Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ю. Протасов, Обобщенный совместный спектральный радиус. Геометрический подход, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1997, том 61, выпуск 5, 99–136

DOI: <https://doi.org/10.4213/im161>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 10:54:05

УДК 517

В. Ю. Протасов

Обобщенный совместный спектральный радиус. Геометрический подход

В работе исследуются свойства совместного спектрального радиуса с произвольным показателем $p \in [1, +\infty]$ нескольких конечномерных линейных операторов $A_1, \dots, A_k$:

$$\hat{\rho}_p = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{k^n} \sum_{\sigma} \|A_{\sigma(1)} \cdots A_{\sigma(n)}\|^p \right)^{\frac{1}{pn}}, \quad p < \infty,$$

$$\hat{\rho}_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{\sigma} \|A_{\sigma(1)} \cdots A_{\sigma(n)}\|^{\frac{1}{n}},$$

где суммирование и максимум берутся по всем отображениям

$$\sigma: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, k\}.$$

Обобщается теорема Дранишникова–Конягина об инвариантных выпуклых телах (установленная ранее только для случая $p = \infty$), для чего использована операция обобщенного сложения выпуклых множеств. Работу включает несколько утверждений о свойствах инвариантных тел и об их связи с величиной $\hat{\rho}_p$. Проблема вычисления $\hat{\rho}_p$ для целых четных значений p сведена к поиску обычного спектрального радиуса подходящего конечномерного оператора, для прочих значений p построен геометрический аналог поиска с заданной точностью и оценена его сложность.

Библиография: 12 наименований.

§ 1. Введение

В данной статье автор обобщает некоторые результаты работы [4], посвященной геометрическому подходу к проблеме совместного спектрального радиуса нескольких линейных операторов. Мы будем придерживаться следующих обозначений: $\mathbb{R}^d$ – евклидово пространство; $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ – пространство линейных операторов, действующих в $\mathbb{R}^d$; $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел; $\text{Conv}(X, Y) = \{\lambda x + (1 - \lambda)y \mid x \in X, y \in Y, \lambda \in [0, 1]\}$ – выпуклая оболочка множеств $X, Y \subset \mathbb{R}^d$. Для каждого оператора $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ через $\rho(B)$ обозначим его спектральный радиус (максимальный из модулей его собственных значений).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 96-01-00378).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $p \in [1, +\infty]$ – произвольный параметр, $A = \{A_1, \dots, A_k\}$ – набор операторов из $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$. *Обобщенным совместным спектральным радиусом с показателем p (p -радиусом) набора A* называется число

$$\hat{\rho}_p(A) = \hat{\rho}_p(A_1, \dots, A_k) = \begin{cases} \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{k^m} \sum_{\sigma} \|A_{\sigma(1)} \dots A_{\sigma(m)}\|^p \right)^{\frac{1}{pm}}, & p < \infty, \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \max_{\sigma} \|A_{\sigma(1)} \dots A_{\sigma(m)}\|^{\frac{1}{m}}, & p = \infty. \end{cases}$$

Суммирование под знаком предела (при $p = \infty$ – максимум) берется по всем целочисленным функциям $\sigma: \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, k\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $A = \{A_1, \dots, A_k\}$ – набор операторов из $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$. *Совместным спектральным радиусом* этого набора называется число $\hat{\rho}(A) = \hat{\rho}_{\infty}(A)$.

Исторически первым появился именно совместный спектральный радиус $\hat{\rho}_{\infty}$. Это произошло в 1960 г., когда Ж.К.Рота и Д.Стрэнг в работе [1] применили это понятие к одной задаче теории нормированных алгебр. В конце 80-х годов математики вновь заинтересовались совместным спектральным радиусом, поскольку обнаружили его связь с теорией всплесков (подробнее об этом см. [2], [3]). Некоторые свойства $\hat{\rho}_{\infty}$ исследовались в работах [2], [4].

В 1995 г. Вонг ввел понятие p -радиуса ($p \in [1, +\infty]$), обобщив тем самым совместный спектральный радиус. Обобщенный радиус также оказался полезен в теории всплесков (подробнее об этом см. в [5]). Несмотря на это, о свойствах самого p -радиуса известно чрезвычайно мало (даже для случая $p = \infty$). Главной проблемой было вычисление $\hat{\rho}_p$ для конкретных наборов матриц. До недавнего времени не было известно ни одного алгоритма, позволявшего для любого набора операторов вычислять $\hat{\rho}_p$ с заданной точностью.

Данной проблеме была посвящена работа [4], где такой алгоритм был построен для случая $p = \infty$. Идея алгоритма основана на теореме Дранишников–Конягина, дающей нетривиальную геометрическую интерпретацию числа $\hat{\rho}_{\infty}$. Перед формулировкой условимся о некоторых обозначениях. Пусть $A = \{A_1, \dots, A_k\}$ – набор операторов из $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$. Мы будем называть такой набор *неприводимым*, если операторы $A_1, \dots, A_k$ не имеют нетривиального действительного общего собственного подпространства. Определим также оператор $\bar{A}$, действующий на пространстве выпуклых множеств

$$\begin{aligned} \bar{A}X &= \text{Conv}(A_1X, \dots, A_kX) \\ &= \{ \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k, x_i \in A_i X, \lambda_i \geq 0, \lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1 \}, \end{aligned}$$

для любого выпуклого множества $X \subset \mathbb{R}^d$. *Инвариантным телом* данного неприводимого набора операторов A называется такое выпуклое тело $M \subset \mathbb{R}^d$ (т.е. выпуклый, симметричный относительно нуля, компакт, лежащий в пространстве $\mathbb{R}^d$, с непустой внутренностью), что $\bar{A}M = \lambda M$ для некоторого $\lambda \in (0, +\infty)$. Число λ – коэффициент гомотетии инвариантного тела M .

ТЕОРЕМА 1 (Дранишников–Конягин). а) *У любого неприводимого набора операторов $A = \{A_1, \dots, A_k\}$, действующих в $\mathbb{R}^d$, существует хотя бы одно инвариантное тело.*

б) *У каждого инвариантного тела данного набора операторов коэффициент гомотетии равен $\hat{\rho}_\infty(A)$.*

СЛЕДСТВИЕ. *Если набор операторов $A = \{A_1, \dots, A_k\}$ неприводим, то $\hat{\rho}_\infty(A) = 0$.*

Доказательство теоремы содержится в работе [4]. Там же исследованы свойства инвариантных тел, на основе которых построен алгоритм вычисления $\hat{\rho}_\infty$, а также сделана попытка получить некоторые свойства функции $\hat{\rho}_\infty: \mathcal{L}^k(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$.

Наша задача – распространить геометрический метод на p -радиус и, в частности, обобщить теорему 1 на случай произвольного конечного p .

В настоящей работе мы используем операцию обобщенного сложения выпуклых множеств, которая превращает совокупность выпуклых тел в $\mathbb{R}^d$, симметричных относительно нуля, в абелеву полугруппу с естественным действием положительных скаляров. В терминах этой операции получен адекватный аналог теоремы 1 для произвольного конечного p . Исследованы некоторые свойства инвариантных тел. Проблема вычисления $\hat{\rho}_p$ для целых четных значений p сведена к поиску (обычного) спектрального радиуса подходящего конечномерного линейного оператора, для прочих значений p построен геометрический алгоритм поиска $\hat{\rho}_p$ и оценена его сложность.

Прежде чем излагать геометрический подход, нам необходимо доказать корректность определения 1.

Согласно лемме Фекете (см. [9]) для любой последовательности положительных чисел $\{\alpha_k\}$, отвечающей двум условиям: $\alpha_0 = 1$, $\alpha_{m+n} \leq \alpha_m \alpha_n$, $m, n \in \mathbb{N}$, – существует предел $\lim_{m \rightarrow \infty} (\alpha_m)^{1/m}$, причем

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (\alpha_m)^{1/m} = \inf_{m \in \mathbb{N}} (\alpha_m)^{1/m}.$$

Полагая при $m \geq 1$

$$\alpha_m = \left(\frac{1}{k^m} \sum_{\sigma} \|A_{\sigma(1)} \dots A_{\sigma(m)}\|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p < \infty,$$

$$\alpha_m = \max_{\sigma} \|A_{\sigma(1)} \dots A_{\sigma(m)}\|, \quad p = \infty,$$

получим, что пределы в определении 1 существуют для любого набора операторов и любой нормы, введенной в $\mathbb{R}^d$. Причем в силу эквивалентности всех норм в $\mathbb{R}^d$ число $\hat{\rho}_p$ не зависит от введенной в $\mathbb{R}^d$ нормы.

Докажем еще один вспомогательный результат: если набор A не является неприводимым, то задача поиска $\hat{\rho}_p$ разбивается на несколько аналогичных задач меньших размерностей.

Пусть $L \subset \mathbb{R}^d$ – общее собственное подпространство операторов $A_1, \dots, A_k$, т.е. $A_i L \subset L$ для всех $i = 1, \dots, k$. Пусть $e_1, \dots, e_n$ – базис пространства L , векторы

$e_{n+1}, \dots, e_d$ ($1 \leq n < d$) дополняют его до базиса в $\mathbb{R}^d$. В этом базисе каждая матрица A_i приобретает блочный вид, т.е.

$$A_i = \begin{pmatrix} \hat{B}_i & \hat{C}_i \\ 0 & \hat{D}_i \end{pmatrix},$$

где $\hat{B}_i - (n \times n)$ -матрица, $\hat{C}_i - (n \times (d-n))$ -матрица, $\hat{D}_i - ((d-n) \times (d-n))$ -матрица. Обозначим

$$B_i = \begin{pmatrix} \hat{B}_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_i = \begin{pmatrix} 0 & \hat{C}_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \hat{D}_i \end{pmatrix},$$

$$A_i = B_i + C_i + D_i.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. $\hat{\rho}_p(A_1, \dots, A_k) = \max\{\hat{\rho}_p(B_1, \dots, B_k), \hat{\rho}_p(D_1, \dots, D_k)\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $p = \infty$ утверждение доказано в [4]. Нам достаточно рассмотреть случай $p < \infty$. Для начала заметим, что из всех произведений $C_i C_j$, $B_i C_j$, $C_i B_j$, $B_i D_j$, $D_i B_j$, $D_i C_j$ только $C_i D_j$ и $B_i C_j$ не являются нулевыми матрицами. Это значит, что для всякой функции $\sigma: \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, k\}$ имеем

$$A_{\sigma(1)} \dots A_{\sigma(m)} = (B_{\sigma(1)} + C_{\sigma(1)} + D_{\sigma(1)}) \dots (B_{\sigma(m)} + C_{\sigma(m)} + D_{\sigma(m)})$$

$$= \sum_{r=0}^{m+1} B_{\sigma(1)} \dots B_{\sigma(r-1)} C_{\sigma(r)} D_{\sigma(r+1)} \dots D_{\sigma(m)}.$$

Здесь нулевое слагаемое (при $r = 0$) мы обозначили $D_{\sigma(1)} \dots D_{\sigma(m)}$, а $(m+1)$ -е слагаемое — $B_{\sigma(1)} \dots B_{\sigma(m)}$. Докажем сначала, что

$$\hat{\rho}_p(A_1, \dots, A_k) \leq \max\{\hat{\rho}_p(B_1, \dots, B_k), \hat{\rho}_p(D_1, \dots, D_k)\}.$$

Распишем сумму:

$$\sum_{\sigma} \|A_{\sigma(1)} \dots A_{\sigma(m)}\|^p = \sum_{\sigma} \left\| \sum_{r=0}^{m+1} B_{\sigma(1)} \dots C_{\sigma(r)} \dots D_{\sigma(m)} \right\|^p$$

$$\leq (m+2)^{p-1} \sum_{\sigma} \sum_{r=0}^{m+1} \|B_{\sigma(1)} \dots C_{\sigma(r)} \dots D_{\sigma(m)}\|^p$$

$$= (m+2)^{p-1} \left(\sum_{r=0}^{m+1} \sum_{\sigma} \|B_{\sigma(1)} \dots B_{\sigma(r-1)} C_{\sigma(r)} D_{\sigma(r+1)} \dots D_{\sigma(m)}\|^p \right).$$

Мы воспользовались неравенством

$$(x_0 + \dots + x_{m+1})^p \leq (x_0^p + \dots + x_{m+1}^p)(m+2)^{p-1}$$

для неотрицательных $x_0, \dots, x_{m+1}$, $p \geq 1$.

Оценим сумму

$$\sum_{\sigma} \left\| B_{\sigma(1)} \cdots C_{\sigma(r)} \cdots D_{\sigma(m)} \right\|^p, \quad r \in \{1, \dots, m\}.$$

Заметим сначала, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует такая константа $C_{\varepsilon}^{(1)}$, что для любых $m \in \mathbb{N}$, $\sigma: \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, k\}$ выполнено неравенство

$$\sum_{\sigma} \left\| B_{\sigma(1)} \cdots B_{\sigma(m)} \right\| \leq C_{\varepsilon}^{(1)} (\hat{\rho}_p(B_1, \dots, B_k) + \varepsilon)^{pm} k^m.$$

Для доказательства достаточно возвести обе части неравенства в степень $\frac{1}{pm}$ и учесть, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{k^m} \sum_{\sigma} \left\| B_{\sigma(1)} \cdots B_{\sigma(m)} \right\|^p \right)^{\frac{1}{pm}} = \hat{\rho}_p(B_1, \dots, B_k).$$

Аналогично доказывается существование константы $C_{\varepsilon}^{(2)}$, для которой неравенство

$$\sum_{\sigma} \left\| D_{\sigma(1)} \cdots D_{\sigma(m)} \right\|^p \leq C_{\varepsilon}^{(2)} (\hat{\rho}_p(D_1, \dots, D_k) + \varepsilon)^{pm} k^m$$

выполнено при всех $m \in \mathbb{N}$.

Обозначим $B = \{B_1, \dots, B_k\}$, $D = \{D_1, \dots, D_k\}$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\hat{\rho}_p(B) \geq \hat{\rho}_p(D)$. Пусть также $\|C\| = \max\{\|C_1\|, \dots, \|C_k\|\}$. Тогда

$$\begin{aligned} & \sum_{\sigma} \left\| B_{\sigma(1)} \cdots B_{\sigma(r-1)} C_{\sigma(r)} D_{\sigma(r+1)} \cdots D_{\sigma(m)} \right\|^p \\ & \leq \|C\|^p \sum_{\sigma} \left\| B_{\sigma(1)} \cdots B_{\sigma(r-1)} \right\|^p \cdot \left\| D_{\sigma(r+1)} \cdots D_{\sigma(m)} \right\|^p \\ & = \|C\|^p \left(\sum_{\alpha} \left\| B_{\alpha(1)} \cdots B_{\alpha(r-1)} \right\|^p \right) \cdot \left(\sum_{\beta} \left\| D_{\beta(1)} \cdots D_{\beta(m-r)} \right\|^p \right) \\ & \leq \|C\|^p C_{\varepsilon}^{(1)} C_{\varepsilon}^{(2)} (\hat{\rho}_p(B) + \varepsilon)^{rp} (\hat{\rho}_p(D) + \varepsilon)^{(m-r-1)p} k^{m-1} \\ & \leq \|C\|^p C_{\varepsilon}^{(1)} C_{\varepsilon}^{(2)} (\hat{\rho}_p(B) + \varepsilon)^{(m-1)p} k^{m-1}. \end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{k^m} \sum_{\sigma} \|A_{\sigma(1)} \dots A_{\sigma(m)}\|^p \\
& \leq \frac{1}{k^m} \left(\sum_{\sigma} \|B_{\sigma(1)} \dots B_{\sigma(m)}\|^p + \sum_{\sigma} \|D_{\sigma(1)} \dots D_{\sigma(m)}\|^p \right. \\
& \quad \left. + \sum_{r=1}^m \left(\sum_{\sigma} \|B_{\sigma(1)} \dots C_{\sigma(r)} \dots D_{\sigma(m)}\|^p \right) \right) \\
& \leq \frac{1}{k^m} \left(k^m (\hat{\rho}_p(B) + \varepsilon)^{mp} C_{\varepsilon}^{(1)} + k^m (\hat{\rho}_p(D) + \varepsilon)^{mp} C_{\varepsilon}^{(2)} \right. \\
& \quad \left. + m \|C\|^p C_{\varepsilon}^{(1)} C_{\varepsilon}^{(2)} (\hat{\rho}_p(B) + \varepsilon)^{(m-1)p} k^{m-1} \right) \\
& \leq (\hat{\rho}_p(B) + \varepsilon)^{mp} m C(\varepsilon, p),
\end{aligned}$$

где $C(\varepsilon, p)$ – константа, не зависящая от m . Итак,

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{k^m} \sum_{\sigma} \|A_{\sigma(1)} \dots A_{\sigma(m)}\|^p \right)^{\frac{1}{pm}} \\
& \leq (\hat{\rho}_p(B) + \varepsilon) m^{\frac{1}{pm}} (C(\varepsilon, p))^{\frac{1}{pm}}.
\end{aligned}$$

В пределе при $m \rightarrow \infty$ получаем $\hat{\rho}_p(A) \leq \hat{\rho}_p(B) + \varepsilon$. Это неравенство верно для любого ε , поэтому

$$\hat{\rho}_p(A) \leq \hat{\rho}_p(B) = \max\{\hat{\rho}_p(B), \hat{\rho}_p(D)\}.$$

Докажем теперь, что $\hat{\rho}_p(A) \geq \{\hat{\rho}_p(B), \hat{\rho}_p(D)\}$. Для этого рассмотрим в пространстве матриц норму $\|X\|_1 = d \max_{i,j} |X_{ij}|$, $\max_{i,j} |X_{ij}|$ – максимум модулей элементов матрицы X . Легко видеть, что $\|A_{\sigma(1)} \dots A_{\sigma(m)}\|_1 \geq \|B_{\sigma(1)} \dots B_{\sigma(m)}\|_1$, $\|A_{\sigma(1)} \dots A_{\sigma(m)}\|_1 \geq \|D_{\sigma(1)} \dots D_{\sigma(m)}\|_1$ для любого набора индексов σ . Отсюда немедленно следуют неравенства

$$\hat{\rho}_p(A_1, \dots, A_k) \geq \hat{\rho}_p(B), \quad \hat{\rho}_p(A_1, \dots, A_k) \geq \hat{\rho}_p(D)$$

(поскольку $\hat{\rho}_p$ не зависит от способа выбора нормы матриц). Утверждение доказано.

Из предложения 1 следует, что при наличии у операторов $A_1, \dots, A_k$ общего собственного подпространства задача нахождения их p -радиуса распадается на несколько задач меньших размерностей. Поэтому нам достаточно рассмотреть случай неприводимого набора операторов.

Мы хотим обобщить теорию инвариантных множеств на случай p -радиуса для произвольного $p \in [1, +\infty]$. Для этого необходимо переопределить оператор $\hat{A}$. Вместо взятия выпуклой оболочки нам понадобится другая операция над выпуклыми телами, зависящая от параметра p .

§ 2. Сложение выпуклых тел с произвольным показателем

В этом параграфе мы будем работать с выпуклыми компактами в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$. Для удобства изложения все выпуклые компакты, о которых идет речь, мы будем считать центрально-симметричными относительно нуля.

Введем обозначения: $SConv$ – множество выпуклых компактов в пространстве $\mathbb{R}^d$, центрально-симметричных относительно нуля; $SBConv$ – множество выпуклых компактов с непустой внутренностью в $\mathbb{R}^d$, центрально-симметричных относительно нуля (выпуклых тел).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $M \subset \mathbb{R}^d$ – плоское выпуклое тело, симметричное относительно осей OX и OY , $T_1, T_2 \in SConv$. Суммой T_1 и T_2 относительно M называется множество

$$T_1 \overset{M}{\oplus} T_2 = \{ \alpha x_1 + \beta x_2 \mid x_1 \in T_1, x_2 \in T_2, (\alpha, \beta) \in M \}.$$

ЛЕММА 1. 1) Если $T_1, T_2 \in SConv$, то и $T_1 \overset{M}{\oplus} T_2 \in SConv$.

2) Если $T_1, T_2 \in SBConv$, то и $T_1 \overset{M}{\oplus} T_2 \in SBConv$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если T_1 и T_2 имеют непустую внутренность, то очевидно, что и $T_1 \overset{M}{\oplus} T_2$ имеет непустую внутренность. Поэтому п. 2) леммы следует из п. 1).

Центральная симметричность множества $T_1 \overset{M}{\oplus} T_2$ также очевидна: если z – какая-то точка из $T_1 \overset{M}{\oplus} T_2$ (т.е. $z = \alpha x + \beta y$, $x \in T_1$, $y \in T_2$, $(\alpha, \beta) \in M$), то точка $-z = \alpha(-x) + \beta(-y)$ также принадлежит $T_1 \overset{M}{\oplus} T_2$ (поскольку $(-x) \in T_1$, $(-y) \in T_2$). Осталось доказать выпуклость.

Пусть $z_1, z_2 \in T_1 \overset{M}{\oplus} T_2$, λ – произвольное число в интервале $(0, 1)$. Надо доказать, что $z = \lambda z_1 + (1 - \lambda) z_2$ также принадлежит множеству $T_1 \overset{M}{\oplus} T_2$. Разложим векторы z_1 и z_2 согласно определению 3:

$$z_i = \alpha_i x_i + \beta_i y_i, \quad x_i \in T_1, \quad y_i \in T_2, \quad (\alpha_i, \beta_i) \in M, \quad i = 1, 2.$$

Можно считать, что $\alpha_i \geq 0$, иначе заменим (в силу симметричности M относительно оси OY) α_i на $-\alpha_i$, а также (в силу центральной симметричности T_i относительно нуля) x_i на $-x_i$. Аналогично, $\beta_i \geq 0$. Более того, нам достаточно рассмотреть случай $\alpha_i > 0$, $\beta_i > 0$ (если утверждение верно для $\alpha_i > 0$ и $\beta_i > 0$, то оно верно, когда одно из чисел α_i или β_i , $i = 1, 2$, обратится в нуль в силу замкнутости множеств T_1 , T_2 и M). Имеем

$$\begin{aligned} z &= \lambda z_1 + (1 - \lambda) z_2 = \lambda \alpha_1 x_1 + \lambda \beta_1 y_1 + (1 - \lambda) \alpha_2 x_2 + (1 - \lambda) \beta_2 y_2 \\ &= (\lambda \alpha_1 + (1 - \lambda) \alpha_2) \left(\frac{\lambda \alpha_1}{\lambda \alpha_1 + (1 - \lambda) \alpha_2} x_1 + \frac{(1 - \lambda) \alpha_2}{\lambda \alpha_1 + (1 - \lambda) \alpha_2} x_2 \right) \\ &\quad + (\lambda \beta_1 + (1 - \lambda) \beta_2) \left(\frac{\lambda \beta_2}{\lambda \beta_1 + (1 - \lambda) \beta_2} y_1 + \frac{(1 - \lambda) \beta_2}{\lambda \beta_1 + (1 - \lambda) \beta_2} y_2 \right). \end{aligned}$$

Так как у нас $\alpha_i > 0$ и $\beta_i > 0$, то числа $\lambda\alpha_1 + (1 - \lambda)\alpha_2$, $\lambda\beta_1 + (1 - \lambda)\beta_2$ положительны. В силу выпуклости T_1 имеем

$$x = \frac{\lambda\alpha_1}{\lambda\alpha_1 + (1 - \lambda)\alpha_2}x_1 + \frac{(1 - \lambda)\alpha_2}{\lambda\alpha_1 + (1 - \lambda)\alpha_2}x_2 \in T_1.$$

Точно так же заключаем, что

$$y = \frac{\lambda\beta_1}{\lambda\beta_1 + (1 - \lambda)\beta_2}y_1 + \frac{(1 - \lambda)\beta_2}{\lambda\beta_1 + (1 - \lambda)\beta_2}y_2 \in T_2.$$

Наконец,

$$(\lambda\alpha_1 + (1 - \lambda)\alpha_2, \lambda\beta_1 + (1 - \lambda)\beta_2) = \lambda(\alpha_1, \beta_1) + (1 - \lambda)(\alpha_2, \beta_2) \in M.$$

Поэтому

$$z = (\lambda\alpha_1 + (1 - \lambda)\alpha_2)x + (\lambda\beta_1 + (1 - \lambda)\beta_2)y \in T_1 \oplus^M T_2.$$

Лемма доказана.

Таким образом, определенное нами сложение является бинарной операцией на множествах $SConv$, $SBCov$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть $T \in SConv$, $S^{d-1} = \{u \in \mathbb{R}^d \mid \|u\| = 1\}$ – единичная сфера в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$. Функция $\varphi_T: S^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$ называется *опорной функцией множества T* , если $\varphi_T(u) = \sup_{y \in T} \langle u, y \rangle$ для любого $u \in S^{d-1}$.

Пусть $M^* = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \sup_{y \in M} \langle x, y \rangle \leq 1\}$ – поляр тела M в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$. Определим норму $\|\cdot\|_{M^*}$ в пространстве $\mathbb{R}^2$, в котором тело M^* является единичным шаром.

ЛЕММА 2. Для любого $u \in S^{d-1}$ выполнено равенство

$$\varphi_{T_1 \oplus^M T_2}(u) = \|\varphi_{T_1}(u), \varphi_{T_2}(u)\|_{M^*}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} \varphi_{T_1 \oplus^M T_2}(u) &= \sup_{\substack{x \in T_1, y \in T_2 \\ (\alpha, \beta) \in M}} \langle u, \alpha x + \beta y \rangle \\ &= \sup_{(\alpha, \beta) \in M} \left(\alpha \sup_{x \in T_1} \langle u, x \rangle + \beta \sup_{y \in T_2} \langle u, y \rangle \right) \\ &= \sup_{(\alpha, \beta) \in M} (\alpha \varphi_{T_1}(u) + \beta \varphi_{T_2}(u)) \\ &= \|(\varphi_{T_1}(u), \varphi_{T_2}(u))\|_{M^*}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Заметим, что поскольку выпуклый компакт однозначно определяется своей опорной функцией, соотношение $\varphi_{T_1 \overset{M}{\oplus} T_2} = \|(\varphi_{T_1}, \varphi_{T_2})\|_{M^*}$ дает другое определение множества $T_1 \overset{M}{\oplus} T_2$, эквивалентное исходному.

Итак, каждое симметричное выпуклое тело в $\mathbb{R}^2$ порождает непрерывную бинарную операцию в пространстве выпуклых компактов $S\text{Conv}$ (в пространстве опорных функций).

Нас будет интересовать лишь один узкий класс таких операций, известный как суммирование по Фирею.

Пусть $p \in [1, +\infty]$ – произвольный параметр, q – сопряженное число: $1/p + 1/q = 1$. Обозначим через $\mathbb{R}_s^d$ пространство $\mathbb{R}^d$ с нормой $\|x\|_s = \left(\sum_{i=1}^d |x_i|^s\right)^{1/s}$ при $s \in [1, +\infty)$ и $\|x\|_s = \max_{i=1, \dots, d} |x_i|$ при $s = \infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть $T_1, T_2 \in S\text{Conv}$, $p \in [1, +\infty]$ – произвольный параметр. Суммой T_1 и T_2 с показателем p (обозначение $T_1 \overset{p}{\oplus} T_2$) называется множество $T_1 \overset{M}{\oplus} T_2$, где M – единичная сфера в $\mathbb{R}_q^2$, $1/p + 1/q = 1$. Иначе говоря,

$$T_1 \overset{p}{\oplus} T_2 = \{\alpha x + \beta y \mid x \in T_1, y \in T_2, \|(\alpha, \beta)\|_q = 1\}.$$

Из леммы 2 сразу следует эквивалентное определение:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5'. Пусть $T_1, T_2 \in S\text{Conv}$, $p \in [1, +\infty]$. Суммой множеств T_1 и T_2 с показателем p называется такое множество $T_1 \overset{p}{\oplus} T_2 \in S\text{Conv}$, что для всех $u \in S^{d-1}$ имеет место равенство

$$\varphi_{T_1 \overset{p}{\oplus} T_2}(u) = \|(\varphi_{T_1}(u), \varphi_{T_2}(u))\|_p.$$

Операция p -суммирования была впервые введена и использована Фиреем в работе [12].

Перечислим основные свойства операции p -суммирования.

СВОЙСТВО 1. Если $T_1, T_2 \in S\text{Conv}$, то $T_1 \overset{p}{\oplus} T_2 \in S\text{Conv}$. Если $T_1, T_2 \in S\text{BConv}$, то $T_1 \overset{p}{\oplus} T_2 \in S\text{BConv}$.

Это свойство следует из леммы 1.

СВОЙСТВО 2. Операция $\overset{p}{\oplus}$ коммутативна и ассоциативна.

Это свойство следует из определения 5'.

СВОЙСТВО 3. $T \overset{p}{\oplus} T = 2^{1/p} T$, $(\lambda T_1 \overset{p}{\oplus} \lambda T_2) = \lambda(T_1 \overset{p}{\oplus} T_2)$.

СВОЙСТВО 4. Операция $\overset{p}{\oplus}$ непрерывно зависит от p , причем при $p = 1$ она совпадает с суммированием выпуклых тел по Минковскому, а при $p = \infty$ – со взятием выпуклой оболочки.

Это свойство следует из определения 5.

СВОЙСТВО 5. Если B – произвольный линейный оператор в $\mathbb{R}^d$ и $T_1, T_2 \in \text{SConv}$, то $BT_1 \oplus^p BT_2 = B(T_1 \oplus^p T_2)$.

Это свойство следует из определения 5.

Коммутативность и ассоциативность p -суммирования дает нам возможность рассматривать p -сумму любого числа слагаемых. Обозначать эту сумму мы будем так:

$$\sum_{i=1}^N \oplus^p T_i = T_1 \oplus^p T_2 \oplus^p \dots \oplus^p T_N, \quad T_i \in \text{SConv}, \quad i = 1, \dots, N.$$

ПРИМЕР. При $p = 2$ сумма двух отрезков $[-1, 1]$, лежащих на осях OX и OY , есть единичный круг.

Легко видеть, что при любых $T_1, T_2 \in \text{SConv}$ семейство выпуклых множеств $\{T_1 \oplus^p T_2, 1 \leq p \leq \infty\}$ является невозрастающим по включению, т.е. $T_1 \oplus^{p_1} T_2 \subset T_1 \oplus^{p_2} T_2$ при $p_1 > p_2$.

§ 3. Инвариантные множества

Мы приступаем к формулировке основного утверждения. Пусть $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$, $p \in [1, +\infty]$ – произвольный параметр. Определим оператор $\bar{A}: \text{SConv} \rightarrow \text{SConv}$ следующим образом: $\bar{A}X = \sum_{i=1}^k \oplus^p A_i X$ для любого $X \in \text{SConv}$. Если выпуклое тело $T \in \text{SConv}$ таково, что $\bar{A}T = \lambda T$ для некоторого $\lambda > 0$, то T называется *инвариантным телом* набора операторов $\{A_1, \dots, A_k\}$, λ – его коэффициент гомотетии.

ТЕОРЕМА 2. Если набор операторов $A = \{A_1, \dots, A_k\}$ неприводим и $p \in [1, +\infty)$, то:

- 1) у набора операторов $\{A_1, \dots, A_k\}$ существует хотя бы одно инвариантное тело;
- 2) коэффициент гомотетии каждого инвариантного тела этого набора равен $k^{1/p} \hat{\rho}_p(A_1, \dots, A_k)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $p = \infty$ данная теорема совпадает с теоремой 1. Поэтому нам достаточно провести доказательство для случая $p < \infty$.

- 1) *Существование*. Определим последовательность чисел $\{s_n\}$,

$$s_n = \left(\frac{1}{k^n} \sum_{\sigma} \|A_{\sigma(1)} \dots A_{\sigma(n)}\|^p \right)^{\frac{1}{pn}},$$

норма всех матриц в этой сумме евклидова. Как мы знаем,

- а) для любых натуральных чисел m и n выполнено неравенство

$$(s_{m+n})^{m+n} \leq (s_m)^m (s_n)^n;$$

- б) $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \hat{\rho}_p(A)$.

Далее мы будем для краткости обозначать $\hat{\rho}_p(A) = \hat{\rho}_p$.

в) $s_n \geq \hat{\rho}_p$ для любого натурального n ;

г) $\hat{\rho}_p > 0$.

В самом деле, $s_n \geq k^{-1/p} \max_{\sigma} \|A_{\sigma(1)} \dots A_{\sigma(n)}\|$. Переходя в обеих частях неравенства к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим $\hat{\rho}_p(A_1, \dots, A_k) > k^{-1/p} \hat{\rho}_{\infty}(A_1, \dots, A_k)$, а для неприводимого набора операторов (как показано в [4]) $\hat{\rho}_{\infty}(A) > 0$.

Введем в рассмотрение “производящую функцию” $f(\lambda) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (s_n)^{np} \lambda^{np}$.

д) $R = 1/\hat{\rho}_p$ – радиус сходимости ряда $f(\lambda)$, причем при $\lambda = R$ ряд расходится. Действительно, по формуле Коши для радиуса сходимости

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(s_n)^{np}} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \hat{\rho}_p.$$

С другой стороны, ряд $f(R) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (s_n/\hat{\rho}_p)^{np}$ расходится, так как в силу п. в) неравенство $s_n \geq \hat{\rho}_p$ выполнено для всех натуральных n .

Далее нам понадобятся две нормы в пространстве SConv:

$$\|T\| = \sup_{x \in T} \|x\|,$$

где $\|x\|$ – евклидова норма, и p -норма

$$\|T\|_p = (\varphi_T^p(e_1) + \dots + \varphi_T^p(e_d))^{1/p}$$

где $\{e_i\}$ – евклидов базис в $\mathbb{R}^d$ (напомним, что у нас $p < \infty$).

е) Нормы $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_p$ эквивалентны, т.е. существуют такие константы C_1 и C_2 , что $0 < C_1 \leq C_2 < \infty$, и при этом $C_1\|T\|_p \leq \|T\| \leq C_2\|T\|_p$ для любого $T \in \text{SConv}$.

В самом деле, при любом i имеем

$$\|T\| = \sup_{x \in T} \|x\| \geq \sup_{x \in T} \langle e_i, x \rangle = \varphi_T(e_i),$$

поэтому $\|T\| \geq d^{-1/p} \|T\|_p$.

С другой стороны, для всякого $x \in T$ имеем

$$\left(\sum_{i=1}^d |x_i|^p \right)^{1/p} = \left(\sum_{i=1}^d |\langle x, e_i \rangle|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^d \varphi_T^p(e_i) \right)^{1/p} = \|T\|_p.$$

Поэтому в силу эквивалентности всех норм в $\mathbb{R}^d$ существует такая константа $C_2 > 0$, что $C_2\|T\|_p \geq \|T\|$.

ж) Равенство $\|\bar{A}^n T\|_p = \left(\left\| \sum_{\sigma} \bigoplus_p A_{\sigma(1)} \dots A_{\sigma(n)} T \right\|_p^p \right)^{1/p}$ выполнено при любом натуральном n .

Действительно,

$$\begin{aligned}\|\bar{A}^n T\|_p &= \left\| \sum_{\sigma} \bigoplus^p A_{\sigma(1)} \dots A_{\sigma(n)} T \right\|_p = \left(\sum_{i=1}^d \varphi_{\sum \bigoplus^p A_{\sigma(1)} \dots A_{\sigma(n)} T}^p(e_i) \right)^{1/p} \\ &= \left(\sum_{i=1}^d \sum_{\sigma} \varphi_{A_{\sigma(1)} \dots A_{\sigma(n)} T}^p(e_i) \right)^{1/p} \\ &= \left(\sum_{\sigma} \|A_{\sigma(1)} \dots A_{\sigma(n)} T\|_p^p \right)^{1/p}.\end{aligned}$$

з) Для всякого $T \in \text{SConv}$ существуют такие константы $0 < C_3(T) \leq C_4(T) < \infty$, что при любых $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$C_3 k^{n/p} (s_n)^n \leq \|\bar{A}^n T\|_p \leq C_4 k^{n/p} (s_n)^n.$$

Действительно, в силу свойства е) имеем

$$\frac{1}{C_2} \|A_{\sigma(1)} \dots A_{\sigma(n)} T\| \leq \|A_{\sigma(1)} \dots A_{\sigma(n)} T\|_p \leq \frac{1}{C_1} \|A_{\sigma(1)} \dots A_{\sigma(n)} T\|.$$

Величина $\|A_{\sigma(1)} \dots A_{\sigma(n)} T\|$ эквивалентна норме оператора $A_{\sigma(1)} \dots A_{\sigma(n)}$ в пространстве $\mathbb{R}^d$ с единичной сферой T (напомним, что $T \in \text{SBConv}$). Поскольку все нормы в $\mathbb{R}^d$ эквивалентны, существует константа $C = C(T) > 0$, для которой неравенство

$$\frac{1}{C} \|A_{\sigma(1)} \dots A_{\sigma(n)}\| \leq \|A_{\sigma(1)} \dots A_{\sigma(n)} T\| \leq C \|A_{\sigma(1)} \dots A_{\sigma(n)}\|$$

выполнено для всех σ и n . Положив $C_4 = C/C_1$, $C_3 = C/(CC_2)$, имеем

$$C_3 \|A_{\sigma(1)} \dots A_{\sigma(n)}\| \leq \|A_{\sigma(1)} \dots A_{\sigma(n)} T\|_p \leq C_4 \|A_{\sigma(1)} \dots A_{\sigma(n)}\|.$$

Если возвести это неравенство в степень p и просуммировать по всем функциям σ , получим

$$C_3 \left(\sum_{\sigma} \|A_{\sigma(1)} \dots A_{\sigma(n)}\|^p \right)^{1/p} \leq \|\bar{A}^n T\|_p \leq C_4 \left(\sum_{\sigma} \|A_{\sigma(1)} \dots A_{\sigma(n)}\|^p \right)^{1/p}.$$

Заметив, что $(\sum_{\sigma} \|A_{\sigma(1)} \dots A_{\sigma(n)}\|^p)^{1/p} = k^{n/p} (s_n)^n$, получим требуемое.

Пусть $T \in \text{SBConv}$ – некоторое выпуклое тело. Рассмотрим отображение $F_T: [0, +\infty) \rightarrow \text{SConv}$, заданное следующим рядом:

$$F_T(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \bigoplus^p \bar{A}^n(T) \lambda^n = T \bigoplus^p \lambda \bar{A} T \bigoplus^p \lambda^2 \bar{A}^2 T \bigoplus^p + \dots$$

Суммирование ряда следует понимать в обычном смысле: если $\{M_i\}$ – последовательность выпуклых компактов, то запись $\sum_{i \in \mathbb{N}} \overset{p}{\oplus} M_i = M$ означает, что последовательность “частичных сумм” $\sum_{i=1, \dots, N} \overset{p}{\oplus} M_i$ сходится к множеству M в метрике Хаусдорфа при $N \rightarrow \infty$.

и) Ряды $\sum_{n \in \mathbb{N}} \overset{p}{\oplus} \lambda^n \bar{A}^n T$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda^{np} (k^{1/p} s_n)^{np}$ сходятся и расходятся одновременно.

В самом деле, остаток ряда $F_T(\lambda)$ равен $\sum_{n=N}^{\infty} \overset{p}{\oplus} \lambda^n \bar{A}^n T$. Его норма в силу свойства е) эквивалентна величине $\left\| \sum_{n=N}^{\infty} \overset{p}{\oplus} \lambda^n \bar{A}^n T \right\|_p$, что в силу свойства з) эквивалентно величине $\left(\sum_{n=N}^{\infty} (\lambda^n (k^{1/p} s_n)^n)^p \right)^{1/p}$.

Теперь, применив свойство д), немедленно получаем:

к) радиус сходимости R_1 ряда $F_T(\lambda)$ равен $(k^{1/p} \hat{\rho}_p)^{-1}$, причем $\lim_{\lambda \rightarrow R_1} \|F_T(\lambda)\| = \infty$;

л) для всякого $\lambda \in (0, R_1)$ имеет место равенство $F_T(\lambda) = T \overset{p}{\oplus} \lambda \bar{A}(F_T(\lambda))$.

Это – основное для нас (хотя и очевидное) свойство тела $F_T(\lambda)$.

Пусть $\text{SConv}' = \{X \in \text{SConv} \mid \|X\| = 1\}$ – единичная сфера в пространстве SConv , снабженном метрикой Хаусдорфа. Очевидно, SConv' – компактное множество.

Введем еще одно отображение: $g: [0, +\infty) \rightarrow \text{SConv}'$, заданное формулой $g(\lambda) = F_T(\lambda)/\|F_T(\lambda)\|$. Тогда свойство л) перепишется в виде

$$g(\lambda) = \frac{T}{\|F_T(\lambda)\|} \overset{p}{\oplus} \lambda \bar{A} g(\lambda).$$

Кроме того, $\|F_T(\lambda)\| \rightarrow \infty$ при $\lambda \rightarrow R_1$ (свойство к)). Поэтому $T/\|F_T(\lambda)\| \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow R_1$, а также $r(g(\lambda), \lambda \bar{A} g(\lambda)) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow R_1$, где $r(\cdot, \cdot)$ – расстояние по Хаусдорфу. Итак, $r(g(\lambda), R_1 \bar{A} g(\lambda)) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow R_1$.

Поскольку функция $h(T) = r(T, R_1 \bar{A} T)$ непрерывна, то она достигает минимума на компакте SConv' . Так как $r(g(\lambda), R_1 \bar{A} g(\lambda)) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow R_1$, то этот минимум равен нулю, т.е. существует такой выпуклый компакт $T_0 \in \text{SConv}'$, что $r(T_0, R_1 \bar{A} T_0) = 0$, т.е. $\bar{A} T_0 = \frac{1}{R_1} T_0$. Поскольку $R_1 = (k^{1/p} \hat{\rho}_p)^{-1}$, получаем $\bar{A} T_0 = k^{1/p} \hat{\rho}_p T_0$.

Наконец, T_0 не может принадлежать никакому подпространству меньшей размерности в $\mathbb{R}^d$, иначе это подпространство было бы инвариантно относительно всех операторов $A_1, \dots, A_k$, а по условию наш набор операторов неприводим. Значит, T_0 имеет непустую внутренность, т.е. является телом, $T_0 \in \text{SBConv}$.

Существование инвариантного тела доказано.

2) *Коэффициент гомотетии.* Пусть тело T таково, что $\bar{A} T = \lambda T$. Тогда $\bar{A}^n T = \lambda^n T$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Далее воспользуемся доказательством п. 1) нашей теоремы:

$$C_3(T) k^{n/p} (s_n)^n \leq \|\bar{A}^n T\|_p \leq C_4(T) k^{n/p} (s_n)^n$$

(свойство з)). Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\bar{A}^n T\|_p^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (k^{n/p} (s_n)^n)^{1/n} = k^{1/p} \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = k^{1/p} \hat{\rho}_p.$$

С другой стороны,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\bar{A}^n T\|_p^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\lambda^n T\|_p^{1/n} = \lambda.$$

Откуда получаем $\lambda = k^{1/p} \widehat{\rho}_p$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из доказательства теоремы следует, что если у данного набора операторов инвариантное тело T единственное, то для всякого $X \in \text{SConv}$ тело

$$\frac{F_X(\lambda)}{\|F_X(\lambda)\|} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \bigoplus_{p} \lambda^n \bar{A}^n X}{\left\| \sum_{n=0}^{\infty} \bigoplus_{p} \lambda^n \bar{A}^n X \right\|}$$

стремится к T в метрике Хаусдорфа при $\lambda \rightarrow (k^{1/p} \widehat{\rho}_p)^{-1}$.

Однако сама теорема ничего не говорит о единственности инвариантного тела. Следующие простейшие примеры показывают, что в вопросе единственности возможны различные ситуации.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим случай $p = 1$. В этом случае операция $\bigoplus^p$ превращается в обычное сложение выпуклых тел по Минковскому. Пусть $d = 2$, $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ – симметрия относительно оси OX , $A_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ – поворот на 90° . Легко видеть, что у набора операторов $\{A_1, A_2\}$ есть как минимум два существенно различных инвариантных тела: круг и квадрат.

ПРИМЕР 2. $p = 1$, $d = 2$, a и b – прямые, пересекающиеся под острым углом α и проходящие через начало координат, A_1 – ортогональный проектор на прямую a , A_2 – ортогональный проектор на прямую b . Операторы A_1 и A_2 удовлетворяют условию теоремы 2, значит, у них есть инвариантное тело T :

$$A_1 T + A_2 T = \lambda T, \quad \lambda = 2\widehat{\rho}_1(A_1, A_2). \quad (1)$$

Поскольку $A_1 T$ – суть отрезок прямой a с центром в начале координат, $A_2 T$ – отрезок прямой b , то тело T – сумма двух отрезков, т.е. параллелограмм. Если a_1 и a_2 – длины этих отрезков, то проекция T на прямую a равна по длине $a_1 + a_2 \cos \alpha$, проекция T на прямую b равна $a_2 + a_1 \cos \alpha$. Уравнение (1) в проекциях запишется так:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 \cos \alpha &= \lambda a_1, \\ a_2 + a_1 \cos \alpha &= \lambda a_2. \end{aligned}$$

Из системы получаем $\lambda = 1 + \cos \alpha$, $a_1 = a_2$. Следовательно, T – ромб. Инвариантное тело в данном случае единственно с точностью до гомотетии.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $k \geq 2$, $p \in [1, +\infty)$, $A = \{A_1, \dots, A_k\}$ – неприводимый набор операторов в $\mathbb{R}^d$, причем $\dim(\operatorname{Im} A_k) = 1$. Тогда:

1) инвариантное тело операторов $A_1, \dots, A_k$ единственно с точностью до гомотетии;

2) ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \bigoplus_{\lambda^{n+1}}^p \frac{1}{\lambda^{n+1}} \bar{A}_0^n(a)$ сходится в метрике Хаусдорфа к инвариантному телу (здесь $\lambda = k^{1/p} \hat{\rho}_p(A)$, $A_0 X = \sum_{n=1}^{k-1} \bigoplus_{\lambda^n}^p A_n X$ – оператор на пространстве SConv , $a \in \operatorname{Im} A_k$ – отрезок прямой $\operatorname{Im} A_k$ с центром в нуле).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала сходимость ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \bigoplus_{\lambda^{n+1}}^p \frac{1}{\lambda^{n+1}} \bar{A}_0^n T$, где T – любое инвариантное тело. Из этого будет следовать сходимость ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \bigoplus_{\lambda^{n+1}}^p \frac{1}{\lambda^{n+1}} \bar{A}_0^n X$ для каждого $X \in \operatorname{SConv}$, в том числе и для отрезка a .

Так как T – инвариантное тело, то $\bar{A}T = \lambda T$, т.е. $\bar{A}_0 T \bigoplus_{\lambda}^p A_k T = \lambda T$. Так как $a \in \operatorname{Im} A_k$, то можно считать, что $A_k T = a$. Итак, $\bar{A}_0 T \bigoplus_{\lambda}^p a = \lambda T$. Выразим T и подставим его в левую часть этого уравнения:

$$A_0 \left(\frac{1}{\lambda} A_0 T \bigoplus_{\lambda}^p \frac{1}{\lambda} a \right) \bigoplus_{\lambda}^p a = \lambda T,$$

иначе говоря,

$$T = \frac{1}{\lambda} a \bigoplus_{\lambda^2}^p \frac{1}{\lambda^2} \bar{A}_0 a \bigoplus_{\lambda^2}^p \frac{1}{\lambda^2} \bar{A}_0^2 T.$$

Проделав так $N - 1$ раз, получим

$$T = \left(\sum_{n=0}^{N-1} \bigoplus_{\lambda^{n+1}}^p \frac{1}{\lambda^{n+1}} \bar{A}_0^n a \right) \bigoplus_{\lambda^N}^p \frac{1}{\lambda^N} \bar{A}_0^N T. \quad (2)$$

Далее, обозначим через $L \subset \mathbb{R}^d$ линейную оболочку множества

$$\{ A_{\sigma(1)} \dots A_{\sigma(n)} a \mid n = 0, 1, 2, \dots, d-1; \sigma: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, k-1\} \}.$$

Ясно, что $\dim L = d$, иначе L будет общим собственным подпространством операторов $A_1, \dots, A_{k-1}, A_k$.

Поскольку

$$\sum_{n=0}^{d-1} \bigoplus_{\lambda^{n+1}}^p \frac{1}{\lambda^{n+1}} \sum_{\sigma} \bigoplus_{\lambda^n}^p A_{\sigma(1)} \dots A_{\sigma(n)}(a) = \sum_{n=0}^{d-1} \bigoplus_{\lambda^{n+1}}^p \frac{1}{\lambda^{n+1}} \bar{A}_0^n a,$$

размерность множества $M_{d-1} = \sum_{n=0}^{d-1} \bigoplus_{\lambda^{n+1}}^p \frac{1}{\lambda^{n+1}} \bar{A}_0^n a$ равна d , т.е. компакт M_{d-1} обладает непустой внутренностью. Так как $T = M_{d-1} \bigoplus_{\lambda^d}^p \frac{1}{\lambda^d} \bar{A}_0^d T$ (равенство (2) при $N = d$) и, кроме того, $\operatorname{int} M_{d-1} \neq \emptyset$, то выполнено включение $\frac{1}{\lambda^d} \bar{A}_0^d T \subset \operatorname{int} T$. Поэтому можно выбрать число $r < 1$, при котором $\frac{1}{\lambda^d} \bar{A}_0^d T \subset rT$.

Это значит, что при любом $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\left\| \frac{1}{\lambda^{dn}} \bar{A}_0^{dn} T \right\| < r^n \|T\|.$$

Так как $\frac{1}{\lambda^{n_1}} \bar{A}_0^{n_1} T \supset \frac{1}{\lambda^{n_2}} \bar{A}_0^{n_2} T$ при $n_1 > n_2$, то последовательность $\{\frac{1}{\lambda^n} \bar{A}_0^n T\}$ не возрастает по включению. Теперь мы можем оценить остаток ряда:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=N}^{\infty} \bigoplus \frac{1}{\lambda^{n+1}} \bar{A}_0^n T \right\| &< \frac{1}{\lambda} \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{\lambda^n} \|\bar{A}_0^n T\| \\ &\leq \frac{1}{\lambda} \sum_{m=[N/d]}^{\infty} dr^m \|T\| = \frac{r^{[N/d]d} \|T\|}{\lambda(1-r)}. \end{aligned}$$

Итак, остаток ряда стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$, значит, ряд сходится. Попутно мы доказали, что $\left\| \frac{1}{\lambda^N} \bar{A}_0^N T \right\| \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$.

Для доказательства утверждения достаточно в равенстве (2) перейти к пределу при $N \rightarrow \infty$. Учитывая, что $\left\| \frac{1}{\lambda^N} \bar{A}_0^N T \right\| \rightarrow 0$, получаем

$$T = \sum_{n=0}^N \bigoplus \frac{1}{\lambda^{n+1}} \bar{A}_0^n a,$$

из чего следует единственность инвариантного тела. Утверждение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ. При $p = \infty$ предложение 2, вообще говоря, не выполняется.

ПРИМЕР 3. Пусть $p = \infty$, $d = 2$, a и b – прямые в $\mathbb{R}^2$, пересекающиеся под острым углом, A_1 – ортогональный проектор на прямую a , A_2 – ортогональный проектор на b . Операторы A_1 и A_2 удовлетворяют условию предложения 2, однако они имеют бесконечно много инвариантных тел. Любой параллелограмм, диагонали которого лежат на прямых a и b , а стороны образуют острые углы с диагоналями, является инвариантным телом A_1 и A_2 .

ПРИМЕР 4. Пусть $p = 1$, $d = 2$, $A_1 = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ – поворот на угол α , $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ – проектор на ось OX .

Возьмем произвольный отрезок оси OX с центром в нуле и обозначим его через a . Согласно предложению 2 инвариантное тело T набора операторов $\{A_1, A_2\}$ единственно и представляется в виде суммы

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} A_1^n a, \quad \lambda = 2\hat{\rho}_1(A_1, A_2).$$

Если отношение α/π рационально, то тело T – многоугольник. В противном случае T является прямой суммой бесконечного числа отрезков (так называемый “зонаид”) и граница этого тела имеет довольно сложную структуру, напоминающую

структуру фрактального множества. Если спроецировать инвариантное тело на ось OX , то получим уравнение на число λ :

$$\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} |\cos n\alpha|.$$

Оно имеет единственное решение, поскольку левая часть убывает на $(0, +\infty)$, а правая – возрастает. Разрешив уравнение относительно λ , можно найти значение $\hat{\rho}_1(A_1, A_2)$.

§ 4. Случай четного p

Случай целого четного p является в некотором смысле очень хорошим. В этом случае величина $\hat{\rho}_p$ может быть вычислена точно, как собственное значение некоторого конечномерного оператора, а инвариантное тело является p -суммой конечного числа отрезков. Перед формулировкой основных результатов докажем одно вспомогательное утверждение, относящееся к конечномерной геометрии.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Множество $K \subset \mathbb{R}^m$ называется *выпуклым конусом*, если для любых $x, y \in K$

- 1) $x + y \in K$;
- 2) $\lambda x \in K$ для всех $\lambda \geq 0$.

Мы будем называть конус K *вырожденным*, если существует такой вектор $x \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$, что $x \in \bar{K}$, $-x \in \bar{K}$ ($\bar{K}$ – замыкание K).

ПРИМЕР. Луч на плоскости, выходящий из начала координат, является согласно нашему определению невырожденным конусом в $\mathbb{R}^2$.

ЛЕММА 3. Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$, K – инвариантный конус оператора A ($AK \subset K$), причем конус K замкнутый, невырожденный и обладает непустой внутренностью. Тогда существует такой вектор $a \in K$, что $Aa = \lambda a$, причем $\lambda = \rho(A) = \max_{i=1, \dots, m} |\lambda_i|$, где $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ – собственные числа оператора A .

Доказательство можно найти в [10, с. 333].

ЗАМЕЧАНИЕ. Частный случай леммы 3, когда конус K является замыканием положительного октанта в $\mathbb{R}^m$, известен как теорема Фробениуса. В 1909 г. в работе [11] Фробениус доказал, что любая $(m \times m)$ -матрица с положительными коэффициентами имеет собственный вектор с положительными коэффициентами, собственное значение которого равно спектральному радиусу матрицы. С тех пор теорема Фробениуса многократно обобщалась. Подробнее об этом см. [10, дополнения].

Вернемся теперь к инвариантным телам. Рассмотрим набор ориентированных отрезков $\hat{a} = \{a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(N)}\}$. Каждый отрезок $a^{(i)}$ этого набора имеет центр в нуле, т.е. $a^{(i)} \in \text{SConv}$, и заданное направление (начало и конец). Координатами отрезка $a^{(i)}$ назовем координаты его конца $(a_1^{(i)}, \dots, a_d^{(i)})$.

Обозначим через W пространство всевозможных конечных занумерованных ориентированных наборов отрезков. На W введена естественная метрика: расстояние между наборами $\hat{a}$ и $\hat{b}$ равно $\max_{i,j} |a_j^{(i)} - b_j^{(i)}|$ (если в одном наборе отрезков меньше, чем в другом, то добавим нулевые “отрезки”). Операция объединения двух наборов непрерывна относительно этой метрики.

Заметим, что два набора считаются разными, даже если их множества отрезков совпадают, но по-разному ориентированы или по-разному занумерованы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Пусть $\hat{a} = \{a^{(1)}, \dots, a^{(N)}\}$ – данный набор отрезков. p -зонотопом этого набора называется множество

$$z(\hat{a}) = \sum_{i=1}^N \overset{p}{\oplus} a^{(i)}.$$

Такое определение обобщает известное понятие зонотопа (прямой суммы конечного числа отрезков) на случай p -суммы ($p \in [1, +\infty)$). Далее мы всякий p -зонотоп будем называть просто зонотопом, если ясно, о каком p идет речь. Перечислим простейшие свойства зонотопов:

- 1) отображение $z: W \rightarrow \text{SConv}$ непрерывно;
- 2) $z(\hat{a} \cup \hat{b}) = z(\hat{a}) \overset{p}{\oplus} z(\hat{b})$ для любых $\hat{a}, \hat{b} \in W$;
- 3) $z(\lambda \hat{a}) = \lambda z(\hat{a})$ для любого $a \in W$ и $\lambda \in \mathbb{R}$.

Зонотопы мы определили для любого $p \in [1, +\infty)$. Все дальнейшие рассуждения проводятся для случая целого четного p ($p \in 2\mathbb{N}$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Состоянием набора $\hat{a}$ называется тензор $Q(\hat{a})$ с p ковариантными компонентами $Q(\hat{a}) = \tilde{a} = \{\tilde{a}_{s_1 \dots s_p}\}$ такой, что

$$\tilde{a}_{s_1 \dots s_p} = \sum_{i=1}^N a_{s_1}^{(i)} \cdots a_{s_p}^{(i)}, \quad s_j = 1, 2, \dots, d,$$

при $j = 1, \dots, p$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из определения видно, что $Q(\hat{a})$ не зависит от нумерации набора $\hat{a}$; $Q(\hat{a})$ не зависит и от ориентации набора. В самом деле, если изменить направление отрезка $a^{(i)}$, то все его координаты поменяют знак, а произведения $a_{s_1}^{(i)} \cdots a_{s_p}^{(i)}$ не изменятся в силу четности p .

Следующая лемма показывает, что тензор $\tilde{a}$ зависит только от зонотопа $z(\hat{a})$.

ЛЕММА 4. Если $x \in \mathbb{R}^d$ – единичный вектор, то

$$(\varphi_{z(\hat{a})}(x))^p = \sum_{s_1, \dots, s_p} \tilde{a}_{s_1 \dots s_p} x_{s_1} \cdots x_{s_p}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned}
 (\varphi_{z(\hat{a})}(x))^p &= \sum_{i=1}^N \langle a^{(i)}, x \rangle^p = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^d a_j^{(i)} x_j \right)^p = \sum_{i=1}^N \sum_{s_1, \dots, s_p} a_{s_1}^{(i)} \cdots a_{s_p}^{(i)} x_{s_1} \cdots x_{s_p} \\
 &= \sum_{s_1, \dots, s_p} \left(\sum_{i=1}^N a_{s_1}^{(i)} \cdots a_{s_p}^{(i)} \right) x_{s_1} \cdots x_{s_p} \\
 &= \sum_{s_1, \dots, s_p} \tilde{a}_{s_1 \dots s_p} x_{s_1} \cdots x_{s_p}.
 \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Действия с состояниями:

$$Q(\hat{a} \cup \hat{b}) = Q(\hat{a}) + Q(\hat{b}) \quad (3)$$

для любых $\hat{a}, \hat{b} \in W$;

$$Q(\lambda \hat{a}) = |\lambda|^p Q(\hat{a}) \quad (4)$$

для любых $\hat{a} \in W$, $\lambda \in \mathbb{R}$;

$$Q(\hat{a}) = Q(\hat{b}) \quad (5)$$

в том и только том случае, когда $z(\hat{a}) = z(\hat{b})$.

Рассмотрим линейную оболочку $V = \text{Span}\{Q(\hat{a}) \mid \hat{a} \in W\}$. Пространство V назовем *пространством состояний*. Оценим размерность V . Из компонент тензора $\hat{a}$ различаются только те, у которых наборы индексов $(s_1, \dots, s_p)$ остаются различными при всех перестановках (см. определение 8). Количество таких различных классов наборов равно числу сочетаний с повторениями из d по p ,

$$H_d^p = \frac{d(d+1) \cdots (d+p-2)(d+p-1)}{p!}$$

(см. [6, с. 147]). Следовательно, $\dim V \leq H_d^p$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Наборы $\hat{a}$ и $\hat{b}$ называются *эквивалентными*, если их состояния совпадают, т.е. если $Q(\hat{a}) = Q(\hat{b})$.

ЛЕММА 5. Для любого набора $\hat{a} \in W$ существует набор из не более чем $\dim V$ векторов, эквивалентный $\hat{a}$.

Доказательству предположим следующий факт выпуклой геометрии.

ЛЕММА 6 (Радона). Если $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}^n$ и $x \in \text{Conv}(x_1, \dots, x_N)$, то из набора $\{x_1, \dots, x_N\}$ можно выбрать не более чем $n+1$ точку, выпуклая оболочка которых содержит x .

Доказательство содержится в [7].

СЛЕДСТВИЕ. Если $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}^n$, $x = x_1 + x_2 + \dots + x_N \neq 0$, то существует набор индексов $i_1, i_2, \dots, i_m$, причем $m \leq n$, и набор положительных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, для которых $x = \lambda_1 x_{i_1} + \dots + \lambda_m x_{i_m}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $x = x_1 + \dots + x_N$, то

$$\frac{1}{N}x = \frac{1}{N}x_1 + \dots + \frac{1}{N}x_{N-1} + \frac{1}{N}x_N,$$

значит, $\frac{1}{N}x \in \text{SConv}(x_1, \dots, x_N)$.

Обозначим $M = \text{Conv}(x_1, \dots, x_N)$; M – многогранник в пространстве $\mathbb{R}^n$. Поскольку $\frac{1}{N}x \in M$, то луч $\{\lambda x, \lambda \geq 0\}$ имеет с границей многогранника как минимум две общие точки. Одна из этих точек (обозначим ее через y) не совпадает с нулем. Имеем $y = \lambda x$ для некоторого $\lambda > 0$. Точка λx лежит на границе многогранника M , т.е. на одной из его граней. Не ограничивая общности, можно считать, что $x_1, x_2, \dots, x_r$ – вершины этой грани ($r \leq N$).

Поскольку размерность грани не превосходит $n - 1$, то согласно лемме Радона можно выбрать из множества $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ не более n точек: $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}$ ($m \leq n$), для которых существуют положительные числа $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ ($\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = 1$) такие, что $\lambda x = \alpha_1 x_{i_1} + \dots + \alpha_m x_{i_m}$. Итак, $x = \frac{\alpha_1}{\lambda} x_{i_1} + \frac{\alpha_2}{\lambda} x_{i_2} + \dots + \frac{\alpha_m}{\lambda} x_{i_m}$, что и требовалось доказать.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5. Пусть $\hat{a} = \{a^{(1)}, \dots, a^{(N)}\}$. В силу (3) имеем

$$\tilde{a} = Q(\hat{a}) = Q(a^{(1)}) + \dots + Q(a^{(N)}) = \tilde{a}^{(1)} + \dots + \tilde{a}^{(N)}.$$

Воспользовавшись следствием леммы 6, выбираем набор индексов $i_1, i_2, \dots, i_m$ и положительные числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ ($m \leq \dim V$), для которых

$$\tilde{a} = \lambda_1 \tilde{a}^{(i_1)} + \dots + \lambda_m \tilde{a}^{(i_m)}.$$

Из этого равенства в силу (4) получаем

$$\begin{aligned} \tilde{a} &= \lambda_1 \tilde{a}^{(i_1)} + \dots + \lambda_m \tilde{a}^{(i_m)} = Q(\lambda_1^{1/p} a^{(i_1)}) + \dots + Q(\lambda_m^{1/p} a^{(i_m)}) \\ &= Q(\lambda_1^{1/p} a^{(i_1)} \cup \lambda_2^{1/2} a^{(i_2)} \cup \dots \cup \lambda_m^{1/p} a^{(i_m)}). \end{aligned}$$

Таким образом, набор векторов $\{\lambda_1^{1/p} a^{(i_1)}, \dots, \lambda_m^{1/p} a^{(i_m)}\}$ эквивалентен $\hat{a}$. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Можно считать, что каждое состояние порождено набором, состоящим ровно из $\dim V$ векторов. В самом деле, если в наборе больше векторов, применим лемму 5, если меньше – дополним его нулевыми векторами.

ЛЕММА 7. Множество состояний всех наборов векторов образуют в V замкнутый невырожденный конус с непустой внутреннейностью.

Доказательство. Тот факт, что данное множество – конус, немедленно следует из (3) и (4). Непустота внутренности следует из того, что V – линейная оболочка этого конуса. Осталось доказать замкнутость и невырожденность. Условимся обозначать данный конус через K , а его размерность – через m ($m = \dim V$).

Замкнутость K . Пусть W_m – множество наборов из W , состоящих ровно из m векторов (возможно, нулевых). Из замечания к лемме 5 следует, что $Q(W_m) = K$. Пусть K' – пересечение K с единичным шаром в пространстве V_1 (V_1 – пространство V с нормой $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{\dim V} |x_i|$). Для доказательства замкнутости K нам достаточно доказать, что K' – компакт. Для этого достаточно доказать, что полный прообраз $Q^{-1}(K')$ – компакт в W_m (так как Q – непрерывное отображение).

Далее, $\tilde{a} \in K'$, если $\|\tilde{a}\|_1 \leq 1$, т.е. $\sum_{s_1, \dots, s_p} |\tilde{a}_{s_1 \dots s_p}| \leq 1$,

$$\sum_{s_1, \dots, s_p} |\tilde{a}_{s_1 \dots s_p}| = \sum_{i=1}^m \sum_{s_1, \dots, s_p} |a_{s_1}^{(i)} \dots a_{s_p}^{(i)}| = \sum_{i=1}^m (|a_1^{(i)}| + \dots + |a_d^{(i)}|)^p = \sum_{i=1}^m \|a^{(i)}\|_1^p.$$

Итак, $Q(\tilde{a}) \in K'$ тогда и только тогда, когда $\sum_{i=1}^m \|a^{(i)}\|_1^p \leq 1$. Значит, $Q^{-1}(K')$ компактно в W_m , что и требовалось доказать.

Невырожденность K . Предположим, что K вырожден. Это значит, что существует точка $\tilde{c} \neq 0$, принадлежащая замыканию K (т.е. самому K , поскольку K замкнут), такая, что $\tilde{c} \in K$ и $-\tilde{c} \in K$. Рассмотрим зонотоп $z(\tilde{c})$ набора $\tilde{c}$. Ясно, что существует единичный вектор $x \in \mathbb{R}^d$, для которого $\varphi_{z(\tilde{c})}(x) > 0$. Тогда в силу леммы 4

$$(\varphi_{z(\tilde{c})}(x))^p = \sum_{s_1, \dots, s_p} \tilde{c}_{s_1 \dots s_p} x_{s_1} \dots x_{s_p} > 0.$$

Так как $-\tilde{c} \in K$, то существует набор $\hat{b} \in W$, состоянием которого является тензор $-\tilde{c}$. Тогда

$$(\varphi_{z(\hat{b})}(x))^p = \sum_{s_1, \dots, s_p} \tilde{b}_{s_1 \dots s_p} x_{s_1} \dots x_{s_p} = - \sum_{s_1, \dots, s_p} \tilde{c}_{s_1 \dots s_p} x_{s_1} \dots x_{s_p} < 0,$$

что невозможно. Полученное противоречие доказывает невырожденность конуса K . Лемма 7 доказана.

Рассмотрим оператор на пространстве состояний.

Тензор $\tilde{a}$ имеет d^p координат, занумерованных наборами $s_1, \dots, s_p$, где все s_i принимают значения $1, 2, \dots, d$. Пусть $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ – некоторый оператор в $\mathbb{R}^d$. Ему мы поставим в соответствие оператор на пространстве $\mathbb{R}^{d^p}$, который зададим матрицей: в строке с номером $s_1 \dots s_p$ и столбце с номером $r_1 \dots r_p$ матрицы стоит элемент $B_{s_1}^{r_1} \dots B_{s_p}^{r_p}$, где B_j^i – элемент матрицы оператора B . Получился оператор в пространстве $\mathbb{R}^{d^p}$. Ограничение этого оператора на пространство V обозначим через $\tilde{B}$. Итак, каждому оператору $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ мы поставили в соответствие оператор $\tilde{B} \in \mathcal{L}(V)$ на пространстве состояний. Введем еще одно обозначение: если $a \in W$ – некоторый набор отрезков, $\hat{a} = \{a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(N)}\}$, то через $B\hat{a}$ обозначим набор $\{Ba^{(1)}, \dots, Ba^{(N)}\}$.

ЛЕММА 8. Для любого набора $\hat{a} \in W$ выполнено равенство

$$Q(B\hat{a}) = \tilde{B}(\tilde{a}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $B\hat{a} = \hat{b}$. Надо доказать, что $\tilde{B}\tilde{a} = \tilde{b}$. Распишем по каждой компоненте:

$$\begin{aligned} \tilde{b}_{s_1 \dots s_p} &= \sum_{i=1}^d b_{s_1}^d \dots b_{s_p}^d = \sum_{i=1}^d \prod_{j=1}^p (B_{s_j}^1 a_1^{(i)} + \dots + B_{s_j}^d a_d^{(i)}) \\ &= \sum_{i=1}^d \sum_{r_1, \dots, r_p} B_{s_1}^{r_1} \dots B_{s_p}^{r_p} a_{r_1}^{(i)} \dots a_{r_p}^{(i)} = \tilde{B}\tilde{a}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Пусть теперь $A = \{A_1, \dots, A_k\}$ – наш неприводимый набор операторов. Обозначим $\tilde{A} = \tilde{A}_1 + \dots + \tilde{A}_k$. Введем также оператор на наборах отрезков $\hat{A}\hat{a} = \hat{A}_1\hat{a} \cup \dots \cup \hat{A}_k\hat{a}$. Применив (3) и (4) к лемме 8, получаем следствия для операторов $\hat{A}$ и $\tilde{A}$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для любого набора $\hat{a} \in W$ выполнено равенство

$$Q(\hat{A}\hat{a}) = \tilde{A}Q(\hat{a}).$$

СЛЕДСТВИЕ 2. $\tilde{A}\tilde{a} = \lambda\tilde{a}$ ($\lambda > 0$) тогда и только тогда, когда $\bar{A}M = \lambda^{1/p}M$, где $M = z(\hat{a})$ – зонотоп набора $\hat{a}$.

Теперь мы можем сформулировать основной результат.

ТЕОРЕМА 3. Пусть p – целое четное число, $A = \{A_1, \dots, A_k\}$ – неприводимый набор операторов. Тогда:

- 1) зонотоп набора векторов $\hat{a}$ является инвариантным телом набора операторов $\{A_1, \dots, A_k\}$ тогда и только тогда, когда состояние $\tilde{a}$ этого набора является собственным вектором оператора $\tilde{A}$;
- 2) существует набор $\hat{a}$, состоящий из не более чем H_d^p векторов, p -сумма которых является инвариантным телом набора операторов A ;
- 3) $\hat{\rho}_p(A_1, \dots, A_k) = k^{-1/p}(\rho(\tilde{A}))^{1/p}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Если $z(\hat{a})$ является инвариантным телом, то $\bar{A}z(\hat{a}) = \lambda z(\hat{a})$ для некоторого $\lambda > 0$. Согласно следствию 2 леммы 8 имеем $\tilde{A}\tilde{a} = \lambda^{1/p}\tilde{a}$, т.е. $\tilde{a}$ – собственный вектор оператора $\tilde{A}$. В обратную сторону доказательство аналогично.

2) Согласно лемме 7 конус $K \subset V$ является замкнутым невырожденным конусом с непустой внутренней частью. Тогда мы можем применить к конусу K и оператору $\tilde{A}$ лемму 3. Существует такой “вектор” $\tilde{a} \in K$, что $\tilde{A}\tilde{a} = \rho(\tilde{A})\tilde{a}$. Тогда согласно п. 1) нашей теоремы имеем $\bar{A}M = (\rho(\tilde{A}))^{1/p}M$.

3) Согласно п. 2) теоремы 2 коэффициент гомотетии всякого инвариантного тела равен $k^{1/p}\hat{\rho}_p(A)$. Откуда получаем равенство $\hat{\rho}_p(A) = k^{-1/p}(\rho(\tilde{A}))^{1/p}$.

Теорема доказана.

§ 5. Частный случай: $p = 2$

В случае $p = 2$ теория инвариантных тел выглядит особенно просто. Сформулируем сначала ряд вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 9. *Выпуклое тело $M \subset \mathbb{R}^d$ является эллипсоидом, заданным квадратичной формой B (т.е. $M = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \langle Bx, x \rangle \leq 1\}$), тогда и только тогда, когда его опорная функция удовлетворяет соотношению $\varphi_M(u) = \sqrt{\langle B^{-1}u, u \rangle}$ для любого u , $\|u\| = 1$.*

Это утверждение хорошо известно, и мы оставляем его без доказательства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Ориентированный набор векторов из $\mathbb{R}^d$ называется *телесным*, если $\dim \text{Span}\{a^{(1)}, \dots, a^{(N)}\} = d$.

Ясно, что зонотоп всякого телесного набора имеет непустую внутренность, а значит, его опорная функция нигде не обращается в нуль.

ЛЕММА 10. *При $p = 2$ зонотоп всякого телесного набора является эллипсоидом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 9 нам достаточно доказать, что опорная функция зонотопа имеет вид $\varphi(u) = (\langle B^{-1}u, u \rangle)^{1/2}$. Пусть $\hat{a}$ – данный телесный набор, $M = z(\hat{a})$ – его зонотоп. Тогда

$$\varphi_M^2(u) = \sum_{i=1}^N \langle u, a^{(i)} \rangle^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j,m} u_j u_m a_j^{(i)} a_m^{(i)}.$$

Введем матрицу C следующим образом: $c_{jm} = \sum_{i=1}^N a_j^{(i)} a_m^{(i)}$. Так как набор $\hat{a}$ телесный, то $\varphi_M(u) > 0$ при всех u , а значит, матрица C положительно определена. Обозначим $C^{-1} = B$. Тогда

$$\varphi_M^2(u) = \sum_{i=1}^N \sum_{j,m} u_j u_m a_j^{(i)} a_m^{(i)} = \langle Cu, u \rangle = \langle B^{-1}u, u \rangle.$$

Итак, при $p = 2$ зонотопы всех телесных наборов суть эллипсоиды.

ЛЕММА 11. *При $p = 2$ p -сумма двух эллипсоидов есть эллипсоид. Точнее, если $M_1, M_2 \in \mathbb{R}^d$ – эллипсоиды и B_1, B_2 – их квадратичные формы, то $M_3 = M_1 \overset{p}{\oplus} M_2$ – эллипсоид, причем $B_3^{-1} = B_1^{-1} + B_2^{-1}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 9 $\varphi_{M_1}(u) = \sqrt{\langle B_1^{-1}u, u \rangle}$, $\varphi_{M_2}(u) = \sqrt{\langle B_2^{-1}u, u \rangle}$. Тогда если $M_3 = M_1 \overset{2}{\oplus} M_2$, то

$$\varphi_{M_3}^2(u) = \varphi_{M_1}^2(u) + \varphi_{M_2}^2(u) = \langle B_1^{-1}u, u \rangle + \langle B_2^{-1}u, u \rangle = \langle B_1^{-1}u + B_2^{-1}u, u \rangle.$$

Обозначив $B_3^{-1} = B_1^{-1} + B_2^{-1}$, получим $\varphi_{M_3}(u) = \sqrt{\langle B_3^{-1}u, u \rangle}$, значит, в силу леммы 9 M_3 – эллипсоид с квадратичной формой B_3 . Лемма доказана.

После утверждений лемм 10 и 11 можно ожидать, что у любого неприводимого набора операторов будет существовать инвариантный эллипсоид. Перед тем, как давать строгие формулировки, сформулируем еще одно вспомогательное утверждение.

ЛЕММА 12 [5]. Пусть $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$, S – оператор на пространстве симметрических матриц, действующий по формуле $S(X) = \sum_{j=1}^k A_j X A_j^*$. Тогда

$$\hat{\rho}_2(A_1, \dots, A_k) = \left(\frac{1}{k} \rho(S) \right)^{1/2}.$$

Доказательство содержится в [5].

Теперь мы можем сформулировать основной результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $p = 2$, $A = \{A_1, \dots, A_k\}$ – неприводимый набор операторов, S – оператор на пространстве симметрических матриц, заданный формулой $S(X) = \sum_{j=1}^k A_j X A_j^*$. Тогда:

- 1) у набора операторов $\{A_1, \dots, A_k\}$ существует инвариантный эллипсоид;
- 2) эллипсоид с квадратичной формой B является инвариантным телом набора операторов $\{A_1, \dots, A_k\}$ в том и только том случае, когда B^{-1} – собственный вектор оператора S , собственное значение которого равно $\rho(S)$;
- 3) $\hat{\rho}_2(A) = \left(\frac{1}{k} \rho(S) \right)^{1/2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункт 3) следует из леммы 12. Далее, согласно теореме 3 у набора операторов $A = \{A_1, \dots, A_k\}$ существует инвариантный зонотоп $z(\hat{a})$. Набор векторов $\hat{a}$ телесный, иначе плоскость, в которой он лежит, была бы инвариантной плоскостью операторов $A_1, \dots, A_k$. Значит, в силу леммы 10 $z(\hat{a})$ – эллипсоид. Пункт 1) доказан. Осталось доказать п. 2).

Необходимость. Имеем эллипсоид M с квадратичной формой B , причем $\bar{A}M = \sqrt{k} \hat{\rho}_2 M$ (в силу п. 2) теоремы 2). Предположим сначала, что $\det A_i \neq 0$ при $i = 1, \dots, k$. Тогда $A_i M$ будет задан квадратичной формой $(A_i^{-1})^* B A_i^{-1}$. Поскольку $\bar{A}M = \sum_{i=1}^k \oplus A_i M$, то согласно лемме 11 $\bar{A}M$ – также эллипсоид, а его квадратичная форма B_0 удовлетворяет соотношению

$$B_0^{-1} = \sum_{i=1}^k ((A_i^{-1})^* B A_i^{-1})^{-1} = \sum_{i=1}^k A_i B^{-1} A_i^* = S(B_0^{-1}).$$

Итак,

$$B_0^{-1} = \sum_{j=1}^k A_j B^{-1} A_j^* = S(B^{-1}). \quad (6)$$

Пусть теперь какие-то из операторов $A_1, \dots, A_k$ вырожденные. Тогда рассмотрим какую-нибудь последовательность неприводимых наборов операторов $\{A_1^{(i)}, \dots, A_k^{(i)}\}$, $i \in \mathbb{N}$, причем каждый набор состоит из невырожденных операторов; кроме того, $A_r^{(i)} \rightarrow A_r$, $i \rightarrow \infty$, для любого $r \in \{1, \dots, k\}$. Для каждого такого набора $\{A_1^{(i)}, \dots, A_k^{(i)}\}$ будет выполняться равенство (6). Переходя в нем к пределу в обеих частях, получим, что равенство (6) верно и для исходного набора $\{A_1, \dots, A_k\}$.

Далее, так как $\bar{A}M = \sqrt{k}\hat{\rho}_2 M$, то $B_0 = k^{-1}\hat{\rho}_2^{-2}B$. Подставив B_0 в (6), имеем

$$k\hat{\rho}_2^2 B^{-1} = \sum_{i=1}^k A_i B^{-1} A_i^* = S(B^{-1}).$$

Но согласно п. 3) нашего утверждения имеем $k\hat{\rho}_2^2 = \rho(S)$. Значит, $S(B^{-1}) = \rho(S)B^{-1}$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть имеется эллипсоид M с квадратичной формой B , для которого $S(B^{-1}) = \rho(S)B^{-1}$, т.е. $\rho(S)B^{-1} = \sum_{j=1}^k A_j B^{-1} A_j^*$. Пусть B_0 – квадратичная форма эллипсоида M . Согласно (6) имеем

$$B_0^{-1} = \sum_{j=1}^k A_j B^{-1} A_j^*,$$

откуда получаем $\rho(S)B^{-1} = B_0^{-1}$, т.е. $B_0 = (\rho(S))^{-1}B$. Из последнего равенства следует, что эллипсоиды M и $\bar{A}M$ гомотетичны с коэффициентом гомотетии $(\rho(S))^{1/2}$, т.е. $\bar{A}M = (\rho(S))^{1/2}M$. Утверждение доказано.

§ 6. Размеры инвариантных множеств

Мы возвращаемся к случаю произвольного $p \in [1, +\infty)$. Как уже говорилось, одна из основных задач – построение эффективного алгоритма нахождения p -радиуса. Для этого необходимо провести некоторую предварительную работу и доказать несколько лемм.

Пусть $M \subset \mathbb{R}^d$ – выпуклый компакт, $M \in \text{SConv}$. Через L_M обозначим величину $\sup_{x \in \partial M} \|x\|$, через l_M – величину $\inf_{x \in \partial M} \|x\|$. Ясно, что

$$L_M = \sup_{\|u\|=1} \varphi_M(u), \quad l_M = \inf_{\|u\|=1} \varphi_M(u), \quad L_M = \|M\|.$$

ЛЕММА 13. *При $p = \infty$ для любых операторов общего положения $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ существует такая константа $\hat{H}(A_1, \dots, A_k)$, что для всякого отрезка x с центром в нуле имеет место неравенство $\hat{H} \cdot l_M \geq \|x\|$, где $M = \bar{A}_0^{d-1}x$, $\bar{A}_0x = \text{Conv}(A_1x, \dots, A_kx)$.*

Доказательство содержится в работе [4]. Там же получены оценки сверху на константу $\hat{H}$ в зависимости от операторов $A_1, \dots, A_k$.

Введем новую константу

$$h(A) = h(A_1, \dots, A_k) = k^{(d-1)/p} \hat{H}(A_1, \dots, A_k) \cdot \max(\|A_1\|, \dots, \|A_k\|)^{d-1}.$$

Ясно, что число $h(A)$ является эффективной константой, зависящей от операторов $A_1, \dots, A_k$. Везде далее через $\bar{A}$ будем снова обозначать оператор $\bar{A}X = \sum_{i=1}^k \overset{p}{\oplus} A_i X$.

ЛЕММА 14. Для любого неприводимого набора операторов $A = \{A_1, \dots, A_k\}$ и для любого $M \in \text{SConv}$ выполнено неравенство

$$L_{\bar{A}^{d-1}M} \leq l_{\bar{A}^{d-1}M} \cdot h(A).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть вектор u_0 таков, что $\varphi_{\bar{A}M}(u_0) = L_{\bar{A}M}$. Тогда

$$\varphi_{\bar{A}M}(u_0) = (\varphi_{A_1M}^p(u_0) + \dots + \varphi_{A_kM}^p(u_0))^{1/p} \leq k^{1/p} L_M \|A\| = (k L_M^p \|A\|^p)^{1/p},$$

где $\|A\| = \max_{i=1, \dots, d} \|A_i\|$.

Итак, $L_{\bar{A}M} \leq k^{1/p} \|A\| L_M$. Прделавав так $d - 2$ раза, получим

$$L_{\bar{A}^{d-1}M} \leq k^{(d-1)/p} \|A\|^{d-1} L_M.$$

Далее, так как согласно лемме 13 выполнено включение $\text{Conv}(A_1M, \dots, A_kM) \subset \bar{A}^{d-1}M$, то получаем окончательно:

$$L_{\bar{A}^{d-1}M} \leq k^{(d-1)/p} \|A\|^{d-1} \hat{H} l_{\bar{A}^{d-1}M}.$$

Лемма доказана.

Итак, все тела, принадлежащие множеству образов $\{\bar{A}^{d-1}X \mid X \in \text{SConv}\}$, имеют равномерно ограниченное отношение максимального размера к минимальному, т.е. не могут быть слишком “вытянутыми” или “плоскими”.

СЛЕДСТВИЕ. Для всех инвариантных тел M набора операторов $A = \{A_1, \dots, A_k\}$ выполнено неравенство $L_M \leq h(A) l_M$.

Напомним несколько обозначений: $\|\cdot\|$ – евклидова норма в $\mathbb{R}^d$, $\|\cdot\|_M$ – норма в $\mathbb{R}^d$ с единичной сферой M , $S = \{T \in \text{SConv} \mid \|T\| = 1\}$.

ЛЕММА 15. Если $M \in S$ – инвариантное тело набора операторов $A = \{A_1, \dots, A_k\}$, то для всякого $x \in \mathbb{R}^d$ имеет место неравенство $\|x\| \leq \|x\|_M \leq h(A) \|x\|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $M \in S$, то $L_M = 1$, значит, по следствию из леммы 14 $l_M \geq 1/h(A)$. Тогда евклидов шар радиуса $1/h(A)$ с центром в нуле целиком лежит в M , поэтому $\|x\|_M \leq h(A) \|x\|$. С другой стороны, M лежит внутри единичного шара, поэтому для всех $x \in \mathbb{R}^d$ имеем $\|x\|_M \geq \|x\|$. Лемма доказана.

Теперь посмотрим, как с помощью различных выпуклых тел оценивать p -радиус.

ЛЕММА 16. 1) Если для данных $\lambda > 0$, $m \in \mathbb{N}$ существует такое тело $U \in \text{SBConv}$, что $\bar{A}^m U \subset \lambda U$, то $\lambda \geq (k^{1/p} \hat{\rho}_p)^m$.

2) Если для данных $\lambda > 0$, $m \in \mathbb{N}$ существует такое тело $U \in \text{SBConv}$, что $\lambda U \subset \bar{A}^m U$, то $\lambda \leq (k^{1/p} \hat{\rho}_p)^m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Так как $\bar{A}^m U \subset \lambda U$, то для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем $\bar{A}^{nm} U \subset \lambda^n U$. Возьмем любое инвариантное тело M , лежащее внутри U , т.е. $M \subset U$. Тогда по теореме 2 получаем равенство

$$\bar{A}^{nm} M = (k^{1/p} \hat{\rho}_p)^{nm} M.$$

Итак, $(k^{1/p} \hat{\rho}_p)^{nm} M = \bar{A}^{nm} M \subset \bar{A}^{nm} U \subset \lambda^n U$. Значит, для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $(k^{1/p} \hat{\rho}_p)^{nm} \|M\| \leq \lambda^n \|U\|$. Следовательно, $(k^{1/p} \hat{\rho}_p)^m \leq \lambda$.

2) Так как $\lambda U \subset \bar{A}^m U$, то для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем $\lambda^n U \subset \bar{A}^{mn} U$. Возьмем какое-нибудь инвариантное тело M , содержащее U . Для него

$$(k^{1/p} \hat{\rho}_p)^{mn} M = \bar{A}^{mn} M \supset \bar{A}^{mn} U \supset \lambda^n U.$$

Значит, $(k^{1/p} \hat{\rho}_p)^{mn} \|M\| \geq \lambda^n \|U\|$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, $(k^{1/p} \hat{\rho}_p)^m \geq \lambda$. Лемма доказана.

Мы подошли к основному утверждению.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $A = \{A_1, \dots, A_k\}$ – неприводимый набор операторов, $T \in \text{SConv}$ – произвольный выпуклый компакт. Тогда:

1) для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$L_{\bar{A}^n T} \leq (k^{1/p} \hat{\rho}_p)^n h(A) \|T\|;$$

2) для любого $n \geq d - 1$ выполнено неравенство

$$l_{\bar{A}^n T} \geq \frac{1}{h(A)} (k^{1/p} \hat{\rho}_p)^n \|T\|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Возьмем инвариантное тело T_0 , у которого $l_{T_0} = \|T\|$. Ясно, что $T \subset T_0$, и тогда по следствию из леммы 14 получим $L_{T_0} \leq h(A) \|T\|$.

Поскольку $\bar{A}^n T \subset \bar{A}^n T_0$, т.е. $\bar{A}^n T \subset (k^{1/p} \hat{\rho}_p)^n T_0$, получаем

$$L_{\bar{A}^n T} = \|\bar{A}^n T\| \leq (k^{1/p} \hat{\rho}_p)^n \|T_0\| \leq (k^{1/p} \hat{\rho}_p)^n h(A) \|T\|.$$

2) Согласно лемме 13 $l_{\bar{A}^{d-1} T} \hat{H} \geq L_T$. Значит, $l_{\bar{A}^{d-1} T} \geq \frac{1}{\hat{H}} L_T$. “Впишем” в $\bar{A}^{d-1} T$ инвариантное тело T_0 , у которого $L_{T_0} = l_{\bar{A}^{d-1} T}$. Тогда для всякого $n \geq d - 1$ имеем

$$\bar{A}^n T = \bar{A}^{n-d+1}(\bar{A}^{d-1} T) \supset \bar{A}^{n-d+1} T_0 = (k^{1/p} \hat{\rho}_p)^{n-d+1} T_0.$$

Далее,

$$\begin{aligned} l_{\bar{A}^n T} &\geq (k^{1/p} \hat{\rho}_p)^{n-d+1} \|T_0\| = (k^{1/p} \hat{\rho}_p)^{n-d+1} L_{T_0} \\ &= (k^{1/p} \hat{\rho}_p)^{n-d+1} l_{\bar{A}^{d-1} T} \geq \frac{1}{\hat{H}} (k^{1/p} \hat{\rho}_p)^{n-d+1} \|T\|. \end{aligned}$$

Итак,

$$l_{\bar{A}^n T} \geq \frac{1}{\widehat{H}} (k^{1/p} \widehat{\rho}_p)^{n-d+1} \|T\|.$$

Поскольку

$$\widehat{\rho}_p \leq \max(\|A_1\|, \dots, \|A_k\|),$$

то

$$(k^{1/p} \widehat{\rho}_p)^{d-1} \leq k^{1/p} \max(\|A_1\|, \dots, \|A_k\|)^{d-1}.$$

Тогда получаем окончательно

$$\begin{aligned} l_{\bar{A}^n T} &\geq \frac{(k^{1/p} \widehat{\rho}_p)^n \|T\|}{(k^{1/p} \widehat{\rho}_p)^{d-1} \widehat{H}} \\ &\geq \frac{(k^{1/p} \widehat{\rho}_p)^n \|T\|}{\widehat{H} k^{(d-1)/p} \max(\|A_1\|, \dots, \|A_k\|)^{d-1}} = \frac{1}{h(A)} (k^{1/p} \widehat{\rho}_p)^n \|T\|. \end{aligned}$$

Предложение доказано.

СЛЕДСТВИЕ. Если набор операторов $A = \{A_1, \dots, A_k\}$ неприводим, $T \in \text{SConv}$ – произвольный выпуклый компакт, то для любого $n \geq d$ и любой точки $x_n \in (\bar{A}^n T)$ выполнено неравенство

$$\frac{1}{h(A)} (k^{1/p} \widehat{\rho}_p)^n \leq \|x_n\| \leq h(A) (k^{1/p} \widehat{\rho}_p)^n.$$

Принцип работы алгоритма для поиска p -радиуса может быть основан на следующем простом соображении: если тело M “почти инвариантно” (т.е. $\bar{A}M$ близко к λM для некоторого $\lambda > 0$), то его коэффициент гомотетии λ близок к числу $k^{1/p} \widehat{\rho}_p$.

Перед тем как давать строгие формулировки, перечислим три свойства метрики Хаусдорфа, которые нам понадобятся. Напомним, что *расстоянием по Хаусдорфу* между множествами M и T называется число

$$r(M, T) = \max \left\{ \sup_{x \in M} \inf_{y \in T} \|x - y\|, \sup_{y \in T} \inf_{x \in M} \|x - y\| \right\}.$$

Если M и T – выпуклые компакты, то метрика Хаусдорфа может быть записана в следующем эквивалентном виде:

$$r(M, T) = \sup_{x \in \mathbb{R}^d, \|x\|=1} |\varphi_M(x) - \varphi_T(x)|.$$

Три свойства метрики Хаусдорфа таковы:

$$r\left(\sum_i^p \oplus T_i, \sum_i^p \oplus M_i\right) \leq \left(\sum_i r^p(T_i, M_i)\right)^{1/p}, \quad p < \infty, \quad (7)$$

$$r\left(\sum_i^p \oplus T_i, \sum_i^p \oplus M_i\right) \leq \max_i (r(T_i, M_i)), \quad p = \infty, \quad T, M \in \text{SConv};$$

$$r(\bar{A}M, \bar{A}T) \leq k^{1/p} \|A\| r(M, T) \quad (8)$$

для любых $M, T \in \text{SConv}$, $\|A\| = \max_{i=1, \dots, k} \|A_i\|$;

$$r(\bar{A}^n M, \bar{A}^n T) \leq h(a)(k^{1/p} \hat{\rho}_p)^n r(M, T) \quad (9)$$

для любых $T, M \in \text{SConv}$, $n \in \mathbb{N}$.

Для доказательства (7) заметим, что всякая точка $x \in \sum_{i=1}^N \bigoplus^p T_i$ представляется в виде $x = \sum_{i=1}^N \alpha_i x_i$ (согласно определению 5), где $x_i \in T_i$, $\|(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)\|_q = 1$, $1/p + 1/q = 1$. Для каждой точки x_i мы можем выбрать такую точку $y_i \in M_i$, что $\|x_i - y_i\| \leq r(T_i, M_i)$. Так как

$$y = \sum_{i=1}^N \alpha_i y_i \in \sum_{i=1}^N \bigoplus^p M_i,$$

то получается, что для всякой точки $x \in \sum_{i=1}^N \bigoplus^p T_i$ имеем

$$\begin{aligned} \inf_{y \in \sum_i \bigoplus^p M_i} \|x - y\| &\leq \sum_{i=1}^N |\alpha_i| \cdot \|x_i - y_i\| \leq \sum_{i=1}^N |\alpha_i| r(T_i, M_i) \\ &\leq \|(\alpha_1, \dots, \alpha_N)\|_q \cdot \|r(T_1, M_1), \dots, r(T_N, M_N)\|_p. \end{aligned}$$

Для доказательства (8) достаточно заметить, что

$$r(A_i M, A_i T) \leq \|A_i\| r(M, T) \leq \|A\| r(M, T),$$

после чего воспользоваться (7).

Доказательству (9) предположим следующую лемму.

ЛЕММА 17. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ и любых $M, T \in \text{SConv}$ имеет место включение $\bar{A}^n(M + T) \subset \bar{A}^n M + \bar{A}^n T$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\bar{A}^n(M + T) = \sum_{\sigma} A_{\sigma(1)} \cdots A_{\sigma(n)} M$, то всякая точка $x \in \bar{A}^n(M + T)$ представляется в виде $x = \sum_{\sigma} \alpha_{\sigma} x_{\sigma}$, где $x_{\sigma} \in A_{\sigma(1)} \cdots A_{\sigma(n)}(M + T)$, $\|(\alpha_{\sigma})\|_q = 1$, $1/p + 1/q = 1$. Далее,

$$A_{\sigma(1)} \cdots A_{\sigma(n)}(M + T) = A_{\sigma(1)} \cdots A_{\sigma(n)} M + A_{\sigma(1)} \cdots A_{\sigma(n)} T.$$

Поэтому

$$x_{\sigma} = y_{\sigma} + z_{\sigma}, \quad y_{\sigma} \in A_{\sigma(1)} \cdots A_{\sigma(n)} M, \quad z_{\sigma} \in A_{\sigma(1)} \cdots A_{\sigma(n)} T.$$

Обозначим

$$y = \sum_{\sigma} \alpha_{\sigma} y_{\sigma}, \quad z = \sum_{\sigma} \alpha_{\sigma} z_{\sigma}.$$

Ясно, что $y \in \bar{A}^n M$, $z \in \bar{A}^n T$. Тогда $x = (y + z) \in (\bar{A}^n M + \bar{A}^n T)$. Лемма доказана.

Теперь докажем неравенство (9). Обозначим $r(M, T) = \varepsilon$, $B = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\| \leq 1\}$. Так как $r(M, T) = \varepsilon$, то $M \subset T + \varepsilon B$ и $T \subset M + \varepsilon B$. Согласно лемме 17 $\bar{A}^n(T + \varepsilon B) \subset \bar{A}^n T + \varepsilon \bar{A}^n B$. Итак,

$$\bar{A}^n M \subset \bar{A}^n(T + \varepsilon B) \subset \bar{A}^n T + \varepsilon \bar{A}^n B.$$

Согласно предложению 4 $\varepsilon \bar{A}^n B \subset \varepsilon(k^{1/p} \hat{\rho}_p)^n h(A) B$. Итак,

$$\bar{A}^n M \subset \bar{A}^n T + \varepsilon(k^{1/p} \hat{\rho}_p)^n h(A) B.$$

Аналогично доказывается, что

$$\bar{A}^n T \subset \bar{A}^n M + \varepsilon(k^{1/p} \hat{\rho}_p)^n h(A) B.$$

Следовательно, $r(\bar{A}^n M, \bar{A}^n T) \leq \varepsilon(k^{1/p} \hat{\rho}_p)^n h(A)$, что и требовалось доказать.

Переходим к главному утверждению.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Если для $p \in [1, +\infty)$, $\varepsilon \in (0, 1/2)$ и неприводимого набора операторов $A = \{A_1, \dots, A_k\}$ существуют тело $M \in \text{SConv}$ и число $\lambda > 0$ с условием $r(\frac{1}{\lambda} \bar{A} M, M) \leq \varepsilon \|M\|$, то имеет место неравенство

$$\left| \frac{\hat{\rho}_p k^{1/p}}{\lambda} - 1 \right| \leq 2\varepsilon h^2(A).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (9) для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\begin{aligned} r\left(\left(\frac{\bar{A}}{\lambda}\right)^n M, \left(\frac{\bar{A}}{\lambda}\right)^{n-1} M\right) &\leq \lambda^{-n-1} h(A) (k^{1/p} \hat{\rho}_p)^{n-1} r\left(\frac{\bar{A} M}{\lambda}, M\right) \\ &\leq \lambda^{-n-1} h(A) (k^{1/p} \hat{\rho}_p)^{n-1} \varepsilon \|M\|. \end{aligned}$$

Пользуясь неравенством треугольника, распишем:

$$r\left(\frac{\bar{A}^{d-1} M}{\lambda^{d-1}}, M\right) \leq \sum_{n=1}^{d-1} r\left(\frac{\bar{A}^n M}{\lambda^n}, \frac{\bar{A}^{n-1} M}{\lambda^{n-1}}\right) \leq \varepsilon \|M\| \sum_{n=1}^{d-1} \left(\frac{\hat{\rho}_p k^{1/p}}{\lambda}\right)^{n-1} h(A).$$

Обозначим

$$\varepsilon_d = \varepsilon \sum_{n=1}^{d-1} \left(\frac{\hat{\rho}_p k^{1/p}}{\lambda}\right)^{n-1} h^2(A).$$

Мы доказали, что

$$r\left(\left(\frac{\bar{A}}{\lambda}\right)^{d-1} M, M\right) \leq \frac{\varepsilon_d}{h(A)} \|M\|.$$

Значит,

$$r\left(\left(\frac{\bar{A}}{\lambda}\right)^{d-1} M, M\right) \leq \frac{1}{h(A)} \frac{\varepsilon_d}{1 - \varepsilon_d} \left\| \left(\frac{\bar{A}}{\lambda}\right)^{d-1} M \right\|.$$

Тогда в силу леммы 14 имеем

$$\left(1 - \frac{\varepsilon_d}{1 - \varepsilon_d}\right) \left(\frac{\bar{A}}{\lambda}\right)^{d-1} M \subset M \subset \left(1 + \frac{\varepsilon_d}{1 - \varepsilon_d}\right) \left(\frac{\bar{A}}{\lambda}\right)^{d-1} M,$$

т.е.

$$(1 - \varepsilon_d)M \subset \left(\frac{\bar{A}}{\lambda}\right)^{d-1} M \subset (1 + 2\varepsilon_d)M.$$

Отсюда по лемме 16 для $m = d - 1$ немедленно получаем

$$\left|(\lambda^{-1} \hat{\rho}_p k^{1/p})^{d-1} - 1\right| \leq 2\varepsilon_d.$$

Подставив выражение для ε_d , получим

$$\left|\left(\frac{\hat{\rho}_p k^{1/p}}{\lambda}\right)^{d-1} - 1\right| \leq 2\varepsilon h^2(A) \sum_{n=1}^{d-1} \left(\frac{\hat{\rho}_p k^{1/p}}{\lambda}\right)^{n-1}.$$

Поделив обе части на число $\sum_{n=1}^{d-1} \left(\frac{\hat{\rho}_p k^{1/p}}{\lambda}\right)^{n-1}$, получим окончательно

$$\left|\frac{\hat{\rho}_p k^{1/p}}{\lambda} - 1\right| \leq 2\varepsilon h^2(A),$$

что и требовалось доказать.

§ 7. Алгоритм поиска p -радиуса

Как мы уже знаем (предложение 1), если операторы $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ имеют общее собственное подпространство, то задача нахождения их p -радиуса распадается на несколько задач меньших размерностей. Поэтому достаточно рассмотреть случай неприводимого набора операторов.

Для случая $p = \infty$ алгоритм был построен в работе [4]. По этой причине мы ограничимся рассмотрением случая конечных p .

Формулировка задачи. Даны неприводимый набор операторов $A = \{A_1, \dots, A_k\}$, произвольный параметр $p \in [1, +\infty)$ и число $\varepsilon \in (0, 1/2)$. Необходимо найти p -радиус $\hat{\rho}_p(A_1, \dots, A_k)$ с относительной погрешностью ε , т.е. найденное приближение $\hat{\rho}_p^*$ должно удовлетворять неравенству

$$\left|\frac{\hat{\rho}_p - \hat{\rho}_p^*}{\hat{\rho}_p^*}\right| \leq \varepsilon.$$

Идея алгоритма. Мы строим “почти инвариантное” тело M операторов $A_1, \dots, A_k$, т.е. для некоторого $\lambda > 0$ расстояние $r(\bar{A}M, \lambda M)$ будет достаточно мало. Тогда согласно предложению 5 коэффициент λ будет хорошо приближать

величину $k^{1/p}\widehat{\rho}_p$. Почти инвариантное тело M мы будем искать среди зонотопов некоторого набора отрезков.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Пусть даны набор отрезков $\widehat{a} \in W$ (см. определение 7) и число $\delta > 0$. Набор $\widehat{a}$ называется δ -ежом, если

- 1) длины всех отрезков набора $\widehat{a}$ равны 1;
- 2) для любого ориентированного отрезка b единичной длины с центром в нуле найдется такой отрезок $a^{(i)}$ набора $\widehat{a}$, что $r(a^{(i)}, b) < \delta$.

Пусть дан δ -еж $\widehat{a} = \{a^{(1)}, \dots, a^{(N)}\}$, набор операторов $A = \{A_1, \dots, A_k\}$ неприводим. Построим по набору операторов $\{A_1, \dots, A_k\}$ и δ -ежу $\widehat{a}$ оператор $\widetilde{A}$ в пространстве $\mathbb{R}^N$. Обозначим

$$l_{gj} = \|A_g a^{(j)}\|, \quad g = 1, \dots, k, \quad j = 1, \dots, N.$$

Таким образом, $A_g(a^{(j)}) = l_{gj}n_{gj}$, $\|n_{gj}\| = 1$, где n_{gj} — единичный отрезок с центром в нуле. Каждому отрезку n_{gj} поставим в соответствие один из отрезков δ -ежа (обозначим его $a^{(m(g,j))}$) таким образом, чтобы $r(n_{gj}, a^{(m(g,j))}) < \delta$. Согласно определению δ -ежа такой отрезок в наборе $\widehat{a}$ найдется. Таким образом, мы получили отображение

$$m: \{(g, j) \mid g = 1, \dots, k, j = 1, \dots, N\} \rightarrow \{1, \dots, N\},$$

т.е. $m: \{1, 2, \dots, k\} \times \{1, \dots, N\} \rightarrow \{1, \dots, N\}$.

Для любого $n = 1, \dots, N$ через $m^{-1}(n)$ обозначим полный прообраз числа n , т.е. $m^{-1}(n) = \{(g, j) \mid m(g, j) = n\}$. Теперь определим матрицу оператора $\widetilde{A} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$. Элемент матрицы $\widetilde{A}$ в столбце j и строке g равен $\sum_{t: (t, g) \in m^{-1}(j)} l_{tj}^p$. Ясно, что в каждом столбце матрицы $\widetilde{A}$ будет не более k ненулевых элементов.

Для удобства введем еще несколько обозначений:

$$\mathbb{R}_+^N = \{x \in \mathbb{R}^N \mid x_i \geq 0, i = 1, \dots, N\}.$$

Для всякого вектора $x \in \mathbb{R}_+^N$ через $\widehat{a}_x$ обозначим набор $\{x_1 a^{(1)}, \dots, x_N a^{(N)}\}$. Для $\alpha \geq 0$ через x^α обозначим вектор $\{x_1^\alpha, \dots, x_N^\alpha\}$. Наконец, через $\bar{x}$ обозначим вектор $(\widetilde{A}x^p)^{1/p}$.

Напомним, что для всякого набора $\widehat{b} \in W$ его зонотоп обозначается через $z(\widehat{b}) = \sum_{n=1}^N \bigoplus b^{(n)}$.

ЛЕММА 18. Если $\widehat{a}$ — некоторый δ -еж, то для всякого вектора $x \in \mathbb{R}_+^N$ выполнено неравенство

$$r(z(\widehat{a}_{\bar{x}}), \widetilde{A}z(\widehat{a}_x)) \leq \delta k \|A\| \left(\sum_{n=1}^N x_n^p \right)^{1/p},$$

где $\|A\| = \max_{j=1, \dots, k} \|A_j\|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned}
r(z(\widehat{a_{\bar{x}}}), \bar{A}z(\widehat{a_x})) &= r\left(\sum_{s=1}^N \bigoplus^p \bar{x}_s a^{(s)}, \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^k \bigoplus^p x_i A_j a^{(i)}\right) \\
&= r\left(\sum_{s=1}^N \bigoplus^p \left(\sum_{t:(t,g) \in m^{-1}(s)} l_{tg}^p x_g^p\right)^{1/p} a^{(s)}, \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^k \bigoplus^p x_i A_j a^{(i)}\right) \\
&= r\left(\sum_{\substack{t=1,\dots,k \\ g=1,\dots,N}} \bigoplus^p l_{tg} x_g a^{(m(t,g))}, \sum_{\substack{j=1,\dots,k \\ i=1,\dots,N}} \bigoplus^p x_i n_{ij} l_{ij}\right) \\
&\leq \left(\sum_{\substack{t=1,\dots,k \\ g=1,\dots,N}} r^p \left(l_{tg} x_g a^{(m(t,g))}, l_{tg} x_g n_{tg}\right)\right)^{1/p}
\end{aligned}$$

(мы воспользовались неравенством (7)). Теперь, вспомнив, что неравенство $r(n_{gj}, a^{(m(t,g))}) < \delta$ верно для любых g, j , получим

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{\substack{t=1,\dots,k \\ g=1,\dots,N}} r^p \left(l_{tg} x_g a^{(m(t,g))}, l_{tg} x_g n_{tg}\right)\right)^{1/p} \\
&\leq \left(\sum_{\substack{t=1,\dots,k \\ g=1,\dots,N}} \left(l_{tg} x_g r(a^{(m(t,g))}, n_{tg})\right)^p\right)^{1/p} < \delta \left(\sum_{t,g} l_{tg}^p x_g^p\right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Итак,

$$r(z(\widehat{a_{\bar{x}}}), \bar{A}z(\widehat{a_x})) < \delta \left(\sum_{t,g} l_{tg}^p x_g^p\right)^{1/p}.$$

Далее,

$$\delta \left(\sum_{t,g} l_{tg}^p x_g^p\right)^{1/p} = \delta \left(\sum_{g=1}^N x_g^p \left(\sum_{t=1}^k l_{tg}^p\right)\right)^{1/p} \leq \delta k \|A\| \left(\sum_{g=1}^N x_g^p\right)^{1/p}.$$

Лемма доказана.

Мы хотим воспользоваться предложением 5. Для этого необходимо оценить расстояние между зонотопами $z(\widehat{a_{\bar{x}}})$ и $\bar{A}z(\widehat{a_x})$ с помощью нормы тела $z(\widehat{a_x})$.

Следующая лемма свяжет величины $\|z(\widehat{a}_x)\|$ и $\left(\sum_{g=1}^N x_g^p\right)^{1/p}$. Пусть $S_{d-1} = \{y \in \mathbb{R}^d \mid \|y\| = 1\}$ – единичная сфера в пространстве $\mathbb{R}^d$, γ_d – ее площадь. Положим

$$\gamma(d, p) = \int_{S_{d-1}} |\langle a, n \rangle|^p dn,$$

где a – фиксированный единичный вектор, dn – элемент площади сферы. Легко видеть, что этот интеграл не зависит от $a \in S_{d-1}$.

ЛЕММА 19. Для любых $\widehat{a} \in W$ и $x \in \mathbb{R}_+^N$ выполнено неравенство

$$\left(\sum_{g=1}^N x_g^p\right)^{1/p} \leq \left(\frac{\gamma_d}{\gamma(d, p)}\right)^{1/p} \|z(\widehat{a}_x)\|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\int_{S_{d-1}} \varphi_{z(\widehat{a}_x)}^p(n) dn = \sum_{g=1}^N \int_{S_{d-1}} |\langle x_g a^{(g)}, n \rangle|^p dn = \gamma(d, p) \sum_{g=1}^N x_g^p.$$

С другой стороны,

$$\gamma_d \|z(\widehat{a}_x)\|^p = \gamma_d \max_{n \in S_{d-1}} (\varphi_{z(\widehat{a}_x)}^p(n)) \geq \int_{S_{d-1}} \varphi_{z(\widehat{a}_x)}^p(n) dn.$$

Значит,

$$\gamma_d \|z(\widehat{a}_x)\|^p \geq \gamma(d, p) \sum_{g=1}^N x_g^p,$$

т.е.

$$\|z(\widehat{a}_x)\| \geq \left(\frac{\gamma(d, p)}{\gamma_d}\right)^{1/p} \left(\sum_{g=1}^N x_g^p\right)^{1/p}.$$

Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. В условиях леммы 19 для всякого $\delta > 0$, для любого δ -ежа $\widehat{a} = (a^{(1)}, \dots, a^{(N)})$ и любого $x \in \mathbb{R}_+^N$ выполнено неравенство

$$r(z(\widehat{a}_{\overline{x}}), \bar{A}z(\widehat{a}_x)) \leq \left(\frac{k^p \gamma_d}{\gamma(d, p)}\right)^{1/p} \|A\| \cdot \|z(\widehat{a}_x)\| \delta.$$

Мы подошли к формулировке основного утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть $A = \{A_1, \dots, A_k\}$ – неприводимый набор операторов, $p \in [1, +\infty)$, $\delta > 0$ – произвольные параметры, $\hat{a} = \{a^{(1)}, \dots, a^{(N)}\}$ – δ -еж в $\mathbb{R}^d$. Тогда:

- 1) существует вектор $x \in \mathbb{R}_+^N$, для которого $\tilde{A}x = \rho(\tilde{A})x$;
- 2) если для $x \in \mathbb{R}_+^N$ выполнено неравенство $\tilde{A}x = \rho(\tilde{A})x$, то для $y = x^{1/p}$ выполнено неравенство

$$r(\rho(\tilde{A})M_y, \bar{A}M_y) \leq \left(\frac{k^p \gamma_d}{\gamma(d, p)} \right)^{1/p} \|A\| \cdot \|M_y\| \delta,$$

где $M_y = z(\hat{a}_y)$;

- 3) справедливо неравенство

$$\left| \frac{\left(\frac{\rho(\tilde{A})}{k} \right)^{1/p} - \hat{\rho}_p}{\left(\frac{\rho(\tilde{A})}{k} \right)^{1/p}} \right| \leq 2 \left(\frac{k^p \gamma_d}{\gamma(d, p)} \right)^{1/p} \|A\| h^2(A) \delta.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Поскольку все элементы матрицы оператора $\tilde{A}$ неотрицательны, то множество $\mathbb{R}_+^N$ является замкнутым инвариантным невырожденным конусом оператора $\tilde{A}$, и наше утверждение следует из леммы 3.

2) Напомним, что согласно нашим обозначениям $\bar{y} = (\tilde{A}y^p)^{1/p}$. Так как $y^p = x$ и, кроме того, $\tilde{A}x = \rho(\tilde{A})x$, то $\bar{y} = \rho(\tilde{A})^{1/p}y$. Следовательно, $\hat{a}_{\bar{y}} = \rho(\tilde{A})^{1/p}\hat{a}_y$. Итак, $z(\hat{a}_y) = M_y$, $z(\hat{a}_{\bar{y}}) = \rho(\tilde{A})^{1/p}M_y$. Подставив в следствие леммы 19 M_y и $\rho(\tilde{A})^{1/p}M_y$ вместо $z(\hat{a}_x)$ и $z(\hat{a}_{\bar{x}})$ соответственно, получим требуемое неравенство.

- 3) Если обозначить

$$\rho(\tilde{A})^{1/p} = \lambda, \quad \|A\| \left(\frac{k^p \gamma_d}{\gamma(d, p)} \right)^{1/p} \delta = \varepsilon,$$

то согласно только что доказанному п. 2) имеем $r(\lambda M_y, \bar{A}M_y) \leq \varepsilon \|M_y\|$. Воспользуемся предложением 5:

$$\left| \frac{\lambda - k^{1/p} \hat{\rho}_p}{\lambda} \right| \leq 2\varepsilon h^2(A),$$

т.е. $\left| \frac{\lambda k^{-1/p} - \hat{\rho}_p}{\lambda} \right| k^{1/p} \leq 2\varepsilon h^2(A)$. Предложение доказано.

Подведем итоги. Обозначим

$$C(A, p) = 2 \left(\frac{k^p \gamma_d}{\gamma(d, p)} \right)^{1/p} h^2(A) \|A\|.$$

Пусть нам необходимо оценить p -радиус $\hat{\rho}_p$ неприводимого набора операторов $A = \{A_1, \dots, A_k\}$ с относительной точностью ε , где $\varepsilon \in (0, 1/2)$. Для этого мы выбираем δ -еж для $\delta = \varepsilon/C(A, p)$ и строим для него оператор $\tilde{A} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{N_\delta})$, где

N_δ – число отрезков в δ -еже. После этого находим спектральный радиус $\rho(\tilde{A})$ оператора $\tilde{A}$.

Согласно предложению 6

$$\frac{\left| \left(\frac{\rho(\tilde{A})}{k} \right)^{1/p} - \hat{\rho}_p \right|}{\left(\frac{\rho(\tilde{A})}{k} \right)^{1/p}} \leq \varepsilon$$

и задача решена.

Таким образом, задача нахождения p -радиуса с некоторой относительной точностью сведена к нахождению максимального по модулю собственного значения оператора конечной размерности.

Описание алгоритма и оценка вычислительной сложности. Пусть дан неприводимый набор операторов $A = \{A_1, \dots, A_k\}$, $p \in [1, +\infty)$, $\varepsilon \in (0, 1/2)$ – заданная точность приближения.

Необходимо найти число $\hat{\rho}_p^*$, для которого

$$\frac{|\hat{\rho}_p - \hat{\rho}_p^*|}{\hat{\rho}_p^*} \leq \varepsilon.$$

Мы будем излагать алгоритм по шагам, одновременно оценивая сложность каждого шага.

Мы будем рассматривать операции двух видов:

- 1) арифметические операции;
- 2) операция возведения числа в степень p или $1/p$.

Под сложностью алгоритма мы будем понимать число $N(A, p, \varepsilon)$ – число операций обоих видов, необходимое для реализации алгоритма.

1 шаг. Обозначим $\delta = \frac{\varepsilon}{2C(A, p)}$. Построим δ -еж в пространстве $\mathbb{R}^d$. Один из возможных способов таков: пусть $n = \lceil \sqrt{d-1}/(2\delta) \rceil + 1$. Рассмотрим систему множеств

$$E_i = \left\{ (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid x_i = \pm \frac{1}{2}, \right. \\ \left. 2x_j n \in \{-n, -n+1, \dots, n-1, n\} \text{ при } j = 1, \dots, d \right\}, \quad i = 1, \dots, d.$$

Обозначим $E = \bigcup_i E_i$. Легко видеть, что каждое множество E_i содержит $2(2n+1)^{d-1}$ точек, лежащих на границе единичного куба с центром в нуле. Значит, количество элементов E не превосходит $2d(2n+1)^{d-1}$. Разделив каждый из векторов множества E на удвоенную длину и соединив в один отрезок каждую пару центрально-симметричных векторов, получим набор из не более чем $d(2n+1)^{d-1}$ единичных отрезков с центром в нуле, который обозначим через $\hat{A}$. Тогда $\hat{A}$ является δ -ежом. В самом деле, пусть x – произвольный единичный отрезок с центром в нуле, $(x_1, \dots, x_d)$ – координаты его конца. Не ограничивая общности, мы можем считать, что $x_1 > 0$ и, кроме того, $x_1 = \max_{i=1, \dots, d} |x_i|$.

Пусть $y = \frac{x}{2x_1}$, $y_i = \frac{x_i}{2x_1}$, $i = 1, \dots, d$. Пусть z_i – ближайшее к y_i число из множества $\{\frac{s}{2n}, i = -n, -n+1, \dots, n-1, n\}$ для $i = 2, \dots, d$. Тогда вектор $z = (\frac{1}{2}, z_2, \dots, z_d)$ принадлежит множеству E_1 , а значит, и множеству E , и при этом $\|y - z\| \leq \sqrt{d-1}/(2n)$. Следовательно,

$$\|x - \bar{z}\| \leq \frac{\sqrt{d-1}}{2n} \leq \delta,$$

где $\bar{z} = \frac{z}{2\|z\|} \in \hat{a}$.

Число N_δ отрезков в множестве $\hat{a}$ не превосходит

$$d(2n+1)^{d-1} \leq d \left(\frac{\sqrt{d-1}}{2\delta} + 2 \right)^{d-1} \leq \frac{C_1 d^{(d+1)/2}}{\delta^{d-1}},$$

где C_1 – абсолютная константа. На построение δ -ежа мы должны затратить не более чем $O(d^{(d+1)/2}/\delta^{d-1})$ арифметических операций.

2 шаг. Построим матрицу оператора $\tilde{A}$. У нас имеется kN_δ произведений вида $A_i a^{(j)}$, $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, N_\delta$. Для нахождения каждого из них нужно $O(d^2)$ арифметических операций. После этого каждый вектор $A_i a^{(j)}$ нужно поделить на его длину l_{ij} ($O(d)$ операций), получив вектор n_{ij} , для которого необходимо найти ближайший элемент нашего δ -ежа $\hat{a}$ (на это уйдет не более чем $(d-1) \ln 2n$ операций сравнения, т.е. $O(d^{3/2}/\delta)$ операций). Для всех пар $A_i a^{(j)}$ получаем $O(kN_\delta(d^2 + d + d^{3/2}/\delta))$ операций. После этого необходимо провести не более $kN_\delta = O(kd^{(d+1)/2}/\delta^{d-1})$ операций возведения в степень p и $1/p$. Всего на построение матрицы $\tilde{A}$ необходимо не более $O(kd^{(d+5)/2}/\delta^d)$ операций.

3 шаг. Найдем $\rho(\tilde{A})$. Задача сводится к нахождению с точностью $\varepsilon/2$ спектрального радиуса несимметричной матрицы $N_\delta \times N_\delta$ с неотрицательными элементами. Матрица $\tilde{A}$ разрежена (в каждом столбце не более k ненулевых элементов). Алгоритмы решения частичной проблемы собственных значений для таких матриц изложены в [8].

Верхняя оценка сложности этих алгоритмов:

$$O \left(k^2 N_\delta^2 \ln \frac{1}{\varepsilon} \right) = O \left(\frac{k^2 d^{d+1}}{\varepsilon^{2d-2}} C^2(A, p) \ln \frac{1}{\varepsilon} \right)$$

операций.

Остается положить $\hat{\rho}_p = \left(\frac{\rho(\tilde{A})}{k} \right)^{1/p}$, и задача решена.

Складывая число операций по всем шагам, получим оценку сложности алгоритма:

$$N(A, p, \varepsilon) \leq O \left(\varepsilon^{2-2d} k^2 d^{d+1} C^2(A, p) \ln \frac{1}{\varepsilon} \right)$$

операций. В частности, при $d = 2$ сложность такова:

$$N(A, p, \varepsilon) \leq O \left(\frac{k^2 C^2(A, p) \ln \frac{1}{\varepsilon}}{\varepsilon^2} \right).$$

Оценка сложности алгоритма закончена.

В заключение хочу выразить благодарность доктору физ.-матем. наук С. В. Корягину за постоянное неформальное внимание к данной работе, а также профессору Е. П. Горину за множество ценных замечаний.

Список литературы

1. *Rota G.C., Strang G.* A note on the joint spectral radius // Kon. Nederl. Acad. Wet. Prok. 1960. V. 63. P. 379–381.
2. *Berger M.A., Wang Y.* Bounded semi-groups of matrices // Lin. Alg. Appl. 1992. V. 166. P. 21–27.
3. *Collela D., Heil G.* Characterizations of scaling functions. I. Continuous solutions // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 1994. V. 15. P. 496–518.
4. *Протасов В.Ю.* Совместный спектральный радиус и инвариантные множества линейных операторов // Фундаментальная и прикладная математика. 1996. Т. 2. № 1. С. 205–231.
5. *Lau K.S., Wang J.* Characterization of L_p -solutions for two-scale dilations equations // SIAM J. Math. Anal. 1995. V. 26. P. 1018–1046.
6. *Яблонский С.В.* Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986.
7. *Берже М.* Геометрия. Т. 1. М.: Мир, 1984.
8. *Икрамов Х.Д.* Несимметричная проблема собственных значений. М.: Наука, 1991.
9. *Гельфанд И.М., Райков Д.А., Шилов Г.Е.* Коммутативные нормированные кольца. М.: Физматгиз, 1960.
10. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1971.
11. *Frobenius G.* Über Matrizen aus positiven elementen // S.-B. Press Akad. Wiss Berlin. 1909. P. 514–518.
12. *Firey W.J.* Some means of convex bodies // Trans. Amer. Math. Soc. 1967. V. 129. P. 181–217.

Поступило в редакцию
28.V.1996