Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Вик. С. Куликов, Конечная определенность коммутанта фундаментальной группы дополнения к плоской кривой, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1997, том 61, выпуск 5, 63–70

DOI: <https://doi.org/10.4213/im151>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 12:47:46

УДК 512.7+515.1

Вик. С. Куликов

Конечная определенность коммутанта фундаментальной группы дополнения к плоской кривой

В статье доказана следующая теорема. Коммутант фундаментальной группы дополнения к плоской неприводимой проективной кривой является конечно определенной группой.

Библиография: 3 наименования.

0. Пусть $\overline{D} \subset \mathbb{P}^2$ – проективная алгебраическая кривая, определенная над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Обозначим через $\overline{G} = \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \overline{D})$ фундаментальную группу дополнения к кривой $\overline{D}$ в $\mathbb{P}^2$.

Как действительное многообразие $\overline{D}$ является подмногообразием действительной коразмерности 2 в $\mathbb{P}^2$. Эта ситуация аналогична ситуации в теории узлов: узел k является подмногообразием действительной коразмерности 2 в трехмерной сфере S^3 . Обозначим через $G = \pi_1(S^3 \setminus k)$ группу узла k и через $N = [G, G]$ ее коммутант. Хорошо известно, что множество узлов распадается на два подмножества в соответствии со свойствами их групп, а именно, по теореме Столлинга [3] N является конечно определенной группой тогда и только тогда, когда k – расслоенный узел, т.е. $S^3 \setminus k$ допускает структуру расслоения над S^1 с поверхностями Зайферта в качестве слоев.

Цель этой короткой заметки – доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. *Если $\overline{D} \subset \mathbb{P}^2$ – неприводимая проективная кривая, то коммутант $N = [\overline{G}, \overline{G}]$ группы $\overline{G} = \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \overline{D})$ является конечно определенной группой.*

Эта теорема является простым следствием следующего аналога этой теоремы для случая аффинной кривой.

ТЕОРЕМА 2. *Если $D \subset \mathbb{C}^2$ – аффинная неприводимая кривая такая, что ее проективное замыкание $\overline{D} \subset \mathbb{P}^2$ и прямая в бесконечности $L_\infty = \mathbb{P}^2 \setminus \mathbb{C}^2$ пересекаются трансверсально, то коммутант $N = [G, G]$ группы $G = \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus D)$ является конечно определенной группой.*

Работа была выполнена при частичной финансовой поддержке фонда INTAS (грант № 94-4373) и РФФИ (грант № 96-01-00614).

В [1] уже было доказано, что коммутант $N = [G, G]$ группы $G = \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus D)$ конечно порожден для любой неприводимой аффинной кривой. Доказывая теоремы 1 и 2, мы будем существенно опираться на идеи и результаты из [1].

Ниже мы рассмотрим более общую ситуацию, когда $\overline{D} = \overline{D}_1 + \dots + \overline{D}_n$ является приведенной приводимой кривой.

Пусть $L \subset \mathbb{P}^2$ – прямая. Положим $L = L_\infty$, $\mathbb{C}^2 = \mathbb{P}^2 \setminus L_\infty$, $D_i = \overline{D}_i \cap \mathbb{C}^2$, и пусть $f_i(x, y) = 0$ – уравнение D_i , где $f_i(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ – неприводимый многочлен.

Обозначим через

$$F: X = \mathbb{C}^2 \setminus D \rightarrow \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad (1)$$

морфизм, заданный уравнением

$$z = \prod_{i=1}^n f_i(x, y). \quad (2)$$

Мы будем предполагать, что выполнено следующее условие:

$$\text{общий слой } F^{-1}(z) = Y_z \text{ связан.} \quad (*)$$

Отметим, что если D связно в $\mathbb{C}^2$, то F удовлетворяет условию $(*)$.

ТЕОРЕМА 2'. Если $\overline{D} = \overline{D}_1 + \dots + \overline{D}_n \subset \mathbb{P}^2$ и L_∞ пересекаются трансверсально и D удовлетворяет условию $(*)$, то ядро N индуцированного гомоморфизма $F_*: \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus D) \rightarrow \pi_1(\mathbb{C}^*)$ является конечно определенной группой.

Теорема 2 является следствием теоремы 2', так как если D – неприводимая кривая, то $\ker F_*$ совпадает с коммутантом группы $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus \overline{D})$.

1. Теорема 1 следует из теоремы 2. Действительно, рассмотрим неприводимую проективную кривую $\overline{D} \subset \mathbb{P}^2$ и выберем бесконечно удаленную прямую $L_\infty \subset \mathbb{P}^2$ так, что $\overline{D}$ и L_∞ пересекаются трансверсально. Имеем естественный гомоморфизм

$$i_*: G = \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus D) \rightarrow \overline{G} = \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \overline{D}),$$

индуцированный вложением $i: \mathbb{C}^2 \setminus D \rightarrow \mathbb{P}^2 \setminus \overline{D}$. Очевидно, i_* является эпиморфизмом. Согласно [2], так как $\overline{D}$ и L_∞ пересекаются трансверсально, ядро гомоморфизма i_* является бесконечной циклической группой, порожденной простым обходом вокруг бесконечно удаленной прямой. Обозначим эту образующую ядра $\ker i_*$ через γ_∞ . Так как i_* является эпиморфизмом, то ограничение $j: N \rightarrow \overline{N} = [\overline{G}, \overline{G}]$ гомоморфизма i_* на N также является эпиморфизмом.

Пусть $f(x, y) = 0$ – уравнение D в $\mathbb{C}^2$, где $f(x, y)$ – неприводимый многочлен. Многочлен $f(x, y)$ определяет морфизм $F: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^1$, заданный уравнением

$f(x, y) = z$ так, что $D = F^{-1}(0)$ является нулевым слоем. Рассмотрим ограничение $\varphi: \mathbb{C}^2 \setminus D \rightarrow \mathbb{C}^1 \setminus \{0\} = \mathbb{C}^*$ морфизма F на $\mathbb{C}^2 \setminus D$. Индуцированный этим отображением гомоморфизм $\varphi_*: G \rightarrow \pi_1(\mathbb{C}^*) \cong \mathbb{Z}$ является эпиморфизмом, так как общий слой морфизма φ связан.

С одной стороны, хорошо известно, что $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus D)$ порождается следующими образующими, которые ниже мы будем называть *геометрическими*. По определению геометрическая образующая $\gamma = l^{-1}sl$ — это петля, состоящая из пути l , окружности малого радиуса s вокруг D и пути l^{-1} , где l соединяет базисную точку фундаментальной группы с точкой x , близкой к D , s есть (положительно ориентированная) окружность, лежащая в действительной плоскости, проходящей через x и пересекающейся трансверсально с D в некоторой точке $y \in D$, являющейся центром окружности s . Если D — неприводимая кривая, то все геометрические образующие сопряжены друг другу. Следовательно, естественный эпиморфизм

$$\alpha: G \rightarrow G/N \simeq H_1(\mathbb{C}^2 \setminus D, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}, \quad N = [G, G],$$

отображает все геометрические образующие группы G в одну и ту же образующую группы $\mathbb{Z}$. Легко видеть, что φ_* также отображает все геометрические образующие группы G в некоторую образующую $\mathbb{Z}$. Поэтому гомоморфизмы φ_* и α совпадают. Более того, гомоморфизм α позволяет нам рассмотреть G как полупрямое произведение $G \simeq N \ltimes \mathbb{Z}$. Зафиксируем одну из геометрических образующих, обозначим ее через γ . Мы можем считать, что γ — это образующая второго сомножителя $\mathbb{Z}$ в полупрямом произведении. Тогда γ_∞ может быть представлено в виде произведения: $\gamma_\infty = \nu \gamma^d$, где $d = \deg f(x, y)$ — степень кривой D и ν — некоторый элемент группы N . Так как пересечение $\ker i_* \cap N$ тривиально, то гомоморфизм $j: N \rightarrow \bar{N}$ является изоморфизмом.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2'. Рассмотрим отображение F , определенное многочленом (2), и обозначим через $X = \mathbb{C}^2 \setminus D$ дополнение к D . Хорошо известно, что существует конечное множество точек $\{z_1, \dots, z_n\} \subset \mathbb{C}^*$ такое, что

$$F: X \setminus F^{-1}(\{z_1, \dots, z_n\}) \rightarrow \mathbb{C}^* \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$$

является локально тривиальным C^∞ -расслоением. Как и в [1], пусть B_i — диск с центром в точке z_i радиуса $r_i \ll 1$, и пусть ∂B_i — его граница. Выберем две не совпадающие между собой точки $z_{i,1}, z_{i,2}$, принадлежащие ∂B_i . Точки $z_{i,1}$ и $z_{i,2}$ делят ∂B_i на две дуги, $\gamma_{i,1}$ и $\gamma_{i,2}$. Выберем непересекающиеся пути γ_i , соединяющие точки $z_{i,1}$ и $z_{i+1,2}$ ($z_{n+1,2} = z_{1,2}$) и лежащие вне $\cup B_i$, и пусть $\gamma_{i,1}$ — такая дуга границы ∂B_i , что $l_{in} = (\cup \gamma_{i,1}) \cup (\cup \gamma_i)$ является границей ограниченного множества V , содержащего начало координат $o \in \mathbb{C}^1$ и такого, что $z_i \notin V$ для всех i ,

$1 \leq i \leq n$ (см. рис. 1 в [1]). Пусть l_{ex} – граница множества $V \cup (\cup B_i)$. Положим $T = (\cup B_i) \cup (\cup \gamma_i)$. Множество $Z = F^{-1}(T)$ называется *ожерельем* кривой D .

Так как T является ретрактом пространства $\mathbb{C}^*$ и расслоение $F: X \setminus Z \rightarrow \mathbb{C}^* \setminus T$ локально тривиально, то имеет место следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 [1]. *Если D удовлетворяет условию (*), то $X = \mathbb{C}^2 \setminus D$ и ожерелье Z кривой D гомотопически эквивалентны.*

Таким образом, $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus D) \simeq \pi(Z)$, и, более того, мы имеем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus D) & \xleftarrow{\sim} & \pi(Z) \\ F_* \downarrow & & \uparrow F_* \\ \pi_1(\mathbb{C}^*) & \xleftarrow{\sim} \pi_1(T) \xrightarrow{\sim} & \mathbb{Z}. \end{array}$$

Легко видеть, что если D удовлетворяет условию (*), то F_* является эпиморфизмом.

Пусть $z_0 \in \gamma_n$ – общая точка, и пусть $Y = F^{-1}(z_0)$ – слой над z_0 . Вложение $Y \subset Z$ индуцирует гомоморфизм $\psi: \pi_1(Y) \rightarrow \pi_1(Z)$. Очевидно, что $\text{Im } \psi \subset \ker F_*$. В [1] была доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА. *Если $D \subset \mathbb{C}^2$ удовлетворяет условию (*), то последовательность*

$$\pi_1(Y) \xrightarrow{\psi} \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus D) \xrightarrow{F_*} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

является точной.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если $D \subset \mathbb{C}^2$ удовлетворяет условию (*), то $N = \ker F_*$ является конечно порожденной группой.*

Обозначим через $Z_{ex} = F^{-1}(l_{ex})$ прообраз кривой l_{ex} . Вложение $Y \subset Z_{ex} \subset Z$ и морфизм F приводят к следующей коммутативной диаграмме:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \pi_1(Y) & \xrightarrow{\alpha_{ex}} & \pi_1(Z_{ex}) & \xrightarrow{F_*} & \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \psi & & \downarrow \beta_{ex} & & \downarrow \simeq \\ 1 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{\alpha} & \pi_1(Z) & \xrightarrow{F_*} & \mathbb{Z} \longrightarrow 1 \end{array} \quad (3)$$

Отображение $F: Z_{ex} \rightarrow l_{ex}$ является локально тривиальным расслоением. Поэтому все строки в этой диаграмме являются точными.

Обозначим через h_{ex} диффеоморфизм слоя Y , индуцированный обходом вдоль l_{ex} .

3. Зафиксируем точку $y_0 \in Y_0 = Y$. Пусть $l_i \subset l_{ex}$ – путь, соединяющий точку z_0 с точкой $z_{i,2}$ (мы используем здесь обозначение из п. 2) и состоящий из части пути γ_n до точки $z_{1,1}$, пути от $z_{1,1}$ до $z_{1,2}$ вдоль $\gamma_{1,2}$, пути γ_1 , пути вдоль $\gamma_{2,2}$ из $z_{2,1}$ до $z_{2,2}$ и т.д. до точки $z_{i,1}$. Если мы зафиксируем локальные тривиализации расслоения $F: Z_{ex} \rightarrow l_{ex}$ над некоторым покрытием петли l_{ex} , то пути l_i однозначно поднимаются до путей $\bar{l}_i \subset Z_{ex}$, начинающихся в точке y_0 . Обозначим через y_i конец пути $\bar{l}_i$.

Пусть $\bar{B}_i = F^{-1}(B_i)$. Выбранные выше пути $\bar{l}_i$ определяют гомоморфизмы $\rho_i: \pi_1(\bar{B}_i, y_i) \rightarrow \pi_1(Z, y_0)$. Обозначим через $\psi_i: \pi_1(Y_i, y_i) \rightarrow \pi_1(\bar{B}_i, y_i)$ гомоморфизмы, индуцированные вложениями, где $Y_i = F^{-1}(z_{i,1})$. По лемме 2 из [1] гомоморфизмы ψ_i являются эпиморфизмами.

Так как $F: Z_{ex} \rightarrow l_{ex}$ является локально тривиальным C^∞ -расслоением, то выбранные выше пути $\bar{l}_i$ определяют изоморфизмы $\alpha_i: \pi_1(Y_i, y_i) \rightarrow \pi_1(Y_0, y_0)$. Следовательно, используя эти изоморфизмы, мы можем отождествить группы $\pi_1(Y_i, y_i)$ с группой $\pi_1(Y_0, y_0)$ и определить эпиморфизмы $\psi_i: \pi_1(Y_0, y_0) \rightarrow \pi_1(\bar{B}_i, y_i)$.

4. Отождествим $\pi_1(l_{ex})$ и $\pi_1(T)$, используя изоморфизм, индуцированный вложением $l_{ex} \subset T$. Точная последовательность

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow \pi_1(Z, y_0) \xrightarrow{F_*} \pi_1(T, z_0) \longrightarrow 1$$

определяет бесконечное циклическое накрытие $\tilde{g}: \tilde{Z} \rightarrow Z$, которое может быть включено в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Z} & \xrightarrow{\tilde{F}} & \tilde{T} \\ \tilde{g} \downarrow & & \downarrow g \\ Z & \xrightarrow[F]{} & T, \end{array}$$

где $g: \tilde{T} \rightarrow T$ – универсальное накрытие. Выберем точку $\tilde{y}_0 \in \tilde{g}^{-1}(y_0)$, и пусть $\tilde{z}_0 = \tilde{F}(\tilde{y}_0)$. Тогда $\pi_1(\tilde{Z}, \tilde{y}_0) = N$.

Пространство $\tilde{T}$ является несвязным объединением счетного числа дисков $B_{i,j}$, $j \in \mathbb{Z}$, так что $B_{i,j} \subset g^{-1}(B_i)$. Эти диски соединены последовательно путями (см. рис. 2 в [1]) так, что вместе с этими путями они образуют цепь. Занумеруем диски $B_{i,j}$ в порядке, индуцированном порядком в этой цепи так, как это изображено на рис. 2 в [1]. На каждом пути, соединяющем соседние диски, выберем по точке $\tilde{z}_i$ (на пути, соединяющем диски $B_{n,-1}$ и $B_{1,1}$, мы берем выбранную выше точку $\tilde{z}_0$)

и занумеруем их в порядке, индуцированном порядком на цепи (так, что точка $\tilde{z}_0$ имеет номер 0).

Обозначим через $\tilde{T}_{kn,mn}$ “часть” пространства $\tilde{T}$, лежащего между точками $\tilde{z}_{kn}$ и $\tilde{z}_{mn}$, $m > k$, где n – число дисков B_i , принадлежащих T . Пусть $\tilde{Z}_{kn,mn} = \tilde{F}^{-1}(\tilde{T}_{kn,mn})$.

ЛЕММА 1. $\pi_1(\tilde{Z}_{kn,mn})$ является конечно определенной группой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tilde{z}_{0,i,j}$ – центр диска $B_{i,j}$. Рассмотрим пространство

$$\tilde{Z}_{kn,mn}^0 = \tilde{F}^{-1} \left(\tilde{T}_{kn,mn} \setminus \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=k}^m \tilde{z}_{0,i,j} \right).$$

Так как расслоения $\tilde{F}: \tilde{F}^{-1}(B_{i,j} \setminus \{\tilde{z}_{0,i,j}\}) \rightarrow B_{i,j} \setminus \{\tilde{z}_{0,i,j}\}$ являются локально тривиальными C^∞ -расслоениями над проколотыми дисками с некомпактными римановыми поверхностями в качестве слоев, то фундаментальные группы $\pi_1(\tilde{F}^{-1}(B_{i,j} \setminus \{\tilde{z}_{0,i,j}\}))$ являются конечно определенными группами. Применяя теорему Зайферта–ван Кампена, получаем, что $\pi_1(\tilde{Z}_{kn,mn}^0)$ является конечно определенной группой. Прообраз $\tilde{F}^{-1}(\bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=k}^m \tilde{z}_{0,i,j})$ есть объединение конечного числа римановых поверхностей, и ядро естественного эпиморфизма $\pi_1(\tilde{Z}_{kn,mn}^0) \rightarrow \pi_1(\tilde{Z}_{kn,mn})$ порождается геометрическими образующими – простыми обходами вокруг этих поверхностей. Так как для неприводимой римановой поверхности любые две геометрические образующие сопряжены друг другу, то $\pi_1(\tilde{Z}_{kn,mn})$ является конечно определенной группой.

5. ЛЕММА 2. Если $f(x, y)$ – приведенный многочлен, $\overline{D}$ и L_∞ пересекаются трансверсально, то $h_{ex}^d = \text{id}$, где $d = \deg f(x, y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Морфизм F задает рациональное отображение

$$F: \mathbb{P}^2 = \mathbb{C}^2 \cup L_\infty \rightarrow \mathbb{P}^1 = \mathbb{C}^1 \cup \{\infty\}.$$

Пусть $\sigma: \overline{\mathbb{P}}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ – композиция σ -процессов такая, что $\overline{F} = F \cdot \sigma: \overline{\mathbb{P}}^2 \rightarrow \mathbb{P}^1$ является морфизмом.

Пусть $\tilde{f}(x_0, x_1, x_2)$ – однородный многочлен, соответствующий многочлену f , $f(x, y) = \tilde{f}(1, x, y)$. Уравнение $z^d = \tilde{f}(x_0, x_1, x_2)$ определяет нормальную проективную поверхность $\tilde{X}_d \subset \mathbb{P}^3$ и морфизм $\tilde{\phi}_d: \tilde{X}_d \rightarrow \mathbb{P}^2$. Прообраз $\tilde{\phi}_d^{-1}(L_\infty) = \overline{Y}_\infty$ является неособой кривой. Обозначим через $\overline{X}_d$ нормализацию поверхности $\overline{\mathbb{P}}^2$ в поле $\mathbb{C}(x, y, z)$ и через $\phi_d: \overline{X}_d \rightarrow \overline{\mathbb{P}}^2$ соответствующий морфизм.

Выберем некоторую окрестность U точки $\infty \in \mathbb{P}^1$, изоморфную диску $\Delta = \{u \in \mathbb{C} \mid |u| \leq 1\}$ (точка $u = 0$ соответствует точке $\infty \in U$) и такую, что отображение

$\bar{F}: \bar{F}^{-1}(U \setminus \infty) \rightarrow U \setminus \infty$ является гладким собственным морфизмом. Положим $\bar{U} = \bar{F}^{-1}(U)$ и $\tilde{U} = \phi_d^{-1}(\bar{U})$. Мы получим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{U} & \xrightarrow{\phi_d} & \bar{U} \\ \downarrow \bar{F}_d & & \downarrow \bar{F} \\ \Delta & \xrightarrow{\psi_d} & U, \end{array} \quad (4)$$

где ψ_d определено уравнением $u = v^d$ (v – координата в Δ). Так как прообраз $\bar{F}_d^{-1}(0) = \phi_d^{-1}(L_\infty)$ является невырожденным слоем расслоения $\bar{F}_d$, то монодромия h_d , действующая на общем слое и определяемая обходом вокруг границы диска Δ , тривиальна. С другой стороны, из коммутативной диаграммы (3) следует, что $h_d = h_{ex}^d$. Лемма 2 доказана.

6. Следующая лемма завершает доказательство теоремы 2'.

ЛЕММА 3. Если $f(x, y)$ и $\bar{D}$ удовлетворяют условиям леммы 2, то $\pi_1(\tilde{Z}_{kdn, mdn})$ изоморфны $\pi_1(\tilde{Z}_{0, dn})$ для всех k и m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tilde{l}_{ex} = g^{-1}(l_{ex})$ и $\tilde{Z}_{ex} = \tilde{g}^{-1}(Z_{ex})$. Тогда $\tilde{F}: \tilde{Z}_{ex} \rightarrow \tilde{l}_{ex}$ является тривиальным C^∞ -расслоением. Рассмотрим слои $Y_s = \tilde{F}^{-1}(\tilde{z}_s)$ этого расслоения. Если мы выберем тривиализацию, то мы можем отождествить все эти слои; другими словами, выбранная тривиализация индуцирует диффеоморфизмы $\alpha_{i,j}: Y_i \rightarrow Y_j$. Если $kdn \leq s \leq mdn$, то $Y_s \subset \tilde{Z}_{kdn, mdn}$, и это вложение индуцирует эпиморфизм $\psi_{s, kdn, mdn}: \pi_1(Y_s) \rightarrow \pi_1(Z_{kdn, mdn})$ такой, что если $kdn \leq r \leq mdn$, то $\psi_{s, kdn, mdn} \alpha_{r, s^*} = \psi_{r, kdn, mdn}$.

Все пространства $\tilde{Z}_{kdn, (k+1)dn}$, $k \in \mathbb{Z}$, естественным образом диффеоморфны друг другу, так как эти пространства являются прообразами d -кратных обходов ожерелья T , начинающихся в точке z_0 . Эти диффеоморфизмы позволяют нам отождествить фундаментальные группы $\pi_1(\tilde{Z}_{kdn, (k+1)dn}) \simeq \pi$ для всех k . Это отождествление согласовано со сделанным отождествлением слоев Y_r ; другими словами, следующая диаграмма является коммутативной:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(Y_r) & \xrightarrow{\alpha_{r, s^*}} & \pi_1(Y_s) \\ \downarrow \psi_{r, kdn, (k+1)dn} & & \downarrow \psi_{s, mdn, (m+1)dn} \\ \pi_1(\tilde{Z}_{kdn, (k+1)dn}) & \xrightarrow{\simeq} & \pi_1(\tilde{Z}_{mdn, (m+1)dn}). \end{array}$$

Чтобы получить $\tilde{Z}_{0, 2dn}$ из $\tilde{Z}_{0, dn}$ и $\tilde{Z}_{dn, 2dn}$ (аналогично для $\tilde{Z}_{-2dn, 0}$), мы должны склеить эти два подпространства пространства $\tilde{Z}_{0, 2dn}$ вдоль диффеоморфных

слоев $Y_{dn} \subset \tilde{Z}_{0,dn}$ и $Y_{dn} \subset \tilde{Z}_{dn,2dn}$. Правило склейки определяется монодромией h_{ex}^d . В нашем случае по лемме 2 монодромия $h_{ex}^d = \text{id}$. Применяя теорему Зайферта–ван Кампена, получаем существование изоморфизма $\psi_{0,2}: \pi_1(\tilde{Z}_{0,dn}) \rightarrow \pi_1(\tilde{Z}_{0,2dn})$, согласованного с эпиморфизмами α_* . Очевидная индукция завершает доказательство леммы 3.

Список литературы

1. Куликов Вик. С. Многочлены Александра плоских алгебраических кривых // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 42. №1. С. 67–90.
2. Nori M. Zariski's conjecture and related problems // Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. Ser.4. 1983. V. 16. P. 305–344.
3. Stallings J. R. On fibering certain 3-manifolds // Topology of 3-manifolds. Proc. Top. Inst. Univ. Georgia, 1961; // Englewood Cliffs / Ed. M. K. Fort. N. J.: Prentice Hall, 1962. P. 95–100.

e-mail: victor@olya.ips.ras.ru

Поступило в редакцию

4.VI.1996