Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Б. Орочко, Некоторые свойства индексов дефекта симметрических вырождающихся эллиптических операторов второго порядка в $L^2(\mathbb{R}^m)$, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1997, том 61, выпуск 5, 71–98

DOI: <https://doi.org/10.4213/im152>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 12:26:07

УДК 517.9

Ю. Б. Орочко

**Некоторые свойства индексов дефекта
симметрических вырождающихся эллиптических
операторов второго порядка в $L^2(\mathbb{R}^m)$**

Пусть H – минимальный оператор в $L^2(\mathbb{R}^m)$, $m \geq 2$, порожденный действительным формально самосопряженным вырождающимся эллиптическим ДВ (дифференциальным выражением) второго порядка $\mathcal{L}$. На примере оператора $H = H_0$, отвечающего ДВ $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 = -\operatorname{div} a(|x|) \operatorname{grad}$, где $a(r)$, $r \in [0, +\infty)$, – скалярная неотрицательная функция, устанавливается зависимость значений индексов дефекта H от степени гладкости старших коэффициентов $\mathcal{L}$. Вторым результатом, полученным в работе, является признак самосопряженности оператора H , в котором отсутствуют какие-либо ограничения на поведение потенциала ДВ $\mathcal{L}$ при $|x| \rightarrow +\infty$. Эти результаты не имеют прямых аналогов в случае эллиптичности ДВ $\mathcal{L}$.

Библиография: 18 наименований.

Введение

Характерной чертой известных признаков самосопряженности минимального оператора H в пространстве $L^2(\mathbb{R}^m)$, $m \geq 2$, порожденного эллиптическим ДВ (дифференциальным выражением)

$$\mathcal{L} = -\operatorname{div} A(x) \operatorname{grad} + q(x) \quad (1)$$

с действительной симметрической положительно определенной (в каждой точке $x \in \mathbb{R}^m$) матрицей $A(x) = \{a_{jk}(x)\}_{j,k=1}^m$ и действительным потенциалом $q(x)$ является обязательное присутствие в них тех или иных ограничений на $A(x)$ и $q(x)$ в окрестности бесконечно удаленной точки. В исследованиях 60–70-х годов выяснилось, что имевшиеся в первоначальных вариантах этих результатов (и представлявшиеся естественными) требования принадлежности старших коэффициентов $a_{jk}(x)$ классу $C^1(\mathbb{R}^m)$ можно ослабить; вместо указанного локального ограничения достаточно потребовать, например, выполнения условий

$$a_{jk}(x) \in C(\mathbb{R}^m), \quad \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_j}(x) \in (L_p \cap L_2)_{\text{loc}}(\mathbb{R}^m), \quad p > m.$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Международного научного фонда (грант № 3I000) и РФФИ (грант № 96-01-01438).

В настоящей работе рассматриваются вопросы, относящиеся к условиям самосопряженности оператора H в случае вырождающейся эллиптичности ДВ $\mathcal{L}$. Мы хотим обратить внимание на два новых явления, возникающие в этой ситуации. Одно из них состоит в зависимости значений индексов дефекта оператора H от степени гладкости старших коэффициентов $a_{jk}(x) \in C(\mathbb{R}^m)$ вырождающегося эллиптического ДВ $\mathcal{L}$, а другое – в существовании условий самосопряженности минимального оператора, отвечающего такому ДВ, в котором нет никаких ограничений на поведение его потенциала при $|x| \rightarrow +\infty$.

Результаты, относящиеся к первому из указанных явлений (теоремы 1–3), изложены в § 1. Второму из них посвящен § 2, основным результатом которого является теорема 4. Теорема 4 имеет связь с интересным явлением неустойчивости свойства несамосопряженности оператора H (в эллиптическом и вырождающемся эллиптическом случае) относительно вариации старших коэффициентов ДВ $\mathcal{L}$ на множествах сколь угодно малой положительной меры в $\mathbb{R}^m$. Эта связь кратко обсуждается в п. 2.5.

§ 1. Пример зависимости индексов дефекта минимального вырождающегося эллиптического оператора от степени гладкости его старших коэффициентов

1.1. Рассмотрим простейшее ДВ

$$\mathcal{L}_0 = -\operatorname{div} a(|x|) \operatorname{grad}, \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad m \geq 2, \quad (2)$$

скалярный коэффициент которого $a(|x|)$ связан соотношением

$$a(r) = |b(r)| \quad (3)$$

с функцией $b(r)$, удовлетворяющей условиям:

$$\text{I) } b(r) \in C^2([0, +\infty)); \quad (4)$$

II) существует число $r_0 > 0$ такое, что

$$b(r) > 0, \quad r \in [0, r_0), \quad (5)$$

$$|b(r)| > 0, \quad r \in (r_0, +\infty), \quad (6)$$

$$b(r_0) = 0. \quad (7)$$

Таким образом, r_0 является единственным нулем функции $b(r)$ на полуоси $[0, +\infty)$. Из формулы (3) следует, что ДВ $\mathcal{L}_0$ обладает свойством вырождающейся эллиптичности в $\mathbb{R}^m$, причем множеством его точек вырождения является сфера S_{r_0} (символом S_ρ в настоящей работе обозначается сфера $|x| = \rho$ в $\mathbb{R}^m$ радиуса $\rho > 0$).

Если функция $b(r)$ удовлетворяет условиям I), II), то либо

$$b(r_0) = 0, \quad b'(r_0) = 0, \quad b''(r_0) > 0, \quad (8)$$

либо

$$b(r_0) = 0, \quad b'(r_0) < 0. \quad (9)$$

В первом случае $a(r) = b(r)$, $r \in [0, +\infty)$, и поэтому $a(r) \in C^2([0, +\infty))$. Если же выполнены условия (9), то $b(r) < 0$ при $r \in (r_0, +\infty)$, $a(r) = |b'(r_0) + o(1)| |r - r_0|$ в некоторой окрестности точки r_0 . Следствием последней формулы является недифференцируемость функции $a(r)$ в точке r_0 ; вместе с тем $a(r) \in C^2([0, r_0) \cup (r_0, +\infty))$. Сделанные замечания приводят к выводу, что коэффициент $a(|x|)$ ДВ $\mathcal{L}_0$, связанный с функцией $b(r)$, удовлетворяющей условиям I), II), равенством (3), принадлежит классу $C^2(\mathbb{R}^m \setminus \{0\}) \cap C(\mathbb{R}^m)$, если выполнены соотношения (8) (при дополнительном условии $b'(0) = 0$ можно утверждать, что $a(|x|) \in C^2(\mathbb{R}^m)$). Если выполняются соотношения (9), то функция $a(|x|)$ недифференцируема в точках сферы S_{r_0} и принадлежит классу $C^2(\mathbb{R}^m \setminus S_{r_0}) \cap C(\mathbb{R}^m)$ либо классу $C^2(\mathbb{R}^m \setminus (S_{r_0} \cup \{0\})) \cap C(\mathbb{R}^m)$ в зависимости от того, выполняется или не выполняется равенство $b'(0) = 0$.

На протяжении всей статьи мы понимаем минимальный оператор в $L^2(\mathbb{R}^m)$ (а также в пространствах $L^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$), порожденный каким-нибудь m -мерным ДВ, как замыкание оператора с областью определения $C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$, действие которого на функции этого класса совпадает с действием на них рассматриваемого ДВ.

Пусть H_0 – действующий в $L^2(\mathbb{R}^m)$ симметрический и неотрицательный минимальный оператор, порожденный ДВ $\mathcal{L}_0$. Его свойства, интересующие нас, состоят в следующем.

ТЕОРЕМА 1. *Если для функции $b(r)$, удовлетворяющей условиям I), II), в точке r_0 дополнительно выполнены условия (8), то оператор H_0 самосопряжен (т.е. его индексы дефекта равны нулю).*

ТЕОРЕМА 2. *Оператор H_0 имеет бесконечные индексы дефекта, если наряду с условиями I), II) функция $b(r)$ в точке r_0 удовлетворяет условию (9).*

Доказательству теоремы 1 посвящены пп. 1.2–1.4; доказательство теоремы 2 излагается в пп. 1.5, 1.6; п. 1.7 посвящен некоторым замечаниям, относящимся к теоремам 1, 2.

1.2. Доказательство теоремы 1 состоит из двух частей. В первой из них приводится ее подробное обоснование при следующих дополнительных ограничениях:

$$(\alpha) \quad b(r) \in C^\infty([0, +\infty)), \quad b^{(2j+1)}(0) = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots; \quad (10)$$

$$(\beta) \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} b(r) = 0; \quad (11)$$

(γ) функция $a(r) = |b(r)|$ монотонно убывает на полуоси $(r_1, +\infty)$ при некотором $r_1 > r_0$.

Во второй части (пп. 1.3, 1.4) мы более сжато опишем технические средства, с помощью которых можно избавиться от указанных дополнительных ограничений, т.е. получить теорему 1 в полной общности.

Нам понадобятся вспомогательные понятия и обозначения. Будем обозначать через B_ρ открытый шар $|x| < \rho$ в $\mathbb{R}^m$. Для любой области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ мы будем

рассматривать пространство $L^2(\Omega)$ как подпространство в $L^2(\mathbb{R}^m)$, состоящее из функций $f(x) \in L^2(\mathbb{R}^m)$, равных нулю в $\mathbb{R}^m \setminus \Omega$. Отметим очевидное равенство

$$L^2(\mathbb{R}^m) = L^2(B_\rho) \oplus L^2(\mathbb{R}^m \setminus \overline{B}_\rho)$$

($\oplus$ – знак ортогональной суммы подпространств в $L^2(\mathbb{R}^m)$). Класс $C_0^\infty(\Omega)$ мы также будем рассматривать как подмножество класса $C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ (в указанном выше смысле).

Пусть P, Q – минимальные симметрические неотрицательные операторы в $L^2(B_{r_0})$ и $L^2(\mathbb{R}^m \setminus \overline{B}_{r_0})$, порожденные ДВ $\mathcal{L}_0$. Их ортогональная сумма $P \oplus Q$ является замыканием своего сужения на $C_0^\infty(B_{r_0}) \oplus C_0^\infty(\mathbb{R}^m \setminus \overline{B}_{r_0}) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$, вследствие чего оператор H_0 можно рассматривать как симметрическое расширение симметрического оператора $P \oplus Q$. В силу этого замечания для доказательства теоремы 1 достаточно показать, что из ее условий вытекает самосопряженность каждого из операторов P, Q . Установим справедливость последнего свойства при дополнительных ограничениях.

ЛЕММА 1. *Если наряду с условиями I), II) и (8) функция $b(r)$ удовлетворяет дополнительным ограничениям $(\alpha), (\beta), (\gamma)$, то каждый из неотрицательных симметрических операторов P, Q самосопряжен (в соответствующем подпространстве пространства $L^2(\mathbb{R}^m)$).*

Для доказательства самосопряженности оператора Q возьмем произвольную функцию $f_0(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m \setminus \overline{B}_{r_0})$. Для нее существуют числа k, l , $r_0 < k < l$, такие, что $\text{supp } f_0 \subset B_l \setminus B_k$. Следствием условия (8) является оценка

$$0 < a(r) \leq C(r - r_0)^2, \quad 0 < |r - r_0| < \varepsilon \quad (12)$$

(ε и C – некоторые положительные константы), влекущая за собой свойство

$$\int_{r_0}^k a^{-1/2}(r) dr = +\infty. \quad (13)$$

Оно означает, что для любой (сколь угодно большой) константы $N > 0$ существует число $\rho_N \in (0, k - r_0)$, для которого

$$J(\rho_N) = \int_{k-\rho_N}^k a^{-1/2}(r) dr > N. \quad (14)$$

Благодаря дополнительным ограничениям (β) и (γ) можно найти число $l_N > \max\{l, r_1\}$ такое, что

$$\max_{[l_N, l_N + \rho_N]} a(r) < \min_{[k - \rho_N, k]} a(r). \quad (15)$$

Рассмотрим уравнение

$$u_{tt} + \mathcal{L}_0[u] = 0, \quad (16)$$

имеющее гиперболический характер в области $(\mathbb{R}^m \setminus \overline{B}_{r_0}) \times [0, +\infty) \subset \mathbb{R}^{m+1}$; заметим, что коэффициенты этого уравнения бесконечно дифференцируемы в ней в силу дополнительного ограничения (10). Будем обозначать символом $\text{supp}_x u(x, t)$ носитель функции $u(x, t)$ по переменной x при фиксированном t . Решение $u(x, t)$ уравнения (16) с начальными условиями

$$u(x, 0) = f(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m \setminus \overline{B}_{r_0}), \quad u_t(x, 0) = 0 \quad (17)$$

обладает свойством конечной скорости распространения. Поэтому для области $B_{l_N} \setminus \overline{B}_k$ существует наибольшее число $t^* \in (0, +\infty]$ такое, что

$$\text{supp}_x u(x, t) \subset \mathbb{R}^m \setminus \overline{B}_{r_0}, \quad t \in [0, +\infty), \quad (18)$$

если только начальная функция $f(x)$ удовлетворяет условию

$$\text{supp } f \subset B_{l_N} \setminus \overline{B}_k. \quad (19)$$

Так как $B_l \setminus B_k \subset B_{l_N} \setminus B_k$, то оно заведомо выполнено для взятой нами функции $f_0(x)$. Следовательно, решение $u(x, t)$ задачи Коши (16), (17) с $f(x) = f_0(x)$ обладает свойством (18).

Оценку снизу числа t^* можно получить, опираясь на лемму 6 работы [1], которая позволяет по множеству $G = B_{l_N} \setminus \overline{B}_k$ и его окрестности $B_{l_N + \rho_N} \setminus B_{k - \rho_N}$ радиуса ρ_N явно указать число t_0 , обеспечивающее свойство

$$\text{supp}_x u(x, t) \subset B_{l_N + \rho_N} \setminus \overline{B}_{k - \rho_N} \subset \mathbb{R}^m \setminus \overline{B}_{r_0}, \quad t \in [0, t_0),$$

решения задачи Коши (16), (17) с дополнительным условием (19). С учетом того, что ДВ $\mathcal{L}_0$ можно представить в виде (1) с матрицей старших коэффициентов $A(x) = a(|x|)E$ (E – единичная $(m \times m)$ -матрица) и потенциалом $q(x) \equiv 0$, а также с учетом равенства (15) формула для t_0 , полученная в [1], в рассматриваемом случае дает значение $t_0 = J(\rho_N) > N$. Так как очевидным является неравенство $t_0 \leq t^*$, то мы приходим к оценке $t^* \geq N$ для любого сколь угодно большого числа $N > 0$, из которого следует, что $t^* = +\infty$. Основываясь на этом результате, получаем, что решение $u(x, t)$ задачи Коши (16), (17) с начальной функцией $f(x) = f_0(x)$ обладает свойством (18) со значением $t^* = +\infty$. По предположению $f_0(x)$ – произвольная функция класса $C_0^\infty(\mathbb{R}^m \setminus \overline{B}_{r_0})$. Следовательно, решение $u(x, t)$ задачи Коши (16), (17) обладает свойством (18), какова бы ни была начальная функция $f(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m \setminus \overline{B}_{r_0})$. При этом из бесконечной дифференцируемости коэффициентов уравнения (16) в $(\mathbb{R}^m \setminus \overline{B}_{r_0}) \times [0, +\infty)$ вытекает, что $u(x, t) \in C^\infty((\mathbb{R}^m \setminus B_{r_0}) \times [0, +\infty))$.

Перечисленные свойства решения $u(x, t)$ задачи Коши (16), (17) позволяют утверждать, что если $u(x, t)$ рассматривать как вектор-функцию $u(t) = u(\cdot, t)$ параметра t со значениями в $L^2(\mathbb{R}^m \setminus \overline{B}_{r_0})$, то такая вектор-функция обладает свойствами

$$u(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m \setminus \overline{B}_{r_0}) \subset \mathcal{D}(Q), \quad t \in [0, +\infty); \quad (20)$$

$$u(0) = f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m \setminus \overline{B}_{r_0}), \quad u'(0) = 0; \quad (21)$$

$$u''(t) + Qu(t) = 0, \quad t \in [0, +\infty) \quad (22)$$

(на протяжении всей статьи производные вектор-функции параметра t со значениями в гильбертовом пространстве понимаются в сильном смысле). Так как симметрический оператор Q неотрицателен, то у него есть фридрихово самосопряженное расширение

$$F \supseteq Q, \quad \inf F \geq 0. \quad (23)$$

Так как свойство (22) можно переписать в виде $u''(t) + Fu(t) = 0$, $t \in [0, +\infty)$, то с учетом начальных условий (21) оно приводит к представлению

$$u(t) = \cos(tF^{1/2})f, \quad t \in [0, +\infty), \quad (24)$$

следствием которого является оценка нормы

$$\|u(t)\| \leq \|f\|, \quad t \in [0, +\infty). \quad (25)$$

Согласно теореме 1 работы [2] существование для каждой функции $f(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m \setminus \overline{B}_{r_0})$ решения задачи Коши (21), (22), удовлетворяющего такой оценке, обеспечивает самосопряженность оператора Q .

Доказательство самосопряженности оператора P , действующего в $L^2(B_{r_0})$, проводится с помощью рассуждений, аналогичных вышеприведенным. Их центральным местом является обоснование свойства

$$\supp_x \tilde{u}(x, t) \subset B_{r_0}, \quad t \in [0, +\infty), \quad (26)$$

решения $\tilde{u}(x, t)$ уравнения (16), удовлетворяющего начальным условиям $\tilde{u}(x, 0) = \tilde{f}(x) \in C_0^\infty(B_{r_0})$, $\tilde{u}_t(x, 0) = 0$. Если $\tilde{f}(x) \in C_0^\infty(B_{r_0})$, то $\supp f \subset B_\tau$ для некоторого $\tau \in (0, r_0)$. Оценка (12) влечет за собой расходимость интеграла

$$\int_\tau^{r_0} a^{-1/2}(r) dr$$

(аналог формулы (13)); поэтому для произвольной константы $N > 0$ можно подобрать такое число $\rho_N \in (0, r_0 - \tau)$, что выполняется неравенство

$$\int_\tau^{\tau+\rho_N} a^{-1/2}(r) dr > N,$$

аналогичное неравенству (14). Свойство (26) является следствием леммы 6 работы [1], если ее применить к множеству $G = B_\tau$ и его окрестности $B_{\tau+\rho_N} \subset B_{r_0}$ радиуса ρ_N . С учетом свойства (26) вектор-функция $\tilde{u}(t) = \tilde{u}(\cdot, t)$ со значениями в $L^2(B_{r_0})$ удовлетворяет условиям:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t) &\in \mathcal{D}(P) \quad \text{при} \quad t \in [0, +\infty), \\ \tilde{u}(0) &= \tilde{f}, \quad \tilde{u}'(0) = 0, \quad \tilde{u}''(t) + P\tilde{u}(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \in [0, +\infty). \end{aligned}$$

Из них самосопряженность оператора P вытекает точно так же, как из формул (20)–(22) следует самосопряженность оператора Q . Лемма 1 доказана; вместе с ней установлена справедливость теоремы 1 при дополнительных ограничениях (α) , (β) , (γ) .

1.3. Укажем способ, позволяющий получить теорему 1 в полной общности. Присутствующее в лемме 1 ограничение (10), более жесткое, чем требование (4) теоремы 1, обеспечивает бесконечную дифференцируемость коэффициентов уравнения (16), вследствие чего не возникает сомнений в существовании его классических решений, используемых в доказательстве этой леммы. К сожалению, в случае, когда вместо (10) выполнено условие (4), существование упомянутых классических решений уравнения (16) вытекает из известных результатов теории гиперболических уравнений только при малых размерностях пространства $\mathbb{R}^m$ (см [3, гл. 3, § 21]). Это обстоятельство требует обращения к обобщенным решениям уравнения (16), если мы хотим получить утверждение леммы 1 при условии (4) вместо (10). В работе [4] для гиперболического уравнения $u_{tt} + \mathcal{L}[u] = 0$, в котором $\mathcal{L}$ – эллиптическое ДВ (1) со старшими коэффициентами

$$a_{jk}(x) \in L_{\text{loc}}^{\infty}(\mathbb{R}^m), \quad (27)$$

введен класс обобщенных решений, обладающих свойством конечной скорости распространения, вполне аналогичным свойству конечной скорости распространения классических решений уравнения (16) – основному инструменту доказательства леммы 1. В частности, для них справедлив аналог вспомогательного результата – леммы 6 работы [1], – с помощью которого были установлены свойства (18) с $t^* = +\infty$ и (26) классических решений задачи Коши для уравнения (16) (см. [4, лемма 2.6]).

Так как при выполнении условия (4) коэффициенты ДВ $\mathcal{L}_0$, очевидно, обладают свойством (27), то для получения утверждения леммы 1 при ограничении (4), менее жестком, чем (10) (без изменения прочих ее условий), следует повторить рассуждения, приведенные в п. 1.2, заменяя в них классические решения уравнения (16) обобщенными, рассматриваемыми в статье [4]. Единственная существенная поправка, требуемая в этом случае, касается классов $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^m \setminus \overline{B}_{r_0})$ и $C_0^{\infty}(B_{r_0})$, из которых в п. 1.2 брались начальные значения присутствующих в формулах (18) с $t^* = +\infty$ и (26) классических решений $u(x, t)$, $\tilde{u}(x, t)$ уравнения (16). В качестве начальных значений обобщенных решений этого уравнения – аналогов $u(x, t)$, $\tilde{u}(x, t)$ – следует брать функции с носителем в $\mathbb{R}^m \setminus \overline{B}_{r_0}$ и соответственно в B_{r_0} , принадлежащие введенному в статье [4] классу финитных функций $\mathcal{D}$, конструируемому по ДВ $\mathcal{L}_0$. С учетом свойств функционального класса $\mathcal{D}$, изученных в [4], использование таких начальных функций не вносит существенных осложнений в схему рассуждений п. 1.2.

1.4. Мы объяснили, каким образом оба утверждения леммы 1 (о самосопряженности каждого из операторов P , Q) могут быть доказаны в случае, когда из присутствующих в ней дополнительных ограничений (α) , (β) , (γ) выполняются только два последние, а ограничение (α) заменено условием (4). Заметим, что дополнительные ограничения (β) и (γ) леммы 1, относящиеся к свойствам функции $b(r)$ при $r \rightarrow +\infty$, не использовались в доказательстве самосопряженности оператора P , и вместе с тем их следствие – неравенство (15) – играло важную роль в проверке самосопряженности оператора Q . Поэтому для доказательства теоремы 1 в

полной общности достаточно установить справедливость следующего уточнения утверждения леммы 1 о самосопряженности оператора Q .

ЛЕММА 2. Пусть функция $b(r)$ удовлетворяет только условиям I), II) (замечим, что в них нет ограничений на поведение функции $b(r) \in C^2([0, +\infty))$ при $r \rightarrow +\infty$, кроме требования ее знакоопределенности на полуоси $(r_0, +\infty)$). Тогда минимальный оператор Q в $L^2(\mathbb{R}^m \setminus B_{r_0})$, порожденный ДВ $\mathcal{L}_0$, самосопряжен.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Доказательство леммы 1 является промежуточным этапом в доказательстве леммы 2. Способ проверки справедливости леммы 2, не использующий леммы 1, автору неизвестен.

При проверке справедливости леммы 2 мы опираемся на то, что в сферических координатах r (радиальная переменная) и $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{m-1})$ (угловой параметр) ДВ $\mathcal{L}_0$ имеет вид

$$-r^{-(m-1)} \frac{d}{dr} r^{m-1} a(r) \frac{d}{dr} - \frac{a(r)}{r^2} \Delta_\theta, \quad (28)$$

где Δ_θ – выражение оператора Бельтрами–Лапласа на единичной сфере S_1 через угловые переменные $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{m-1}$. Оператор Бельтрами–Лапласа на S_1 с областью определения $C^\infty(S_1)$ симметричен в пространстве $L^2(S_1, d\sigma)$ (через $d\sigma$ обозначен элемент площади поверхности) и имеет чисто дискретный спектр, состоящий из чисел $\lambda_l = -l(l+m-2)$, $l = 0, 1, 2, \dots$, причем собственное подпространство этого оператора, отвечающее его собственному значению λ_l , состоит из функций $P_l\left(\frac{x}{|x|}\right)$ – значений на S_1 гармонических многочленов $P_l(x)$ порядка l (см., например, [5, гл. 3, § 22]). Если $h_l(\theta)$ – выражение функции $P_l\left(\frac{x}{|x|}\right)$ через угловой параметр θ , то последнее свойство означает, что

$$-\Delta_\theta h_l = l(l+m-2)h_l. \quad (29)$$

Используя разделение переменных в сферических координатах (см. [6, гл. 10, дополнение к § 10.1]), нетрудно проверить, что оператор Q самосопряжен тогда и только тогда, когда при каждом $l \geq 0$ самосопряжен действующий в пространстве $L^2((r_0, +\infty), r^{m-1} dr)$ с весом r^{m-1} минимальный оператор T_l , порожденный обыкновенным ДВ

$$\tau_l = -r^{-(m-1)} \frac{d}{dr} r^{m-1} a(r) \frac{d}{dr} + l(l+m-2) \frac{a(r)}{r^2} \quad (30)$$

(напомним, что $a(r) = \pm b(r)$ при $r > r_0$). Так как в лемме 1 самосопряженность оператора Q установлена при выполнении наряду с условиями I), II) теоремы 1 дополнительных ограничений (β) и (γ) (мы уже объяснили, что от ограничения (α) можно избавиться), то при этих условиях из указанной леммы вытекает самосопряженность оператора T_l при любом l . Последнее свойство означает, что в указанном случае для индекса дефекта d_l (для определенности в верхней комплексной полуплоскости) оператора T_l справедливо равенство $d_l = 0$, $l \geq 0$.

Зафиксируем какую-нибудь точку $\rho \in (r_0, +\infty)$ и обозначим через $d_l^{(1)}$ и $d_l^{(2)}$ индексы дефекта в верхней комплексной полуплоскости минимальных операторов $T_l^{(1)}$, $T_l^{(2)}$, порожденных ДВ τ_l соответственно в $L^2((r_0, \rho), r^{m-1} dr)$ и $L^2((\rho, +\infty), r^{m-1} dr)$. Тогда числа d_l , $d_l^{(1)}$, $d_l^{(2)}$ связаны известной формулой

$$d_l = d_l^{(1)} + d_l^{(2)} - 2 \quad (31)$$

(см. [7, гл. 13, § 2, следствие 26]); заметим, что пространства $L^2(J, r^{m-1} dr)$, $J \subseteq \mathbb{R}$, переводятся в пространства $L^2(J) = L^2(J, dr)$, рассматриваемые в [7], простым унитарным преобразованием

$$L^2(J, r^{m-1} dr) \ni f(r) \rightarrow r^{(m-1)/2} f(r) \in L^2(J).$$

Один из результатов работы [8] обеспечивает справедливость равенства $d_l^{(2)} = 1$, $l \geq 0$, при произвольном поведении при $r \rightarrow +\infty$ положительной на $(\rho, +\infty)$ функции $a(r) = |b(r)|$ и, в частности, в случае, когда $b(r)$ удовлетворяет условиям (β) и (γ) . Так как $d_l = 0$, $d_l^{(2)} = 1$, то следствием формулы (31) является равенство $d_l^{(1)} = 1$, $l \geq 0$. Последнее равенство получено в предположении, что выполнены дополнительные ограничения (β) , (γ) леммы 1, относящиеся к поведению функции $b(r) = \pm a(r)$ на бесконечности, но ввиду того, что индекс дефекта $d_l^{(1)}$ зависит только от свойств функции $a(r)$ на ограниченном интервале (r_0, ρ) , формула $d_l^{(1)} = 1$ верна независимо от поведения $a(r)$ при $r \rightarrow +\infty$. Если функция $b(r)$ удовлетворяет только условиям I), II) и, следовательно, произвольна на бесконечности, то из формул $d_l^{(1)} = 1$, $d_l^{(2)} = 1$ и (31) вытекает, что индексы дефекта соответствующих операторов T_l равны нулю при любом $l \geq 0$, и поэтому все эти операторы самосопряжены. Как отмечено выше, это свойство равносильно самосопряженности соответствующего оператора Q . Лемма 2, а вместе с ней и теорема 1 доказаны.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В доказательстве теоремы 1 главную роль играли два факта, одним из которых является соотношение $H_0 \supseteq P \oplus Q$, а другим – самосопряженность операторов P и Q , и поэтому такое же свойство их ортогональной суммы $P \oplus Q$. Так как симметрическое расширение самосопряженного оператора обязательно совпадать с ним, то одновременно доказана формула $H_0 = P \oplus Q$ (при выполнении условий теоремы 1). В более общей ситуации аналогичная формула будет получена в теореме 4.

1.5. Перейдем к доказательству теоремы 2. Считая, что функция $b(r)$ удовлетворяет ее условиям, обратимся к записи (28) ДВ $\mathcal{L}_0$ с коэффициентом $a(|x|) = |b(|x|)|$ в сферических координатах и рассмотрим соответствующее семейство обыкновенных ДВ τ_l вида (30), $l = 0, 1, 2, \dots$. При доказательстве теоремы 2 мы опираемся на следующие соображения. Предположим, что для некоторого l существует функция

$$0 \neq y_l(r) \in L^2((0, +\infty), r^{m-1} dr), \quad (32)$$

удовлетворяющая условию

$$((\tau_l[g], y_l)) = -((g, y_l)), \quad g(r) \in C_0^\infty((0, +\infty)), \quad (33)$$

в котором двойными скобками обозначено скалярное произведение в $L^2((0, +\infty), r^{m-1} dr)$. Так как $a(r) = b(r)$ при $r \in (0, r_0)$, то из равенства (33) с произвольной функцией $g(r) \in C_0^\infty((0, r_0)) \subset C_0^\infty((0, +\infty))$ следует, что

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_l[y_l](r) &= -y_l(r), \quad r \in (0, r_0), \\ \tilde{\tau}_l &= -r^{-(m-1)} \frac{d}{dr} r^{m-1} b(r) \frac{d}{dr} + l(l+m-2) \frac{b(r)}{r^2}. \end{aligned} \quad (34)$$

Возьмем какой-нибудь гармонический многочлен $P_l(x)$ порядка l и свяжем с ним функцию

$$0 \neq u_l(x) = y_l(|x|) P_l\left(\frac{x}{|x|}\right) \in L^2(\mathbb{R}^m). \quad (35)$$

Пусть $f(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$. Зафиксировав число $\rho \in (0, r_0)$, представим эту функцию в виде

$$\begin{aligned} f(x) &= f^{(1)}(x) + f^{(2)}(x), \\ f^{(1)}(x) &\in C_0^\infty(B_\rho), \quad f^{(2)}(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m \setminus \{0\}). \end{aligned} \quad (36)$$

Если перейти к сферическим координатам r, θ в скалярном произведении $(\mathcal{L}_0[f], u_l)$ в $L^2(\mathbb{R}^m)$, то с учетом формулы (28), представления (36), симметричности оператора Δ_θ в $L^2(S_1, d\sigma)$, а также того, что для выражения $h_{l_0}(\theta)$ функции $P_l\left(\frac{x}{|x|}\right)$ через θ справедливо равенство (29), получим формулу

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_0[f], u_l) &= \int_G ((\tilde{\tau}_l[g_\theta^{(1)}], y_l)) h_l(\theta) D(\theta) d\theta \\ &+ \int_G ((\tilde{\tau}_l[g_\theta^{(2)}], y_l)) h_l(\theta) D(\theta) d\theta = K^{(1)} + K^{(2)}, \end{aligned} \quad (37)$$

в которой приняты обозначения: G – для области изменения углового параметра $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{m-1})$, отвечающей единичной сфере S_1 , $g_\theta^{(j)} = g_\theta^{(j)}(r)$ ($j = 1, 2$) – для выражения функции $f^{(j)}(x)$ через r, θ , рассматриваемого как функция переменной $r \in [0, +\infty)$, зависящая от $\theta \in G$ как от параметра и, наконец, $D(\theta)$ – для угловой составляющей якобиана $r^{m-1} D(\theta)$ перехода от сферических координат к прямоугольным в $\mathbb{R}^m$. При каждом $\theta \in G$ функция $g_\theta^{(2)}(r)$ принадлежит классу $C_0^\infty((0, +\infty))$, так как $f^{(2)}(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m \setminus \{0\})$. Этот факт вместе с формулой (33), рассматриваемой с функцией $g(r) = g_\theta^{(2)}(r)$, влечет за собой второе из равенств

$$K^{(1)} = -(f^{(1)}, u_l), \quad K^{(2)} = -(f^{(2)}, u_l).$$

Первое из них может быть получено с помощью интегрирования по частям в подынтегральном выражении интеграла $K^{(1)}$ – скалярном произведении $((\tilde{\tau}_l[g_\theta^{(1)}], y_l))$ в $L^2((0, +\infty), r^{m-1} dr)$, если выполнено дополнительное условие

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^{m-1} y_l(r) = \lim_{r \rightarrow 0} r^{m-1} y'_l(r) = 0. \quad (38)$$

Нетрудно проверить, что оно влечет за собой равенство нулю внеинтегральных членов, возникающих при переброске в указанном скалярном произведении ДВ $\tilde{\tau}_l$ с $g_\theta^{(1)}(r)$ на $y_l(r)$, и, следовательно, цепочку равенств

$$((\tilde{\tau}_l[g_\theta^{(1)}], y_l)) = ((g_\theta^{(1)}, \tilde{\tau}_l[y_l])) = -((g_\theta^{(1)}, y_l)),$$

последнее из которых вытекает из свойства (34) функции $y_l(r)$.

Итак, если функция (52) удовлетворяет условиям (33), (38), то при любой $f(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ справедливы равенства $K^{(j)} = -(f^{(j)}, u_l)$, $j = 1, 2$, означающие (в силу формул (36) и (37)), что функция $u_l(x)$ вида (35) обладает свойством

$$(\mathcal{L}_0[f], u_l) = -(f, u_l), \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m). \quad (39)$$

Существование функции $u_l(x)$ с таким свойством означает, что значения индексов дефекта неотрицательного оператора H_0 , порожденного ДВ $\mathcal{L}_0$, не равны нулю. Чтобы доказать теорему 2, достаточно установить, что при выполнении ее условий функция (32), обладающая свойствами (33), (38), существует для бесконечного набора значений индекса l . Если это утверждение доказано, то соответствующие функции (35) будут образовывать бесконечную линейно независимую совокупность, члены которой удовлетворяют условию (39), и, следовательно, оператор H_0 будет иметь бесконечные индексы дефекта.

1.6. Пусть U_l – симметрический и неотрицательный минимальный оператор в $L^2((0, +\infty), r^{m-1} dr)$, порожденный ДВ τ_l ($l = 0, 1, 2, \dots$), d_l – его индекс дефекта в верхней комплексной полуплоскости. Существование для какого-нибудь l функции (32), удовлетворяющей условию (33), равносильно неравенству $d_l \geq 1$. Более точный результат для бесконечного набора значений индекса l вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА 3. Если функция $b(r)$ удовлетворяет условиям теоремы 2, $a(r) = |b(r)|$, то при любом $l \geq \max\{2 - m/2, 0\}$ справедливо равенство $d_l = 1$.

Заметим, что условие $l \geq \max\{2 - m/2, 0\}$ имеет вид $l \geq 0$ при $m \geq 4$, а при $m = 2, 3$ оно равносильно условию $l \geq 1$.

Чтобы доказать лемму 3, разделим полуось $(0, +\infty)$ точками q, s , $0 < q < r_0 < s$, на промежутки $J_1 = (0, q)$, $J_2 = (q, s)$, $J_3 = (s, +\infty)$ и обозначим через $d_l^{(k)}$, $k = 1, 2, 3$, индекс дефекта в верхней комплексной полуплоскости минимального оператора $U_l^{(k)}$ в $L^2(J_k, r^{m-1} dr)$, порожденного ДВ τ_l . Аналог формулы (31) в рассматриваемой ситуации имеет вид

$$d_l = d_l^{(1)} + d_l^{(2)} + d_l^{(3)} - 4. \quad (40)$$

Ввиду неотрицательности оператора $U_l^{(1)}$ число $d_l^{(1)}$ совпадает с размерностью подпространства решений $y(r) \in L^2(J_1, r^{m-1} dr)$ уравнения $(U_l^{(1)})^* y = -y$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Так как $J_1 \subset (0, r_0)$, то это подпространство состоит из функций $y(r) \in L^2(J_1, r^{m-1} dr)$, удовлетворяющих условию (34) с заменой в нем интервала $(0, r_0)$ на J_1 .

Чтобы найти размерность подпространства в $L^2(J_1, r^{m-1} dr)$, указанного в замечании 3, введем оператор

$$Qf(r) = r^{(m-1)/2} f(r), \quad (41)$$

отображающий изометрически пространство $L^2(J_1, r^{m-1} dr)$ на $L^2(J_1) = L^2(J_1, dr)$. Оператор $V_l^{(1)} = QU_l^{(1)}Q^{-1}$ является минимальным оператором в $L^2(J_1)$, порожденным ДВ

$$\sigma_l = -\frac{d}{dr}b(r)\frac{d}{dr} + \frac{m-1}{2r}b'(r) + \frac{(m-2+2l)^2-1}{4r^2}b(r)$$

(мы учли, что $a(r) = b(r)$ на J_1 в силу свойства (5) функции $a(r)$). Размерности подпространств решений уравнений $(U_l^{(1)})^*y = -y$ и $(V_l^{(1)})^*\eta = -\eta$ совпадают; поэтому для нахождения индекса дефекта $d_l^{(1)}$ достаточно найти число линейно независимых решений $\eta(r) \in L^2(J_1)$ уравнения

$$\sigma_l[\eta] = -\eta. \quad (42)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Из замечания 3, а также равенства $V_l^{(1)} = QU_l^{(1)}Q^{-1}$ следует, что решения $\eta(r) \in L^2(J_1)$ уравнения (42) связаны с решениями $y(r) \in L^2(J_1, r^{m-1} dr)$ уравнения $\tilde{\eta}_l[y] = -y$ (вид ДВ $\tilde{\eta}_l$ указан в формуле (34)) соотношением

$$y(r) = r^{-(m-1)/2}\eta(r), \quad r \in J_1.$$

Замена аргумента $t = -\ln \int_0^r b^{-1}(\rho) d\rho = t(r)$ и искомой функции $\eta(r) = e^{-t/2}w(t)$ преобразует уравнение (42) к виду

$$\begin{aligned} w'' - \left[\frac{(m-2+2l)^2}{4} + \varphi(t) \right] w &= 0, \\ \varphi(t) &= \frac{(m-2+2l)^2-1}{4} \left(\frac{b^2(r(t))}{r^2(t)} e^{-2t} - 1 \right) \\ &\quad + \left(\frac{m-1}{2r(t)} b'(r(t)) + 1 \right) b(r(t)) e^{-2t} \end{aligned} \quad (43)$$

($r(t)$ – функция, обратная к $t(r)$); при этом стремлению r к нулю отвечает стремление t к $+\infty$. Нетрудно проверить, что $\int^\infty |\varphi(t)| dt < +\infty$. Хорошо известно (см., например, [9, гл. 11, следствие 9.2]), что при $m-2+2l \geq 1$, т.е. при

$l \geq \max\{(3-m)/2, 0\}$, последнее свойство влечет за собой существование фундаментальной системы решений $w_{l,j}(t)$, $j = 1, 2$, уравнения (43) с асимптотикой

$$\begin{aligned} w_{l,1}(t) &\sim e^{(\frac{m-2}{2}+l)t}, & w'_{l,1}(t) &\sim \left(\frac{m-2}{2}+l\right)e^{(\frac{m-2}{2}+l)t}, \\ w_{l,2}(t) &\sim e^{-(\frac{m-2}{2}+l)t}, & w'_{l,2}(t) &\sim -\left(\frac{m-2}{2}+l\right)e^{-(\frac{m-2}{2}+l)t}, \quad t \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Функции $\eta_{l,j}(r) = e^{-t(r)/2}w_{l,j}(r)$, $j = 1, 2$, образуют фундаментальную систему решений уравнения (42), асимптотика которых при $r \rightarrow 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} \eta_{l,1}(r) &\sim r^{-(\frac{m-3}{2}+l)}, & \eta'_{l,1}(r) &\sim -\left(\frac{m-3}{2}+l\right)r^{-(\frac{m-1}{2}+l)}, \\ \eta_{l,2}(r) &\sim r^{\frac{m-1}{2}+l}, & \eta'_{l,2}(r) &\sim \left(\frac{m-1}{2}+l\right)r^{\frac{m-3}{2}+l}. \end{aligned} \quad (44)$$

Если $l \geq \max\{2-m/2, 0\} \geq \max\{(3-m)/2, 0\}$, то пространству $L^2(J_1)$ принадлежит только $\eta_{l,2}(r)$. Поэтому $d_l^{(1)} = 1$, $l \geq \max\{2-m/2, 0\}$.

Перейдем к вычислению константы $d_l^{(2)}$. Будем рассматривать оператор Q , заданный формулой (41), как действующий из $L_2(J_2, r^{m-1} dr)$ в $L_2(J_2)$; очевидно, что он отображает изометрически первое из этих пространств на второе. Индексы дефекта операторов $U_l^{(2)}$ и $V_l^{(2)} = QU_l^{(2)}Q^{-1}$ совпадают; поэтому для нахождения числа $d_l^{(2)}$ достаточно подсчитать индексы дефекта действующего в $L^2(J_l)$ оператора $V_l^{(2)}$, совпадающего с минимальным оператором, отвечающим ДВ

$$\tilde{\sigma}_l = -\frac{d}{dr}a(r)\frac{d}{dr} + \frac{m-1}{2r}a'(r) + \frac{(m-2+2l)^2-1}{4r^2}a(r), \quad a(r) = |b(r)|.$$

Если функция $b(r)$ удовлетворяет условиям теоремы 2, то его потенциал

$$\frac{m-1}{2r}a'(r) + \frac{(m-2+2l)^2-1}{4r^2}a(r)$$

ограничен на промежутке J_2 и имеет на нем единственную точку разрыва (первого рода) r_0 . Поэтому индексы дефекта оператора $V_l^{(2)}$ равны индексам дефекта минимального оператора $V_{l,0}^{(2)}$ в $L^2(J_2)$, порожденного более простым ДВ $-\frac{d}{dr}a(r)\frac{d}{dr}$, коэффициент которого положительен в точках $r \in J_2 \setminus \{r_0\}$ и равен нулю в точке r_0 . Так как при условиях теоремы 2 функция $a(r) = |b(r)|$ недифференцируема в точке r_0 , можно говорить только о лево- или правостороннем порядках нуля r_0 этой функции. Из предполагаемого в теореме 2 условия (9) следует равенство единице каждого из них. В лемме 1 статьи [10] установлено¹, что последнее свойство влечет за собой равенство $d_l^{(2)} = 3$, $l \geq 0$.

¹Содержащееся в лемме 1 работы [10] требование непрерывности производной $a^{(4)}(r)$ в точках $r \in J_2 \setminus \{r_0\}$, в которых $a(r) \neq 0$, связано с методом ее доказательства, основанным на использовании асимптотических формул для решений уравнения $\sigma_{l,0}[y] = zy$, $\text{Im } z \neq 0$, при $r \rightarrow r_0$. Привлечение дополнительных рассуждений, основанных на методе гиперболического уравнения в спектральной теории, позволяет в указанном требовании заменить $a^{(4)}(r)$ на $a^{(2)}(r)$. Непрерывность $a^{(2)}(r)$ в точках $r \in J_2 \setminus \{r_0\}$, в которых $a(r) \neq 0$, вытекает из условия (4).

При выполнении условий теоремы 2, из которых следует, что $a(r) = |b(r)| > 0$ на $J_3 = (s, +\infty)$, $a(r) \in C^2(J_3)$, значения индексов дефекта минимального оператора $U_l^{(3)}$ в $L^2(J_3, r^{m-1} dr)$, порожденного ДВ (30) при любом $l \geq 0$, равны $(1, 1)$ согласно упоминавшемуся ранее результату работы [8]. Поэтому $d_l^{(3)} = 1$, $l \geq 0$.

Чтобы завершить доказательство леммы 3, остается подставить значения $d_l^{(1)} = 1$, $d_l^{(2)} = 3$, $d_l^{(3)} = 1$, $l \geq \max\{2 - m/2, 0\}$, в формулу (40).

Из леммы 3 следует, что при каждом $l \geq \max\{2 - m/2, 0\}$ существует единственная (с точностью до отличного от нуля числового коэффициента) функция (32), удовлетворяющая условию (33), из которого вытекает свойство (34) этой функции. В силу замечания 4 при любом $l \geq \max\{2 - m/2, 0\}$ на промежутке J_1 функция $\eta_l(r) = r^{(m-1)/2} y_l(r)$ является решением уравнения (42), принадлежащим $L^2(J_1)$, т.е. $\eta_l(r)$ может отличаться от решения $\eta_{l,2}(r)$ этого уравнения с асимптотикой (44) только числовым множителем $c \neq 0$. Из формулы (44) следует, что

$$y_l(r) = cr^l(1 + o(1)), \quad y'_l(r) = clr^{l-1}(1 + o(1))$$

при $r \rightarrow 0$; поэтому функция $y_l(r)$ удовлетворяет условию (38) наряду с (33). Мы объяснили в п. 1.5, что если при каждом $l \geq \max\{2 - m/2, 0\}$ сопоставить функции $y_l(r)$, обладающей всеми перечисленными свойствами, выражение $u_l(x)$ вида (35), то мы получим бесконечный набор линейно независимых функций $u_l(x)$, $l \geq \max\{2 - m/2, 0\}$, удовлетворяющих условию (39) (их линейная независимость вытекает, например, из приведенной выше асимптотики функций $y_l(r)$ при $r \rightarrow 0$). Существование такого набора означает справедливость утверждения теоремы 2.

1.7. Дополним теоремы 1 и 2 несколькими замечаниями к ним. Можно получить следующее обобщение результатов, полученных в этих теоремах.

ТЕОРЕМА 3. Пусть множество нулей функции $b(r) \in C^2([0, +\infty))$, удовлетворяющей условию $b(0) > 0$, конечно или образует возрастающую последовательность

$$0 < r_1 < r_2 < \dots < r_n < \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = +\infty.$$

Тогда индексы дефекта минимального оператора H_0 в $L^2(\mathbb{R}^m)$, порожденного ДВ (2) с коэффициентом $a(|x|) = |b(|x|)|$, равны нулю, если порядок каждого нуля функции $b(r)$ больше или равен двум, и бесконечны, если по крайней мере один из них имеет порядок, равный единице.

Теорема 3 доказывается с помощью таких же технических средств, какие были использованы в доказательствах теорем 1, 2. При этом главную роль в обосновании ее утверждения о бесконечности индексов дефекта оператора H_0 играет, как и в случае теоремы 2, лемма 1 работы [10].

Условие $b(0) > 0$ присутствует в каждой из теорем 1–3. Интересно выяснить, насколько оно необходимо для справедливости полученных в них результатов. Можно проверить, что если $b(r) \in C^2([0, +\infty))$, $b(r) > 0$ при $r \in (0, +\infty)$

и $b(0) = 0$, то минимальный оператор H_0 в $L^2(\mathbb{R}^m)$, порожденный ДВ $\mathcal{L}_0$ (в рассматриваемом случае его коэффициент $a(|x|)$ совпадает с $b(|x|)$), самосопряжен независимо от того, выполняется равенство $b'(0) = 0$ или не выполняется. После того как получен этот результат, нетрудно проверить, что теорема 3 остается верна и тогда, когда дополнительно к ее условиям выполнено равенство $b(0) = 0$.

Тот факт, что условия теорем 1, 2 могут выполняться в случае недифференцируемости коэффициента ДВ $\mathcal{L}_0$ в точке $x = 0$ (этот случай имеет место, если $b'(0) \neq 0$), говорит о том, что порядок гладкости коэффициента ДВ $\mathcal{L}_0$ вне множества его точек вырождения, по-видимому, не влияет на значения индексов дефекта соответствующего минимального оператора H_0 . В то же время в связи с теоремами 1–3 можно предположить, что явление бесконечности индексов дефекта симметрического минимального оператора в $L^2(\mathbb{R}^m)$, порожденного вырождающимся эллиптическим ДВ (1) с потенциалом $q(x) \equiv 0$, возникает при наличии в $\mathbb{R}^m$ по крайней мере одной достаточно гладкой гиперповерхности Γ , в точках которой матрица $A(x)$ его старших коэффициентов не обладает достаточной гладкостью в направлении нормали к Γ (очевидно, что если такое явление обнаружено в случае потенциала $q(x) \equiv 0$, то оно сохраняется и тогда, когда, например, $q(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^m)$). В подтверждение такой гипотезы можно привести ряд примеров, отличных от рассмотренных в теоремах 2, 3, простейшими из которых являются двумерные ДВ:

$$-\frac{\partial}{\partial x_1}|x_1|\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \quad -\frac{\partial}{\partial x_1}|x_1|\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2}|x_1|\frac{\partial}{\partial x_2},$$

вырождающиеся на прямой $x_1 = 0$. Бесконечность индексов дефекта соответствующих им минимальных операторов в $L^2(\mathbb{R}^m)$ можно установить с помощью преобразования Фурье и некоторых фактов, относящихся к специальным функциям.

§ 2. Признак самосопряженности минимального вырождающегося эллиптического оператора с потенциалом, произвольным на бесконечности

2.1. Результаты, полученные в предыдущем параграфе, говорят о естественности требования принадлежности классу $C^2(\mathbb{R}^m)$ старших коэффициентов $a_{jk}(x)$ формально самосопряженного вырождающегося эллиптического ДВ $\mathcal{L}$ вида (1) при изучении вопроса об условиях самосопряженности соответствующего минимального оператора H в $L^2(\mathbb{R}^m)$. Значительный интерес представляет вопрос о том, насколько зависит свойство самосопряженности оператора H от поведения коэффициентов $a_{jk}(x) \in C^2(\mathbb{R}^m)$ и потенциала $q(x)$ ДВ $\mathcal{L}$ при $|x| \rightarrow \infty$. Так как в случае эллиптичности указанного ДВ известные признаки самосопряженности H обязательно содержат ограничения на поведение $a_{jk}(x)$ и $q(x)$ в окрестности бесконечно удаленной точки (см., например, работы [4], [11], [12], [13] и приведенные в них ссылки на литературу), естественно предположить, что и в случае вырождающейся эллиптичности ДВ $\mathcal{L}$ условия самосопряженности H должны обладать аналогичным свойством. Результаты, относящиеся к этому случаю, в которых

указываются ограничения на $a_{jk}(x)$ и $q(x)$ при $|x| \rightarrow \infty$, достаточные для самосопряженности оператора H , получены в работах [14], [15, гл. 2, § 15], [16].

В настоящем параграфе приводится признак самосопряженности минимального оператора в $L^2(\mathbb{R}^m)$, порожденного вырождающимся эллиптическим ДВ $\mathcal{L}$ (теорема 4), отличающийся от подобных результатов тем, что в нем указываются ограничения на матрицу старших коэффициентов указанного ДВ, выполнение которых обеспечивает самосопряженность оператора H при произвольном поведении потенциала $q(x) \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^m)$ в окрестности бесконечности. Теорему 4 можно рассматривать как вырожденный вариант хорошо известных признаков Хартмана–Исмагилова самосопряженности минимального эллиптического дифференциального оператора в $L^2(\mathbb{R}^m)$, условия которых задаются на неограниченно расширяющейся последовательности непересекающихся телесных слоев.

Зафиксируем числовую последовательность $\{r_l\}_{l=0}^\infty$, обладающую свойствами

$$r_0 = 0, \quad r_l < r_{l+1}, \quad \lim_{l \rightarrow \infty} r_l = +\infty. \quad (45)$$

Свяжем с ней последовательность областей

$$U_1 = B_{r_1}, \quad U_l = B_{r_l} \setminus B_{r_{l-1}}, \quad l \geq 2. \quad (46)$$

Заметим, что при $l \geq 2$ области U_l являются шаровыми слоями $r_{l-1} < |x| < r_l$. Если задать ДВ $\mathcal{L}$ вида (1), то наряду с минимальным оператором H в $L^2(\mathbb{R}^m)$ в каждом из пространств $L^2(U_l)$, $l \geq 1$, оно порождает минимальный оператор, который в дальнейшем обозначается символом H_l . Напомним, что мы рассматриваем пространства $L^2(U_l)$ как подпространства в $L^2(\mathbb{R}^m)$; следовательно, H_l – это оператор, действующий в подпространстве $L^2(U_l)$ пространства $L^2(\mathbb{R}^m)$. Очевидно, что указанные подпространства взаимно ортогональны и справедливо ортогональное разложение $L^2(\mathbb{R}^m) = \bigoplus_{l=1}^\infty L^2(U_l)$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть действительная симметрическая матрица $A(x) = \{a_{jk}(x)\}_{j,k=1}^m$ с элементами

$$a_{jk}(x) \in C^2(\mathbb{R}^m) \quad (47)$$

обладает свойством неотрицательной определенности:

$$\sum_{j,k=1}^\infty a_{jk}(x) \xi_j \xi_k \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) \in \mathbb{C}^m, \quad (48)$$

а действительная функция $q(x)$ удовлетворяет единственному условию

$$q(x) \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^m). \quad (49)$$

Если дополнительно

$$A(x) = 0, \quad x \in S_{r_l}, \quad l = 1, 2, \dots, \quad (50)$$

то каждый из операторов H , H_l , $l \geq 1$, порожденных ДВ $\mathcal{L}$ с указанными матрицей старших коэффициентов $A(x)$ и потенциалом $q(x)$, самосопряжен. При этом справедливо разложение оператора H в операторную ортогональную сумму:

$$H = \bigoplus_{l=1}^{\infty} H_l. \quad (51)$$

Пусть ДВ $\mathcal{L}$ удовлетворяет условиям теоремы 4. Ее доказательство начнем с обсуждения свойств действующего в $L^2(\mathbb{R}^m)$ оператора $T = \bigoplus_{l=1}^{\infty} H_l$. Его область определения $\mathcal{D}(T)$ состоит из элементов

$$f = \sum_{l=1}^{\infty} f_l, \quad f_l \in \mathcal{D}(H_l) \subset L^2(U_l), \quad l \geq 1,$$

удовлетворяющих условиям

$$\sum_{l=1}^{\infty} \|f_l\|^2 < \infty, \quad \sum_{l=1}^{\infty} \|H_l f_l\|^2 < \infty,$$

а действие оператора T на элементы $f = \sum_{l=1}^{\infty} f_l \in \mathcal{D}(T)$ определяется формулой

$$Tf = \sum_{l=1}^{\infty} H_l f_l.$$

Так как $\mathcal{D}(H_l) \supset C_0^\infty(U_l)$, $l \geq 1$, то

$$\mathcal{D}(T) \supset \bigoplus_{l=1}^{\infty} C_0^\infty(U_l) = \mathcal{K};$$

очевидна плотность множества $\mathcal{K}$ в $L^2(\mathbb{R}^m)$.

Предположим, что утверждение теоремы 4 о самосопряженности при каждом $l \geq 1$ оператора H_l , действующего в $L^2(U_l)$, доказано. Тогда оператор T самосопряжен в $L^2(\mathbb{R}^m)$. Его сужение T_0 на $\mathcal{K}_0$ – совокупность финитных функций класса $\mathcal{K}$ – является также сужением на $\mathcal{K}_0$ оператора H , т.е. $T_0 \subset H$. Из определения оператора T и того, что при каждом $l \geq 1$ оператор H_l является замыканием своего сужения на $C_0^\infty(U_l)$, следует соотношение $\overline{T}_0 = T \subseteq H$. Так как оператор H является симметрическим расширением самосопряженного оператора T , то оба оператора совпадают (это означает справедливость формулы (51)) и, следовательно, оператор H самосопряжен. Приведенные рассуждения говорят о том, что для доказательства теоремы 4 достаточно установить, что при выполнении ее условий самосопряжен каждый из операторов H_l , действующих в подпространствах $L^2(U_l)$, $l \geq 1$, пространства $L^2(\mathbb{R}^m)$.

Излагаемое ниже в пп. 2.2–2.4 доказательство самосопряженности операторов H_l основано на следующих соображениях. Предположим, что при некотором $l \geq 1$ для любой функции

$$f(x) \in C_0^\infty(U_l) \quad (52)$$

существует вектор-функция $v(t)$ параметра $t \in [0, +\infty)$ со значениями в $L^2(U_l)$, обладающая свойствами

$$v(t) \in \mathcal{D}(H_l), \quad t \in [0, +\infty), \quad (53)$$

$$v(0) = f, \quad v'(0) = 0, \quad (54)$$

$$v''(t) + H_l v(t) = 0, \quad t \in [0, +\infty) \quad (55)$$

(они аналогичны свойствам (20)–(22) вектор-функции $v(t)$, использовавшейся в доказательстве утверждения леммы 1 о самосопряженности оператора Q). Обозначая через F фридрихсово самосопряженное расширение оператора H_l (оно существует благодаря полуограниченности H_l , вытекающей из условия (49)), можно переписать свойство (55) в виде

$$v''(t) + Fv(t) = 0, \quad t \in [0, +\infty).$$

Поэтому для $v(t)$ справедливо представление

$$v(t) = \cos(tF^{1/2})f, \quad t \in [0, +\infty),$$

влекущее за собой оценку нормы

$$\|v(t)\| \leq e^{ct}\|f\|, \quad t \in [0, +\infty),$$

в которой $c = |\lambda_0|^{1/2}$, $\lambda_0 = \inf F$. По теореме 1 работы [2] из существования для каждой функции (52) вектор-функции $v(t)$, обладающей свойствами (53)–(55) и удовлетворяющей приведенной выше оценке нормы, следует самосопряженность операторов H_l при всех $l \geq 1$. Поэтому утверждение теоремы 4 о самосопряженности операторов H_l при всех $l \geq 1$ будет доказано, если при каждом $l \geq 1$ мы установим существование вектор-функции $v(t)$, удовлетворяющей условиям (53)–(55) при дополнительном предположении (52) относительно начальной функции $f(x)$. Подробную проверку существования такой вектор-функции для значений индекса $l \geq 2$ мы приведем в пп. 2.2–2.4. Незначительное отличие рассуждений указанной проверки, относящихся к $l \geq 2$, от тех, которые нужно было бы провести в случае значения индекса $l = 1$, связано с тем, что при $l \geq 2$ области U_l являются шаровыми слоями, в то время как U_1 – это шар $|x| < r_1$.

2.2. На протяжении пп. 2.2, 2.3 и большей части п. 2.4 значение индекса $l \geq 2$ считается фиксированным. Доказательство существования для каждой функции (52) вектор-функции $v(t)$, удовлетворяющей условиям (53)–(55), мы проведем в три этапа. В настоящем пункте изучается свойство конечной скорости распространения решений некоторого вспомогательного вырождающегося гиперболического уравнения с финитными старшими коэффициентами и потенциалом. На втором этапе (в п. 2.3) оно применяется для получения важного вспомогательного результата – леммы 5. Завершающий этап доказательства существования $v(t)$ содержится в п. 2.4.

Рассмотрим наряду с ДВ $\mathcal{L}$, удовлетворяющим условиям теоремы 4, вспомогательное действительное формально самосопряженное ДВ

$$\tilde{\mathcal{L}} = -\operatorname{div} \tilde{A}(x) \operatorname{grad} + \tilde{q}(x),$$

связанное с $\mathcal{L}$ соотношениями

$$\tilde{A}(x) = A(x), \quad \tilde{q}(x) = q(x), \quad x \in B_{r_l+\varepsilon_0} \setminus B_{r_{l-1}-\varepsilon_0}, \quad (56)$$

в которых $\varepsilon_0 > 0$ – достаточно малое число (удобно считать, что $\varepsilon_0 < \min\{r_{l-1} - r_{l-2}, r_{l+1} - r_l\}$); заметим, что шаровые слои $U_l = B_{r_l} \setminus B_{r_{l-1}}$ и $B_{r_l+\varepsilon_0} \setminus B_{r_{l-1}-\varepsilon_0}$ связаны соотношением $B_{r_l+\varepsilon_0} \setminus B_{r_{l-1}-\varepsilon_0} \supset U_l$. Мы будем предполагать, что старшие коэффициенты $\tilde{a}_{jk}(x)$ ДВ $\tilde{\mathcal{L}}$ (элементы матрицы $\tilde{A}(x)$) удовлетворяют условиям гладкости и вырождающейся эллиптичности, получающимся путем замены $a_{jk}(x)$ на $\tilde{a}_{jk}(x)$ в формулах (47) и (48), и, кроме того, финитны; будем также считать, что $\tilde{q}(x) \in L_0^\infty(\mathbb{R}^m)$. ДВ $\tilde{\mathcal{L}}$ удовлетворяет условиям признака А. Девинаца [14] самосопряженности минимального вырождающегося эллиптического оператора второго порядка в $L^2(\mathbb{R}^m)$ (с точностью до имеющих в [14] требований гладкости потенциала $\tilde{q}(x)$, которые в случае, когда $\tilde{q}(x) \in L_0^\infty(\mathbb{R}^m)$, несущественны). Поэтому минимальный оператор H в $L^2(\mathbb{R}^m)$, отвечающий ДВ $\tilde{\mathcal{L}}$, самосопряжен. Из условия $\tilde{q}(x) \in L_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ вытекает полуграниченность этого оператора.

Зафиксируем ограниченную область $G \subset \mathbb{R}^m$ и ее открытую окрестность G_ρ некоторого радиуса $\rho > 0$. Обозначим символом $d_G(x)$ расстояние от точки $x \notin G$ до G , а символом $\chi(\Omega)$ – действующий в $L^2(\mathbb{R}^m)$ оператор умножения на характеристическую функцию произвольной области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. Пусть $\mu(x) \geq 0$ – квадратный корень из наибольшего собственного значения матрицы $\tilde{A}(x)$. Интересующее нас вспомогательное утверждение – лемму 5 – мы получим как следствие такого свойства семейства операторов $\cos(t\tilde{H}^{1/2})$, $t \in [0, +\infty)$.

ЛЕММА 4. *Предположим, что положительная и непрерывная на $[0, \rho)$ функция $M(\tau)$ обладает тем свойством, что*

$$\mu(x) \leq M(\tau) \quad \text{при} \quad d_G(x) = \tau, \quad \tau \in [0, \rho). \quad (57)$$

Тогда для любого $t \in [0, t^*(\rho))$,

$$t^*(\rho) = \int_0^\rho M^{-1}(\tau) d\tau, \quad (58)$$

справедлива формула

$$\cos(t\tilde{H}^{1/2})\chi(G) = \chi(G_\rho) \cos(t\tilde{H}^{1/2})\chi(G). \quad (59)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Из доказательства леммы 4 будет видно, что формула (59) выражает в обобщенной форме свойство конечной скорости распространения решений задачи Коши для вырождающегося гиперболического уравнения $u_{tt} + \tilde{\mathcal{L}}[u] = 0$ с начальными данными $u(x, 0) = f(x)$, $u_t(x, 0) = 0$, в которых $f(x)$ – функция, удовлетворяющая условию $\text{supp } f \subset G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4. Рассмотрим последовательности эллиптических ДВ

$$\tilde{\mathcal{L}}_n = \tilde{\mathcal{L}} + \frac{1}{n}\Delta, \quad n = 1, 2, \dots$$

(Δ – оператор Лапласа в $\mathbb{R}^m$); при каждом $n \geq 1$ обозначим через $\tilde{H}_n$ минимальный оператор в $L^2(\mathbb{R}^m)$, порожденный ДВ $\tilde{\mathcal{L}}_n$. Вытекающие из определения ДВ $\tilde{\mathcal{L}}$ принадлежность старших коэффициентов ДВ $\tilde{\mathcal{L}}_n$ классу $C^2(\mathbb{R}^m)$ и ограниченность их в $\mathbb{R}^m$, а также условие $\tilde{q}(x) \in L_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ влекут за собой полуограниченность и самосопряженность каждого из операторов $\tilde{H}_n$, $n \geq 1$ (см., например, [12]). Очевидным является неравенство

$$\inf H_n \geq \inf H > -\infty, \quad n \geq 1.$$

Рассмотрим задачи Коши:

$$\begin{aligned} 1) \quad & u'' + \tilde{H}u = 0, \quad u(0) = f, \quad u'(0) = 0; \\ 2) \quad & u'' + H_n u = 0, \quad u(0) = f, \quad u'(0) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned} \tag{60}$$

для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с операторным коэффициентом относительно вектор-функции $u(t)$ со значениями в $L^2(\mathbb{R}^m)$. Если $f(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m) \subset D(\tilde{H}) \cap D(\tilde{H}_n)$, то вектор-функция $u(t) = \cos(t\tilde{H}^{1/2})f$, $t \in [0, +\infty)$, является решением первой из них, а вектор-функция $u_n(t) = \cos(t\tilde{H}_n^{1/2})f$ – второй. Функции

$$u(x, t) = u(t)(x), \quad u_n(x, t) = u_n(t)(x), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^m \times [0, +\infty),$$

можно рассматривать как обобщенные решения задачи Коши с начальными данными

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = 0$$

соответственно для вырождающегося гиперболического уравнения $u_{tt} + \tilde{\mathcal{L}}[u] = 0$ и гиперболического уравнения $u_{tt} + \tilde{\mathcal{L}}_n[u] = 0$. Операторы $\cos(t\tilde{H}_n^{1/2})$ и $\cos(t\tilde{H}^{1/2})$ ограничены при каждом $t \in [0, +\infty)$ в силу полуограниченности операторов $\tilde{H}_n, \tilde{H}$ и связаны предельным соотношением

$$\text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} \cos(t\tilde{H}_n^{1/2}) = \cos(t\tilde{H}^{1/2}), \quad t \in [0, +\infty) \tag{61}$$

(s-lim – сильный предел последовательности ограниченных операторов в $L^2(\mathbb{R}^m)$). Чтобы убедиться в его справедливости, воспользуемся очевидным равенством

$s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{H}_n f = \tilde{H} f$ для любой функции $f(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$. Так как каждый из операторов $\tilde{H}, \tilde{H}_n, n \geq 1$, является замыканием своего сужения на $C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$, то по [17, гл. 8, теорема 8.25] это равенство влечет за собой сильно резольвентную сходимость $\tilde{H}_n$ к $\tilde{H}$ при $n \rightarrow \infty$. По [17, гл. 8, теорема 8.20] из последнего свойства следует сильная сходимость последовательности операторов $\varphi(\tilde{H}_n)$ к $\varphi(\tilde{H})$ для любой непрерывной и ограниченной (на оси спектрального параметра λ) скалярной функции $\varphi(\lambda)$. Для получения формулы (61) достаточно взять функцию $\varphi(\lambda)$, совпадающую с $\cos(t\lambda^{1/2})$ при $\lambda \geq \inf \tilde{H} = \lambda_0$ и равную $\cos(t\lambda_0^{1/2})$ при $\lambda < \lambda_0$. Свойство конечной скорости распространения решения $u_n(x, t)$ гиперболической задачи Коши

$$u_{tt} + \tilde{\mathcal{L}}[u] = 0, \quad u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = 0$$

позволяет найти для ограниченной области G и ее окрестности G_ρ такое число $t_n > 0$, что $\text{supp}_x u_n(x, t) \subset G_\rho$ при каждом $t \in [0, t_n)$, если только $\text{supp } f(x) \subset G$. Это свойство равносильно операторному равенству

$$\cos(t\tilde{H}_n^{1/2})\chi(G) = \chi(G_\rho) \cos(t\tilde{H}_n^{1/2})\chi(G), \quad t \in [0, t_n). \quad (62)$$

Используя результаты, содержащиеся в [4, гл. 1, § 2, гл. 2, § 2], можно получить формулу для числа t_n , имеющую вид

$$t_n = t_n(\rho) = \int_0^\rho M_n^{-1}(\tau) d\tau.$$

В этой формуле $M_n(\tau) = (M^2(\tau) + \frac{1}{n})^{1/2}$ – функция, связанная с положительным квадратным корнем $\mu_n(x)$ из наибольшего собственного значения матрицы $\tilde{A}(x) + \frac{1}{n}E$ старших коэффициентов ДВ $\tilde{\mathcal{L}}_n$ неравенством $0 < \mu_n(x) \leq M_n(\tau)$ при $d_G(x) = \tau, \tau \in (0, \rho)$.

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n(\tau) = M(\tau)$ и $0 < M_n^{-1}(\tau) < M^{-1}(\tau)$ при каждом $\tau \in [0, \rho)$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n(\rho) = t^*(\rho)$. Поэтому предельный переход при $n \rightarrow \infty$ в равенстве (63) с $t_n = t_n(\rho)$, основанный на свойстве (61), приводит к справедливости формулы (59) для любого $t \in [0, t^*(\rho))$.

2.3. Обозначим символом $U_l^{(h)}, h \in (0, \frac{r_l - r_{l-1}}{2})$, шаровой слой $r_{l-1} + h < |x| < r_l - h$, являющийся частью шарового слоя U_l (напомним, что мы рассматриваем случай, когда значение индекса $l \geq 2$ фиксировано). Доказательство существования для каждой функции (52) вектор-функции $v(t)$, удовлетворяющей условиям (53)–(55), опирается на следующее свойство операторов $\cos(t\tilde{H}^{1/2})$, вытекающее из леммы 4.

ЛЕММА 5. *Зафиксируем какое-нибудь число $h \in (0, \frac{r_l - r_{l-1}}{2})$. Следствием условий (47) и (50) теоремы 4 является существование для произвольной константы $N > 0$ такого числа $\delta_N \in (0, h)$, что при любом $t \in [0, N)$ справедливо равенство*

$$\cos(t\tilde{H}^{1/2})\chi(U_l^{(h)}) = \chi(U_l^{(\delta_N)}) \cos(t\tilde{H}^{1/2})\chi(U_l^{(h)}). \quad (63)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим то, что при выполнении условий (47), (50) для области $G = U_l^{(h)}$ и любого числа $\rho \in (0, h)$ существует функция $M(\tau)$, удовлетворяющая условиям леммы 4 и такая, что выражение (58) обладает свойством

$$\lim_{\rho \rightarrow h-0} t^*(\rho) = +\infty. \quad (64)$$

Если такая функция найдена, то для каждого $N > 0$ можно найти число $\rho_N \in (0, h)$, обладающее свойством $t^*(\rho_N) > N$. Применяя лемму 4 к указанной области G и числу $\rho = \rho_N$, мы получим равенство (59) для произвольного $t \in [0, \rho_N]$ и, в частности, для любого $t \in [0, N]$. Его можно представить в виде (63), если заметить, что окрестностью G_{ρ_N} радиуса ρ_N области $G = U_l^{(h)}$ является шаровой слой $U_l^{(\delta_N)}$, $\delta_N = h - \rho_N$.

Найдем указанную функцию $M(\tau)$. Согласно формуле (56) неотрицательно определенные матрицы $A(x)$ и $\tilde{A}(x)$ совпадают в шаровом слое $B_{r_l+\varepsilon_0} \setminus B_{r_{l-1}-\varepsilon_0}$, содержащем $U_l = B_{r_l} \setminus B_{r_{l-1}}$; поэтому $\tilde{A}(x) = 0$ на каждой из сфер S_{r_n} , $n = l-1, l$, в силу условия (50). Следовательно, любая точка указанных сфер есть точка минимума произвольного диагонального элемента $\tilde{a}_{jj}(x) \geq 0$ матрицы $\tilde{A}(x)$, и поэтому дифференциал функции $\tilde{a}_{jj}(x)$ в ней равен нулю. Условие (47) позволяет получить с помощью формулы Тейлора, примененной в каждой точке сфер S_{r_n} , $n = l-1, l$, оценки

$$|a_{jk}(x)| \leq c_1 (|x| - r_n)^2$$

при $r_n - \varepsilon < |x| < r_n + \varepsilon$, $n = l-1, l$, с некоторой константой $c_1 > 0$ для достаточно малого числа $\varepsilon > 0$ по крайней мере при $k = j$: справедливость их при $k \neq j$ вытекает из неравенства

$$|a_{jk}(x)| \leq a_{jj}^{1/2}(x) a_{kk}^{1/2}(x)$$

для элементов неотрицательно определенной матрицы $\tilde{A}(x)$. Указанные оценки влекут за собой неравенства

$$\mu(x) \leq c_2 |x| - r_n \quad \text{при} \quad r_n - \varepsilon < |x| < r_n + \varepsilon, \quad n = l-1, l,$$

с константой $c_2 > 0$, зависимость которой от c_1 для нас несущественна. Полагая $G = U_l^{(h)}$, $h \in (0, \varepsilon)$, и учитывая, что множество точек x , удовлетворяющих условию $d_G(x) = \tau > 0$, есть множество $S_{r_{l-1}+h-\tau} \cup S_{r_l-h+\tau}$, при любом $\rho \in (0, h)$ получаем как следствие последних неравенств оценку (57) с функцией $M(\tau) = c_2(h - \tau)$, для которой выражение (58) имеет вид

$$t^*(\rho) = \frac{1}{c_2} \ln \frac{h}{h - \rho}$$

и поэтому обладает свойством (64). Как объяснено выше, отсюда следует справедливость леммы 5 при $h < \varepsilon$, где ε – указанное малое число. Если $h \in \left[\varepsilon, \frac{r_l - r_{l-1}}{2}\right)$, то $\chi(U_l^{(h)}) = \chi(U_l^{(\frac{\varepsilon}{2})})\chi(U_l^{(h)})$, и, следовательно, утверждение леммы 5 для указанных h вытекает из его справедливости для $h = \varepsilon/2$.

2.4. Завершим доказательство самосопряженности оператора H_l , отвечающего значению индекса $l \geq 2$. Возьмем произвольную функцию (52) и рассмотрим соответствующую вектор-функцию

$$v(t) = \cos(t\tilde{H}^{1/2})f, \quad t \in [0, +\infty). \quad (65)$$

Покажем, что она удовлетворяет каждому из условий (53)–(55). Так как $f(x) \in C_0^\infty(U_l) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^m) \subset \mathcal{D}(\tilde{H})$, то $v(t)$ является решением задачи Коши (60); в частности,

$$v(t) \in \mathcal{D}(\tilde{H}), \quad t \in [0, +\infty). \quad (66)$$

Из условия (52) следует существование числа $h \in \left[0, \frac{r_l - r_{l-1}}{2}\right)$ такого, что $\text{supp } f \subset U_l^{(h)}$; поэтому

$$f = \chi(U_l^{(h)})f \quad \text{и} \quad v(t) = \cos(t\tilde{H}^{1/2})\chi(U_l^{(h)})f, \quad t \in [0, +\infty).$$

Лемма 5 позволяет утверждать, что для произвольной константы $N > 0$ существует число $\delta_N \in (0, h)$ такое, что $v(t) = \chi(U_l^{(\delta_N)})v(t)$ при $t \in [0, N]$. Так как $U_l^{(\delta_N)} \subset U_l$ для любого $N > 0$, то последнее свойство означает, что

$$\text{supp}_x v(t)(x) \subset U_l, \quad t \in [0, +\infty). \quad (67)$$

В шаровом слое U_l ДВ $\mathcal{L}$ и ДВ $\tilde{\mathcal{L}}$ совпадают в силу условия (56). С учетом этого замечания, а также того, что операторы H_l и $\tilde{H}$ являются замыканиями операторов $C_0^\infty(U_l) \ni f \rightarrow \mathcal{L}[f] = \tilde{\mathcal{L}}[f]$ и $C_0^\infty(\mathbb{R}^m) \ni f \rightarrow \tilde{\mathcal{L}}[f]$, любая функция

$$g \in \mathcal{D}(\tilde{H}), \quad \text{supp } g \subset U_l, \quad (68)$$

по-видимому, должна принадлежать $\mathcal{D}(H_l)$ и удовлетворять равенству $\tilde{H}g = H_l g$. Предположим, что такое свойство функции (68) доказано. Тогда из формул (66), (67) вытекает свойство (53) вектор-функции (65), а также равенство $\tilde{H}v(t) = H_l v(t)$, $t \in [0, +\infty)$. Ввиду того, что $v(t)$ является решением задачи Коши (60), это равенство влечет за собой также свойства (54), (55). Таким образом, если справедливо высказанное предположение, то для любой функции (52) вектор-функция (65) обладает свойствами (53)–(55). В конце п. 2.1 объяснено, что наличие таких свойств у рассматриваемой вектор-функции $v(t)$ влечет за собой самосопряженность оператора H_l . Поэтому утверждение теоремы 4 о самосопряженности оператора H_l будет доказано вместе со следующей леммой.

ЛЕММА 6. Если функция $g(x)$ удовлетворяет условиям (68), то $g \in \mathcal{D}(H_l)$ и справедливо равенство $\tilde{H}g = H_l g$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Утверждение леммы 6 было бы очевидным, если бы $\mathcal{L}$ и $\tilde{\mathcal{L}}$ были эллиптическими ДВ. Так как эти ДВ имеют вырождающийся эллиптический характер, оно требует обоснования.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 6. Условия (68) означают, что существует последовательность функций $g_n(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$, $n \geq 1$, обладающая свойствами

$$\text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} g_n = g, \quad \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} \tilde{\mathcal{L}}[g_n] = \tilde{H}g. \quad (69)$$

Пусть $\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$. Тогда из формулы

$$\tilde{\mathcal{L}}[\varphi g_n] = \varphi \tilde{\mathcal{L}}[g_n] + g_n(\tilde{\mathcal{L}}[\varphi] - \tilde{q}(x)\varphi) - 2\langle \tilde{A}(x) \text{grad } g_n, \text{grad } \varphi \rangle,$$

в которой

$$\langle \xi, \eta \rangle = \sum_{j=1}^m \xi_j \eta_j, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m), \quad \eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m),$$

видно, что $\text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} \tilde{\mathcal{L}}[\varphi g_n]$ существует, если существует

$$\text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} \langle \tilde{A}(x) \text{grad } g_n, \text{grad } \varphi \rangle. \quad (70)$$

Так как $\langle \tilde{A}(x) \text{grad } g_n, \text{grad } \varphi \rangle = \langle \tilde{A}^{1/2}(x) \text{grad } g_n, \tilde{A}^{1/2}(x) \text{grad } \varphi \rangle$, причем можно проверить, что элементы матрицы $\tilde{A}^{1/2}(x)$ измеримы и ограничены в любой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, то для обоснования существования предела (70) достаточно установить сходимость в $L^2(\mathbb{R}^m)$ координат вектор-функции $\tilde{A}^{1/2}(x) \text{grad } g_n$ точки $x \in \mathbb{R}^m$ со значениями в $\mathbb{C}^m$.

Введем обозначение $|\xi|^2 = \langle \xi, \xi \rangle$ и рассмотрим очевидное равенство

$$\begin{aligned} D_{jk} &= \int_{\mathbb{R}^m} |\tilde{A}^{1/2}(x) \text{grad } g_j - \tilde{A}^{1/2}(x) \text{grad } g_k|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \langle \tilde{A}(x) \text{grad}(g_j - g_k), \text{grad}(g_j - g_k) \rangle dx \\ &= (\tilde{\mathcal{L}}[g_j] - \tilde{\mathcal{L}}[g_k] - \tilde{q}(x)(g_j - g_k), g_j - g_k). \end{aligned}$$

С учетом ограниченности и финитности потенциала $\tilde{q}(x)$ в $\mathbb{R}^m$ и вытекающей из соотношений (69) ограниченности норм функции g_n , $\tilde{\mathcal{L}}[g_n]$, $n \geq 1$, из него следует оценка

$$D_{jk} \leq C \|g_j - g_k\|, \quad C - \text{const} > 0, \quad 1 \leq j, k < \infty,$$

означающая (в силу первого равенства формулы (69)) справедливость указанного свойства координат вектор-функции $\tilde{A}^{1/2}(x) \text{grad } g_n$ и вместе с ним существование предела (70). Как объяснено выше, последний факт означает, что $\text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} \tilde{\mathcal{L}}[\varphi g_n]$ существует; так как $\varphi(x)g_n(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$, то очевидно, что этот предел равен $\tilde{H}\varphi g$. Чтобы получить утверждение леммы 6, следует взять функцию $\varphi(x) \in C_0^\infty(U_l) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$, равную единице на носителе функции $g(x)$, удовлетворяющей

условиям (68). Тогда $\varphi(x)g_n(x) \in C_0^\infty(U_l)$, $\tilde{\mathcal{L}}[\varphi g_n] = \mathcal{L}[\varphi g_n]$, $n \geq 1$ (следствие формулы (56)), и существуют

$$\text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} \varphi g_n = \varphi g = g, \quad \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}[\varphi g_n] = \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} \tilde{\mathcal{L}}[\varphi g_n].$$

Эти свойства означают, что $g \in \mathcal{D}(H_l)$ и $H_l g = \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} \tilde{\mathcal{L}}[\varphi g_n] = \tilde{H} \varphi g = \tilde{H} g$. Лемма 6 доказана. Ее доказательство завершает обоснование самосопряженности операторов H_l при $l \geq 2$.

Для полного доказательства теоремы 4 осталось установить самосопряженность минимального оператора H_1 в $L^2(U_1)$, порожденного ДВ $\mathcal{L}$, удовлетворяющим ее условиям. Так как граница области U_1 – шара B_{r_1} (сфера S_{r_1}) – имеет более простой характер по сравнению с границами областей U_l , $l \geq 2$, – шаровых слоев $B_{r_l} \setminus \bar{B}_{r_{l-1}}$, то доказательство самосопряженности оператора H_1 представляет собой более простой вариант приведенного выше доказательства самосопряженности операторов H_l при $l \geq 2$. На перечислении незначительных изменений, которые нужно внести в него, чтобы установить самосопряженность оператора H_1 , мы не останавливаемся.

2.5. В заключение укажем на связь теоремы 4 с интересным явлением неустойчивости свойства несамосопряженности действующего в $L^2(\mathbb{R}^m)$ минимального оператора, порожденного ДВ $\mathcal{L}$ вида (1), относительно вариации его старших коэффициентов на множестве сколь угодно малой положительной меры в $\mathbb{R}^m$, а также приведем другие замечания к этой теореме.

Зафиксируем какую-нибудь числовую последовательность $\{r_l\}_{l=1}^\infty$ вида (45) и свяжем с ней, а также с произвольным числом $\delta > 0$, функцию $\varphi_\delta(r) \in C^\infty([0, +\infty))$, удовлетворяющую условиям:

- 1) $\varphi_\delta(r) \geq 0$, $r \in [0, +\infty)$;
- 2) множество нулей функции $\varphi_\delta(r)$ совпадает с последовательностью $\{r_l\}_{l=1}^\infty$;
- 3) дополнение J_δ к множеству точек $r \in [0, +\infty)$, в которых $\varphi_\delta(r) = 1$, имеет меру Лебега $\mu(J_\delta) < \delta$ (в качестве J_δ удобно взять счетное объединение достаточно малых окрестностей точек r_l , $l \geq 1$).

Предположим, что минимальный оператор H_1 , отвечающий некоторому вырождающемуся эллиптическому ДВ $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1$ вида (1) с действительной симметрической матрицей старших коэффициентов $A(x) = A_1(x)$ и действительным потенциалом $q(x)$, удовлетворяющими условиям (47)–(49), несамосопряжен. Положим $A_2(x) = \varphi_\delta(|x|)A_1(x)$ и рассмотрим вырождающееся эллиптическое ДВ $\mathcal{L}_2$, получаемое из $\mathcal{L}_1$ заменой матрицы старших коэффициентов последнего $A_1(x)$ на матрицу $A_2(x)$. Тогда матрица старших коэффициентов и потенциал ДВ $\mathcal{L}_2$ будут удовлетворять всем условиям теоремы 4, вследствие чего отвечающий ему минимальный оператор H_2 будет самосопряжен. Вместе с тем в силу свойства 3 функции $\varphi_\delta(r)$ для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ число δ можно выбрать настолько малым, что ДВ $\mathcal{L}_1$ и ДВ $\mathcal{L}_2$ будут отличаться друг от друга только на множестве Ω_ε в $\mathbb{R}^m$, мера Лебега которого меньше ε (в качестве Ω_ε можно взять бесконечную последовательность шаровых слоев $r_l - \delta_l < |x| < r_l + \delta_l$, $l \geq 1$, толщина каждого из которых $2\delta_l$ – достаточно малое число).

Приведенный пример показывает, что симметрический несамосопряженный оператор H можно преобразовать в самосопряженный с помощью изменения значений старших коэффициентов соответствующего вырождающегося эллиптического ДВ $\mathcal{L}$ вида (1) на множестве сколь угодно малой положительной меры (с сохранением свойства вырождающейся эллиптичности). Представляет интерес то, что такое же явление неустойчивости свойства несамосопряженности минимального оператора можно обнаружить также в классе эллиптических ДВ $\mathcal{L}$ (ранее в эллиптическом случае была известна неустойчивость указанного свойства по отношению к вариации потенциала ДВ $\mathcal{L}$ на множестве сколь угодно малой положительной меры; см. [13, § 3]). Для его обоснования достаточно иметь утверждение, обеспечивающее самосопряженность минимального оператора H в $L^2(\mathbb{R}^m)$, порожденного эллиптическим ДВ $\mathcal{L}$ с произвольным на бесконечности потенциалом $q(x)$ при некоторых (определяемых поведением $q(x)$ при $|x| \rightarrow \infty$) ограничениях, накладываемых на его старшие коэффициенты только на расширяющейся последовательности шаровых слоев $V_l = B_{d_l} \setminus \overline{B}_{c_l}$, $d_l < c_l < d_{l+1}$ ($l \geq 1$), $\lim_{l \rightarrow \infty} c_l = +\infty$, мера объединения которых сколь угодно мала. Такое утверждение (его формулировка громоздка, и поэтому мы ее не приводим) можно получить по крайней мере в случае достаточной гладкости коэффициентов эллиптического ДВ $\mathcal{L}$ как следствие признака самосопряженности минимального эллиптического дифференциального оператора H , вытекающего из теоремы 1 статьи [18].

В связи с теоремой 4 укажем на возможность ее обобщения на ДВ $\mathcal{L}$, не обладающее свойством вырождающейся эллиптичности во всем пространстве $\mathbb{R}^m$. Зафиксируем какую-нибудь последовательность натуральных чисел $\{n_l\}_{l=1}^\infty$, с помощью которой по заданному вырождающемуся эллиптическому ДВ $\mathcal{L}$, удовлетворяющему всем условиям теоремы 4, построим новое ДВ

$$\tilde{\mathcal{L}} = -\operatorname{div} \tilde{A}(x) \operatorname{grad} + q(x)$$

с матрицей старших коэффициентов $\tilde{A}(x)$, связанной с матрицей старших коэффициентов $A(x)$ ДВ $\mathcal{L}$ соотношениями

$$\tilde{A}(x) = (-1)^{n_l} A(x), \quad x \in \overline{U}_l, \quad l \geq 1,$$

определяющими матрицу $\tilde{A}(x)$ однозначно. Минимальный оператор в $L^2(\mathbb{R}^m)$, порожденный ДВ $\tilde{\mathcal{L}}$, обозначим через $\tilde{H}$. Так же, как в доказательстве теоремы 4 из самосопряженности операторов H_l были выведены самосопряженность оператора H и формула (51), может быть установлена самосопряженность оператора $\tilde{H}$ вместе с формулой

$$\tilde{H} = \bigoplus_{l=1}^{\infty} (-1)^{n_l} H_l.$$

Такое обобщение теоремы 4 интересно в связи с тем, что в случае, когда последовательность $\{n_l\}_{l=1}^\infty$ содержит натуральные числа разной четности, ДВ $\tilde{\mathcal{L}}$ не обладает свойством вырождающейся эллиптичности в $\mathbb{R}^m$.

Теорема 4 остается верна, если ее условие (50) выполняется не на последовательности сфер S_{r_l} , $l \geq 1$, а на неограниченно расширяющейся последовательности компактных замкнутых достаточно гладких гиперповерхностей Γ_l , $l \geq 1$, в $\mathbb{R}^m$ (при этом шаровые слои U_l , $l \geq 2$, преобразуются в телесные слои, лежащие между ними). Доказательство этого утверждения отличается от доказательства теоремы 4 деталями технического характера. Заметим, что некоторые из рассуждений, используемых в доказательстве теоремы 4, позволяют сделать вывод о том, что при условии гладкости (47) старших коэффициентов вырождающегося эллиптического ДВ $\mathcal{L}$ вида (1) наличие в $\mathbb{R}^m$ компактной замкнутой достаточно гладкой гиперповерхности Γ , во всех точках которой матрица старших коэффициентов $A(x)$ равна нулю, позволяет представить соответствующий минимальный оператор H в $L^2(\mathbb{R}^m)$ в виде ортогональной операторной суммы $H_1 \oplus H_2$, слагаемые которой отвечают соответственно компактной внутренности Ω и некомпактной внешности $\mathbb{R}^m \setminus \bar{\Omega}$ указанной гиперповерхности. При этом H_1 — это самосопряженный минимальный оператор в $L^2(\Omega)$, а H_2 — симметрический (не всегда самосопряженный) минимальный оператор в $L^2(\mathbb{R}^m \setminus \bar{\Omega})$, порожденные ДВ $\mathcal{L}$.

В заключение сделаем замечание, относящиеся к интересному результату — признаку А. Девинаца [14] самосопряженности минимального оператора H , порожденного вырождающимся эллиптическим ДВ $\mathcal{L}$ вида (1) (он сыграл важную роль в доказательстве утверждения теоремы 4 о самосопряженности операторов H_l). Как показывает теорема 2, присутствующее в этом признаке условие принадлежности классу $C^2(\mathbb{R}^m)$ старших коэффициентов ДВ $\mathcal{L}$ не может быть существенно ослаблено. Вместе с тем ограничения, накладываемые в работе [14] на поведение при $|x| \rightarrow \infty$ старших коэффициентов и потенциала ДВ $\mathcal{L}$, являются слишком жесткими. С помощью метода гиперболического уравнения, используемого в доказательствах теорем 1 и 4, их можно значительно ослабить. Можно показать, что метод гиперболического уравнения позволяет обобщить на случай вырождающихся эллиптических ДВ второго порядка со старшими коэффициентами класса $C^2(\mathbb{R}^m)$ и потенциалом класса $L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^m)$ ряд наиболее сильных признаков самосопряженности минимального оператора (с условиями типа Титчмарша–Сирса, Хартмана–Исмагилова), известных в эллиптическом случае.

Список литературы

1. Орочко Ю. Б. О свойстве глобальной конечной скорости распространения эллиптического дифференциального выражения второго порядка // Дифференц. уравн. Т. 18. № 10. С. 1764–1772.
2. Орочко Ю. Б. Метод операторного косинуса в задаче о существенной самосопряженности неполуограниченного симметрического оператора // Укр. матем. журн. 1981. Т. 33. № 3. С. 348–355.
3. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1950.
4. Орочко Ю. Б. Метод гиперболического уравнения в теории операторов типа Шрёдингера с локально интегрируемым потенциалом // УМН. 1988. Т. 43. Вып. 2 (260). С. 43–86.
5. Шубин М. А. Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория. М.: Наука, 1978.

6. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 2. Гармонический анализ. Самосопряженность. М.: Мир, 1978.
7. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Спектральная теория. М.: Мир, 1966.
8. Рофе-Бекетов Ф. С. Замечание в связи с многомерным обобщением теоремы Г. Вейля о самосопряженности // Теория функций, функц. анализ и их прилож. (Республиканский межведомств. научн. сб., г. Харьков). 1989. Вып. 52. С. 88–90.
9. Харпман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
10. Орочко Ю. Б. Примеры симметрических дифференциальных операторов на прямой с бесконечными индексами дефекта // Функц. анализ и его прилож. 1994. Т. 28. № 2. С. 69–72.
11. Ikebet T., Kato T. Uniqueness of the selfadjoint extension of singular elliptic operators // Arch. Rational Mech. Anal. 1962. V. 9. № 1. P. 77–92.
12. Stetkär-Hansen H. A generalization of a theorem of Wientholtz concerning essential selfadjointness of singular elliptic operators // Math. Scand. 1966. V. 9. № 1. P. 108–112.
13. Knowles I. On the essential self-adjointness for singular elliptic differential operators // Math. Ann. 1977. V. 227. № 2. P. 152–172.
14. Devinatz A. Selfadjointness of second order degenerate-elliptic operators // Indiana Univ. Math. J. 1978. V. 27. № 2. P. 255–266.
15. Орочко Ю. Б. Гиперболические принципы локализации в теории эллиптических самосопряженных операторов второго порядка: Дис. . . . д-ра физ.-мат. наук. М., 1984. С. 312.
16. Перельмутер М. А., Семенов Ю. А. О существенной самосопряженности эллиптических операторов второго порядка с измеримыми коэффициентами // Укр. матем. журн. 1985. Т. 37. № 2. С. 191–198.
17. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ. М.: Мир, 1977.
18. Орочко Ю. Б. Локальная конечная скорость распространения гиперболического уравнения в задаче о самосопряженности степеней эллиптического дифференциального оператора второго порядка // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1983. Т. 47. № 2. С. 298–314.

Поступило в редакцию
3.X.1995