_k (-s_3 b_{k2} + s_2 b_{k3}) + s_3 b_{12} - s_2 b_{13}, \\ s_2 \beta_7 &= - \sum_{k=1}^3 \left(s_k \sum_{r=1}^3 b_{kr} + b_{3k} \right), \\ s_2 \beta_8 &= \sum_{k=1}^3 s_k (s_2 b_{k1} - s_1 b_{k2}) + s_1 b_{32} - s_2 b_{31}, \\ s_2 \beta_9 &= \sum_{k=1}^3 s_k (s_3 b_{k2} - s_2 b_{k3}) + s_2 b_{33} - s_3 b_{32}. \end{aligned}$$

При $m \geq 4$ (см. (22)–(24)) и β_{lm+k} и при (см. (17))

$$E_{lm+k}, \quad l = \overline{0, m-1}, \quad k = \overline{1, m}, \quad \Delta_m = s_2 \dots s_{m-1} \neq 0$$

имеем разложение

$$b = \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{k=1}^m \beta_{lm+k} E_{lm+k}, \quad (32)$$

где

$$\Delta_m \begin{bmatrix} \beta_1 & \dots & \beta_m \\ \beta_{m+1} & \dots & \beta_{m+m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \beta_{(m-1)m+1} & \dots & \beta_{m^2} \end{bmatrix} = [\alpha_{ij}] S_m,$$

причем (см. (28), (18)) $\alpha_{ij} = \sum_{r=1}^m A_{ri} b_{rj}$ и (см. (5))

$$\Delta_m \beta_1 = [\alpha_{11} \alpha_{12} \dots \alpha_{1m}] f_1 = \sum_{j=1}^m \alpha_{1j}.$$

При $k = \overline{2, m}$

$$\begin{aligned} \Delta_m \beta_k &= [\alpha_{11} \alpha_{12} \dots \alpha_{1m}] f_k = -s_k \alpha_{1 \ k-1} + s_{k-1} \alpha_{1 \ k}, \\ \Delta_m \beta_{lm+1} &= [\alpha_{l+1 \ 1} \dots \alpha_{l+1 \ m}] f_1 = \sum_{j=1}^m \alpha_{l+1 \ j}, \quad l = \overline{1, m-1}. \end{aligned}$$

Наконец, при $k = \overline{2, m}$ ($l = \overline{1, m-1}$) имеем

$$\Delta_m \beta_{lm+k} = [\alpha_{l+1 \ 1} \dots \alpha_{l+1 \ m}] f_k = -s_k \alpha_{l+1 \ k-1} + s_{k-1} \alpha_{l+1 \ k}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Рассмотрим при $m \geq 3$ любую матрицу $b \in M_{m \times m}$ из (28) в старом базисе $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ из (9), которому при $m \geq 3$ соответствует (см. (10), (18)) матрица

$$\begin{aligned} b_f &= S_m^{-1} b S_m = \frac{1}{\Delta_m} [A_{ij}]^T [b_{ij}] [f_1 \dots f_m] \\ &\equiv \frac{1}{\Delta_m} \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{m1} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{1m} & \dots & A_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mm} \end{bmatrix} [f_1 \dots f_m]. \end{aligned}$$

Разлагая $b_f \in M_{m \times m}$ по базису $\{F_1, F_2, \dots, F_{m^2}\}$ в $L_{F_1 \dots F_{m^2}}^{m^2}$, имеем

$$b_f = \sum_{k=1}^{m^2} \beta_k F_k \equiv (S_m^{-1} b) S_m = \begin{bmatrix} \beta_1 & \dots & \beta_m \\ \beta_{m+1} & \dots & \beta_{m+m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \beta_{(m-1)m+1} & \dots & \beta_{m^2} \end{bmatrix}, \quad (33)$$

и поскольку

$$S_m^{-1}b = \frac{1}{\Delta_m}[A_{ij}]^T[b_{ij}] \equiv \frac{1}{\Delta_m}[\alpha_{ij}],$$

где $[\alpha_{ij}] = [A_{ij}]^T[b_{ij}]$, то

$$\alpha_{ij} = \sum_{r=1}^m A_{ri}b_{rj}, \quad i, j = \overline{1, m},$$

откуда с учетом (33) имеем

$$\Delta_m \begin{bmatrix} \beta_1 & \dots & \beta_m \\ \dots & \dots & \dots \\ \beta_{lm+1} & \dots & \beta_{lm+m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \beta_{(m-1)m+1} & \dots & \beta_{m^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\alpha_{11} \dots \alpha_{1m}] \\ \dots \\ [\alpha_{l+11} \dots \alpha_{l+1m}] \\ \dots \\ [\alpha_{m1} \dots \alpha_{mm}] \end{bmatrix} [f_1 \dots f_m].$$

Отсюда при $l = \overline{0, m-1}$, $k = \overline{1, m}$ имеем для $m \geq 3$

$$\Delta_m \beta_{lm+k} = [\alpha_{l+11} \dots \alpha_{l+1m}] f_k,$$

т.е.

$$\Delta_m \beta_{lm+1} = \sum_{j=1}^m \alpha_{l+1j} \quad \text{при } k = 1, \quad (34)$$

$$\Delta_m \beta_{lm+k} = -s_k \alpha_{l+1k-1} + s_{k-1} \alpha_{l+1k} \quad \text{при } k = \overline{2, m}, \quad l = \overline{0, m-1}. \quad (35)$$

Но тогда в силу (19) из (33) имеем представление

$$\begin{aligned} b &= S_m b_f S_m^{-1} = \sum_{r=1}^{m^2} \beta_r S_m F_r S_m^{-1} \\ &\equiv \sum_{r=1}^{m^2} \beta_r E_r \equiv \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{k=1}^m \beta_{lm+k} E_{lm+k}, \end{aligned}$$

что и завершает ввиду (34), (35) доказательство разложения (32) при $m \geq 3$.

В случае $m = 2$ доказательство (30) проводится аналогично.

Докажем лемму о сведении векторно-матричной алгебраической системы из m уравнений к m скалярным уравнениям.

ЛЕММА 2. Пусть

$$bu = h, \quad (36)$$

где при $m \geq 2$ с учетом (28)

$$b \in M_{m \times m}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_m \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} h_1 \\ \dots \\ h_m \end{bmatrix} \in M_{m \times 1}$$

и имеет место представление (29) из леммы 1.

Тогда в случае $m = 2$ при

$$v_1 = s_1 u_1 + s_2 u_2, \quad v_2 = u_2 - u_1, \quad H_1 = s_1 h_1 + s_2 h_2, \quad H_2 = h_2 - h_1$$

имеем (см. (30) и (5))

$$(\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2) f_1 + (\beta_3 v_1 + \beta_4 v_2) f_2 = H_1 f_1 + H_2 f_2,$$

что дает два скалярных уравнения для v_1 и v_2 :

$$\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 = H_1, \quad \beta_3 v_1 + \beta_4 v_2 = H_2, \quad (37)$$

где β_r ($r = \overline{1, 4}$) взяты из (30).

В случае $m = 3$ при

$$\begin{aligned} v_1 &= \sum_{k=1}^3 s_k u_k, & v_2 &= \frac{1}{s_2} \left(\sum_{k=1}^3 s_k u_k - u_1 \right), & v_3 &= \frac{1}{s_2} \left(u_3 - \sum_{k=1}^3 s_k u_k \right), \\ H_1 &= \sum_{k=1}^3 s_k h_k, & H_2 &= \frac{1}{s_2} \left(\sum_{k=1}^3 s_k h_k - h_1 \right), & H_3 &= \frac{1}{s_2} \left(h_3 - \sum_{k=1}^3 s_k h_k \right), \\ &&&&& \Delta_3 = s_2 \neq 0 \end{aligned}$$

имеем (см. (31))

$$\left(\sum_{k=1}^3 \beta_k v_k \right) f_1 + \left(\sum_{k=1}^3 \beta_{k+3} v_k \right) f_2 + \left(\sum_{k=1}^3 \beta_{k+6} v_k \right) f_3 = \sum_{k=1}^3 H_k f_k,$$

что дает три скалярных уравнения для v_k ($k = \overline{1, 3}$):

$$\sum_{k=1}^3 \beta_k v_k = H_1, \quad \sum_{k=1}^3 \beta_{k+3} v_k = H_2, \quad \sum_{k=1}^3 \beta_{k+6} v_k = H_3, \quad (38)$$

причем β_r ($r = \overline{1, 9}$) взяты из (31) леммы 1.

Наконец, при $m \geq 4$, $\Delta_m = s_2 \dots s_{m-1} \neq 0$, учитывая (18), при

$$\begin{aligned} v_k &= \frac{1}{\Delta_m} \sum_{i=1}^m A_{ik} u_i, & k = \overline{1, m}, \\ H_{l+1} &= \frac{1}{\Delta_m} \sum_{i=1}^m A_{i, l+1} h_i, & l = \overline{0, m-1}, \end{aligned} \quad (39)$$

имеем (см. (31))

$$\sum_{l=0}^{m-1} \left(\sum_{k=1}^m \beta_{lm+k} v_k \right) f_{l+1} = \sum_{l=0}^{m-1} H_{l+1} f_{l+1}, \quad (40)$$

где β_r ($r = \overline{1, m^2}$) взяты из (32) леммы 1, что дает m скалярных уравнений для v_k ($k = \overline{1, m}$) из (39):

$$\sum_{k=1}^m \beta_k v_k = H_1, \quad \sum_{k=1}^m \beta_{k+m} v_k = H_2, \quad \dots, \quad \sum_{k=1}^m \beta_{k+m(m-1)} v_k = H_m. \quad (41)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку в силу (14), (19)

$$S_m \left(\sum_{l=0}^{m-1} F_{ml+l+1} \right) S_m^{-1} \equiv I_m = [e_1 \dots e_m] \in M_{m \times m},$$

то

$$\sum_{l=0}^{m-1} E_{ml+l+1} = S_m \left(\sum_{l=0}^{m-1} F_{ml+l+1} \right) S_m^{-1} \equiv I_m \in M_{m \times m},$$

откуда $\forall b \in M_{m \times m}$ из (28), используя представление (32) леммы 1 (при $m \geq 3$), имеем представление

$$b = \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{k=1}^m \beta_{lm+k} E_{lm+k} \equiv \sum_{r=1}^{m^2} \beta_r F_r,$$

дающее

$$b \equiv I_m b \equiv \sum_{l=0}^{m-1} E_{ml+l+1} \sum_{r=1}^m \beta_r E_r. \quad (42)$$

Используя таблицу умножения (27) для матриц E_r ($r = \overline{1, m^2}$), имеем $E_{lm+l+1} E_r = E_{lm+k}$ лишь при $r = lm + k$, так что из (42) получаем

$$\sum_{r=1}^{m^2} \sum_{l=0}^{m-1} \beta_r E_{ml+l+1} E_r = \sum_{k=1}^m \sum_{l=0}^{m-1} \beta_{lm+k} E_{lm+k}$$

в силу того, что возможно лишь $r = (p-1)m + k$ при $p, k = \overline{1, m}$, что дает представление

$$b = \sum_{k=1}^m \sum_{l=0}^{m-1} \beta_{lm+k} E_{lm+k}.$$

Тем самым система (36) приведена к системе

$$\sum_{k=1}^m \sum_{l=0}^{m-1} \beta_{lm+k} E_{lm+k} u = \sum_{l=0}^{m-1} E_{ml+l+1} u,$$

где в силу (22)–(24) имеем при $l = \overline{0, m-1}$, $k = \overline{1, m}$

$$E_{lm+k} u = \frac{1}{\Delta_m} [A_{1k} f_{l+1} \dots A_{mk} f_{l+1}] u \equiv v_k f_{l+1}. \quad (43)$$

Здесь

$$v_k = \frac{1}{\Delta_m} \sum_{i=1}^m A_{ik} u_i, \\ E_{lm+l+1} h = \frac{1}{\Delta_m} [A_{1l+1} f_{l+1} \dots A_{ml+1} f_{l+1}] h \equiv H_{l+1} f_{l+1},$$

причем

$$H_{l+1} = \frac{1}{\Delta_m} \sum_{i=1}^m A_{il+1} h_i, \quad l = \overline{0, m-1}.$$

Итак, система (36) приведена к векторной системе (40), которую можно записать как систему m скалярных уравнений (41) для v_k ($k = \overline{1, m}$) из (39). Доказательство леммы 2 в случае $m = 2$ проводится аналогично.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Матрица $b = [b_{ij}] \in M_{m \times m}$ из (28), для которой имеет место представление (29) (т.е. (30) при $m = 2$, (31) при $m = 3$ и (32) при $m \geq 4$) леммы 1, удовлетворяет условию (A.k), где $k = \overline{1, m}$, если в (41)

$$\beta_{(k-1)m+i} = 0 \quad \forall i = \overline{1, k-1}, \quad \overline{k+1, m} \quad (\forall i \neq k).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. При выполнении условия (A.1) для $b \in M_{2 \times 2}$ в случае $m = 2$ имеем из (30)

$$\beta_1 = s_1(b_{11} + b_{12}) + s_2(b_{21} + b_{22}), \\ \beta_2 \equiv s_1^2 b_{12} + s_1 s_2 (b_{22} - b_{11}) - s_2^2 b_{21} = 0,$$

так что при $s_1 \neq 0$

$$\beta_1 = \frac{1}{s_1} \sum_{r=1}^2 s_r b_{r1}. \quad (44)$$

При выполнении условия (А.1) для $b \in M_{3 \times 3}$ в случае $m = 3$ имеем из (31)

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \sum_{k=1}^3 s_k \sum_{r=1}^3 b_{kr}, \\ \beta_2 &\equiv \sum_{k=1}^3 (-s_2 b_{k1} + s_1 b_{k2}) = 0, \\ \beta_3 &\equiv \sum_{k=1}^3 s_k (-s_3 b_{k2} + s_2 b_{k3}) = 0,\end{aligned}$$

так что

$$\beta_1 = \frac{1}{s_1} \sum_{r=1}^m s_r b_{r1}.$$

При выполнении условия (А.2) для $b \in M_{3 \times 3}$ в случае $m = 3$ имеем из (31) ($s_2 \neq 0$)

$$\begin{aligned}s_2 \beta_5 &= -s_2 \sum_{k=1}^3 s_k b_{k1} + s_1 \sum_{k=1}^3 s_k b_{k2} + s_2 b_{11} - s_1 b_{12}, \\ s_2 \beta_4 &= 0, \quad s_2 \beta_6 = 0,\end{aligned}$$

что дает

$$s_2 \beta_5 = b_{12} - \sum_{k=1}^3 s_k b_{k2},$$

так что при выполнении (А.1) и (А.2) одновременно для $b \in M_{3 \times 3}$ в случае $m = 3$ имеем

$$\beta_1 = \frac{1}{s_1} \sum_{r=1}^3 s_r b_{r1}, \quad s_2 \beta_5 = b_{12} - \sum_{k=1}^3 s_k b_{k2}. \quad (45)$$

Наконец, при выполнении условия (А.1) для $b \in M_{m \times m}$ в случае $m \geq 4$, учитывая, что в силу (21)

$$\frac{1}{\Delta_m} \alpha_{1j} = \frac{1}{\Delta_m} \sum_{r=1}^m A_{r1} b_{rj} \equiv \sum_{r=1}^m s_r b_{rj},$$

при $k = \overline{2, m}$ из (32) имеем

$$\beta_k \equiv \frac{1}{\Delta_m} (-s_k \alpha_{1k-1} + s_{k-1} \alpha_{1k}) = 0;$$

учитывая соотношения

$$\frac{1}{\Delta_m} \alpha_{1k-1} = \sum_{r=1}^m s_r b_{rk-1}, \quad \frac{1}{\Delta_m} \alpha_{1k} = \sum_{r=1}^m s_r b_{rk},$$

получаем

$$s_k \sum_{r=1}^m s_r b_{r\ k-1} = s_{k-1} \sum_{r=1}^m s_r b_{r\ k},$$

так что

$$\beta_1 = \sum_{r=1}^m s_r b_{r\ 1} + \sum_{k=2}^m \sum_{r=1}^m s_r b_{r\ k}.$$

Но при $k = \overline{2, m}$

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^m s_r b_{r\ k} &= \frac{s_k}{s_{k-1}} \sum_{r=1}^m s_r b_{r\ k-1} \\ &= \frac{s_k}{s_{k-1}} \frac{s_{k-1}}{s_{k-2}} \dots \frac{s_2}{s_1} \sum_{r=1}^m s_r b_{r\ 1} \equiv \frac{s_k}{s_1} \sum_{r=1}^m s_r b_{r\ 1}, \end{aligned}$$

что дает при выполнении условия (A.1)

$$\beta_1 = \left(1 + \sum_{k=2}^m \frac{s_k}{s_1}\right) \sum_{r=1}^m s_r b_{r\ 1} \equiv \frac{1}{s_1} \left(\sum_{k=1}^m s_k\right) \sum_{r=1}^m s_r b_{r\ 1}.$$

А поскольку в силу стохастичности вектора $p > 0$ из (5) $\sum_{k=1}^m s_k = 1$, то

$$\beta_1 = \frac{1}{s_1} \sum_{r=1}^m s_r b_{r\ 1} \quad \forall m \geq 2. \quad (46)$$

Рассмотрим теперь матрицы (2) системы (4), определенные на множестве $G \cup \gamma(G) \subset \mathbb{R}_{x,t}^{n+1}$, и введем для них представления (32) из леммы 1 с одними и теми же фиксированными векторами $p, f_k \in M_{m \times 1}$ ($k = \overline{1, m}$) из (5). Тогда имеем при $i, j = \overline{1, n}$

$$A_{ij}(M) = [a_{k,ij}^{(r)}(M)] \equiv \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{k=1}^m \beta_{lm+k,ij}(M) E_{lm+k}, \quad (47)$$

$$B_i(M) = [b_{k,i}^{(r)}(M)] \equiv \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{k=1}^m \beta_{lm+k,i}(M) E_{lm+k}, \quad (48)$$

$$C(M) = [c_k^{(r)}(M)] \equiv \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{k=1}^m \beta_{lm+k}(M) E_{lm+k}. \quad (49)$$

Пусть матрицы (47)–(49) удовлетворяют условию (A.1) определения 1. Тогда в силу (40) леммы 2 и (46) замечания 3 получаем, в частности, скалярное уравнение 2-го порядка для

$$v_1 \equiv \sum_{k=1}^m s_k u_k \in C_{x,t}^{(2,1)}(G \cup \gamma(G)) \quad (50)$$

при $H_1(M) \equiv \sum_{k=1}^m s_k \Phi_k(M)$:

$$\begin{aligned} L_1 v_1 &\equiv \frac{1}{s_1} \sum_{i,j=1}^n \left(\sum_{r=1}^m s_r a_{1,ij}^{(r)}(M) \right) D_i D_j v_1 \\ &+ \frac{1}{s_1} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{r=1}^m s_r b_{1,i}^{(r)}(M) \right) D_i v_1 \\ &+ \frac{1}{s_1} \left(\sum_{r=1}^m s_r c_1^{(r)}(M) \right) v_1 - D_t v_1 = H_1(M). \end{aligned} \quad (51)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Поскольку матрицы $[a_{1,ij}^{(r)}(M)] \in M_{n \times n} \forall r = \overline{1, m}$ системы (4) предполагаются положительно полуопределенными на множестве $G \cup \gamma(G)$, то при любом положительном фиксированном в условии (A.1) стохастическом векторе $p \in M_{m \times 1}$ из (5) выполнена оценка снизу:

$$\frac{1}{s_1} \sum_{i,j=1}^n \left(\sum_{r=1}^m s_r a_{1,ij}^{(r)}(M) \right) \xi_i \xi_j \geq 0 \quad \forall M \in G \cup \gamma(G), \quad \forall |\xi|_n > 0, \quad (52)$$

и поэтому уравнение 2-го порядка (51) имеет неотрицательную характеристическую форму, т.е. является параболическим уравнением 2-го порядка, условие диссипативности для которого имеет вид

$$\frac{1}{s_1} \sum_{r=1}^m s_r c_1^{(r)}(M) \leq 0 \quad \forall M \in G \cup \gamma(G). \quad (53)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 (ср. [1]–[5]). Для параболического уравнения 2-го порядка (51), заданного на ограниченном множестве $G \cup \gamma(G)$, *справедлив слабый принцип минимума* (СПМин) (соответственно слабый принцип максимума (СПМах)), если для любого суперпараболического (субпараболического) решения $v_1(M)$ класса (50) уравнения (51), т.е. при $H_1(M) \leq 0$ или $H_1(M) < 0$ (соответственно $H_1(M) \geq 0$ или $H_1(M) > 0$) $\forall M = (x, t) \in G \cup \gamma(G)$ не существует точки $M_0 = (x_0, t_0) \in G \cup \gamma(G)$ и окрестности

$$U^-(M_0) \equiv \Pi_\rho(M_0) \cap \{t \leq t_0\} \equiv \{(x, t) \mid |x - x_0| < \rho, t_0 - \rho < t \leq t_0\}$$

таких, что выполнена оценка снизу:

$$v_1(M) \geq v_1(M_0) \quad \forall (x, t) = M \in U^-(M_0) \subset G \cup \gamma(G),$$

где либо $v_1(M_0) < 0$ при $H_1(M_0) \leq 0$, либо $v_1(M_0) \leq 0$ при $H_1(M_0) < 0$ (соответственно выполнена оценка сверху: $v_1(M) \leq v_1(M_0) \forall M \in U^-(M_0)$, где либо $v_1(M_0) > 0$ при $H_1(M_0) \geq 0$, либо $v_1(M_0) \geq 0$ при $H_1(M_0) > 0$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Для параболической системы 2-го порядка (1) (4)), заданной на ограниченном множестве $G \cup \gamma(G) \subset \mathbb{R}_{x,t}^{n+1}$ и имеющей (см. (3)) решение

$$u(M) = \begin{bmatrix} u_1(M) \\ \dots \\ u_m(M) \end{bmatrix} \in C_{x,t}^{(2,1)}(G \cup \gamma(G)), \quad (54)$$

при правой части $\Phi(M) = \begin{bmatrix} \Phi_1(M) \\ \dots \\ \Phi_m(M) \end{bmatrix}$ справедлив слабый (алгебраический)

принцип минимума САПМин (соответственно САПМах), если:

1) матрицы (2) системы (4) удовлетворяют условию (А.1) определения 1 при фиксированном положительном стохастическом векторе $p > 0$ и фиксированных векторах $f_k \in M_{m \times 1}$ ($k = \overline{1, m}$) из (5);

2) для параболического уравнения 2-го порядка (51), соответствующего системе (4), где

$$v_1(M) = \langle p, u(M) \rangle, \quad H_1(M) = \langle p, \Phi(M) \rangle,$$

справедлив СПМин (СПМах) в смысле определения 2.

ТЕОРЕМА 1 (о САПМин, САПМах для системы (4)). Пусть на множестве $G \cup \gamma(G) \subset \mathbb{R}_{x,t}^{n+1}$ ($n \geq 1$) задана параболическая система 2-го порядка (4) ((1)), матрицы которой удовлетворяют условию (А.1) определения 1 с общими фиксированными стохастическим вектором $p > 0$ и векторами $f_k \in M_{m \times 1}$ ($k = \overline{1, m}$) из (5). Пусть (см. (3)) $u(M)$ есть решение класса (54) системы (4).

Тогда векторно-матричному уравнению 2-го порядка (4) соответствует одно скалярное уравнение 2-го порядка (51) для $v_1(M) = \langle p, u(M) \rangle$ класса (50) с правой частью $H_1(M) = \langle p, \Phi(M) \rangle$, параболическое в силу оценок (52) (при стохастическом векторе $p > 0$) с условием диссипативности (53).

Пусть $\forall M = (x, t) \in G \cup \gamma(G)$ выполнено одно из двух условий:

- 1) $H_1(M) < 0$ (> 0) и (53);
- 2) $H_1(M) \leq 0$ (≥ 0), но

$$\frac{1}{s_1} \sum_{k=1}^m s_k c_1^{(k)}(M) < 0 \quad \forall M \in G \cup \gamma(G). \quad (55)$$

Тогда для решения $v_1(M) \equiv \langle p, u(M) \rangle$ параболического уравнения 2-го порядка (51) справедлив СПМин (СПМах) в смысле определения 2, и потому для параболической системы 2-го порядка (1) справедлив САПМин (САПМах) на множестве $G \cup \gamma(G)$ в смысле определения 3.

Доказательство теоремы 1 следует из теоремы о слабом принципе экстремума для одного параболического уравнения 2-го порядка с неотрицательной характеристической формой, доказываемой (см., например, [1]–[5]) в качественной теории параболических уравнений 2-го порядка.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть на ограниченном множестве $G \cup \gamma(G)$ задана параболическая система 2-го порядка (4) ((1)), матрицы которой удовлетворяют условию (A.1) определения 1 с общими фиксированным положительным стохастическим вектором $p > 0$ и фиксированными векторами $f_k \in M_{m \times 1}$ ($k = \overline{1, m}$) из (5) при выполнении оценки

$$\frac{1}{s_1} \sum_{i,j=1}^n \left(\sum_{r=1}^m s_r a_{1,ij}^{(r)}(M) \right) \xi_i \xi_j > 0 \quad \forall M = (x, t) \in G \cup \gamma(G), \quad \forall |\xi|_n > 0. \quad (56)$$

Пусть

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_m \end{bmatrix} \in C(\overline{G}) \wedge C_{x,t}^{(2,1)}(G \cup \gamma(G)) \quad (57)$$

– решение системы (1), так что

$$v_1 \equiv \langle p, u \rangle \in C(\overline{G}) \wedge C_{x,t}^{(2,1)}(G \cup \gamma(G)) \quad (58)$$

– решение параболического уравнения 2-го порядка (51) с положительной характеристической формой. Пусть выполнено условие диссипативности (55) для уравнения (51) и решение v_1 уравнения (51) суперпараболично (субпараболично) на $G \cup \gamma(G)$, т.е.

$$H_1(M) \equiv \langle p, \Phi(M) \rangle \leq 0 (\geq 0) \quad \forall M \in G \cup \gamma(G).$$

Тогда

$$(v_1|_{\Gamma(G)} \geq 0) \Rightarrow (v_1(M) \geq 0 \quad \forall M \in \overline{G}),$$

соответственно

$$(v_1|_{\Gamma(G)} \leq 0) \Rightarrow (v_1(M) \leq 0 \quad \forall M \in \overline{G}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для определенности

$$v_1|_{\Gamma(G)} \geq 0, \quad (59)$$

где $v_1(M)$ – суперпараболическое решение параболического уравнения 2-го порядка (51), удовлетворяющего условию диссипативности (55). Докажем, что

$$v_1(M) \geq 0 \quad \forall M \in \overline{G}.$$

Допустим от противного, что $\exists M_1 \in \overline{G}$ такая, что $v_1(M_1) < 0$. Тогда в силу теоремы Вейерштрасса для функции $v_1 \in C(\overline{G})$ существует точка $M_0 = (x_0, t_0) \in \overline{G}$ такая, что $v_1(M_0) = \min_{\overline{G}} v_1 < 0$. В силу (59) $M_0 \notin \Gamma(G)$, т.е. $M_0 \in G \cup \gamma(G)$ является точкой локального отрицательного минимума суперпараболической функции v_1 класса (50), что противоречит в силу теоремы 1 СПМин для параболического уравнения 2-го порядка (51).

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть для системы (1) выполнены условия следствия 1 и и класса (57) (см. (3)) является решением однородной I-й краевой задачи для системы (4)

$$\mathcal{L}u(M) = 0 \quad \forall M = (x, t) \in G \cup \gamma(G), \quad (60)$$

$$u_r(x, 0) = 0 \quad \forall (x, 0) \in \bar{\gamma}_0(G), \quad r = \overline{1, m}, \quad (61)$$

$$u_r(M) = 0 \quad \forall M \in \Sigma(G), \quad r = \overline{1, m}. \quad (62)$$

Тогда

$$v_1(M) \equiv \langle p, u(M) \rangle \equiv 0 \quad \forall \bar{G}, \quad (63)$$

так что система функций $\{u_1(M), \dots, u_m(M)\}$ (компонент вектор-функции u) линейно зависима на множестве $\bar{G}$.

СЛЕДСТВИЕ 3 (обусиленном СПМин (СПМах) для параболического уравнения 2-го порядка (51)). Пусть на ограниченном множестве $G \cup \gamma(G)$ задано уравнение 2-го порядка (51) с положительной характеристической формой при выполнении оценки (56), для которого выполнено условие диссипативности (53). Пусть функция $v_1(M)$ класса (58) суперпараболична (субпараболична) на множестве $G \cup \gamma(G)$, т.е.

$$L_1 v_1(M) \leq 0 (\geq 0) \quad \forall M = (x, t) \in G \cup \gamma(G).$$

Тогда

$$\min_{\bar{G}} v_1 = \min_{\Gamma(G)} v_1 \quad \text{при} \quad \min_{\Gamma(G)} v_1 \leq 0,$$

соответственно

$$\max_{\bar{G}} v_1 = \max_{\Gamma(G)} v_1 \quad \text{при} \quad \max_{\Gamma(G)} v_1 \geq 0$$

и, в частности,

$$(v_1|_{\Gamma(G)} \geq 0) \Rightarrow (v_1(M) \geq 0 \quad \forall M \in \bar{G}),$$

соответственно

$$(v_1|_{\Gamma(G)} \leq 0) \Rightarrow (v_1(M) \leq 0 \quad \forall M \in \bar{G}).$$

Доказательство следствия 3 проводится по схеме доказательства соответствующего утверждения для уравнения теплопроводности из [5].

СЛЕДСТВИЕ 4 (о единственности I-й краевой задачи для параболического уравнения 2-го порядка (51)). Пусть на ограниченном множестве $G \cup \gamma(G)$ задано уравнение 2-го порядка (51) с положительной при выполнении оценки (56) характеристической формой, для которого выполнено условие диссипативности (53).

Тогда может существовать не более одного решения $v_1(M)$ класса (58) I-й краевой задачи

$$L_1 v_1(M) = F(M) \quad \forall M = (x, t) \in G \cup \gamma(G) \quad (64)$$

с начальным условием

$$v_1(x, 0) = \varphi(x) \quad \forall (x, 0) \in \bar{\gamma}_0(G) \quad (65)$$

(где $\varphi \in C(\bar{\gamma}_0(G))$) при выполнении краевого условия 1-го рода

$$v_1(M) = \psi(M) \quad \forall M \in \Sigma(G) \quad (66)$$

(где $\psi \in C(\Sigma(G))$) и условия согласования

$$\psi(x, 0) = \varphi(x) \quad \forall (x, 0) \in \bar{\gamma}_0(G) \cap \Sigma(G).$$

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть на ограниченном множестве $G \cup \gamma(G)$ задана параболическая система 2-го порядка (4) с положительными собственными значениями

$$0 < \lambda_{k,1}^{(r)}(M) \leq \dots \leq \lambda_{k,n}^{(r)}(M) < +\infty \quad \forall M \in G \cup \gamma(G) \quad (r, k = \overline{1, m}), \quad (67)$$

для матриц (2) которой выполнено условие (A.1) теоремы 1 и выполнено условие диссипативности (53) для соответствующего системе (4) параболического уравнения 2-го порядка (51) (с положительной в силу (67) характеристической формой). Если вектор-функция u (см. (3)) класса (57) является решением однородной I-й краевой задачи (60)–(62), то имеет место тождество (63), так что система $\{u_1(M), \dots, u_m(M)\}$ компонент решения $u \in M_{m \times 1}$ задачи (60)–(62) линейно зависима на множестве $\bar{G}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. При выполнении условия (A.1) на коэффициенты (матриц) системы (4) налагается $m - 1$ (при $m \geq 2$) условий $\beta_k(M) \equiv 0 \quad \forall k = \overline{2, m}$, что, естественно, сужает класс рассматриваемых систем (1), для которых справедлив САПМин (САПМах) теоремы 1 и следствий 1–5. Отметим попутно, что при выполнении условия (A.1) можно доказать лишь линейную зависимость функций $\{u_1(M), \dots, u_m(M)\}$, являющихся компонентами вектор-решения $u(M) \in M_{m \times 1}$ однородной I-й краевой задачи (60)–(62) для системы (4).

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Ниже приводятся теоремы единственности решения I-й краевой задачи (60)–(62) в случаях $m = 2$ и $m = 3$.

ТЕОРЕМА 2 (о единственности решения I-й краевой задачи для системы (1) при $m = 2$). Пусть на ограниченном множестве $G \cup \gamma(G) \subset \mathbb{R}_{x,t}^{n+1}$ ($n \geq 1$) задана параболическая система 2-го порядка (4) ((1)) при $m = 2$ и положительных собственных значениях (67) ($r, k = 1, 2$), матрицы (2) которой удовлетворяют условию (A.1) определения 1 с общими фиксированным стохастическим положительным вектором $p = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} > 0$ (где $s_1 + s_2 = 1$, $s_k > 0$ ($k = 1, 2$)) и $s_1 \neq \frac{1}{2}$) и фиксированными векторами $f_1, f_2 \in M_{2 \times 1}$ из (5). Пусть выполнены условие диссипативности (53) (при $m = 2$), дополнительные оценки (параболичности)

$$\left(1 - \frac{s_2}{s_1}\right) \sum_{i,j=1}^n \left(a_{2,ij}^{(2)}(M) - \frac{s_2}{s_1} a_{1,ij}^{(2)}(M)\right) \xi_i \xi_j > 0$$

$$\forall M \in G \cup \gamma(G), \quad \forall |\xi|_n > 0 \quad (68)$$

и оценки (диссипативности)

$$\left(1 - \frac{s_2}{s_1}\right) \left(c_2^{(2)}(M) - \frac{s_2}{s_1} c_1^{(2)}(M)\right) \leq 0 \quad \forall M \in G \cup \gamma(G). \quad (69)$$

Тогда если вектор-функция u (см. (3)) класса (57) (при $m = 2$) является решением однородной I-й краевой задачи (60)–(62) для системы (1) (при $m = 2$), то имеет место тождество

$$u(x, t) \equiv 0 \quad \text{в } \overline{G}. \quad (70)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть существует решение $u \in M_{2 \times 1}$ класса (57) (при $m = 2$) однородной I-й краевой задачи (60)–(62) для системы (1) (при $m = 2$). Тогда в силу выполнения условия (A.1) определения 1 для матриц (2) системы (4) видим, что система (1) сводится к однородному уравнению 2-го порядка (51) при $m = 2$ в $H_1(M) = \sum_{k=1}^2 s_k \Phi_k(M)$, параболическому при выполнении оценки (56) для функции $v_1(M) = \sum_{k=1}^2 s_k u_k(M)$ класса (58), являющейся решением однородной I-й краевой задачи (64) при $F(M) \equiv 0$, (65) при $\varphi(x) \equiv 0$ и (66) при $\psi(M) \equiv 0$. Поскольку выполнено условие диссипативности (53) (при $m = 2$), то в силу следствия 4 имеем тождество (63), так что

$$u_1(M) \equiv -\frac{s_2}{s_1} u_2(M) \quad \text{в } \overline{G}. \quad (71)$$

Но тогда из 2-го скалярного уравнения системы (1) (при $r = 2$ и $\Phi_2 \equiv 0$, $m = 2$) имеем при замене (71) уравнение

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^n \left(a_{2,ij}^{(2)}(M) - \frac{s_2}{s_1} a_{1,ij}^{(2)}(M) \right) D_i D_j u_2(M) \\ & + \sum_{i=1}^n \left(b_{2,i}^{(2)}(M) - \frac{s_2}{s_1} b_{1,i}^{(2)}(M) \right) D_i u_2(M) \\ & + \left(c_2^{(2)}(M) - \frac{s_2}{s_1} c_1^{(2)}(M) \right) u_2(M) - \left(1 - \frac{s_2}{s_1} \right) D_t u_2(M) = 0. \end{aligned} \quad (72)$$

Заметим, что условие $s_1 \neq 1/2$ для стохастического вектора $p \in M_{2 \times 1}$ обеспечивает присутствие в уравнении (72) члена с временной производной $D_t u_2(M)$. Но тогда уравнение (72) будет параболическим при выполнении оценки (68), причем условие диссипативности для уравнения (72) имеет вид (69). Но тогда функция $u_2(M)$ класса (57) является решением однородного параболического уравнения 2-го порядка (72) с положительной характеристической формой и при выполнении условия диссипативности (69) обеспечивает применение к функции u_2 усиленного слабого принципа экстремума (ср. следствия 3 и 4) на множестве $G \cup \gamma(G)$. А поскольку выполнено начальное условие $u_2(x, 0) = 0 \quad \forall (x, 0) \in \bar{\gamma}_0(G)$ (см. (61) при $r = m = 2$) и однородное краевое условие (62) (при $r = m = 2$), то в силу обычной теоремы единственности (см. следствие 3) решения I-й краевой задачи для одного параболического уравнения 2-го порядка (72) имеем тождество

$$u_2(M) \equiv 0 \quad \text{в } \bar{G},$$

откуда в силу (71) имеем

$$u_1(M) \equiv -\frac{s_2}{s_1} u_2(M) \equiv 0 \quad \text{в } \bar{G}$$

(при $s_1 \neq 1/2$), что и дает тождество (70) теоремы 2.

Пусть теперь матрицы (47)–(49) удовлетворяют условию (A.2) (при $m = 3$) определения 1. Тогда в силу (38) леммы 2 и (45) замечания 3, получаем, в частности, скалярное уравнение 2-го порядка для функции

$$v_2 = \frac{1}{s_2} \left(\sum_{r=1}^3 s_r u_r - u_1 \right) \in C_{x,t}^{(2,1)}(G \cup \gamma(G))$$

при

$$\begin{aligned}
H_2(M) &= \frac{1}{s_2} \left(\sum_{r=1}^3 s_r \Phi_r(M) - \Phi_1(M) \right), \\
L_2 v_2 &\equiv \frac{1}{s_2} \sum_{i,j=1}^n \left(a_{2,ij}^{(1)}(M) - \sum_{r=1}^3 s_r a_{2,ij}^{(r)}(M) \right) D_i D_j v_2 \\
&+ \frac{1}{s_2} \sum_{i=1}^n \left(b_{2,i}^{(1)}(M) - \sum_{r=1}^3 s_r b_{2,i}^{(r)}(M) \right) D_i v_2 \\
&+ \frac{1}{s_2} \left(c_2^{(1)}(M) - \sum_{r=1}^3 s_r c_2^{(r)}(M) \right) v_2 - D_t v_2 = H_2(M) \\
&\forall M \in G \cup \gamma(G).
\end{aligned} \tag{73}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6. При выполнении условия (A.2) определения 1 для матриц (2) ($m = 3$) системы (4) уравнение (73) имеет положительную характеристическую форму при выполнении оценки снизу

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s_2} \sum_{i,j=1}^n \left(a_{2,ij}^{(1)}(M) - \sum_{r=1}^3 s_r a_{2,ij}^{(r)}(M) \right) \xi_i \xi_j &> 0 \\
\forall M \in G \cup \gamma(G), \quad \forall |\xi|_n > 0
\end{aligned} \tag{74}$$

с условием диссипативности

$$\frac{1}{s_2} \left(c_2^{(1)}(M) - \sum_{r=1}^3 s_r c_2^{(r)}(M) \right) \leq 0 \quad \forall M \in G \cup \gamma(G). \tag{75}$$

Тогда для параболического уравнения 2-го порядка (73) выполнен усиленный слабый принцип экстремума (ср. следствие 3 и [5]) и имеет место теорема 3.

ТЕОРЕМА 3 (о единственности решения I-й краевой задачи для уравнения (73)). Пусть на ограниченном множестве $G \cup \gamma(G) \subset \mathbb{R}_{x,t}^{n+1}$ ($n \geq 1$) задано уравнение 2-го порядка (73) с положительной характеристической формой при выполнении оценки (74) и выполнено условие диссипативности (75).

Тогда может существовать не более одного решения $v_2(M)$ класса (55) I-й краевой задачи

$$L_2 v_2(M) = F(M) \quad \forall M \in G \cup \gamma(G), \tag{76}$$

$$v_2(x, 0) = \varphi(x) \quad \forall (x, 0) \in \bar{\gamma}_0(G), \tag{77}$$

$$v_2(M) = \psi(M) \quad \forall M \in \Sigma(G), \tag{78}$$

и, в частности, если функция $v_2(M)$ класса (58) является решением однородной I-й краевой задачи (76) при $F \equiv 0$, (77) при $\varphi \equiv 0$ и (78) при $\psi \equiv 0$, то имеет место тождество

$$v_2(M) \equiv 0 \quad \text{в } \bar{G}. \tag{79}$$

ТЕОРЕМА 4 (о единственности решения I-й краевой задачи для системы (1) ((4)) при $m = 3$). Пусть на ограниченном множестве $G \cup \gamma(G) \subset \mathbb{R}_{x,t}^{n+1}$ ($n \geq 1$) задана параболическая система 2-го порядка (1) ((4)) (где $m = 3$) при положительных собственных значениях (67) ($r, k = \overline{1, 3}$, $m = 3$), матрицы (2) которой удовлетворяют одновременно условиям (A.1) и (A.2) определения 1 с общими фиксированным положительным стохастическим вектором $p = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} > 0$ (где $\sum_{k=1}^3 s_k = 1$, $s_k > 0$, $k = \overline{1, 3}$, и $s_3 \neq s_2$) и фиксированными векторами $f_k \in M_{3 \times 1}$ ($k = \overline{1, 3}$) из (5). Пусть выполнены оценки (56), (74), условия диссипативности (53), (75) и дополнительное условие (параболичности) при $s_2 \neq s_3$

$$\left(1 - \frac{s_2}{s_3}\right) \sum_{i,j=1}^n \left(a_{2,ij}^{(2)}(M) - \frac{s_2}{s_3} a_{3,ij}^{(2)}(M)\right) \xi_i \xi_j > 0$$

$$\forall M = (x, t) \in G \cup \gamma(G), \quad \forall |\xi|_n > 0, \quad (80)$$

а также дополнительное условие (диссипативности) при $s_2 \neq s_3$

$$\left(1 - \frac{s_2}{s_3}\right) \left(c_2^{(2)}(M) - \frac{s_2}{s_3} c_3^{(2)}(M)\right) \leq 0 \quad \forall M \in G \cup \gamma(G). \quad (81)$$

Тогда если вектор-функция $u \in M_{3 \times 1}$ из (3) класса (57) является решением однородной I-й краевой задачи (60)–(62) для параболической системы 2-го порядка (1) (при $m = 3$), то

$$u(x, t) \equiv 0 \quad \text{в } \overline{G}. \quad (82)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку для матриц (2) системы (4) выполнены условия (A.1) и (A.2) определения 1, то системе (1) (с $\Phi_r \equiv 0$, $r = \overline{1, 3}$) соответствуют два однородных скалярных уравнения 2-го порядка: (51) (для v_1 при $m = 3$ и $H_1(M) \equiv 0$) и (73) (для v_2 при $m = 3$ и $H_2(M) \equiv 0$), для которых выполнены условия диссипативности (53) и (75), причем уравнения (51) и (73) параболичны в силу (67), (56), (74). Тогда в силу (63), следствия 5 и тождества (79) теоремы 3 имеем тождества

$$v_1(M) = \sum_{r=1}^3 s_r u_r(M) \equiv 0,$$

$$v_2(M) = \frac{1}{s_2} (v_1(M) - u_1(M)) \equiv 0 \quad \text{в } \overline{G},$$

так что $u_1(M) \equiv 0$ в $\overline{G}$. Но тогда имеем

$$u_1(M) \equiv 0 \equiv s_2 u_2(M) + s_3 u_3(M),$$

т.е.

$$u_1(M) \equiv 0, \quad u_3(M) \equiv -\frac{s_2}{s_3}u_2(M) \quad \text{в } \overline{G}.$$

Подставляя во второе ($r = 2$) однородное скалярное уравнение системы (1) (при $\Phi_2 \equiv 0$, $m = 3$) $u_1 \equiv 0$, $u_3 \equiv -\frac{s_2}{s_3}u_2$, получаем для компоненты u_2 класса (57) уравнение 2-го порядка

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^n \left(a_{2,ij}^{(2)}(M) - \frac{s_2}{s_3} a_{3,ij}^{(2)}(M) \right) D_i D_j u_2 \\ & + \sum_{i=1}^n \left(b_{2,i}^{(2)}(M) - \frac{s_2}{s_3} b_{3,i}^{(2)}(M) \right) D_i u_2 \\ & + \left(c_2^{(2)}(M) - \frac{s_2}{s_3} c_3^{(2)}(M) \right) u_2 - \left(1 - \frac{s_2}{s_3} \right) D_t u_2 = 0 \\ & \forall M = (x, t) \in G \cup \gamma(G) \quad (s_2 \neq s_3), \end{aligned} \quad (83)$$

параболическое при выполнении дополнительной оценки (80). При выполнении условия диссипативности (81) имеем, учитывая однородные условия (61), (62) (при $r = 2$, $m = 3$),

$$\begin{aligned} u_2(x, 0) &= 0 \quad \forall (x, 0) \in \overline{\gamma}_0(G), \\ u_2(M) &= 0 \quad \forall M \in \Sigma(G). \end{aligned} \quad (84)$$

Но тогда к однородной I-й краевой задаче (83), (84) применима обычная теорема единственности (основанная на усиленном принципе экстремума из [5] и следствии 3), дающая тождество $u_2(M) \equiv 0 \equiv u_3(M) \equiv u_1(M)$ в $\overline{G}$. Этим тождество (82) теоремы 4 доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Метод спуска, использованный при доказательстве теоремы 4 в случае $m = 3$, позволяет доказать аналогичную теорему единственности и в случае $m \geq 4$ при введении условий (A.k) для $k = \overline{1, m-1}$, т.е. равенств

$$\beta_{(k-1)m+r} = 0 \quad \forall r = \overline{1, k-1}, \overline{k+1, m} \quad (\forall r \neq k),$$

с последующим выражением компонент $\{u_1, \dots, u_m\}$ решения системы (1) через одну из них u_i и сведением i -го уравнения системы (1) (при $r = i$) к одному параболическому уравнению 2-го порядка для u_i .

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Выполнение условия (A.1) определения 1 в теореме 1 для системы (1) ((4)) сводится к выполнению при $k = \overline{2, m} \quad \forall M \in G \cup \gamma(G)$ тождеств

$$\begin{aligned} \frac{1}{s_k} \sum_{r=1}^m s_r a_{k,ij}^{(r)}(M) &\equiv \frac{1}{s_{k-1}} \sum_{r=1}^m s_r a_{k-1,ij}^{(r)}(M) \stackrel{\text{def}}{=} \mu_{ij}(M), \\ \frac{1}{s_k} \sum_{r=1}^m s_r b_{k,i}^{(r)}(M) &\equiv \frac{1}{s_{k-1}} \sum_{r=1}^m s_r b_{k-1,i}^{(r)}(M) \stackrel{\text{def}}{=} \mu_i(M), \end{aligned}$$

где $i, j = \overline{1, n}$,

$$\frac{1}{s_k} \sum_{r=1}^m s_r c_k^{(r)}(M) \equiv \frac{1}{s_{k-1}} \sum_{r=1}^m s_r c_{k-1}^{(r)}(M) \stackrel{\text{def}}{=} \mu(M),$$

допускающих векторно-матричную запись (см. (2))

$$\begin{aligned} p^T A_{ij}(M) &= \mu_{ij}(M) p^T, & p^T B_i(M) &= \mu_i(M) p^T, & i, j &= \overline{1, n}, \\ p^T C(M) &= \mu(M) p^T, \end{aligned} \quad (85)$$

где $p = \begin{bmatrix} s_1 \\ \dots \\ s_m \end{bmatrix} \in M_{m \times 1}$ взят из (5) и $p^T = [s_1 \dots s_m] \in M_{1 \times m}$. Но выполнение (85)

означает, что матрицы $A_{ij}(M), B_i(M), C(M) \in M_{m \times m}$ ($i, j = \overline{1, n}$) системы (4) имеют общий левый собственный вектор $p \in M_{m \times 1}$ из (5) с соответствующими собственными значениями $\mu_{ij}(M), \mu_i(M), \mu(M)$ ($i, j = \overline{1, n}$). Умножая систему (4) слева на p^T , получаем в силу (85) уравнение (51) для функции $v_1(M) = \langle p, u(M) \rangle$ из (50), допускающую запись в виде

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n \mu_{ij}(M) D_i D_j v_1(M) + \sum_{i=1}^n \mu_i(M) D_i v_1(M) \\ + \mu(M) v_1(M) - D_t v_1(M) = \langle p, \Phi(M) \rangle. \end{aligned} \quad (86)$$

ПРИМЕР. Рассмотрим систему (1) при $m = 2, n \geq 2$ вида

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1(u) &\equiv \Delta u_1 + \Delta u_2 + \sum_{k=1}^2 c_k^{(1)}(M) u_k - D_t u_1 = \Phi_1(M), \\ \mathcal{L}_2(u) &\equiv \sum_{k=1}^2 \left(\sum_{i=1}^n a_{k,ii}^{(2)}(M) D_i D_i u_k + c_k^{(2)}(M) u_k \right) - D_t u_2 \\ &= \Phi_2(M) \quad \forall M \in G \cup \gamma(G) \end{aligned} \quad (87)$$

и подберем $a_{k,ii}^{(2)}(M) > 0$ ($k = 1, 2; i = \overline{1, n}$) такими, чтобы для системы (87) выполнялись условия (A.1) теоремы 1. Перепишем систему (87) в виде (см. (2)–(4))

$$\mathcal{L}(u) \equiv \sum_{i=1}^n A_{ii}(M) D_i D_i u + C(M) u - D_t u = \Phi(M), \quad (88)$$

где положено

$$\begin{aligned} A_{ii}(M) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a_{1,ii}^{(2)}(M) & a_{2,ii}^{(2)}(M) \end{bmatrix}, \\ C(M) &= \begin{bmatrix} c_1^{(1)}(M) & c_2^{(1)}(M) \\ c_1^{(2)}(M) & c_2^{(2)}(M) \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}, \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (89)$$

Если матрицы $A_{ii}(M), C(M) \in M_{2 \times 2}$ удовлетворяют условию (А.1) теоремы 1 с общим вектором $p \in M_{2 \times 1}$ из (5), то в силу замечания 8 вектор p является общим левым собственным вектором для этих матриц, так что имеет место (85) для $A_{ii}(M)$ и $C(M)$. Но тогда для собственных значений этих матриц из (85), (89) имеем

$$\begin{aligned} \mu_{ii}(M) &\stackrel{\text{def}}{=} 1 + \frac{s_2}{s_1} a_{1,ii}^{(2)}(M) \equiv \frac{1}{s_2} (s_1 + s_2 a_{2,ii}^{(2)}(M)) > 0, \quad i = \overline{1, n}, \\ \mu(M) &\stackrel{\text{def}}{=} c_1^{(1)}(M) + \frac{s_2}{s_1} c_1^{(2)}(M) \equiv \frac{1}{s_2} (s_1 c_2^{(1)}(M) + s_2 c_2^{(2)}(M)), \end{aligned} \quad (90)$$

и поэтому в системе (88) должно быть (после выражения из (90) $a_{2,ii}^{(2)}$ через $a_{1,ii}^{(2)}$ и $c_2^{(2)}$ через $c_1^{(1)}, c_2^{(1)}, c_1^{(2)}$)

$$A_{ii}(M) = \begin{bmatrix} 1 & \\ a_{1,ii}^{(2)}(M) & 1 - \frac{s_1}{s_2} + \frac{s_2}{s_1} a_{1,ii}^{(2)}(M) \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}, \quad i = \overline{1, n}$$

(где при выполнении оценок снизу

$$a_{1,ii}^{(2)}(M) > 0, \quad 1 + \frac{s_2}{s_1} a_{1,ii}^{(2)}(M) > \frac{s_1}{s_2} > 0$$

нижняя строка $A_{ii}(M)$ состоит из положительных элементов), и

$$A_{ii}(M) = \begin{bmatrix} c_1^{(1)}(M) & c_2^{(1)}(M) \\ c_1^{(2)}(M) & c_1^{(1)}(M) + \frac{s_2}{s_1} (c_1^{(2)}(M) - c_2^{(1)}(M)) \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}.$$

Так найденной системе (88) соответствует скалярное параболическое (см. (90)) уравнение 2-го порядка (51) для $v_1 = \langle p, u \rangle \in C_{x,t}^{2,1}(G \cup \gamma(G))$ вида (86) (см. (90))

$$\sum_{i=1}^n \mu_{ii}(M) D_i D_i v_1 + \mu(M) v_1 = \langle p, \Phi(M) \rangle$$

с условием диссипативности

$$\mu(M) \equiv c_1^{(1)}(M) + \frac{s_2}{s_1} c_1^{(2)}(M) \leq 0 \quad \forall M \in G \cup \gamma(G).$$

В силу теоремы 1 найденная система (87) ((88)) обладает СПМин (СПМах) в смысле определения 2.

Список литературы

1. Ильин А. М., Калашников А. С., Олейник О. А. Линейные уравнения второго порядка параболического типа // УМН. 1962. Т. 17. № 3. С. 3–146.
2. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
3. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968.
4. Камынин Л. И., Химченко Б. Н. Теоремы Жиро о временной производной для параболического оператора второго порядка // Вестн. МГУ. Сер. матем., мех. 1977. № 5. С. 45–53.
5. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.
6. Мазья В. Г., Кресин Г. И. О принципе максимума для сильно эллиптических и параболических систем второго порядка с постоянными коэффициентами // Матем. сб. 1964. Т. 125. № 4. С. 458–480.
7. Protter M. H., Weinberger H. F. Maximum principle in differential equations. N.J., 1967.
8. Alikakos N. Quantative maximum principle and strongly coupled gradientlike reaction-diffusion systems // Proceedings of the Royal Sociaty of Edinburg. 1983. V. 94. № 3–4. P. 265–284.
9. Сабитов К. Б. Экстремальные свойства решений одного класса параболических систем и их применения // Дифференц. уравн. 1990. Т. 26. № 2. С. 287–297.
10. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989.

Поступило в редакцию
20.XI.1995