Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Вик. С. Куликов, О гипотезе Кизини. II, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2008, том 72, выпуск 5, 63–76

DOI: <https://doi.org/10.4213/im1579>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 16:26:00

УДК 512.7+515.1

Вик. С. Куликов

О гипотезе Кизини. II

Доказано, что если $S \subset \mathbb{P}^N$ – гладкая проективная поверхность и $f: S \rightarrow \mathbb{P}^2$ – общая линейная проекция, разветвленная над каспидальной кривой $B \subset \mathbb{P}^2$, то поверхность S однозначно с точностью до изоморфизма определяется кривой B .

Библиография: 6 наименований.

Пусть $B \subset \mathbb{P}^2$ – неприводимая плоская алгебраическая кривая, определенная над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, имеющая только обыкновенные каспы и ноуды в качестве своих особых точек. Пусть $2d$ – степень, g – род десингуляризации, s – число каспов и n – число ноудов кривой B . Кривая B называется *дискриминантной кривой общего накрытия проективной плоскости*, если существует конечный морфизм $f: S \rightarrow \mathbb{P}^2$, $\deg f \geq 3$, удовлетворяющий следующим условиям:

- (i) S – неособая неприводимая проективная поверхность;
- (ii) морфизм f неразветвлен над $\mathbb{P}^2 \setminus B$;
- (iii) $f^*(B) = 2R + C$, где кривая R неособа, неприводима и приведена, а C – приведенная кривая;
- (iv) морфизм $f|_R: R \rightarrow B$ совпадает с морфизмом нормализации кривой B .

Такие морфизмы f будем называть *общими накрытиями проективной плоскости $\mathbb{P}^2$* .

Общее накрытие $f: S \rightarrow \mathbb{P}^2$ называется *общей проекцией*, если поверхность S вложена в некоторое проективное пространство $\mathbb{P}^N$, а $f = \text{pr}|_S$ является ограничением на поверхность S некоторой линейной проекции $\text{pr}: \mathbb{P}^N \rightarrow \mathbb{P}^2$.

Гипотеза Кизини (см. [1]) утверждает, что если общее накрытие $f: S \rightarrow \mathbb{P}^2$ имеет степень $\deg f \geq 5$, то f определяется своей дискриминантной кривой однозначно с точностью до изоморфизма поверхности S .

В работе [2] было доказано, что гипотеза Кизини верна для дискриминантной кривой B общего накрытия $f: S \rightarrow \mathbb{P}^2$, если

$$\deg f > \frac{4(3d + g - 1)}{2(3d + g - 1) - c}. \quad (1)$$

Более того, как было замечено в [3], из неравенства Богомолова–Мияоки–Яо следует, что значения, которые может принимать правая часть неравенства (1), меньше 12, другими словами, гипотеза Кизини верна для дискриминантных

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (гранты № 08-01-00095, 07-01-92211-НЦНИЛ-а, 06-01-72017МНТИ), NWO-RFBR (грант № 047.011.2004.026 (РФФИ, грант № 05-02-89000-НВО-а)), INTAS (грант № 05-1000008-7805) и RUM1-2692-МО-05.

кривых общих накрытий, степень которых больше 11. Кроме того, в [3] было показано, что если S является поверхностью не общего типа, то гипотеза Кизини верна для дискриминантных кривых общих накрытий $f: S \rightarrow \mathbb{P}^2$, если $\deg f \geq 8$.

Целью настоящей статьи является доказательство следующей теоремы.

ТЕОРЕМА. Пусть $f: S \rightarrow \mathbb{P}^2$ – общая проекция. Тогда общее накрытие f однозначно с точностью до изоморфизма поверхности S определяется своей дискриминантной кривой $B \subset \mathbb{P}^2$, за исключением случая, когда $S \simeq \mathbb{P}^2$ вложена в $\mathbb{P}^5$ с помощью многочленов степени два (вложение Веронезе плоскости $\mathbb{P}^2$ в $\mathbb{P}^5$), и f является ограничением на поверхность S линейной проекции $\text{pr}: \mathbb{P}^5 \rightarrow \mathbb{P}^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы доказать теорему, покажем, что неравенство (1) не выполнено только для дискриминантных кривых двух непрерывных семейств общих проекций на плоскость, и после этого покажем, что для одного из этих исключительных семейств общие проекции $f: S \rightarrow \mathbb{P}^2$ однозначно определяются своими дискриминантными кривыми, а второе исключительное семейство – это общие проекции поверхности $S \simeq \mathbb{P}^2$, вложенной по Веронезе в $\mathbb{P}^5$.

Для этого рассмотрим общую проекцию $f: S \rightarrow \mathbb{P}^2$, где S – неособая поверхность, вложенная в $\mathbb{P}^N$, $\deg S = m$ – степень вложения $S \subset \mathbb{P}^N$ и $\text{pr}: \mathbb{P}^N \rightarrow \mathbb{P}^2$ – линейная проекция, для которой $f = \text{pr}|_S$. Имеем $\deg f = \deg S = m$.

Каждая линейная проекция $\mathbb{P}^N \rightarrow \mathbb{P}^2$ определяется своим центром $\mathbb{P}^{N-3} \subset \mathbb{P}^N$. Следовательно, множество линейных проекций $\mathbb{P}^N \rightarrow \mathbb{P}^2$ параметризуется точками грассманиана $\text{Gr}(N-3, N)$. Пусть $u_0 \in \text{Gr}(N-3, N)$ – это та точка, для которой общее накрытие $f = \text{pr}_{u_0|S}$ является ограничением проекции $\text{pr} = \text{pr}_{u_0}$. Существует открытое по Зарискому подмножество U_S в грассманиане $\text{Gr}(N-3, N)$, для точек $u \in U_S$ которого ограничения f_u соответствующих линейных проекций pr_u на поверхность S являются общими накрытиями проективной плоскости. Множество U_S не пусто, так как по предположению $u_0 \in U_S$. Для $u \in U_S$ дискриминантные кривые B_u общих накрытий f_u имеют один и тот же род g , одну и ту же степень $\deg B_u = 2d$ и одни и те же числа c и n каспов и ноудов. Следовательно, для всех общих проекций f_u , $u \in U_S$, неравенство (1) одновременно либо выполнено, либо не выполнено, и поэтому, чтобы проверить неравенство (1), в качестве u_0 мы можем взять любую точку, принадлежащую U_S .

Согласно [4, теорема 3] существует непустое открытое по Зарискому подмножество $V_S \subset \text{Gr}(N-4, N)$ такое, что для каждой линейной проекции $\text{pr}_v: \mathbb{P}^N \rightarrow \mathbb{P}^3$ с центром в $v \in V_S$ образ $\bar{S} = \text{pr}_v(S)$ поверхности S имеет только обыкновенные особые точки (т.е. особые точки, заданные локально одним из следующих уравнений: $xy = 0$ (двойная кривая), $xyz = 0$ (тройная точка) и $x^2 = y^2z$ (пинч)).

Рассмотрим многообразие флагов $F = F(N-4, N-3, N)$ линейных подпространств $\mathbb{P}^{N-4} \subset \mathbb{P}^{N-3}$ в $\mathbb{P}^N$. Имеем две естественные проекции $p_1: F \rightarrow \text{Gr}(N-3, N)$ и $p_2: F \rightarrow \text{Gr}(N-4, N)$. Очевидно, что пересечение $W_S =$

$p_1^{-1}(U_S) \cap p_2^{-1}(V_S)$ двух непустых открытых по Зарискому подмножеств $p_1^{-1}(U_S)$ и $p_2^{-1}(V_S)$ является непустым открытым по Зарискому подмножеством в многообразии F . Следовательно, не ограничивая общности, мы можем предполагать, что общее накрытие f совпадает с проекцией f_u для некоторой точки $u \in U_S$, для которой найдется такая точка $w \in W_S$, что $p_1(w) = u$, т. е. проекция pr_u может быть разложена в композицию двух проекций: проекции $\text{pr}_{p_2(w)}$ и некоторой проекции $\bar{\text{pr}}: \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^2$, так, что $\bar{S} = \text{pr}_{p_2(w)}(S)$ является поверхностью в $\mathbb{P}^3$ с обыкновенными особыми точками степени $\deg \bar{S} = \deg S$. Обозначим через $f_1: S \rightarrow \bar{S}$ ограничение проекции $\text{pr}_{p_2(w)}$ на поверхность S и через $f_2: \bar{S} \rightarrow \mathbb{P}^2$ ограничение проекции $\bar{\text{pr}}$ на поверхность $\bar{S}$. Морфизм f_1 является бирациональным. Имеем $f = f_2 \circ f_1$.

Обозначим через $D \subset \bar{S}$ двойную кривую поверхности $\bar{S}$, $D = D_1 \cup \dots \cup D_u$, где D_i , $i = 1, \dots, u$, — неприводимые компоненты кривой D . Пусть g_i и d_i — это соответственно род и степень кривой D_i . Положим $\bar{g} = \sum_{i=1}^u g_i$ и $\bar{d} = \sum_{i=1}^u d_i$. Обозначим через t число тройных точек поверхности $\bar{S}$. Отметим, что $0 \leq u \leq \bar{d}$ и $\bar{g} \geq 0$.

Имеем (см., например, [5])

$$K_S^2 = m(m-4)^2 - (5m-24)\bar{d} - 4(u-\bar{g}) + 9t, \quad (2)$$

$$e(S) = m^2(m-4) + 6m - (7m-24)\bar{d} - 8(u-\bar{g}) + 15t, \quad (3)$$

где K_S — канонический класс поверхности S и $e(S)$ — ее топологическая эйлерова характеристика. С другой стороны, так как $\deg f = \deg S = m$ для общей проекции $f = \text{pr}|_S$, то (см. [2, леммы 6 и 7])

$$K_S^2 = 9m - 9d + g - 1, \quad (4)$$

$$e(S) = 3m + 2(g-1) - c. \quad (5)$$

ЛЕММА 1. *Имеем*

$$2d = m(m-1) - 2\bar{d}, \quad (6)$$

$$\bar{d} \leq \frac{(m-1)(m-2)}{2}. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть L — общая прямая в $\mathbb{P}^2$ и $\bar{L} = f_2^{-1}(L)$ — ее прообраз. Тогда $\bar{L}$ — неприводимая плоская кривая степени m , имеющая $\bar{d}$ ноудов в качестве своих особых точек. Следовательно, ее род $g(\bar{L})$ равен $\frac{(m-1)(m-2)}{2} - \bar{d}$, и неравенство (7) вытекает из неравенства $g(\bar{L}) \geq 0$.

Накрытие $f_{2|\bar{L}}: \bar{L} \rightarrow L$ является морфизмом степени m , разветвленным в $2d = (L, B)_{\mathbb{P}^2} = \deg B$ точках. Следовательно, согласно формуле Гурвица имеем $2g(\bar{L}) - 2 = -2m + 2d$. Таким образом,

$$-2m + 2d = (m-1)(m-2) - 2\bar{d} - 2,$$

т. е. $2d = m(m-1) - 2\bar{d}$. Лемма доказана.

Из равенств (2)–(6) следует, что

$$g - 1 = \frac{m(2m^2 - 7m + 5)}{2} - 5(m - 3)\bar{d} - 4(u - \bar{g}) + 9t, \quad (8)$$

$$c = m(m - 1)(m - 2) - 3(m - 2)\bar{d} + 3t. \quad (9)$$

Подставив равенства (6), (8) и (9) в неравенство (1) и сделав очевидные преобразования, легко показать, что неравенство (1) эквивалентно неравенству

$$(m - 2)[m(m - 1)(m - 2) - (7m - 24)\bar{d} - 8(u - \bar{g})] + 3(5m - 12)t > 0. \quad (10)$$

Следовательно, согласно [2, теорема 1], чтобы доказать теорему, достаточно показать, что если неравенство

$$(m - 2)[m(m - 1)(m - 2) - (7m - 24)\bar{d} - 8(u - \bar{g})] + 3(5m - 12)t \leq 0 \quad (11)$$

выполнено для поверхности $\bar{S} \subset \mathbb{P}^3$ с обыкновенными особыми точками, то либо $f: S \rightarrow \mathbb{P}^2$ является проекцией проективной плоскости, вложенной в $\mathbb{P}^5$ с помощью вложения Веронезе, либо f однозначно с точностью до изоморфизма поверхности S определяется своей дискриминантной кривой B .

Согласно основному результату статьи [3] мы можем предполагать, что $m \leq 11$.

ЛЕММА 2. *Гипотеза Кизини верна для дискриминантных кривых общих проекций $f: S \rightarrow \mathbb{P}^2$, если $6 \leq \deg S = m \leq 11$ и $K_S^2 \leq 3e(S)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенств (4), (5) и неравенства $K_S^2 \leq 3e(S)$ следует, что

$$3c \leq 9d + 5(g - 1). \quad (12)$$

Предположим, что гипотеза Кизини не верна для дискриминантной кривой B общей проекции $f: S \rightarrow \mathbb{P}^2$, $\deg f = \deg S = m$. Тогда инварианты кривой B не удовлетворяют неравенству (1), т. е. эти инварианты удовлетворяют неравенству

$$\frac{4(3d + g - 1)}{2(3d + g - 1) - c} \geq m,$$

или, эквивалентно, неравенству

$$c \geq \frac{2(m - 2)}{m}(3d + g - 1). \quad (13)$$

Из неравенств (12) и (13) следует, что

$$6(m - 2)(3d + (g - 1)) \leq 3mc \leq m(9d + 5(g - 1)),$$

и поэтому

$$6(m - 2)(3d + (g - 1)) \leq m(9d + 5(g - 1)),$$

то есть

$$g - 1 \geq \frac{9(m - 4)}{12 - m}d \quad (14)$$

(по предположению $m \leq 11$). Следовательно, применяя неравенство (13), имеем

$$c \geq \frac{2(m-2)}{m}(3d+g-1) \geq \frac{2(m-2)}{m} \left(3d + \frac{9(m-4)}{12-m}d \right),$$

то есть

$$c \geq \frac{12(m-2)}{12-m}d. \quad (15)$$

Поскольку $\frac{\deg B(\deg B-3)}{2} = c+n+g-1$ и $n \geq 0$, то

$$d(2d-3) \geq c+g-1. \quad (16)$$

Следовательно, имеем

$$d(2d-3) \geq c+g-1 \geq \frac{12(m-2)}{12-m}d + \frac{9(m-4)}{12-m}d,$$

и поэтому

$$2d-3 \geq \frac{12(m-2)}{12-m} + \frac{9(m-4)}{12-m} = \frac{21m-60}{12-m},$$

то есть

$$d \geq \frac{3(3m-4)}{12-m}. \quad (17)$$

Если $m = 11$, то из неравенства (17) следует, что $d \geq 87$. С другой стороны, согласно лемме 1 имеем $d \leq 55$. Противоречие.

Если $m = 10$, то из неравенства (17) следует, что $d \geq 39$. Следовательно, согласно лемме 1 имеем $\bar{d} \leq 6$. С другой стороны, неравенство (11) влечет неравенство

$$8(720 - 46\bar{d} - 8(u - \bar{g})) + 114t \leq 0,$$

и, следовательно, так как $t \geq 0$, мы должны иметь

$$720 - 46\bar{d} - 8(u - \bar{g}) \leq 0.$$

Поэтому

$$720 \leq 46\bar{d} + 8(u - \bar{g}) \leq 54\bar{d},$$

так как $u - \bar{g} \leq \bar{d}$. Окончательно получаем неравенство $\bar{d} \geq \frac{720}{54}$, которое противоречит неравенству $\bar{d} \leq 6$.

Если $m = 9$, то из неравенств (14) и (17) следует, что $d \geq 23$ и $g-1 \geq 15d$. Поэтому согласно лемме 1 имеем

$$g-1 \geq 15(36 - \bar{d}), \quad (18)$$

$$\bar{d} \leq 28 - 23 = 5. \quad (19)$$

Из неравенства (11) следует, что

$$7(504 - 39\bar{d} - 8(u - \bar{g})) + 99t \leq 0,$$

или, эквивалентно,

$$99t \leq 273\bar{d} + 56(u - \bar{g}) - 3528. \quad (20)$$

Равенство (8), в которое подставлено $m = 9$, и неравенство (18) влекут неравенство

$$468 - 30\bar{d} - 4(u - \bar{g}) + 9t \geq 15(36 - \bar{d}),$$

или, эквивалентно, неравенство

$$9t \geq 15\bar{d} + 4(u - \bar{g}) + 72. \quad (21)$$

Из неравенств (20) и (21) следует, что

$$273\bar{d} + 56(u - \bar{g}) - 3528 \geq 11(15\bar{d} + 4(u - \bar{g}) + 72),$$

т. е. $4320 \leq 108\bar{d} + 12(u - \bar{g}) \leq 120\bar{d}$, так как $\bar{g} \geq 0$ и $u \leq \bar{d}$. Поэтому $\bar{d} \geq 36$, что противоречит неравенству (19).

Если $m = 8$, то из неравенства (14) следует, что $g - 1 \geq 9d$. Поэтому согласно лемме 1 имеем

$$g - 1 \geq 9(28 - \bar{d}), \quad (22)$$

где $\bar{d} \leq 21$.

Из неравенства (11) следует, что

$$6(336 - 32\bar{d} - 8(u - \bar{g})) + 84t \leq 0,$$

или, эквивалентно,

$$7t \leq 16\bar{d} + 4(u - \bar{g}) - 168. \quad (23)$$

Равенство (8), в которое подставлено $m = 8$, и неравенство (22) влекут неравенство

$$308 - 25\bar{d} - 4(u - \bar{g}) + 9t \geq 9(28 - \bar{d}),$$

или, эквивалентно, неравенство

$$9t \geq 16\bar{d} + 4(u - \bar{g}) - 56. \quad (24)$$

Из неравенств (23) и (24) следует, что

$$7(16\bar{d} + 4(u - \bar{g}) - 56) \leq 9(16\bar{d} + 4(u - \bar{g}) - 168),$$

т. е. $1120 \leq 32\bar{d} + 8(u - \bar{g}) \leq 40\bar{d}$, так как $\bar{g} \geq 0$ и $u \leq \bar{d}$. Следовательно, $\bar{d} \geq 28$, что противоречит неравенству $\bar{d} \leq 21$.

Если $m = 7$, то из неравенства (14) следует, что $g - 1 \geq \frac{27}{5}d$. Поэтому имеем

$$g - 1 \geq \frac{27}{5}(21 - \bar{d}), \quad (25)$$

так как $d = 21 - \bar{d}$ и $\bar{d} \leq 15$ согласно лемме 1.

Неравенство (11) может быть записано в виде

$$69t \leq 125\bar{d} + 40(u - \bar{g}) - 1050. \quad (26)$$

Равенство (8), в которое подставлено $m = 7$, и неравенство (25) влекут неравенство

$$189 - 20\bar{d} - 4(u - \bar{g}) + 9t \geq \frac{27}{5}(21 - \bar{d}),$$

или, эквивалентно, неравенство

$$45t \geq 73\bar{d} + 20(u - \bar{g}) - 378. \quad (27)$$

Из неравенств (26) и (27) следует, что

$$15(125\bar{d} + 40(u - \bar{g}) - 1050) \geq 23(73\bar{d} + 20(u - \bar{g}) - 378),$$

т. е. $7056 \leq 196\bar{d} + 140(u - \bar{g}) \leq 336\bar{d}$, так как $\bar{g} \geq 0$ и $u \leq \bar{d}$. Поэтому $\bar{d} \geq \frac{7056}{336} = 21$, и это неравенство противоречит неравенству $\bar{d} \leq 15$.

Если $m = 6$, то из неравенства (14) следует, что $g - 1 \geq 3d$. Поэтому имеем

$$g - 1 \geq 3(15 - \bar{d}), \quad (28)$$

так как $d = 15 - \bar{d}$ и, кроме того, $\bar{d} \leq 10$ согласно лемме 1.

Неравенство (11) может быть записано в виде

$$27t \leq 36\bar{d} + 16(u - \bar{g}) - 240. \quad (29)$$

Равенство (8), в которое подставлено $m = 6$, и неравенство (28) влекут неравенство

$$105 - 15\bar{d} - 4(u - \bar{g}) + 9t \geq 45 - 3\bar{d},$$

или, эквивалентно (если умножить на 3), неравенство

$$27t \geq 36\bar{d} + 12(u - \bar{g}) - 180. \quad (30)$$

Из неравенств (29) и (30) следует, что

$$36\bar{d} + 16(u - \bar{g}) - 240 \geq 36\bar{d} + 12(u - \bar{g}) - 180,$$

т. е. $u - \bar{g} \geq 15$. С другой стороны, имеем $u - \bar{g} \leq 10$, так как $\bar{g} \geq 0$ и $u \leq \bar{d} \leq 10$. Противоречие. Лемма доказана.

Согласно [3, теорема 2] если $\deg f \geq 8$ и S не является поверхностью общего типа, то гипотеза Кизини верна для дискриминантных кривых B общих накрытий $f: S \rightarrow \mathbb{P}^2$. Хорошо известно (см. классификацию алгебраических поверхностей), что если неравенство Богомолова–Мияоки–Яо не имеет места для алгебраической поверхности S , то S является линейчатой поверхностью и в этом случае имеем $K_S^2 \leq 2e(S)$ и $K_S^2 \leq -2$. Следовательно, согласно лемме 2, чтобы доказать теорему, достаточно рассмотреть только следующие случаи: $3 \leq m \leq 7$, и если $m = 6$ или $m = 7$, то $K_S^2 \leq 2e(S)$ и $K_S^2 \leq -2$.

Снова, как и выше, предположим, что инварианты поверхности $\bar{S}$ удовлетворяют неравенству (11).

Случай $m = 3$. В этом случае неравенство (11) имеет вид

$$6 + 3\bar{d} - 8(u - \bar{g}) + 9t \leq 0.$$

Из неравенства (7) следует, что $\bar{d} \leq 1$, и поэтому имеются две возможности: либо $\bar{d} = 0$ и, следовательно, $u = \bar{g} = t = 0$, либо $\bar{d} = 1$ и, следовательно, $u = 1$,

$\bar{g} = t = 0$, так как в этом случае кривая D — это прямая в $\mathbb{P}^3$. Легко видеть, что в обоих случаях неравенство (11) является неверным.

Случай $m = 4$. В этом случае неравенство (11) имеет вид

$$2(24 - 4\bar{d} - 8(u - \bar{g})) + 24t \leq 0.$$

Из неравенства (7) следует, что $\bar{d} \leq 3$ и имеются три возможности: либо $\bar{d} \leq 2$ и, следовательно, $u \leq \bar{d} \leq 2$, $\bar{g} = t = 0$, либо $\bar{d} = 3$, $u = 3$, $\bar{g} = 0$, $t = 1$, либо $\bar{d} = 3$, $u = 1$, $\bar{g} = 1$ или $\bar{g} = 0$, $t = 0$. Легко видеть, что неравенство (11) имеет место только в следующих двух случаях: $u = \bar{d} = 2$, $\bar{g} = t = 0$ и $u = \bar{d} = 3$, $\bar{g} = 0$, $t = 1$. Эти исключительные случаи будут рассмотрены в конце доказательства теоремы.

Случай $m = 5$. Неравенство (11) имеет следующий вид:

$$3(60 - 11\bar{d} - 8(u - \bar{g})) + 39t \leq 0,$$

или, эквивалентно,

$$60 + 2t \leq 11(\bar{d} - t) + 8(u - \bar{g}). \quad (31)$$

Согласно [2, теорема 11] гипотеза Кизини верна для каспидальных кривых B рода $g \leq 3$. Следовательно, применяя равенство (8), мы имеем

$$g - 1 = 50 - 10\bar{d} - 4(u - \bar{g}) + 9t \geq 3,$$

или, эквивалентно, неравенство

$$47 - t \geq 10(\bar{d} - t) + 4(u - \bar{g}). \quad (32)$$

Согласно лемме 1 имеем $u \leq \bar{d} \leq 6$. Поэтому $u - \bar{g} \leq 6$ и, как следствие из неравенства (31), получаем

$$12 + 2t \leq 11(\bar{d} - t),$$

то есть

$$\bar{d} - t \geq 2. \quad (33)$$

Аналогично, так как $\bar{d} - t \leq 6$, то из неравенства (31) следует, что

$$-6 + 2t \leq 8(u - \bar{g}),$$

и поэтому $u - \bar{g} \geq 0$. Применяя неравенство (32), имеем $47 - t \geq 10(\bar{d} - t)$, т. е. $\bar{d} - t \leq 4$. В этом случае из неравенства (31) следует, что $16 + 2t \leq 8(u - \bar{g})$, т. е. $u - \bar{g} \geq 2$. Таким образом, согласно (32) имеем $39 - t \geq 10(\bar{d} - t)$, и поэтому

$$\bar{d} - t \leq 3. \quad (34)$$

Теперь из неравенства (31) следует, что

$$27 + 2t \leq 8(u - \bar{g}),$$

т. е. $u - \bar{g} \geq 4$. Следовательно, $u \geq 4$, и поэтому $\bar{d} \geq 4$.

Согласно неравенствам (33) и (34) имеем

$$2 \leq \bar{d} - t \leq 3.$$

Рассмотрим случай $\bar{d} - t = 3$. Из неравенства (32) следует, что

$$17 - t \geq 4(u - \bar{g}). \quad (35)$$

Поэтому $u - \bar{g} \leq 4$. Следовательно, $u - \bar{g} = 4$, $u = 4$ и $\bar{g} = 0$, так как роды неприводимых компонент кривой степени $\bar{d} \leq 6$, имеющей не менее пяти неприводимых компонент, должны быть равны нулю. Кроме того, из неравенства (35) следует, что $t \leq 1$. Поэтому $t = 1$ и $\bar{d} = 4$, так как $\bar{d} - t = 3$ и $\bar{d} \geq 4$. В этом случае из формул (8), (9) и леммы 1 следует, что кривая B должна иметь следующие инварианты:

$$\deg B = 2d = 12, \quad g = 4, \quad c = 27, \quad n = (2d - 1)(d - 1) - g - c = 24.$$

Но это невозможно, так как в этом случае согласно формуле Плюккера двойственная кривая $\check{B}$ имеет степень $2d(2d - 1) - 3c - 2n = 3$ и, следовательно, степень кривой B должна быть не более

$$\deg \check{B}(\deg \check{B} - 1) = 3 \cdot 2 = 6.$$

Рассмотрим случай $\bar{d} - t = 2$. Из неравенства (31) следует, что

$$38 + 2t \leq 8(u - \bar{g}). \quad (36)$$

Поэтому $u - \bar{g} \geq 5$. Следовательно, $u \geq 5$ и $\bar{g} = 0$. Теперь из (36) имеем $u = 6$, так как из равенства $\bar{d} - t = 2$ и неравенств $6 \geq \bar{d} \geq u \geq 5$ следует, что $t \geq 3$, и поэтому $38 + 2t \geq 44$. Следовательно, имеет место только одна возможность:

$$u = 6, \quad \bar{g} = 0, \quad \bar{d} = 6, \quad t = 4.$$

Однако эти значения для u , $\bar{g}$, $\bar{d}$ и t не удовлетворяют неравенству (32).

Случай $m = 6$ и $K_S^2 \leq 2e(S)$. Применяя формулы (4) и (5), получаем неравенство

$$2c \leq 9d + 3(g - 1) - 18. \quad (37)$$

Неравенство (13) может быть записано в виде

$$3c \geq 4(3d + g - 1). \quad (38)$$

Из неравенств (38) и (37) следует, что

$$24d + 8(g - 1) \leq 6c \leq 27d + 9(g - 1) - 54,$$

т. е. $3d + g - 1 \geq 54$, и так как $d = 15 - \bar{d}$, то

$$g - 1 \geq 54 - 3(15 - \bar{d}) = 9 + 3\bar{d}. \quad (39)$$

По предположению инварианты поверхности $\bar{S}$ удовлетворяют неравенству (11), где $m = 6$, т. е. они удовлетворяют неравенству (29).

Равенство (8), в которое подставлено $m = 6$, и неравенство (39) влекут неравенство

$$105 - 15\bar{d} - 4(u - \bar{g}) + 9t \geq 9 + 3\bar{d},$$

или, эквивалентно, неравенство

$$27t \geq 72\bar{d} + 12(u - \bar{g}) - 288.$$

Согласно неравенству (29) имеем $36\bar{d} + 16(u - \bar{g}) - 240 \geq 27t$. Следовательно,

$$36\bar{d} + 16(u - \bar{g}) - 240 \geq 72\bar{d} + 12(u - \bar{g}) - 288,$$

т. е. $12 \geq 9\bar{d} - (u - \bar{g})$. Однако $u - \bar{g} \leq \bar{d}$. Следовательно, $9\bar{d} - (u - \bar{g}) \geq 8\bar{d}$, и поэтому $3 \geq 2\bar{d}$, т. е. мы должны иметь $\bar{d} \leq 1$, так как $\bar{d}$ является целым числом.

С другой стороны, согласно неравенству (29) имеем

$$240 \leq 9\bar{d} + 27(\bar{d} - t) + 16(u - \bar{g}) \leq 52\bar{d},$$

так как $\bar{d} - t \leq \bar{d}$ и $u - \bar{g} \leq \bar{d}$. Следовательно, получаем неравенство $\bar{d} \geq 5$. Противоречие.

Случай $m = 7$ и $K_S^2 \leq 2e(S)$, $K_S^2 \leq -2$. Применяя формулы (4) и (5), из неравенства $K_S^2 \leq 2e(S)$ получаем

$$2c \leq 9d + 3(g - 1) - 21. \quad (40)$$

Имеем $K_S^2 \leq -2$. Поэтому из формулы (2) следует, что

$$K_S^2 = 7 \cdot 9 - 25\bar{d} - 4(u - \bar{g}) + 9t \leq -2.$$

Следовательно,

$$65 \leq 65 + 9t \leq 25\bar{d} + 4(u - \bar{g}) \leq 29\bar{d},$$

так как $t \geq 0$ и $u - \bar{g} \leq \bar{d}$. Таким образом, имеем

$$\bar{d} \geq 3. \quad (41)$$

Неравенство (13) может быть записано в виде

$$7c \geq 10(3d + g - 1). \quad (42)$$

Из неравенств (42) и (40) следует, что

$$60d + 20(g - 1) \leq 14c \leq 63d + 21(g - 1) - 147,$$

то есть

$$3d + g - 1 \geq 147, \quad (43)$$

и так как $d = 21 - \bar{d}$, то

$$g - 1 \geq 147 - 3(21 - \bar{d}) = 84 + 3\bar{d}. \quad (44)$$

Поэтому неравенство (41) влечет следующее неравенство:

$$g - 1 \geq 93. \quad (45)$$

Из неравенств (42) и (43) следует, что $c \geq 210$, а согласно (16) имеем

$$d(2d - 3) \geq c + g - 1 \geq 210 + 93 = 303,$$

и поэтому $d \geq \frac{3 + \sqrt{2433}}{4} > 13$, т. е.

$$d \geq 14, \quad (46)$$

так как d является целым числом. Следовательно,

$$\bar{d} = 21 - d \leq 7. \quad (47)$$

По предположению инварианты поверхности $\bar{S}$ удовлетворяют неравенству (11) при $m = 7$, т. е. они удовлетворяют неравенству (26), из которого следует, что

$$210 - 25\bar{d} - 8(u - \bar{g}) \leq 0,$$

так как $t \geq 0$. Поэтому $210 \leq 25\bar{d} + 8(u - \bar{g}) \leq 33\bar{d}$, так как $u - \bar{g} \leq \bar{d}$, и, следовательно, $\bar{d} \geq \frac{210}{33} = 6 + \frac{4}{11}$, т. е. $\bar{d} \geq 7$, так как $\bar{d}$ является целым числом. Из неравенства (47) следует, что мы должны иметь $\bar{d} = 7$.

Равенство (8), в которое подставлено $m = 7$, и неравенство (44) влекут неравенство

$$181 - 20\bar{d} - 4(u - \bar{g}) + 9t \geq 84 + 3\bar{d}.$$

Следовательно,

$$9t \geq 64 + 4(u - \bar{g}), \quad (48)$$

так как $\bar{d} = 7$, а согласно неравенству (26) имеем

$$125\bar{d} + 40(u - \bar{g}) - 1050 \geq 69t,$$

то есть

$$40(u - \bar{g}) - 175 \geq 69t. \quad (49)$$

Объединяя неравенства (48) и (49), получаем неравенство

$$3(40(u - \bar{g}) - 175) \geq 23(64 + 4(u - \bar{g})),$$

т. е. $28(u - \bar{g}) \geq 3 \cdot 175 + 23 \cdot 64 = 1997$. Но, с другой стороны, $u - \bar{g} \leq \bar{d} = 7$. Противоречие.

Вернемся к рассмотрению двух оставшихся не исследованными случаев, когда $m = 4$ и либо $u = \bar{d} = 2$, $\bar{g} = t = 0$, либо $u = \bar{d} = 3$, $\bar{g} = 0$, $t = 1$.

Рассмотрим случай $m = 4$ и $u = \bar{d} = 2$, $\bar{g} = t = 0$. Согласно формулам (8), (9) и (6) имеем $d = 4$, $g = 1$ и $c = 12$. Следовательно, число n ноудов кривой B равно $d(2d - 3) - c - g + 1 = 8$.

Предположим, что существует еще одно общее накрытие $f_2: S_2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ с той же самой дискриминантной кривой B , не эквивалентное общей проекции f . В этом случае согласно [2, теорема 1] имеем

$$\deg f_2 \leq \frac{4(3d + g - 1)}{2(3d + g - 1) - c} = 4.$$

Поскольку S_2 является неособой поверхностью и дискриминантная кривая B накрытия f_2 имеет ноды, то $\deg f_2$ не может быть равна трем и, следовательно, $\deg f_2 = 4$.

Положим $S_1 = S$, $R_1 = R$, $C_1 = C$ и $f_2^*(B) = 2R_2 + C_2$, где R_2 – кривая ветвления накрытия f_2 .

Рассмотрим расслоенное произведение

$$S_1 \times_{\mathbb{P}^2} S_2 = \{(x, y) \in S_1 \times S_2 \mid f_1(x) = f_2(y)\},$$

и пусть $X = \widetilde{S_1 \times_{\mathbb{P}^2} S_2}$ – нормализация поверхности $S_1 \times_{\mathbb{P}^2} S_2$. Обозначим соответствующие естественные морфизмы через $g_1: X \rightarrow S_1$, $g_2: X \rightarrow S_2$ и $f_{1,2}: X \rightarrow \mathbb{P}^2$. Имеем $\deg g_1 = \deg f_2 = 4$, $\deg g_2 = \deg f_1 = 4$ и $\deg f_{1,2} = \deg g_1 \cdot \deg f_1 = 16$. Согласно [2, предложения 2 и 3] поверхность X неприводима и неособа.

Пусть $\tilde{R} \subset X$ – это кривая $g_1^{-1}(R_1) \cap g_2^{-1}(R_2)$, $\tilde{C} = g_1^{-1}(C_1) \cap g_2^{-1}(C_2)$, $\tilde{C}_1 = g_1^{-1}(R_1) \cap g_2^{-1}(C_2)$ и $\tilde{C}_2 = g_1^{-1}(C_1) \cap g_2^{-1}(R_2)$.

Согласно [2, предложение 4] имеем

$$\begin{aligned} \tilde{R}^2 &= 2(3d + g - 1) - c = 12, \\ \tilde{C}_1^2 &= (\deg f_1 - 2)(3d + g - 1) - c = 12, \\ \tilde{C}_2^2 &= (\deg f_2 - 2)(3d + g - 1) - c = 12, \\ (\tilde{R}, \tilde{C}_i) &= c = 12, \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

и, применяя те же самые аргументы, которые использовались при доказательстве предложения 4 в [2], легко показать, что индекс пересечения

$$(\tilde{C}_1, \tilde{C}_2) = c + 2n = 28.$$

Следовательно, определитель

$$\begin{vmatrix} \tilde{R}^2 & (\tilde{R}, \tilde{C}_1) \\ (\tilde{C}_1, \tilde{R}) & \tilde{C}_1^2 \end{vmatrix} = 0,$$

и поэтому согласно теореме Ходжа об индексе классы $[\tilde{C}_1]$ и $[\tilde{R}]$ кривых $\tilde{C}_1$ и $\tilde{R}$ являются линейно зависимыми в группе Нерона–Севери $\text{NS}(X)$ классов дивизоров на X по модулю численной эквивалентности. Так как $\tilde{R}^2 = \tilde{C}_1^2$, то $[\tilde{R}] = [\tilde{C}_1]$ в $\text{NS}(X)$. Применяя те же самые аргументы, получаем, что $[\tilde{R}] = [\tilde{C}_2]$, и поэтому $[\tilde{C}_2] = [\tilde{C}_1]$ в $\text{NS}(X)$. Следовательно, индекс пересечения $(\tilde{C}_2, \tilde{C}_1)$ должен быть равен $\tilde{C}_1^2 = 12$. С другой стороны, $(\tilde{C}_2, \tilde{C}_1) = 28$. Противоречие.

Чтобы завершить доказательство теоремы, заметим, что последний неразобранный случай $m = 4$, $u = \bar{d} = 3$, $\bar{g} = 0$, $t = 1$ соответствует общей проекции $f: S \rightarrow \mathbb{P}^2$, где поверхность $S \simeq \mathbb{P}^2$ вложена в $\mathbb{P}^5$ с помощью многочленов степени два (вложение Веронезе плоскости $\mathbb{P}^2$ в $\mathbb{P}^5$), а f – это ограничение на S линейной проекции $\text{pr}: \mathbb{P}^5 \rightarrow \mathbb{P}^2$ (см., например, [5]). В этом случае $B \subset \mathbb{P}^2$ является двойственной к гладкой кубике, $\deg B = 6$, $c = 9$ и кривая B является дискриминантной кривой четырех неэквивалентных общих накрытий плоскости $\mathbb{P}^2$ (см. [1], [6]). Три из них имеют степень четыре, а четвертое имеет степень три. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть S_i – неособые поверхности, $i = 1, 2$, и $S_i \subset \mathbb{P}^{N_i}$ – вложения, заданные полными линейными системами дивизоров на поверхностях S_i . Предположим, что эти вложения не являются вложениями Веронезе плоскости $\mathbb{P}^2$ в $\mathbb{P}^5$, и пусть $f_i = \text{pr}_i|_{S_i}: S_i \rightarrow \mathbb{P}^2$ – два общих накрытия, разветвленных над одной и той же каспидальной кривой B , где $\text{pr}_i: \mathbb{P}^{N_i} \rightarrow \mathbb{P}^2$ – линейные проекции. Тогда $N_1 = N_2 = N$ и найдется такое линейное отображение $h: \mathbb{P}^N \rightarrow \mathbb{P}^N$, что $h(S_1) = S_2$ и $f_1 = f_2 \circ h$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\bar{L}_i = f_i^{-1}(L) \subset S_i$, $i = 1, 2$, собственный прообраз прямой L в $\mathbb{P}^2$. Согласно теореме найдется изоморфизм $h: S_1 \rightarrow S_2$ такой, что $f_1 = h \circ f_2$. Следовательно, $h(\bar{L}_1) = \bar{L}_2$, и поэтому $h^*(\mathcal{O}_{S_2}(\bar{L}_2)) = \mathcal{O}_{S_1}(\bar{L}_1)$. Отсюда следует, что

$$N_1 = \dim H^0(S_1, \mathcal{O}_{S_1}(\bar{L}_1)) = \dim H^0(S_2, \mathcal{O}_{S_2}(\bar{L}_2)) = N_2$$

и изоморфизм h может быть определен с помощью линейного отображения $\mathbb{P}^{N_1} \rightarrow \mathbb{P}^{N_2}$, индуцированного отображением

$$h^*: H^0(S_2, \mathcal{O}_{S_2}(\bar{L}_2)) \rightarrow H^0(S_1, \mathcal{O}_{S_1}(\bar{L}_1)).$$

Отметим, что если $f: S \rightarrow \mathbb{P}^2$ является общим накрытием плоскости, $\deg f = 4$, разветвленным вдоль каспидальной кривой $B \subset \mathbb{P}^2$, $\deg B = 6$, $c = 9$, то согласно равенствам (4) и (5) имеем $K_S^2 = 9$ и $e(S) = 3$. Из формулы Гурвица следует, что род кривой $f^{-1}(L)$, где L – прямая в $\mathbb{P}^2$, равен $\frac{-2 \deg f + (L, B)}{2} + 1 = 0$. Следовательно, $S \simeq \mathbb{P}^2$, и f задается многочленами степени 2. Поэтому в исключительном случае каспидальной кривой $B \subset \mathbb{P}^2$, $\deg B = 6$, $c = 9$, каждое из трех неэквивалентных общих накрытий f_i , $\deg f_i = 4$, разветвленных вдоль B , является общей проекцией плоскости $\mathbb{P}^2$, вложенной в $\mathbb{P}^5$ с помощью вложения Веронезе. Легко видеть, что четвертое исключительное общее накрытие $f_4: S \rightarrow \mathbb{P}^2$, $\deg f_4 = 3$, не является общей проекцией (см. случай $m = 3$ в доказательстве теоремы). Поэтому мы имеем

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $f: S \rightarrow \mathbb{P}^2$ – общая линейная проекция, разветвленная вдоль каспидальной кривой $B \subset \mathbb{P}^2$. Тогда поверхность S определяется однозначно (с точностью до изоморфизма) кривой B .

Список литературы

1. О. Чизини, “Sulla identita birazionale delle funzioni algebriche di due variabili dotate di una medesima curva di diramazione”, *Istit. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A*, **8(77)** (1944), 339–356.
2. Вик. С. Куликов, “О гипотезе Кизини”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **63:6** (1999), 83–116; англ. пер.: Vik. S. Kulikov, “On Chisini’s conjecture”, *Izv. Math.*, **63:6** (1999), 1139–1170.
3. С. Ю. Немировский, “К теореме Куликова о гипотезе Кизини”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **65:1** (2001), 77–80; англ. пер.: S. Yu. Nemirovski, “Kulikov’s theorem on the Chisini conjecture”, *Izv. Math.*, **65:1** (2001), 71–74.
4. В. Moishezon, *Complex surfaces and connected sums of complex projective planes*, Lecture Notes in Math., **603**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1977.
5. Ф. Гриффитс, Дж. Харрис, *Принципы алгебраической геометрии*, Мир, М., 1982; пер. с англ.: Ph. Griffiths, J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, Pure and Applied Mathematics, Wiley, New York, 1978.
6. F. Catanese, “On a problem of Chisini”, *Duke Math. J.*, **53:1** (1986), 33–42.

Вик. С. Куликов (Vik. S. Kulikov)
Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: kulikov@mi.ras.ru

Поступило в редакцию
10.10.2006