Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. М. Сиражудинов, Краевые задачи для общих эллиптических систем на плоскости, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1997, том 61, выпуск 5, 137–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/im162>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 03:55:23

УДК 517.95

М. М. Сиражудинов

Краевые задачи для общих эллиптических систем на плоскости

Рассматриваются краевые задачи для общих эллиптических систем в ограниченной многосвязной области плоскости с гладкой границей. Сюда включаются краевые задачи как для однородных эллиптических систем, так и для систем эллиптических по Петровскому, Дуглису–Ниренбергу. Рассматриваемые системы не обязательно правильно эллиптические. Даются необходимые и достаточные условия нетеровости задачи, формулы для индекса, применения в геометрии и гидродинамике.

Библиография: 18 наименований.

Введение

Краевым задачам в областях с гладкой границей посвящены многочисленные исследования (см. [1]–[7] и имеющуюся там литературу). Для общих однородных систем с постоянными коэффициентами А. П. Солдатовым [5] получены законченные, в смысле нетеровости и формул для индекса, результаты. Столь же законченный характер имеют результаты для таких же систем с переменными действительными коэффициентами, полученные А. И. Вольпертом [3] в односвязных областях. Метод, применяемый в данной работе, хотя и имеет некоторые пересечения с ранее известными, является новым. Он позволил нам получить достаточно простые условия, необходимые и достаточные для нетеровости общих краевых задач и, что немаловажно, удобные для применений формулы для индекса. При этом ни порядок связности области, ни постоянство коэффициентов или их вещественность, ни правильная эллиптичность системы не играют роли.

В каждом параграфе, начиная со второго, сначала рассматривается $\mathbb{R}$ -линейная задача вида

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x, \mathcal{D})v &= f \in \mathcal{X}(Q), & v &\in \mathcal{Z}(Q), \\ \operatorname{Re}(\mathcal{B}(x, \mathcal{D})v) &= \varphi \in \mathcal{Y}(\partial Q),\end{aligned}\tag{0.1}$$

где Re – знак реальной части, $\mathcal{L}(x, \mathcal{D})v = f$ – эллиптическая система. Получены необходимые и достаточные условия для нетеровости задачи и формулы для индекса. Затем мы распространяем полученные результаты на $\mathbb{C}$ -линейные задачи для правильно эллиптических систем и, в частности, на задачи с действительными коэффициентами:

$$\mathcal{L}(x, \mathcal{D})v = f \in \mathcal{X}(Q), \quad \mathcal{B}(x, \mathcal{D})v = \varphi \in \mathcal{Y}(\partial Q).\tag{0.2}$$

Как известно [7], для нетеровости задачи (0.2) необходимо и достаточно выполнения условия дополнителности (условия Шапиро–Лопатинского). Наше условие эквивалентно последнему.

В §1 собраны вспомогательные результаты. В п.1 получено одно разложение эллиптической матрицы, которое используется на протяжении всей работы при получении критерия нетеровости и формулы для индекса. В пп. 2, 3 исследована краевая задача Римана–Гильберта (Р–Г) для систем с комплексными коэффициентами. В последнем пункте дается одно представление функций через производные.

В §2 изучена краевая задача Пуанкаре для систем, главная часть которых однородна (однородная система). В п.1 мы имеем дело с $\mathbb{R}$ -линейной задачей (0.1) (теорема 2, следствие 2). В п.2 исследуется задача типа (0.2) (теорема 3). В связи с краевыми условиями конкретного вида возникает вопрос: для каждой ли эллиптической системы можно подобрать краевые условия так, чтобы задача была нетеровой? В общем случае ответ на вопрос отрицательный; подтверждением этому служит задача Дирихле для системы второго порядка (см. [1]). В случае задачи Пуанкаре ответ положительный (следствия 2, 3). В последнем пункте рассмотрены задачи с младшими членами.

В §3 изучены краевые задачи для однородной системы при условии, что максимальный из порядков граничных условий l меньше порядка r системы. Случай равенства всех порядков l рассмотрен в теореме 5 для задачи (0.1) и в первой части теоремы 7 для задачи (0.2). В теореме 4 и во второй части теоремы 7 изучены смешанные задачи, когда на различных частях границы (подробнее см. пп. 2, 3 §3) даются условия разных порядков. Если мы хотим остаться в классе нетеровых задач, эти порядки нельзя задавать произвольно (следствие 5).

В §4 изучены задачи, для которых $l \geq r$ (теоремы 8, 9). В п.3 §4 приводится алгоритм, реализация которого дает индекс краевых задач из §2–4. В п.4 решены некоторые задачи, поставленные И. Н. Векуа [2, с. 287–289] в связи с вопросами жесткости поверхностей. §5 посвящен краевым задачам для систем Дуглиса–Ниренберга. Дается алгоритм нахождения индекса, пользуясь которым в §6 изучены новые краевые задачи для системы Стокса.

В общем случае формулы для индекса, естественно, зависят от коэффициентов как граничных условий, так и уравнений. Но есть один класс задач, в формулах для индекса которых участвуют только граничные коэффициенты. Это задачи для систем, корни характеристических полиномов которых расположены либо все в верхней полуплоскости, либо все в нижней (см. следствия 1, 2, 7–10, хотя в 8-м и 10-м из них все же коэффициенты уравнений присутствуют, но не в той мере, как в общем случае).

Пространства, над которыми рассматриваются краевые задачи, это пространства Соболева или Гёльдера.

Отметим некоторые понятия и обозначения, которые используются в дальнейшем. Область Q – ограниченная область с гладкой границей, состоящей из попарно непересекающихся связных контуров $\Gamma_0, \dots, \Gamma_m$, причем Γ_0 содержит внутри себя остальные. Кроме того, контуры $\Gamma_0, \dots, \Gamma_m$ замкнутые; $m+1$ – порядок связности области. Пусть X – банахово пространство и $X^k = X \times \dots \times X$ – произведение с

обычной нормой

$$\|u\| = \sum_i \|u_i\|, \quad u = (u_1, \dots, u_k).$$

В записи X^k мы часто опускаем k . Именно в таком смысле следует понимать фразы: “вектор-функция u принадлежит X ”, “пространство вектор-функций X ”. Пространства, над которыми рассматриваются краевые задачи, это пространства Соболева $W_p^k(Q)$, $W_p^{k-1/p}(\partial Q)$ или Гёльдера $C_\alpha^k(Q)$, $C_\alpha^k(\partial Q)$ вектор-функций.

Пусть функция $\tau(x)$ не равна 0, $x \in \partial Q$. Индексом τ ($\text{ind } \tau$, $\text{ind } |_{\partial Q} \tau$) называется деленное на 2π приращение $\arg \tau$ при одном полном обходе ∂Q , оставляющем область слева. Аналогичный смысл имеет и $\text{ind } |_L \tau$, где L – часть границы. Под оператором краевой задачи (0.1) (аналогично (0.2)), где $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ – некоторые пространства вектор-функций, как обычно, имеем в виду оператор $\mathcal{A}: \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, определенный формулой $\mathcal{A}u = (\mathcal{L}u, \text{Re}(\mathcal{B}u))$. Многие понятия (индекс, ядро и пр.) мы переносим с оператора на задачу. Через $\mathcal{D}$ обозначаем $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$, $\mathcal{D}_j = \partial/\partial x_j$, $j = 1, 2$. Точку области Q обозначаем через $x = (x_1, x_2)$. Пусть $\mathcal{L}(x, \mathcal{D})$ – матрица коэффициентов системы (0.1). Многочлен $\det \mathcal{L}(x, -\lambda, 1) = P(\lambda)$ называем *характеристическим* для системы (0.1). (Знак “–” перед λ поставлен для удобства.)

Разъяснения других понятий и обозначений будут даны по ходу изложения.

§ 1. Вспомогательные результаты

1. Пусть $\mathcal{B} = \mathcal{B}(x)$ – квадратная непрерывная в $\bar{Q}$ эллиптическая матрица (под последним понимается, что мнимые части собственных значений отличны от нуля для любого $x \in \bar{Q}$). И пусть $\mathcal{B}$ – матрица порядка $2k$ с действительными элементами. Тогда имеет место разложение [6]

$$\mathcal{B}(x) = T(x) \text{diag}(\Lambda(x), \bar{\Lambda}(x)) T^{-1}(x), \quad T = (T_1, \bar{T}_1), \quad (1.1)$$

где T и Λ – непрерывные в $\bar{Q}$ матрицы порядка $2k$ и k соответственно. Матрица T состоит из двух $(2k \times k)$ -блоков T_1 и $\bar{T}_1$. (Черта над матрицей означает переход к матрице с комплексно-сопряженными элементами.) Собственные значения Λ расположены в верхней полуплоскости $\text{Im } \lambda > 0$ ($\text{diag}(\Lambda, \bar{\Lambda})$ – блочно-диагональная матрица с блоками Λ и $\bar{\Lambda}$ по диагонали).

Разложение (1.1) неединственно. Для односвязных областей оно было получено в [8] (см. также [9]). Общий случай многосвязных областей рассмотрен нами в [6].

Факторизация вида (1.1) имеет место и в случае непрерывной в $\bar{Q}$ эллиптической матрицы $\mathcal{B}_0$ порядка k без требования вещественности элементов. А именно, справедливо разложение

$$\mathcal{B}_0(x) = T_0(x) \text{diag}(\Lambda_1(x), \Lambda_2(x)) T_0^{-1}(x), \quad T_0 = (T_1, T_2), \quad (1.2)$$

с непрерывными в $\bar{Q}$ составляющими. Причем Λ_1 и Λ_2 – квадратные матрицы порядка k_+ и k_- соответственно, где k_+ – сумма (алгебраических) кратностей собственных значений матрицы $\mathcal{B}_0$ из верхней полуплоскости: $\text{Im } \lambda > 0$, а k_- – из нижней ($k_+ + k_- = k$); k_+ и k_- не зависят от $x \in \bar{Q}$. Спектр $\sigma(\Lambda_1)$ матрицы Λ_1

совпадает с пересечением $o(\mathcal{B}_0) \cap \{\operatorname{Im} \lambda > 0\}$, а $o(\Lambda_2) = o(\mathcal{B}_0) \cap \{\operatorname{Im} \lambda < 0\}$. Матрица T_0 составлена из прямоугольных $(k \times k_+)$ - и $(k \times k_-)$ -блоков T_1 и T_2 . Случаи, когда все собственные значения $\mathcal{B}_0$ расположены в верхней полуплоскости ($k_- = 0$, $k_+ = k$) или в нижней ($k_- = k$, $k_+ = 0$), не исключаются. В первом случае в (1.2) Λ_2 и T_2 отсутствуют, $T_0 = E$ – единичная матрица, $\Lambda_1 = \mathcal{B}_0$, т.е. (1.2) сводится к равенству $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}_0$. То же имеет место и во втором случае. Теперь Λ_1 и T_1 отсутствуют, $T_2 = T_0$ – единичная матрица.

Разложение (1.2) неединственно. Оно доказывается аналогично (1.1) в [6]. Укажем на изменения, которые нужно внести в [6] для получения (1.2). Аналогично [6] из непрерывности собственных значений (в смысле, указанном в [6]) следует существование контура (ограниченного) Γ , внутри которого сосредоточен спектр любой из матриц семейства $\mathcal{A} = \{\mathcal{B}_0(x), x \in \overline{Q}\}$. Собственные значения $\mathcal{B}_0(x)$ отделены прямой $\operatorname{Im} \lambda = 0$. Следовательно, существует гладкий ограниченный контур Γ_+ (Γ_-) из верхней (нижней) полуплоскости, внутри которого расположены все собственные значения семейства $\mathcal{A}$ с $\operatorname{Im} \lambda > 0$ ($\operatorname{Im} \lambda < 0$). Теперь рассмотрим идемпотентные матрицы

$$\mathcal{P}_{\pm}(x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\pm}} (\mathcal{B}_0(x) - \zeta E)^{-1} d\zeta \quad (1.3)$$

или проекторы, действующие в $\mathbb{C}^k$, если на них смотреть как на операторы умножения. (Обход контура в (1.3) против часовой стрелки.) Они непрерывны в $\overline{Q}$ (см. [6]) и $\mathcal{P}_+(x) + \mathcal{P}_-(x)$ – единичная матрица, $\mathcal{P}_+(x)\mathcal{P}_-(x) = 0$. Ранг идемпотентной матрицы равен ее следу. Поэтому в силу непрерывности следа в $\overline{Q}$ матрица $\mathcal{P}_+$ ($\mathcal{P}_-$) имеет фиксированный ранг всюду в $\overline{Q}$. С другой стороны, при $x \in \overline{Q}$ ранг $\mathcal{P}_+(x)$ ($\mathcal{P}_-(x)$) равен k_+ (k_-), следовательно, k_+ и k_- не зависят от $x \in \overline{Q}$. Разложению $E = \mathcal{P}_+ + \mathcal{P}_-$ соответствует разложение $\mathbb{C}^k$ в прямую сумму инвариантных относительно оператора $\mathcal{B}_0: \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^k$ подпространств $C_+(x)$ и $C_-(x)$, $x \in \overline{Q}$, – пространств столбцов матриц $\mathcal{P}_+(x)$ и $\mathcal{P}_-(x)$. Теперь аналогично [6] строим непрерывный базис $C_+(x)$ ($C_-(x)$). Он состоит из k_+ (k_-) векторов, и они составляют столбцы матрицы T_1 (T_2). В случае $k_- = 0$, $k_+ = k$ матрица $\mathcal{P}_-$ отсутствует, а $\mathcal{P}_+$ согласно (1.3) равна E . Поэтому $T_1 = T_0 = E$. Аналогично при $k_- = k$, $k_+ = 0$: $T_2 = T_0 = E$. Свойства, касающиеся спектров Λ_1 и Λ_2 , есть следствие того, что Λ_1 и Λ_2 являются матрицами сужения оператора $\mathcal{B}_0: \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^k$ на инвариантные подпространства C_+ и C_- . Итак, (1.2) доказано.

2. В работе [6] нами изучена краевая задача Р–Г для общих эллиптических систем с действительными коэффициентами в многосвязной области. Здесь рассмотрим следующую задачу Р–Г:

$$\mathbf{a}\mathcal{D}_1 u + \mathbf{b}\mathcal{D}_2 u + \mathbf{c}_1 u + \mathbf{c}_2 \bar{u} = f \in \mathcal{X}(n; Q), \quad (1.4)$$

$$\operatorname{Re}(Gu) = \varphi \in \mathcal{Y}(n; \partial Q), \quad u \in \mathcal{X}(n+1; Q), \quad (1.5)$$

где $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$, G – квадратные матрицы порядка k , элементы которых комплекснозначные функции, причем

$$L(x, \xi) = \det(\mathbf{a}(x)\xi_1 + \mathbf{b}(x)\xi_2) \neq 0, \quad x \in \overline{Q}, \quad \xi \in \mathbb{R}^2 \setminus 0. \quad (1.6)$$

Предполагаем, что выполнено одно из следующих условий.

УСЛОВИЕ (А). Матрицы $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ принадлежат $C^n(Q)$, $G \in C_\gamma^{n+1}(\partial Q)$, граница ∂Q принадлежит C_α^{n+1} , где $0 < \alpha < 1$; $n \geq 0$ – неотрицательное целое; $\gamma = (p-1)/p + \varepsilon$, $p > 1$, $\varepsilon > 0$ – достаточно малое число. Матрицы $\mathbf{c}_1$ и $\mathbf{c}_2$ принадлежат $W_q^n(Q)$, причем $q > p$ при $p > 2$, иначе $q > 2$.

УСЛОВИЕ (В). Матрицы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ принадлежат $C_\alpha^n(\bar{Q})$, $G \in C_\alpha^{n+1}(\partial Q)$, $\partial Q \in C_\alpha^{n+1}$, где α, n такие же, как и в условии (А).

Пространства $\mathcal{X}(s; Q)$, $s = n, n+1$, $\mathcal{Y}(n; \partial Q)$ в (1.4), (1.5) – пространства k -компонентных вектор-функций $W_p^s(Q)$ и $W_p^{n+1-1/p}(\partial Q)$ соответственно в условии (А) и $C_\alpha^s(\bar{Q})$ и $C_\alpha^{n+1}(\partial Q)$ в условии (В). Кроме того, $\mathcal{Y}(n; \partial Q)$ – действительное пространство, а $\mathcal{X}(s; Q)$ – комплексное над полем $\mathbb{R}$. (Точнее, $\mathcal{X}(s; Q)$ – пространство комплекснозначных вектор-функций над $\mathbb{R}$. Это условие требуется для обеспечения линейности оператора задачи Р–Г.) Имеет место

ТЕОРЕМА 1. Для нетеровости задачи Р–Г необходимо и достаточно выполнения условия

$$\det \tau(x) \neq 0 \quad \text{всюду на} \quad \partial Q, \quad (1.7)$$

где $\tau = (\bar{G}\bar{T}_1, GT_2)$ – блочная квадратная матрица порядка k , составленная из $(k \times k_+)$ - и $(k \times k_-)$ -блоков $\bar{G}\bar{T}_1$ и GT_2 , причем $T_0 = (T_1, T_2)$ – матрица из разложения (1.2) эллиптической матрицы¹ $\mathcal{B}_0 = \mathbf{a}^{-1}\mathbf{b}$. При этом индекс задачи дается равенством

$$J = 2\kappa - k(m-1), \quad (1.8)$$

где $\kappa = \text{ind}(\det \tau)$, $m+1$ – порядок связности области.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{B}_0 = \mathbf{a}^{-1}\mathbf{b} = \nu + i\mu$, $u = u_1 + iu_2$, $i^2 = -1$, $\mathbf{a}^{-1}\mathbf{f} = f_1 + if_2$, $G = G_1 + iG_2$, $\mathbf{a}^{-1}\mathbf{c}_j = \varepsilon_j + i\delta_j$. Тогда задача (1.4), (1.5) эквивалентна следующей краевой задаче для эллиптической системы $2k$ уравнений с действительными коэффициентами:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1 v + \mathcal{B}\mathcal{D}_2 v + Cv = F \in \mathcal{X}(n; Q), \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} \nu & -\mu \\ \mu & \nu \end{pmatrix}, \\ G_0 v = \varphi \in \mathcal{Y}(n; \partial Q), \quad v \in \mathcal{X}(n+1; Q), \end{aligned} \quad (1.9)$$

где $v = (u_1, u_2)$, $F = (f_1, f_2)$ – вектор-столбцы; $G_0 = (G_1, -G_2)$, матрица C имеет блочную структуру, аналогичную $\mathcal{B}$, причем эти блоки выражаются через ε_j, δ_j , $j = 1, 2$. Эта задача и исходная нетерова или не нетерова одновременно, причем имеют равные индексы.

Как известно [6], для нетеровости (1.9) необходимо и достаточно выполнения условия: $\det(G_0 \bar{S})(x) \neq 0$ всюду на ∂Q . (В работе [6] мы не подчеркивали необходимость этого условия. Согласно [6] наше условие эквивалентно выполнению условия дополнителности для задачи (1.9), поэтому, если оно нарушено хотя бы в одной точке, задача не будет нетеровой [10].) Здесь $S = T_1$ – матрица из

¹Обратимость матрицы $\mathbf{a}$ следует из условия (1.6).

факторизации (1.1) эллиптической матрицы $\mathcal{B}$, определенной в (1.9). Более того [6], при выполнении указанного условия индекс задачи (1.9) дается формулой $J = 2\kappa - k(m-1)$, где $\kappa = \text{ind}(\det G_0 \bar{S})$. Следовательно, теорема будет доказана, если мы докажем равенство $\det \tau = \det(G_0 \bar{S})$.

С этой целью заметим, что матрицу $\mathcal{B}$ можно представить в виде

$$\mathcal{B} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} E & E \\ -iE & iE \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{B}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{B}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & iE \\ E & -iE \end{pmatrix}. \quad (1.10)$$

Матрица $\mathcal{B}_0$ эллиптическая, поэтому она допускает разложение (1.2). С учетом этого (1.10) можно записать в виде

$$\mathcal{B} = \mathcal{M} \text{diag}(\Lambda_1, \Lambda_2, \bar{\Lambda}_1, \bar{\Lambda}_2) \mathcal{M}^{-1},$$

где

$$\mathcal{M} = 2^{-1} \begin{pmatrix} T_0 & \bar{T}_0 \\ -iT_0 & i\bar{T}_0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}^{-1} = \begin{pmatrix} T_0^{-1} & iT_0^{-1} \\ \bar{T}_0^{-1} & -i\bar{T}_0^{-1} \end{pmatrix}.$$

Это еще не является требуемой факторизацией (1.1). Для получения последней нужно в диагональной матрице переставить блоки Λ_2 и $\bar{\Lambda}_2$. (Напомним, что собственные значения Λ_2 расположены в нижней полуплоскости.) С этой целью умножим ее на матрицу перестановок $\mathcal{N} = \{n_{ij}\}$, $i, j = 1, \dots, 4$, где $n_{11} = n_{33}$ – единичная матрица порядка k_+ ; $n_{24} = n_{42}$ – единичная матрица порядка k_- ; $n_{12} = n_{14} = n_{32} = n_{34}$, $n_{13} = n_{31}$, $n_{21} = n_{24} = n_{41} = n_{43}$, $n_{22} = n_{44}$ – нулевые прямоугольные матрицы размерностей $k_+ \times k_-$, $k_+ \times k_+$, $k_- \times k_+$, $k_- \times k_-$ соответственно. Тогда с учетом $\mathcal{N}^2 = E$ получим

$$\mathcal{B} = (\mathcal{M}\mathcal{N}) \text{diag}(\Lambda_1, \bar{\Lambda}_2, \bar{\Lambda}_1, \Lambda_2) (\mathcal{M}\mathcal{N})^{-1}. \quad (1.11)$$

Если теперь в (1.11) положим $\Lambda = \text{diag}(\Lambda_1, \bar{\Lambda}_2)$, мы получим требуемое разложение (1.1) с $T = \mathcal{M}\mathcal{N}$. Далее, легко видеть, что T представляется в виде

$$T = (S, \bar{S}), \quad \text{где} \quad S = \begin{pmatrix} T_1 & \bar{T}_2 \\ -iT_1 & i\bar{T}_2 \end{pmatrix},$$

так как при умножении $\mathcal{M}$ на $\mathcal{N}$ переставляется последний блочный столбец $\mathcal{M}$ с первым. Следовательно, для $\det(G_0 \bar{S})$ имеем равенство $\det(G_0 \bar{S}) = \det \tau$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть все корни характеристического полинома $P(\lambda) = L(x, -\lambda, 1)$, где L из (1.6), расположены или в верхней полуплоскости, или в нижней. Тогда условие (1.7) переходит в неравенство с $\tau = G$. А в формуле для индекса нужно положить $\tau = \bar{G}$ в первом случае и $\tau = G$ во втором.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это следует из (1.2), если учесть, что $P(\lambda)$ есть характеристический полином матрицы $\mathcal{B}_0$, $P(\lambda) = \det(\mathcal{B}_0 - \lambda E) \det \mathbf{a}$.

Результат следствия согласуется с известным результатом для Δ -аналитических функций [11].

В п. 1 было отмечено, что разложение (1.2) ((1.1)) неединственно. Последнее не влияет на конечный результат, даваемый формулой для индекса, так как индекс есть разность между размерностями ядра и коядра. В этом можно убедиться и непосредственно. Пусть мы имеем еще одно разложение (1.2) матрицы $\mathcal{B}_0 = \mathbf{a}^{-1}\mathbf{b}$ с составляющими $\tilde{T}_0, \tilde{\Lambda}_1, \tilde{\Lambda}_2$. Нетрудно видеть, что $\Lambda_j = A_j \tilde{\Lambda}_j A_j^{-1}$, $j = 1, 2$, где $A_j(x)$ – непрерывная невырождающаяся всюду в $\bar{Q}$ матрица. Это следует из того, что Λ_j и $\tilde{\Lambda}_j$ являются матрицами сужения оператора умножения $\mathcal{B}_0: \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^k$ на одно и то же инвариантное подпространство $C_+(x)$ или $C_-(x)$ из доказательства (1.2). Отсюда следует равенство $\tilde{T}_0 = T_0 \operatorname{diag}(A_1, A_2)$. Если теперь подсчитаем $\varkappa$ из (1.8) сначала для одного разложения, затем для другого, замечаем, что они отличаются друг от друга на сумму индексов определителей матриц $\tilde{A}_1$ и A_2 . Последние равны нулю, так как эти определители непрерывны и отличны от нуля всюду в $\bar{Q}$.

Такое же утверждение, в равной мере, имеет место и для любой краевой задачи, рассматриваемой ниже в данной работе.

3. Краевая задача Р–Г для одной специальной эллиптической системы. Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1 u_1 - \mathcal{D}_2 u_2 &= 0, \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1 u_{r-1} - \mathcal{D}_2 u_r &= 0, \\ \mathcal{D}_1 u_r + \mathbf{a}_1 \mathcal{D}_2 u_1 + \dots + \mathbf{a}_r \mathcal{D}_2 u_r &= f_r \in \mathcal{X}(n; Q), \\ \operatorname{Re}(Gu) &= \varphi \in \mathcal{Y}(n; \partial Q), \quad u \in \mathcal{X}(n+1; Q), \end{aligned} \quad (1.13)$$

где $\mathbf{a}_j$ и G ($j = 1, \dots, r$) – квадратные матрицы порядка k и kr соответственно; f_r, u_j ($j = 1, \dots, r$) – k -компонентные вектор-функции; $u = (u_1, \dots, u_r)$ – искомая; φ – kr -вектор-функция. Условие эллиптичности (1.6) здесь эквивалентно неравенству

$$\det \left(E\xi_1^r + \sum_{j=1}^r \mathbf{a}_j(x) \xi_1^{j-1} \xi_2^{r+1-j} \right) \neq 0, \quad x \in \bar{Q}, \quad \xi \in \mathbb{R}^2 \setminus 0.$$

Предполагаем, что для (1.12), (1.13) выполнено условие (А) или (В) (с $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r$ вместо $\mathbf{a}, \mathbf{b}$). Пространства $\mathcal{X}(s; Q)$, $s = n, n+1$, и $\mathcal{Y}(n; \partial Q)$ – пространства k - и kr -вектор-функций соответственно. Они определены в п. 2.

Пусть $\mathcal{L}$ – оператор краевой задачи (1.12), (1.13). И пусть B – матрица коэффициентов при $\mathcal{D}_2 u$ в (1.12) (при $\mathcal{D}_1 u$ эта матрица единичная). Тогда имеет место

ЛЕММА 1. *Для нетеровости задачи (1.12), (1.13) необходимо и достаточно выполнения неравенства: $\det \tau(x) \neq 0$ всюду на ∂Q , где $\tau = (\bar{G} \bar{T}_1, G T_2)$; $(T_1, T_2) = T_0$ – матрица из факторизации (1.2) эллиптической матрицы B порядка kr . При этом индекс задачи дается равенством $\operatorname{ind} \mathcal{L} = 2\varkappa - kr(m-1)$, $\varkappa = \operatorname{ind}(\det \tau)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим задачу, где вместо нулей в правых частях (1.12) имеем $f_1, \dots, f_{r-1} \in \mathcal{X}(n; Q)$ соответственно (задача А). Согласно теореме 1 для ее нетеровости необходимо и достаточно выполнения условия из леммы. Пусть оно имеет место. Тогда ввиду нетеровости образ оператора $\mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ – оператор задачи А) – замкнутое подпространство пространства $(\mathcal{X}(n; Q))^r \times \mathcal{Y}(n; \partial Q)$. Более того, образ $\text{Im } \mathcal{A}$ представляется в виде

$$\text{Im } \mathcal{A} = \mathcal{X} \times \dots \times \mathcal{X} \times R = \mathcal{X}^{r-1} \times R, \quad (1.14)$$

где R – замкнутое подпространство пространства $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, $\mathcal{X} = \mathcal{X}(n; Q)$, $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}(n; \partial Q)$. Действительно, оператор $\mathcal{A}$ действует из $\mathcal{X}(n+1; Q)$ в произведение $\mathcal{X}^r \times \mathcal{Y}$. Поэтому из замкнутости $\text{Im } \mathcal{A}$ следует равенство $\text{Im } \mathcal{A} = R_1 \times \dots \times R_{r-1} \times R$, где $R_1, \dots, R_{r-1}$ – замкнутые подпространства $\mathcal{X}$. Остается проверить, что $R_j = \mathcal{X}$, $j = 1, \dots, r-1$.

Пусть, например, R_1 не совпадает с $\mathcal{X}$. Тогда существует $f_1 = f_1^0 \in \mathcal{X}$ такой, что задача А неразрешима ни для одного набора правых частей $f_1, f_2, \dots, f_r, \varphi$, $f_1 = f_1^0$. Пусть $\Phi \in \mathcal{X}(n+2; Q)$ – решение задачи Дирихле: $\Delta \Phi = f_1^0$, $\Phi|_{\partial Q} = 0$. (Как известно, последняя разрешима для любой правой части $f_1^0 \in \mathcal{X}$.) Положим $u_1 = \mathcal{D}_1 \Phi$, $u_2 = -\mathcal{D}_2 \Phi$; тогда $\mathcal{D}_1 u_1 - \mathcal{D}_2 u_2 = f_1^0$. Отсюда, очевидно, следует разрешимость задачи А для следующего набора правых частей: $f_1 = f_1^0$, $f_r = \mathbf{a}_1 \mathcal{D}_2 \mathcal{D}_1 \Phi - \mathbf{a}_2 \mathcal{D}_2^2 \Phi$, $\varphi = \text{Re}(Gu)$, $f_j = 0$, $j = 2, \dots, r-1$, где $u = (\mathcal{D}_1 \Phi, -\mathcal{D}_2 \Phi, 0, 0, \dots, 0)$ – решение. Полученное противоречие доказывает совпадение R_1 с $\mathcal{X}$ (аналогично получим $R_j = \mathcal{X}$, $j = 2, \dots, r-1$).

Из (1.14) следует, что ядро сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ имеет следующую структуру: $\text{Ker } \mathcal{A}^* = \mathbf{0} \times \dots \times \mathbf{0} \times R^\perp$, где $\mathbf{0}$ – нуль-подпространство, $R^\perp$ – подпространство функционалов из сопряженного пространства $(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})^*$, которое состоит из функционалов, обращающихся в нуль на R . (Здесь мы воспользовались равенством $\text{Ker } \mathcal{A}^* = (\text{Im } \mathcal{A})^\perp$.) Следовательно, разрешимость задачи А не зависит от правых частей первых $k(r-1)$ уравнений; для ее разрешимости необходимо и достаточно, чтобы (f_r, φ) был “ортogonalен” к любому функционалу из $R^\perp$. Отсюда следует, что дефектные числа операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{L}$ совпадают, кроме того, они имеют одно и то же ядро. Значит, $\text{ind } \mathcal{A} = \text{ind } \mathcal{L}$. (Замкнутость образа $\mathcal{L}$ очевидна.) Поэтому лемма есть следствие теоремы 1, примененной к задаче А.

4. Об одном представлении функций через значения производных.

Пусть Q – $(m+1)$ -связная область плоскости с кусочно-гладкой границей, состоящей из замкнутых контуров $\Gamma_0, \dots, \Gamma_m$, причем $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ содержатся внутри Γ_0 . И пусть u_i^1 , $i = 1, \dots, r$, – k -вектор-функции, принадлежащие $C_\alpha^n(\bar{Q})$ (или $W_p^n(Q)$), $0 \leq \alpha \leq 1$, $n \geq 1$ – натуральное число, $1 < p < +\infty$. Причем в $\bar{Q}$ имеем

$$\mathcal{D}_1 u_i^1 = \mathcal{D}_2 u_{i+1}^1, \quad i = 1, \dots, r-1. \quad (1.15)$$

Рассмотрим в $\bar{Q}$ переопределенную систему

$$\mathcal{D}_2^{r-i} \mathcal{D}_1^{i-1} v = u_i^1, \quad i = 1, \dots, r. \quad (1.16)$$

Требуется определить (однозначные) решения этой системы. (Об условиях на u_i^1 , обеспечивающих однозначность v , мы скажем позже.) Решим задачу следующим

образом. Сначала определим все производные $(r-2)$ -го порядка, затем $(r-3)$ -го и т.д.

Пусть $u_i^1 \in C_\alpha^n(\overline{Q})$; тогда согласно (1.15), (1.16) производные $(r-2)$ -го порядка определяются криволинейными интегралами:

$$\mathcal{D}_2^{r-1-i} \mathcal{D}_1^{i-1} v = c_i^1 + \int_{x_0}^x u_{i+1}^1 dx_1 + u_i^1 dx_2 \stackrel{\text{def}}{=} u_i^2(x), \quad (1.17)$$

$i = 1, \dots, r-1$, где интеграл берется по любой кусочно-гладкой кривой из $\overline{Q}$, соединяющей фиксированную точку $x_0 \in Q$ с точкой $x \in \overline{Q}$; $c_i^1 \in \mathbb{C}^k$ – произвольный числовой вектор.

Если Q – односвязная область, то вектор-функции u_i^2 , определенные равенством (1.17), не зависят от пути интегрирования, т.е. являются однозначными функциями $x \in \overline{Q}$ при фиксированных x_0 и c_i^1 . Для многосвязной области u_i^2 , вообще говоря, многозначные функции. Для того чтобы они были однозначны, как известно, необходимо и достаточно выполнения $km(r-1)$ условий:

$$\int_{\Gamma_j} u_{i+1}^1 dx_1 + u_i^1 dx_2 = 0, \quad i = 1, \dots, r-1, \quad j = 1, \dots, m. \quad (1.18)$$

Теперь предположим, что $u_i^1 \in W_p^n(Q)$ и выполнены условия (1.15), (1.18). Покажем, что криволинейный интеграл в (1.17) не зависит от пути интегрирования. Последнее эквивалентно равенству нулю интеграла

$$J = \int_L u_{i+1}^1 dx_1 + u_i^1 dx_2$$

для любого кусочно-гладкого замкнутого контура L из $\overline{Q}$. А это есть следствие условия (1.15) и формулы Грина, справедливого и для функций из $W_p^n(Q)$. (Обратно: пусть интеграл (1.17) не зависит от пути интегрирования. Тогда $J = 0$ для любого L , в частности имеем (1.18). Кроме того, из $J = 0$ для любого L по формуле Грина получим (1.15).) Итак, условия (1.15), (1.18) необходимы и достаточны для независимости криволинейного интеграла (1.17) от пути интегрирования. Отсюда, как и в классическом случае, легко следует, что $\mathcal{D}_1 u_i^2 = u_{i+1}^1$, $\mathcal{D}_2 u_i^2 = u_i^1$ (при этом надо воспользоваться дифференцируемостью интеграла Лебега по верхнему пределу). Кроме того, $\mathcal{D}_1 u_i^2 = u_{i+1}^1 = \mathcal{D}_2 u_{i+1}^2$, т.е. для u_i^2 выполнены условия вида (1.15). С учетом этого из (1.17) определяем производные $(r-3)$ -го порядка и т.д. Повторяя эти рассуждения $r-1$ раз мы получим следующее выражение для v :

$$v(x) = P(x) + K(u_1^1, \dots, u_r^1; x), \quad x \in \overline{Q}, \quad (1.19)$$

где P – вектор, компоненты которого – полиномы от двух переменных x_1 и x_2 с произвольными комплексными коэффициентами степени не выше $r-2$, а K определяется посредством (повторных) криволинейных интегралов (всего $r-1$ интеграл) от значений производных $(r-1)$ -го порядка от v . Таким образом, доказана

ЛЕММА 2. Для разрешимости в $C_{\alpha}^{r+n-1}(\overline{Q})$ ($W_p^{r+n-1}(Q)$) системы (1.16), где $u_i^1 \in C_{\alpha}^n(0)$ ($\in W_p^n(Q)$), необходимо и достаточно выполнения условий (1.15) и $kmr(r-1)/2$ условий однозначности:

$$\int_{\Gamma_j} u_{i+1}^s dx_1 + u_i^s dx_2 = 0, \quad (1.20)$$

где $j = 1, \dots, m$; $i = 1, \dots, r-s+1$; $s = 1, \dots, r-1$, и

$$u_i^{s+1} = c_i^s + \int_{x_0}^x u_{i+1}^s dx_1 + u_i^s dx_2, \quad c_i^s \in \mathbb{C}^k.$$

При этом решение дается равенством (1.18).

§ 2. Задача Пуанкаре

1. В ограниченной области Q плоскости рассмотрим задачу

$$Av \equiv \sum_{j=1}^{r+1} \mathbf{a}_j \mathcal{D}_2^{r+1-j} \mathcal{D}_1^{j-1} v = f \in \mathcal{X}(n; Q), \quad (2.1)$$

$$\operatorname{Re} \left(\sum_{j=1}^r \mathbf{b}_j \mathcal{D}_2^{r-j} \mathcal{D}_1^{j-1} v \right) = \varphi \in \mathcal{Y}(n; \partial Q), \quad v \in \mathcal{X}(n+1; Q), \quad (2.2)$$

где $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{r+1}$ – непрерывные в $\overline{Q}$ квадратные матрицы порядка k , причем

$$L(x, \xi) = \det \left(\sum_{j=1}^{r+1} \mathbf{a}_j(x) \xi_1^{j-1} \xi_2^{r+1-j} \right) \neq 0, \quad x \in \overline{Q}, \quad \xi \in \mathbb{R}^2 \setminus 0. \quad (2.3)$$

В силу условия эллиптичности (2.3) матрица $\mathbf{a}_{r+1}$ обратима. Поэтому без ограничения общности полагаем $\mathbf{a}_{r+1} = E$ в (2.1); $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r$ – прямоугольные $((kr) \times k)$ -матрицы.

В дальнейшем предполагаем, что выполнено одно из условий:

УСЛОВИЕ (А). Матрицы $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{r+1}$ принадлежат $C^n(\overline{Q})$; матрицы $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r$ принадлежат $C_{\gamma}^{n+1}(\partial Q)$, где $\gamma = (p-1)/p + \varepsilon$, $p > 1$ – любое фиксированное число, $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малое фиксированное, $n \geq 0$ – неотрицательное целое, $\partial Q \in C_{\alpha}^{r+n}$, $0 < \alpha < 1$.

УСЛОВИЕ (В). Матрицы $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{r+1}$ принадлежат $C_{\alpha}^{r+n}(\overline{Q})$; матрицы $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r$ принадлежат $C_{\alpha}^{n+1}(\partial Q)$, $\partial Q \in C_{\alpha}^{r+n}$, где α, n такие же, как и в условии (А).

Пространства $\mathcal{X}(s; Q)$, $s = n, n+r$, и $\mathcal{Y}(n; \partial Q)$ имеют тот же смысл, что и в теореме 1 из § 1. В зависимости от условия (А) или (В) они есть соответствующие пространства Соболева или Гёльдера, причем $\mathcal{X}(s; Q)$ рассматривается над полем $\mathbb{R}$.

Положим $G = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r)$, и пусть T_1, T_2 – матрицы из факторизации (1.2) следующей блочной эллиптической матрицы:

$$B = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{E} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{E} & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & -\mathbf{E} \\ \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \dots & \mathbf{a}_r \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

где $\mathbf{0}$ и $\mathbf{E}$ – нулевая и единичная матрицы порядка k .

Тогда имеет место

ТЕОРЕМА 2. *Для нетеровости задачи (2.1), (2.2) необходимо и достаточно выполнения условия*

$$\det \tau(x) \neq 0 \quad \text{всюду на} \quad \partial Q, \quad (2.5)$$

где $\tau = (\overline{G} \overline{T}_1, G T_2)$ – матрица, составленная из двух блоков. При этом индекс задачи дается равенством

$$\text{ind } \mathcal{A} = 2\kappa - kr^2(m-1), \quad (2.6)$$

где $m+1$ – порядок связности области, r – порядок системы, k – число уравнений, κ – индекс функции $\det \tau$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала покажем, что задача Пуанкаре в смысле нетеровости эквивалентна задаче Р–Г (1.12), (1.13), где $f_r = f$, $G = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r)$, а искомая функция $u = (u_1, \dots, u_r)$ принадлежит подпространству V пространства $\mathcal{X}(n+1; Q)$, определенному равенством

$$V = \{u \in \mathcal{X}(n+1; Q) \mid \text{для } u_i^1 \text{ выполнены условия (1.20)}\} \quad (2.7)$$

(эту задачу в дальнейшем называем *задачей 1*).

Пусть $u \in V$ – решение задачи 1. Тогда ввиду (1.12) вектор $u = (u_1, \dots, u_r)$ удовлетворяет условиям (1.15). Так как $u \in V$, то выполнены и (1.20). Следовательно, по лемме 2 найдется вектор $v \in \mathcal{X}(n+r; Q)$, для которого имеем

$$u = (u_1, \dots, u_r), \quad u_i^1 = \mathcal{D}_2^{r-i} \mathcal{D}_1^{i-1} v, \quad i = 1, \dots, r. \quad (2.8)$$

Внеся u_i^1 из (2.8) в задачу 1, получим, что v есть решение задачи (2.1), (2.2). Обратно, пусть v – решение (2.1), (2.2). Тогда вектор (2.8) согласно лемме 2 дает решение задачи 1. Следовательно, задача 1 и задача Пуанкаре разрешимы для одних и тех же правых частей. Значит, они нормально разрешимы или не разрешимы одновременно, и в случае нормальной разрешимости дефектные числа соответствующих им операторов совпадают.

Покажем теперь, что из конечномерности ядра одного из операторов следует конечномерность другого. Пусть ядро оператора $\mathcal{L}_1$ задачи 1 конечномерное, а ядро оператора $\mathcal{A}$ задачи Пуанкаре бесконечномерное. И пусть $\psi_1, \dots, \psi_q$ – произвольная линейно независимая система (л.н.с.) из ядра $\mathcal{A}$. Можно считать, что

для любого натурального q линейная оболочка $\langle \psi_1, \dots, \psi_q \rangle$ не пересекается с множеством $\mathcal{P} \setminus \{0\}$, где $\mathcal{P}$ – множество всех векторов, компоненты которых есть полиномы по x_1 и x_2 степени не выше $r - 2$. (В противном случае ядро $\mathcal{A}$ совпадает с $\mathcal{P}$ и оно конечномерное.) Положим в (2.8) вместо v последовательно $\psi_1, \dots, \psi_q$ и получим систему векторов $\varphi_1, \dots, \varphi_q$ из ядра $\mathcal{L}_1$. Рассмотрим линейную комбинацию φ последних с коэффициентами $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ и приравняем ее нулю. Тогда из (1.19) с $u = \varphi$ легко следует, что $\alpha_1 \psi_1 + \dots + \alpha_q \psi_q = P$ – полиномиальный вектор. Согласно допущению $\langle \psi_1, \dots, \psi_q \rangle \cap \mathcal{P} = \{0\}$. Значит, $P = 0$ и, следовательно, $\alpha_1 = 0, \dots, \alpha_q = 0$. Таким образом, $\varphi_1, \dots, \varphi_q$ – л.н.с. из ядра $\mathcal{L}_1$. В силу произвольности q это противоречит конечномерности $\text{Ker } \mathcal{L}_1$. Итак, из конечномерности $\text{Ker } \mathcal{L}_1$ следует то же для $\text{Ker } \mathcal{A}$. Аналогично доказывается и обратное.

Итак, $\text{Ker } \mathcal{L}_1$ и $\text{Ker } \mathcal{A}$ конечномерны или не конечномерны одновременно, и в случае конечномерности имеем

$$\dim \text{Ker } \mathcal{A} = \dim \text{Ker } \mathcal{L}_1 + kr(r - 1).$$

Второе слагаемое здесь – это размерность пространства “полиномов” $\mathcal{P}$ над полем $\mathbb{R}$. (Напомним, что $\mathcal{A}$ и $\mathcal{L}_1$ у нас $\mathbb{R}$ -линейные операторы.) Ровно столько “лишних” решений согласно лемме 2 появятся у однородной задачи Пуанкаре при переходе к ней от задачи 1.

Таким образом, задача Пуанкаре и задача 1 нетеровы или не нетеровы одновременно, и в случае нетеровости

$$\text{ind } \mathcal{A} = \text{ind } \mathcal{L}_1 + kr(r - 1). \quad (*)$$

Теперь изучим оператор $\mathcal{L}_1$. Пусть $J: V \rightarrow \mathcal{X}(n + 1; Q)$ – оператор вложения замкнутого подпространства V в $\mathcal{X}$. Очевидно, он нетеров с тривиальным ядром и размерностью коядра $\mathcal{X}/V$, равной $kmr(r - 1)$ (именно столько линейно независимых над $\mathbb{R}$ условий определяют V). Тогда $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}J$, где $\mathcal{L}$ – оператор краевой задачи Р–Г (1.12), (1.13). Значит, $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}$ нетеровы или не нетеровы одновременно. При этом

$$\text{ind } \mathcal{L}_1 = \text{ind } \mathcal{L} + \text{ind } J = \text{ind } \mathcal{L} - kmr(r - 1).$$

Отсюда согласно доказанному выше получим: операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{L}$ эквивалентны в смысле нетеровости. Следовательно, согласно лемме 1 условие (2.5) необходимо и достаточно для нетеровости задачи Пуанкаре. Кроме того, с учетом леммы 1 из формулы (*) и предыдущего равенства для индекса $\mathcal{L}_1$ получим (2.6). Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть все корни многочлена $P(\lambda) = \det \left(\sum_j \mathbf{a}_j (-\lambda)^j \right)$ расположены либо в верхней полуплоскости, либо в нижней. Тогда для нетеровости задачи (2.1), (2.2) необходимо и достаточно, чтобы $\det G(x) \neq 0$ всюду на ∂Q . При этом индекс дается равенством

$$\text{ind } \mathcal{A} = \pm 2 \text{ind}(\det G) - kr^2(m - 1),$$

где знак “–” – соответствует случаю верхней полуплоскости, а знак “+” – нижней.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это есть следствие того, что $P(\lambda)$ – характеристический полином матрицы (2.4) и равенства (1.2).

2. Задача Пуанкаре для правильно эллиптических систем. Сначала рассмотрим следующую задачу Р–Г:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}\mathcal{D}_1 u + \mathbf{b}\mathcal{D}_2 u + \mathbf{c}u &= f \in \mathcal{X}(n; Q), \\ G_0 u &= \varphi \in \mathcal{Y}(n; \partial Q), \quad u \in \mathcal{X}(n+1; Q), \end{aligned} \quad (2.9)$$

где $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ – квадратные матрицы порядка $2k$, G_0 – прямоугольная $(k \times 2k)$ -матрица. Все остальные предположения п. 2 §1 сохраняем. Пространства $\mathcal{Y}(n; \partial Q)$, $\mathcal{X}(s; Q)$ “такие же”, как там, но теперь они – пространства комплексных вектор-функций над $\mathbb{C}$.

Пусть ровно k_+ корней многочлена $P(\lambda) = \det(\mathbf{a}^{-1}\mathbf{b} - \lambda E)$ (с учетом кратности) расположены выше прямой $\text{Im } \lambda = 0$, а k_- – ниже, $k_+ + k_- = 2k$. Из теории эллиптических систем известно, что для нетеровости эллиптической задачи необходима правильная эллиптичность системы (для (2.9) это значит, что $k_+ = k_-$). Опираясь на разложение (1.2), дадим простое доказательство этого факта. От $\mathbb{C}$ -линейной задачи (2.9) перейдем к $\mathbb{R}$ -линейной (1.4), (1.5) для системы $2k$ уравнений. Для этого граничное условие (2.9) достаточно представить в виде

$$\text{Re}(G_0 u) = \varphi_1, \quad \text{Re}(-iG_0 u) = \varphi_2,$$

где $\varphi_1 + i\varphi_2 = \varphi$. При этом обе задачи эквивалентны в смысле нетеровости, и в случае нетеровости индекс второй в два раза больше первой. Матрица G из (1.5) теперь составлена из двух блоков: G_0 и $-iG_0$, расположенных сверху вниз. Матрица τ из теоремы 1 здесь следующего вида:

$$\tau = \begin{pmatrix} \overline{G_0 T_1} & G_0 T_2 \\ i\overline{G_0 T_1} & -iG_0 T_2 \end{pmatrix},$$

где $T_0 = (T_1, T_2)$ – матрица из разложения (1.2) матрицы $\mathbf{a}^{-1}\mathbf{b}$ порядка $2k$. Отсюда имеем

$$\det \tau = \det \begin{pmatrix} \overline{G_0 T_1} & G_0 T_2 \\ \mathbf{0} & -2iG_0 T_2 \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Если $k_+ \neq k_-$, то $\overline{G_0 T_1}$ и $G_0 T_2$ – прямоугольные матрицы. Следовательно, $\det \tau(x) = 0$ всюду на ∂Q . Таким образом, условие (1.7) нарушено, поэтому (1.4), (1.5), а вместе с ней и задача (2.9) не нетерова.

Пусть теперь $k_+ = k_-$ (правильная эллиптичность). Тогда имеет место

ТЕОРЕМА 3. *Для нетеровости задачи (2.9) необходимо и достаточно выполнения условия $\det(\tau_1(x)\tau_2(x)) \neq 0$ всюду на ∂Q , где $\tau_1 = \overline{G_0 T_1}$, $\tau_2 = G_0 T_2$. При этом индекс задачи дается равенством $J = \kappa_1 + \kappa_2 - k(m-1)$, где $\kappa_j = \text{ind}(\det \tau_j)$, $j = 1, 2$.*

Эта теорема есть следствие теоремы 1, равенства (2.10) и предыдущих замечаний.

В случае действительных коэффициентов $\kappa_1 = \kappa_2$ (см. (1.1)).

Не следует думать, что для неправильно эллиптической системы нет хорошо поставленной задачи. Подтверждение тому – теорема 1. (В последней нет ограничения на k_+ и k_- .) Здесь нет противоречия, так как в теореме 1 мы имеем $\mathbb{R}$ -линейную задачу.

Теперь рассмотрим для системы (2.1), для которой $kr = 2s$ – число четное, краевую задачу со следующим условием на границе:

$$\sum_{j=1}^r \mathbf{b}_j \mathcal{D}_2^{r-j} \mathcal{D}_1^{j-1} v = \varphi \in \mathcal{Y}(n; \partial Q), \quad (2.11)$$

где $\mathbf{b}_j$, $j = 1, \dots, r$, – прямоугольные $(s \times k)$ -матрицы. Все предположения и обозначения п. 1 сохраним без изменения, кроме предположений о пространствах: они теперь являются пространствами комплексных вектор-функций над полем $\mathbb{C}$. Имеет место

ТЕОРЕМА 4. *Задача (2.1), (2.11) нетерова тогда и только тогда, когда система (2.1) правильно эллиптическая и выполнено условие: $\det(\tau_1(x)\tau_2(x)) \neq 0$ всюду на ∂Q , где $\tau_1 = \overline{G}T_1$, $\tau_2 = GT_2$. (Матрицы G , T_1 , T_2 определяются так же, как и в теореме 2.) При этом индекс задачи дается формулой*

$$J = \varkappa_1 + \varkappa_2 - \frac{kr^2}{2}(m-1), \quad (2.12)$$

где $\varkappa_j$ – индекс функции $\det \tau_j$, $j = 1, 2$; $m+1$ – порядок связности области.

Теорема доказывается аналогично предыдущей с привлечением теоремы 2. По этому подробности опускаем.

(Напомним понятие правильной эллиптичности. Пусть $P(\lambda) = L(x, -\lambda, 1)$ (см. (2.3)) – характеристический многочлен системы (2.1). Правильная эллиптичность (2.1) означает, что корни $P(\lambda)$ (с учетом кратности) расположены поровну в верхней и нижней полуплоскостях. Отсюда следует, что степень полинома $P(\lambda)$, т.е. kr , – число четное.)

Пусть (2.1), (2.12) – краевая задача с действительными коэффициентами. При этом все пространства, участвующие в задаче, естественней считать вещественными. В данном случае система (2.1) автоматически правильно эллиптическая. Действительно, это, очевидно, есть следствие условия (2.3) и вещественности коэффициентов многочлена $P(\lambda)$. Комплексификацией пространств и оператора задачи (2.1), (2.11) сведем последнюю к такой же задаче над комплексными пространствами. Оператор, полученный комплексификацией, и исходный нетеровы или не нетеровы одновременно, причем имеют один и тот же индекс. С учетом этого и того, что $T_2 = \overline{T}_1$ (см. (1.1)), из теоремы 4 получим: задача (2.1), (2.11) с действительными коэффициентами нетерова лишь тогда, когда $\det \tau(x) \neq 0$ всюду на ∂Q , где $\tau = G\overline{T}_1$. При этом индекс дается равенством (2.12), где $\varkappa_1 = \varkappa_2 = \text{ind}(\det \tau) = \varkappa$.

3. В связи с задачей Пуанкаре возникает вопрос: для всякой ли эллиптической системы можно указать краевые условия так, чтобы задача была нетеровой или фредгольмовой? Ответ на этот вопрос мы дадим для систем с действительными коэффициентами. (Последнее несущественно. Система с комплексными коэффициентами овеществлением сводится к рассматриваемой.)

СЛЕДСТВИЕ 3. Для каждой эллиптической системы (2.1) с действительными коэффициентами существует нетеровая краевая задача (2.1), (2.11) с любым наперед заданным индексом $J = 2\kappa - kr^2(m-1)/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbf{a}$ – любая достаточно гладкая квадратная матрица порядка $kr/2$ на ∂Q такая, что $\det \mathbf{a}(t) \neq 0$ ($t \in \partial Q$). В качестве $\mathbf{a}$ можно взять, например:

$$\mathbf{a}(t) = \text{diag}((t - t_0)^\kappa, 1, 1, \dots, 1),$$

где κ – любое целое, $t_0 = t_1^0 + it_2^0$ – фиксированная точка, $t_0 \in Q$, $i^2 = -1$. И пусть матрицы $\mathbf{b}_j$ в (2.11) такие, что соответствующая им матрица $G = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r)$ представляется в виде $G = 2 \operatorname{Re}((\bar{\mathbf{a}}, \mathbf{0})T_\rho^{-1})$, где $(\bar{\mathbf{a}}, \mathbf{0})$ – блочная $((kr/2) \times kr)$ -матрица, $\mathbf{0}$ – нулевой блок, T_ρ – гладкая невырождающаяся в $\bar{Q}$ матрица, равномерно сходящаяся к T в $\bar{Q}$ при $\rho \rightarrow 0$. Здесь T – матрица из (1.1) для матрицы (2.4). Для достаточно малого фиксированного $\rho > 0$ имеем (см. [6])

$$\kappa = \operatorname{ind}(\det G\bar{T}_1) = \operatorname{ind}(\det \mathbf{a}).$$

Следствие доказано.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть либо m нечетное, либо порядок системы r – число четное, либо число уравнений кратно четырем. Тогда для каждой такой системы (в частности, для любой системы второго порядка) существуют фредгольмовые краевые задачи (2.1), (2.11).

Это следует из следствия 3, если взять $\mathbf{a}$ таким, что $\kappa = kr^2(m-1)/4$.

4. О задаче Пуанкаре с младшими членами. Пусть мы имеем задачу (2.1), (2.2), где в уравнении (2.1) имеем еще одно слагаемое:

$$A_1 v = \sum_{s=1}^{r-1} \sum_{j=1}^s (\mathbf{a}_{js} \mathcal{D}_2^{s-j} \mathcal{D}_1^{j-1} v + \mathbf{c}_{js} \mathcal{D}_2^{s-j} \mathcal{D}_1^{j-1} \bar{v}),$$

а в краевом условии

$$B_1 v = \operatorname{Re} \left(\sum_{s=1}^{r-2} \sum_{j=1}^s \mathbf{b}_{js} \mathcal{D}_2^{s-j} \mathcal{D}_1^{j-1} v \right),$$

или аналогичную задачу для правильно эллиптической системы (при этом $\mathbf{c}_{js} = \mathbf{0}$ и знак “Re” отсутствует). Предположим, что в условии (A) матрицы $\mathbf{a}_{js}$, $\mathbf{c}_{js}$ принадлежат $W_q^n(Q)$ ($q > p$ при $p > 2$ и $q > 2$ при $1 < p \leq 2$), $\mathbf{b}_{js} \in C_\gamma^{n+1}(\partial Q)$; в условии (B) $\mathbf{a}_{js}, \mathbf{c}_{js} \in C_\alpha^n(\bar{Q})$ и $\mathbf{b}_{js} \in C_\alpha^{n+1}(\partial Q)$. Тогда (A_1, B_1) образует вполне

непрерывную добавку к оператору краевой задачи без младших членов. Следовательно, задача с младшими членами нетерова, если таковой является задача без A_1v, B_1v (и обратно) и в случае нетеровости имеет тот же индекс.

Задача Пуанкаре для общих эллиптических систем с действительными коэффициентами в односвязной области изучена А. И. Вольпертом [3]. Для систем с постоянными коэффициентами задача изучена в [5] А. П. Солдатовым, при этом порядок связности не играет роли.

Как известно (см. [7], [10]), краевая задача для правильно эллиптической системы нетерова в точности тогда, когда выполнено условие дополнителности. Поэтому наше условие и условие дополнителности эквивалентны.

§ 3. Краевые задачи l -го порядка, $l < r$

1. Для эллиптической системы (2.1) рассмотрим краевую задачу:

$$Av = f \in \mathcal{X}(n; Q), \quad v \in \mathcal{X}(n+r; Q), \quad (3.1)$$

$$\operatorname{Re} \left(\sum_{j=1}^{l+1} \mathbf{b}_j^0 \mathcal{D}_2^{l+1-j} \mathcal{D}_1^{j-1} v \right) = \varphi \in \mathcal{Y}(n+r-l-1; \partial Q). \quad (3.2)$$

Все предположения и обозначения п. 1 § 2 сохраняем, за исключением условий на коэффициенты. В условии (А) полагаем $\mathbf{b}_1^0, \dots, \mathbf{b}_{l+1}^0 \in C_\gamma^{r-l+n}(\partial Q)$, а в условии (В) $\mathbf{b}_1^0, \dots, \mathbf{b}_{l+1}^0 \in C_\alpha^{r-l+n}(\partial Q)$.

Пусть G_0 – квадратная матрица порядка kr , определенная равенством $G_0 = (\mathbf{b}_1^0, \dots, \mathbf{b}_{l+1}^0, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})$, где $\mathbf{0}$ – нулевая $((kr) \times k)$ -матрица, причем нулевые блоки заполняют последние $r-l-1$ места. И пусть $T_0 = (T_1, T_2)$ – квадратная матрица порядка kr из разложения (1.2) эллиптической матрицы (2.4). Тогда имеет место

ТЕОРЕМА 5. *Условие: $\det \tau_0(x) \neq 0$ всюду на ∂Q , где $\tau_0 = (\overline{G_0} \overline{T_1}, G_0 T_2)$, необходимо и достаточно для нетеровости задачи (3.1), (3.2). При этом индекс задачи дается равенством*

$$J = 2\kappa_0 - kr(2l+2-r)(m-1), \quad (3.3)$$

где κ_0 – индекс функции $\det \tau_0(x)$, k, r, m – те же, что и в теореме 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{N}: \mathcal{Y}(q; \partial Q) \rightarrow \mathcal{Y}(n; \partial Q)$ – оператор, действующий на сужение $v|_{\partial Q}$ по формуле

$$\mathcal{N}v|_{\partial Q} = \left(\frac{d^q}{ds^q} v|_{\Gamma_0}, \dots, \frac{d^q}{ds^q} v|_{\Gamma_m} \right), \quad q = r-l-1, \quad (3.4)$$

где $\Gamma_0, \dots, \Gamma_m$ – связные компоненты границы ∂Q , d/ds – дифференцирование по дуге при естественной параметризации Γ_j . И пусть $L: \mathcal{X}(n; Q) \times \mathcal{Y}(n+q; \partial Q) \rightarrow \mathcal{X}(n; Q) \times \mathcal{Y}(n; \partial Q)$ – оператор, определенный формулой

$$Lw = (\mathcal{E}u, \mathcal{N}v|_{\partial Q}), \quad w = (u, v) \in \mathcal{X}(n; Q) \times \mathcal{Y}(n+q; \partial Q),$$

где $\mathcal{E}$ – тождественный оператор. Оператор L фредгольмовый, т.е. $\text{ind } L = 0$. Это следует из того, что “сужение” $\mathcal{N}$ на Γ_j по сути есть оператор периодической задачи на прямой, который, как известно, фредгольмовый.

Рассмотрим теперь оператор $\mathcal{A}_0 = L\mathcal{A}$, действующий из $\mathcal{X}(n+r; Q)$ в $\mathcal{X}(n; Q) \times \mathcal{Y}(n; \partial Q)$, где $\mathcal{A}$ – оператор задачи (3.1), (3.2). Так как L фредгольмовый, операторы $\mathcal{A}_0$ и $\mathcal{A}$ эквивалентны в смысле нетеровости, причем в случае нетеровости $\text{ind } \mathcal{A}_0 = \text{ind } \mathcal{A}$. После действия оператора L порядки старших членов в краевых условиях (3.2) становятся равными $r-1$. Следовательно, оператор $\mathcal{A}_0$ есть оператор краевой задачи для системы (3.1) с краевым условием

$$\text{Re} \left(\sum_{j=1}^{l+1} \mathbf{b}_j^0 \left(\sum_{i=0}^q \binom{q}{i} \dot{x}_2^{q-i} \dot{x}_1^i \mathcal{D}_2^{q-i} \mathcal{D}_1^i \right) \mathcal{D}_2^{l-j+1} \mathcal{D}_1^{j-1} v + B_1 v \right) = \varphi, \quad (3.5)$$

где $\dot{x}_j = dx_j/ds$, $\binom{q}{i} = q! / i! (q-i)!$, $B_1 v$ – младшие члены. Мы здесь учли, что $d/ds = \dot{x}_2 \mathcal{D}_2 + \dot{x}_1 \mathcal{D}_1$. Иначе говоря, $\mathcal{A}_0$ есть оператор краевой задачи Пуанкаре с младшими членами. Согласно п. 4 § 2 последние можно опустить: они не влияют на нетеровость и индекс задачи. С учетом этого запишем (3.5) в виде (2.2), где

$$\mathbf{b}_j = \sum_{i=0}^{j-1} \binom{q}{i} \dot{x}_2^{q-i} \dot{x}_1^i \mathbf{b}_{j-i}^0, \quad j = 1, \dots, r, \quad (3.6)$$

причем здесь положено $\mathbf{b}_j^0 = \mathbf{0}$, $j = l+2, \dots, r$. Следовательно, для нетеровости полученной задачи Пуанкаре и вместе с ней исходной необходимо и достаточно выполнения условия (2.5). При выполнении его индекс оператора $\mathcal{A}_0$, значит, и оператора $\mathcal{A}$ дается равенством (2.6). Остается проверить, что (2.5) эквивалентно условию из теоремы и что (2.6) преобразуется в (3.3).

С этой целью заметим следующее. Пусть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ – первые верхние $(k \times (kr)_+)$ - и $(k \times (kr)_-)$ -блоки матриц T_1 и T_2 из разложения (1.2) эллиптической матрицы (2.4). (Заметим, что последняя порядка kr , поэтому в (1.2) k , k_+ , k_- заменяем на kr , $(kr)_+$, $(kr)_-$.) Тогда последующими (сверху вниз) блоками, тех же размерностей, будут $-\mathbf{a}\Lambda_1$, $\mathbf{a}\Lambda_1^2, \dots, (-1)^{r-1} \mathbf{a}\Lambda_1^{r-1}$ (то же и для T_2 , с $\mathbf{b}$, Λ_2 вместо $\mathbf{a}$, Λ_1). Это следует из сравнения соответствующих блоков слева и справа в равенстве $BT_0 = T_0 \text{diag}(\Lambda_1, \Lambda_2)$ (см. (1.2)) после умножений. С учетом отмеченной структуры матрицы T_0 и равенств (3.6) легко получим

$$\begin{aligned} \tau &= (\overline{G} \overline{T}_1, GT_2) = (\overline{G}_0 \overline{T}_1, G_0 T_2) \text{diag}((\dot{x}_2 E_1 - \dot{x}_1 \bar{\Lambda}_1)^q, (\dot{x}_2 E_2 - \dot{x}_1 \Lambda_2)^q) \\ &= \tau_0 \text{diag}((\dot{x}_2 E_1 - \dot{x}_1 \bar{\Lambda}_1)^q, (\dot{x}_2 E_2 - \dot{x}_1 \Lambda_2)^q), \end{aligned} \quad (3.7)$$

где E_1 и E_2 – единичные матрицы, $G = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r)$.

Докажем, что имеют место гомотопии

$$\dot{x}_2 E_1 - \dot{x}_1 \bar{\Lambda}_1 \simeq (\dot{x}_2 + i \dot{x}_1) E_1, \quad \dot{x}_2 E_2 - \dot{x}_1 \Lambda_2 \simeq (\dot{x}_2 + i \dot{x}_1) E_2.$$

Установим справедливость первой (второй аналогично). Рассмотрим непрерывную на $[0, 1] \times \partial Q$ матрицу

$$F(t, x) = (\dot{x}_2 + i \dot{x}_1) E_1 - t \dot{x}_1 (E_1 + \bar{\Lambda}_1),$$

собственные значения λ_t которой связаны с собственными значениями λ матрицы $\bar{A}_1$ равенством $\lambda_t = \dot{x}_2 + i\dot{x}_1 - t\dot{x}_1(1 + \lambda)$. Ввиду того, что $\text{Im } \lambda < 0$ и $\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 = 1$, получим $\lambda_t \neq 0$. Следовательно, матрица $F(t, x)$ невырожденная для любого $(t, x) \in [0, 1] \times \partial Q$. (В частности, при $t = 1$ отсюда и из (3.7) следует эквивалентность условия (2.5) и аналогичного условия из теоремы.) Функция $F(t, x)$ и устанавливает требуемую гомотопию. При гомотопии индекс функции сохраняется. Поэтому согласно (3.7) имеем

$$\varkappa = \text{ind}(\det \tau) = \varkappa_0 + \sum_{j=1}^2 \text{ind}(\det((\dot{x}_2 + i\dot{x}_1)^q E_j)) = \varkappa_0 + qkr(m-1).$$

Отсюда и из (2.6) ввиду равенства $q = r - l - 1$ получим (3.3). Теорема доказана.

2. Пусть $L_1, \dots, L_s$ – попарно непересекающиеся части границы, каждая из которых состоит из некоторого числа $m_j, j = 1, \dots, s$, связных компонент $\Gamma_0, \dots, \Gamma_m$ границы, причем $\cup L_j = \partial Q$ (для определенности считаем, что $\Gamma_0 \subset L_1$). Рассмотрим для системы (2.1) краевую задачу, порядки краевых условий которой, вообще говоря, меняются при переходе от одного краевого условия к другому и от одной части L_j границы к другой. При этом предполагаем, что наибольший из порядков (обозначим его l) меньше r . (Случай $l \geq r$ рассмотрим в следующем параграфе.) Речь идет о задаче для системы (2.1) со следующими краевыми условиями:

$$\text{Re} \left(\sum_{i=1}^{l_{qt}+1} \sum_{j=1}^k b_{qj}^{it} \mathcal{D}_2^{l_{qt}-i} \mathcal{D}_1^{i-1} v_j \right) = \varphi_{qt} \in \mathcal{Y}(n + r_{qt}; L_t), \quad (3.8)$$

где $q = 1, \dots, kr; t = 1, \dots, s; r_{qt} = r - l_{qt} - 1; v_1, \dots, v_k$ – компоненты искомой вектор-функции v . Все условия и обозначения п. 1 § 2 сохраняем, кроме условий на коэффициенты граничных условий. В условии (A) полагаем, что функции b_{qj}^{it} принадлежат пространству $C_\gamma^{r-l_{qt}+n}(\partial Q)$, а в условии (B) – $C_\alpha^{r-l_{qt}+n}(\partial Q)$. Через l_j будем обозначать $\max\{l_{qj}, q = 1, \dots, kr\}, j = 1, \dots, s$.

Изучим задачу (2.1), (3.8), сведя ее к (3.1), (3.2). Для этого сначала выровним порядки краевых условий на L_j ($j = 1, \dots, s$) при помощи $(l_j - l_{qj})$ -кратного дифференцирования по дуге d/ds q -го ($q = 1, \dots, kr$) краевого условия. (При этом в краевых условиях появятся младшие члены. Они образуют вполне непрерывный оператор (см. п. 4 § 2), поэтому их можно опустить.) При помощи операторов вида (3.4), где ∂Q заменен на L_j , q на $l_j - l_{qj}$, как и в п. 1, имеем: полученная задача и исходная эквивалентны в смысле нетеровости и имеют один и тот же индекс. После этого представим краевые условия на $L_j, j = 1, \dots, s$, в виде (3.2):

$$\text{Re} \left(\sum_{i=1}^{l_j+1} \mathbf{b}_{ji}^0 \mathcal{D}_2^{l_j+1-i} \mathcal{D}_1^{i-1} v \right) = \varphi_j \in \mathcal{Y}(n + r - l_j - 1; L_j) \quad (3.9)$$

и составим из матриц $\mathbf{b}_{j1}^0, \dots, \mathbf{b}_{jl_j+1}^0$ матрицу $G_j^0 = (\mathbf{b}_{j1}^0, \dots, \mathbf{b}_{jl_j+1}^0, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})$, нулевые блоки на последних $r - l_j - 1$ местах. Теперь выровним порядки краевых

условий на всей границе, для чего действуем $l - l_j$ раз на (3.9) ($j = 1, \dots, s$) оператором d/ds и представим краевые условия в виде (3.2). В результате наша задача станет эквивалентной (в смысле нетеровости и равенства индексов) задаче типа (3.1), (3.2). Поэтому согласно теореме 5 критерием нетеровости (2.1), (3.8) является условие: $\det \tau_0(x) \neq 0$ всюду на ∂Q . При этом индекс дается равенством (3.3). Преобразуем это условие и формулу (3.3). Аналогично (3.7) на L_j имеем

$$\tau_0 = (\bar{G}_j^0 \bar{T}_1, G_j^0 T_2) \operatorname{diag}((\dot{x}_2 E_1 - \dot{x}_1 \bar{\Lambda}_1)^{l-l_j}, (\dot{x}_2 E_2 - \dot{x}_1 \Lambda_2)^{l-l_j}).$$

Отсюда, как и в п. 1, получим, что критерием нетеровости задачи (2.1), (3.8) является условие

$$\det \tau_j^0(x) \neq 0, \quad x \in L_j, \quad j = 1, \dots, s, \quad (3.10)$$

где $\tau_j^0 = (\bar{G}_j^0 \bar{T}_1, G_j^0 T_2)$. Кроме того, имеем

$$\varkappa_0 = \operatorname{ind} \det \tau_0 = \sum_{j=1}^s \varkappa_j^0 + \sum_{j=2}^s (l - l_j) k r m_j + (l - l_1) k r (m_1 - 2),$$

где $\varkappa_j^0$ — индекс функции $\det \tau_j^0$. (Последнее слагаемое здесь соответствует L_1 . Отличие его от аналогичных слагаемых для L_2 и т.д. объясняется тем, что $\Gamma_0 \subset L_1$. Индекс функции $\dot{x}_2 + i\dot{x}_1$ на Γ_0 равен -1 , а на остальных $+1$.) Отсюда согласно (3.3) и равенству $\sum_{j=1}^s m_j = m + 1$ имеем

$$J = 2 \sum_{j=1}^s \varkappa_j^0 - k r (2l_1 + 2 - r)(m - 1) - 2k r \sum_{j=1}^s (l_j - l_1) m_j. \quad (3.11)$$

Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 6. *Для нетеровости задачи (2.1), (3.8) необходимо и достаточно выполнения условия (3.10). При этом индекс дается равенством (3.11).*

При $s = 1$ имеем $l_1 = l$, и формула (3.11) переходит в (3.3).

СЛЕДСТВИЕ 5. *Задача (2.1), (3.8), для которой порядки $l_1, \dots, l_s$ не удовлетворяют оценке*

$$\min\{l_1, \dots, l_s\} \geq k^{-1} \max\{(kr)_+, (kr)_-\} - 1, \quad (3.12)$$

не нетерова. Здесь $(kr)_+$ — число корней (с учетом кратности) характеристического полинома матрицы (2.4) из верхней полуплоскости, а $(kr)_- = kr - (kr)_+$ — из нижней.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть задача нетеровая; тогда имеем (3.10). Значит, столбцы матрицы $\tau_j^0 = (\overline{G}_j^0 \overline{T}_1, G_j^0 T_2)$ линейно независимы. Следовательно, так как количество столбцов матриц $G_j^0 T_1$ и $G_j^0 T_2$ соответственно $(kr)_+$ и $(kr)_-$ (см. (1.2), где k заменен на kr), ранг $G_j^0 T_1$ равен $(kr)_+$, а ранг $G_j^0 T_2$ равен $(kr)_-$. Ранг произведения не больше минимума рангов его сомножителей. Отсюда и из того, что ранги T_1 и T_2 – соответственно $(kr)_+$ и $(kr)_-$, получим, что $(kr)_\pm \leq \text{rang } G_j^0$. Значит, $\text{rang } G_j^0 \geq \max\{(kr)_+, (kr)_-\}$. Число ненулевых столбцов G_j^0 не может быть меньше ранга. Следовательно, $k(l_j + 1) \geq \max\{(kr)_+, (kr)_-\}$, $j = 1, \dots, s$, откуда и следует наше утверждение.

Оценка (3.12) для систем с постоянными коэффициентами была получена А. П. Солдатовым [12].

СЛЕДСТВИЕ 6. Если $(kr)_+ = 0$ или $(kr)_- = 0$, то единственной задачей, которая, возможно, будет нетеровой, является задача $l_1 = \dots = l_s = l = r - 1$. В частности, среди задач типа (3.1), (3.2) таковой будет только задача Пуанкаре.

Это есть следствие предыдущего утверждения.

СЛЕДСТВИЕ 7. Пусть все корни характеристического полинома $P(\lambda)$ расположены либо в верхней полуплоскости, либо в нижней. Тогда условие: $\det G(x) \neq 0$ на ∂Q – необходимо и достаточно для нетеровости (2.1), (3.8). При этом индекс дается равенством $J = \pm 2 \text{ind}(\det G) - kr^2(m-1)$ (знак “–” для верхней полуплоскости, а знак “+” – для нижней).

Здесь согласно следствию 6 $l_1 = \dots = l_s = r - 1$, поэтому G по формуле (3.9) есть матрица G_j^0 без нулевых блоков на L_j .

3. Краевые задачи для правильно эллиптических систем. Пусть система (2.1) такая, что kr – число четное. Рассмотрим для нее $\mathbb{C}$ -линейную задачу с одним из краевых условий:

$$\mathcal{M}v = \varphi \in \mathcal{Y}(n + r - l - 1; \partial Q), \quad (3.13)$$

$$\mathcal{M}_{qt}v = \varphi_{qt} \in \mathcal{Y}(n + r_{qt}; L_t), \quad (3.14)$$

где $q = 1, \dots, kr/2$; $t = 1, \dots, s$; $r_{qt} = r - l_{qt} - 1$. Здесь $\mathcal{M}v$ – выражение под знаком “Re” в (3.2), а $\mathcal{M}_{qt}v$ – в (3.8). Причем теперь матрицы $\mathbf{b}_j^0$ есть прямоугольные $((kr/2) \times k)$ -матрицы. Все условия и обозначения предыдущих пунктов сохраняем.

Если система не является правильно эллиптической, задача не нетеровая. Это проверяется аналогично п. 2 § 2. Пусть система правильно эллиптическая; тогда справедлива

ТЕОРЕМА 7. Задача (2.1), (3.13) нетеровая только в том случае, когда

$$\det(\tau_1(x) \cdot \tau_2(x)) \neq 0, \quad x \in \partial Q, \quad (3.15)$$

где $\tau_1 = \overline{G}_0 \overline{T}_1$, $\tau_2 = G_0 T_2$, $G_0 = (\mathbf{b}_1^0, \dots, \mathbf{b}_{l+1}^0, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})$, $T_0 = (T_1, T_2)$ – матрица из (1.2) для (2.4). При этом для индекса имеем

$$J = \varkappa_1 + \varkappa_2 - 2^{-1}kr(2l + 2 - r)(m - 1), \quad \varkappa_j = \text{ind}(\det \tau_j). \quad (3.16)$$

Задача (2.1), (3.14) нетривиальна лишь тогда, когда

$$\det(\tau_j^1(x)\tau_j^2(x)) \neq 0, \quad x \in L_j, \quad j = 1, \dots, s, \quad (3.17)$$

где $\tau_j^1 = \bar{G}_j^0 \bar{T}_1$, $\tau_j^2 = G_j^0 T_2$ (по поводу G_j^0 см (3.9)). Причем индекс дается равенством

$$J = \sum_{j=1}^s (\kappa_j^1 + \kappa_j^2) - 2^{-1}kr(2l_1 + 2 - r)(m - 1) - kr \sum_{j=1}^s (l_j - l_1)m_j, \quad (3.18)$$

где $\kappa_j^i = \text{ind}(\det \tau_j^i)$.

Доказательство этих утверждений мы опускаем. Оно в точности такое же, как теоремы 3, при этом надо использовать теоремы 5 и 6.

В случае задачи с действительными коэффициентами условия (3.15), (3.17) и формулы (3.16), (3.18) упрощаются. В условиях (3.15), (3.17) имеем $T_2 = \bar{T}_1$, $\bar{G}_0 = G_0$, в формуле (3.16) $\kappa_1 = \kappa_2 = \text{ind}(\det G_0 \bar{T}_1)$, а в (3.18) $\kappa_j^1 = \kappa_j^2 = \text{ind}(\det G_j^0 \bar{T}_1)$.

4. Утверждение, аналогичное теореме 7, в действительном случае для односвязных областей имеется в работе [3]. Для систем с постоянными коэффициентами аналоги теорем 6 и 7 можно найти в [5].

Пусть мы имеем в задаче и младшие члены (п. 4 § 2); тогда предыдущие утверждения также имеют место.

Отметим еще, что условие (3.12) для правильно эллиптических систем упрощается. Оно здесь выглядит так: $\min_j l_j \geq r/2 - 1$.

§ 4. Краевые задачи l -го порядка, $l \geq r$. Алгоритм нахождения индекса задачи для любого l . Примеры из геометрии

1. Рассмотрим краевую задачу из п. 2 § 3, где теперь максимальный из порядков граничных условий l не меньше r :

$$Av = f \in \mathcal{X}(n+1; Q), \quad v \in \mathcal{X}(n+r+1; Q), \quad (4.1)$$

$$\text{Re}(\mathcal{B}_{qt}v) = \varphi_{qt} \in \mathcal{Y}(n+r_{qt}; L_t), \quad (4.2)$$

где $q = 1, \dots, kr$; $t = 1, \dots, s$; $r_{qt} = r - l_{qt} - 1$. Здесь Av и $\text{Re}(\mathcal{B}_{qt}v)$ — левые части (2.1) и (3.8) соответственно; $n \geq l - r + 1$ — любое фиксированное натуральное число. Обозначения п. 2 § 3 сохранены. Для коэффициентов краевой задачи считаем выполненным одно из следующих условий.

УСЛОВИЕ (А). Матрицы $\mathbf{a}_j$ принадлежат $C^{n+1}(\bar{Q})$, коэффициенты b_{qj}^{it} принадлежат $C_\gamma^{n+r-l_{qt}}(\partial Q)$; $\partial Q \in C_\alpha^{n+r+1}$. Здесь α и γ такие же, как в условии (А) из п. 1 § 2.

УСЛОВИЕ (В). $\mathbf{a}_j, b_{qj}^{it}$ и ∂Q принадлежат $C_\alpha^{n+1}(\overline{Q})$, $C_\alpha^{n+r-l_{qt}}(\partial Q)$ и C_α^{n+r+1} соответственно.

Пространство $\mathcal{X}(m; Q)$ – пространство комплексных k -вектор-функций над полем $\mathbb{R}$, совпадающее с $W_p^m(Q)$ в условии (А) и с $C_\alpha^n(\overline{Q})$ – в условии (В). Пространство $\mathcal{Y}(m; \partial Q)$ – пространство действительных скалярных функций, равное $W_p^{m+1-1/p}(\partial Q)$ в условии (А) и $C_\alpha^{m+1}(\partial Q)$ в условии (В).

Пусть

$$\mathcal{A}: \mathcal{X}(n+r+1; Q) \rightarrow \mathcal{X}(n+1; Q) \times \prod_{q=1}^{kr} \prod_{t=1}^s \mathcal{Y}(n+r_{qt}; L_t)$$

– оператор краевой задачи (4.1), (4.2). И пусть $\bar{\partial}$ – оператор следующей задачи Р–Г для системы Коши–Римана:

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{z}} v &\equiv \mathcal{D}_1 v + i \mathcal{D}_2 v = f \in \mathcal{X}(n; Q), \\ \operatorname{Re} v &= \varphi \in \mathcal{Y}(n; \partial Q), \quad v \in \mathcal{X}(n+1; Q). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Как известно (см., например, [2, гл. 4]), оператор $\bar{\partial}$ нетеровый для любого $n \geq 0$ и его индекс дается формулой $\operatorname{ind} \bar{\partial} = -k(m-1)$, где k – число компонент вектора v , $m+1$ – порядок связности области. Пусть $\mathcal{E}$ – тождественный оператор, действующий в пространстве $V = \prod_{q=1}^{kr} \prod_{t=1}^s \mathcal{Y}(n+r_{qt}; L_t)$. Тогда оператор

$$\mathcal{K} = (\bar{\partial}, \mathcal{E}): \mathcal{X}(n+1; Q) \times V \rightarrow \mathcal{X}(n; Q) \times \mathcal{Y}(n; \partial Q) \times V, \quad (4.4)$$

очевидно, нетеровый с индексом $\operatorname{ind} \mathcal{K} = -k(m-1)$. Рассмотрим теперь оператор

$$\mathcal{A}_0 = \mathcal{K}^{l+1-r} \mathcal{A}: \mathcal{X}(n+r+1; Q) \rightarrow \mathcal{X}(n+r-l; Q) \times \prod_{j=0}^{l-r} \mathcal{Y}(n-j; \partial Q) \times V.$$

Как известно (см., например, [13, с. 41]), из нетеровости произведения двух операторов следует, что сомножители нетеровые или не нетеровые одновременно. (Этим мы пользовались и ранее, в теоремах 5 и 6.) Поэтому так как $\mathcal{K}^{l+1-r}$ нетеровый, отсюда следует, что $\mathcal{A}_0$ и $\mathcal{A}$ нетеровые или не нетеровые одновременно. И в случае нетеровости

$$\operatorname{ind} \mathcal{A} = \operatorname{ind} \mathcal{A}_0 - (l+1-r) \operatorname{ind} \mathcal{K} = \operatorname{ind} \mathcal{A}_0 + k(l-r+1)(m-1). \quad (4.5)$$

Изучим теперь оператор $\mathcal{A}_0$. Очевидно, он является оператором следующей краевой задачи:

$$\partial_{\bar{z}}^{l+1-r} A v = f \in \mathcal{X}(n-l+r; Q), \quad v \in \mathcal{X}(n+r+1; Q), \quad (4.6)$$

$$\operatorname{Re}(\mathcal{B}_{qt} v) = \varphi_{qt} \in \mathcal{Y}(n+r_{qt}; L_t), \quad q = 1, \dots, kr, \quad t = 1, \dots, s,$$

$$\operatorname{Re}(\partial_{\bar{z}}^j A v) = \varphi_j \in \mathcal{Y}(n-j; \partial Q), \quad j = 0, \dots, l-r. \quad (4.7)$$

Так как здесь φ_j есть k -вектор, число краевых условий (4.7) равно $k(l+1)$. (Здесь φ_{qt} , $t = 1, \dots, s$, естественно, рассматривается как сужение на L_t некоторой граничной функции ψ_q , заданной на ∂Q .) Кроме того, (4.6) – эллиптическая система, как произведение эллиптических систем, порядка $l+1$. Такие задачи изучены в §3 (теорема 6, п. 4). Следуя последнему, заметим сначала, что наибольший из порядков граничных условий на каждой части L_t , $t = 1, \dots, s$, границы здесь равен l . Поэтому выровним порядки всех краевых условий до l при помощи оператора d/ds . После этого представим краевые условия в виде (2.1) с $r = l$ и запишем матрицу $G = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{l+1})$. Согласно теореме 6 задача (4.6), (4.7), а вместе с ней и исходная нетерова лишь тогда, когда

$$\det \tau(x) \neq 0, \quad x \in \partial Q, \quad \tau = (\overline{G} \overline{T}_1, GT_2), \quad (4.8)$$

где $T_0 = (T_1, T_2)$ – матрица из разложения (1.2) квадратной матрицы (2.4) порядка $k(l+1)$, соответствующей системе (4.6). Последняя получается представлением главной части системы (4.6) в форме (2.1) с $r = l$.

Пусть (4.8) имеет место; тогда согласно формуле (4.5) и формуле (3.11), где $l_1 = \dots = l_s = l$, $r = l+1$, для индекса задачи (4.1), (4.2) получим

$$J = 2 \operatorname{ind}(\det \tau) - k(l^2 + l + r)(m - 1). \quad (4.9)$$

Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 8. *Краевая задача (4.1), (4.2) нетерова лишь тогда, когда имеет место (4.8). При этом индекс дается равенством (4.9).*

СЛЕДСТВИЕ 8. *Пусть $P(\lambda)$ – характеристический многочлен системы (2.1), и пусть все его корни расположены в верхней полуплоскости. Тогда задача (4.1), (4.2) нетерова только в том случае, когда имеем (4.8) с $\tau = \overline{G}$. При этом индекс дается равенством (4.9), где $\tau = \overline{G}$. В случае нижней полуплоскости имеет место то же самое с $\tau = G$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первая часть есть следствие теоремы 8 и разложения (1.2), если учесть, что все собственные значения матрицы вида (2.4), соответствующей системе (4.6), расположены над прямой $\operatorname{Im} \lambda = 0$ (так как характеристический полином последней есть $\Delta(\lambda) = (-\lambda + i)^{l+1-r} P(\lambda)$).

Рассмотрим теперь случай нижней полуплоскости. Здесь сначала каждое уравнение системы и каждое краевое условие под знаком “Re” заменим на комплексно сопряженное. Затем обозначим $\bar{v}$ снова через v . Эти преобразования, очевидно, не влияют на нетеровость и индекс задачи. В результате мы получим разобранный случай, где $\overline{G}$ вместо G . Следствие доказано.

2. О задачах для правильно эллиптических систем. Пусть (4.1) – правильно эллиптическая система. Рассмотрим для нее $\mathbb{C}$ -линейную задачу (4.1), (4.2), где опущен знак “Re” и число краевых условий равно $kr/2$. (Значит, q в (4.2) меняется от 1 до $kr/2$.) Аналогично п. 3 §3 получим, что имеет место

ТЕОРЕМА 9. *Отмеченная задача лишь тогда нетеровая, когда имеет место (4.8). При этом индекс дается равенством*

$$J = \varkappa - 2^{-1}k(l^2 + l + r)(m - 1), \quad (4.10)$$

где $\varkappa$ – индекс функции $\det \tau$. Матрицы G , τ , T_1 , T_2 имеют тот же смысл, что и в теореме 8.

(Первый член в (4.10) отличен от аналогичных в теоремах 3, 7. Это объясняется тем, что система (4.6) не является правильно эллиптической.) В действительном случае также имеет место теорема 9 с той же формулой для индекса. В теоремах 8 и 9 мы использовали оператор $\bar{\partial}$ Коши–Римана. Его можно заменить на любой другой нетеровый оператор. Такая замена может повлиять только на вид правой части формулы для индекса.

3. Алгоритм нахождения индекса. Для практических применений удобно иметь алгоритм, реализация которого дает нам индекс задачи. Он состоит из следующих шагов.

Пусть рассматривается задача (4.1), (4.2) с $l \geq r$.

1) Подействуем на каждое уравнение системы (4.1) $l - r + 1$ раз оператором Коши–Римана $\partial_{\bar{z}} = \mathcal{D}_1 + i\mathcal{D}_2$. Игнорируем получающиеся при этом младшие члены. В результате получим эллиптическую систему $(l + 1)$ -го порядка.

2) К граничным условиям (4.2) добавляем еще $k(l - r + 1)$ условий: $\operatorname{Re}(\partial_{\bar{z}}^j A v) = \varphi_j$, $j = 0, \dots, l - r$, и опускаем младшие члены.

3) Выровним порядки граничных условий до l при помощи оператора дифференцирования по дуге (младшие члены опускаем). Запишем краевые условия в матричной форме (2.2) с $r = l$ и составим матрицу $G = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{l+1})$.

4) Если все корни характеристического полинома $P(\lambda)$ выше прямой $\operatorname{Im} \lambda = 0$, то индекс дается равенством (4.9), где $\tau = \bar{G}$; если ниже, $\tau = G$.

5) Иначе: находим матрицу (2.4) для эллиптической системы $(l + 1)$ -го порядка, полученной в 1), и получим для нее разложение (1.2).

6) Вычислим индекс задачи по формуле (4.9).

7) В случае краевой задачи для правильно эллиптической системы сначала заменим краевое условие $\mathcal{B}_{qt} v = \varphi$ на два: $\operatorname{Re}(\mathcal{B}_{qt} v) = \varphi_1$, $\operatorname{Re}(-i\mathcal{B}_{qt} v) = \varphi_2$, затем выполним 1)–3), 5) и находим индекс по формуле (4.10).

8) Если мы имеем краевую задачу с действительными коэффициентами, то выполним 7).

Пусть теперь рассматриваются задачи с $l < r$.

9) Пусть $P(\lambda)$ такой же, как в 4). Тогда $l = r - 1$ (другие случаи можно не рассматривать – см. следствие 6). Выполним 3) и найдем индекс по формулам следствия 7. Иначе:

10) выровним порядки граничных условий до l_j (обозначения см. в п. 2 § 3). Составим матрицы G_j^0 (см. (3.9)) и найдем (1.2) для (2.4).

11) Вычислим индекс по формуле (3.11).

12) В случае задачи (3.1), (3.14) для правильно эллиптической системы разобьем каждое краевое условие на два (см. п. 7)). Выполним 10) и найдем индекс по формуле (3.18). Если коэффициенты системы к тому же действительные, в формуле (3.18) полагаем $\varkappa_j^1 = \varkappa_j^2 = \operatorname{ind}(\det G_0^j \bar{T}_1)$.

13) Для задачи (3.1), (3.2) с равными порядками граничных условий найдем разложение (1.2) для (2.4) и вычислим индекс по формуле (3.3).

14) Для такой же задачи для правильно эллиптической системы индекс дается формулой (3.16). Если к тому же коэффициенты действительные, полагаем $\varkappa_1 = \varkappa_2 = \text{ind}(\det G_0 \bar{T}_1)$.

4. Задачи, рассматриваемые в этом пункте, возникают при исследовании вопросов жесткости поверхностей. Они как нерешенные отмечены в [2, с. 286–289].

Пусть $L_1 = \Gamma_{i_0} \cup \dots \cup \Gamma_{i_s}$, $L_2 = \Gamma_{i_{s+1}} \cup \dots \cup \Gamma_{i_m}$, где $(i_0, \dots, i_m)$ – перестановка чисел $(0, \dots, m)$; $\Gamma_0, \dots, \Gamma_m$ – связные компоненты границы.

ПРИМЕР 1. Вычислить индекс краевой задачи

$$\partial_{\bar{z}} v + Av + B\bar{v} = f \in \mathcal{X}(n+1; Q), \quad (4.11)$$

$$\text{Re}(a\partial_z v + bv) = \varphi_1 \in \mathcal{Y}(n-1; L_1), \quad \partial_z = \mathcal{D}_1 - i\mathcal{D}_2, \quad (4.12)$$

$$\text{Re}(bv) = \varphi_2 \in \mathcal{Y}(n; L_2), \quad v \in \mathcal{X}(n+2; Q), \quad (4.13)$$

где $v, A, \dots, \varphi_2$ – скалярные функции, $n \geq 1$ – неотрицательное целое число.

В случае $a(x) \neq 0$ всюду на ∂Q , т.е. в (4.11)–(4.13) отсутствует второе из краевых условий и $L_1 = \partial Q$, эта задача решена Б. В. Боярским [14]. Согласно [14] индекс задачи равен $2 \text{ind } \bar{a} - 3(m-1)$. В рассматриваемом случае для нетеровости задачи необходимо и достаточно выполнения условий

$$a(x) \neq 0 \quad (x \in L_1), \quad b(x) \neq 0 \quad (x \in L_2), \quad (4.14)$$

и при этом индекс задачи дается равенством

$$J = 2(\text{ind}|_{L_1} \bar{a} + \text{ind}|_{L_2} \bar{b}) + 2(m-r) - 3(m-1), \quad (4.15)$$

где $r = s$, если Γ_0 не входит в L_2 , иначе $r = s + 2$.

Заметим, что, если в (4.14) формально положить $s = m$ (отсутствует L_2), получим формулу Боярского, а при $s = -1$ (нет L_1) имеем формулу для индекса задачи Р–Г для обобщенных аналитических функций [3].

Докажем (4.14). Согласно алгоритму после шагов 1)–3) получим краевую задачу для эллиптической системы $\partial_{\bar{z}}^2 v = f$ с краевым условием

$$\text{Re} \left(\begin{pmatrix} c \\ i \end{pmatrix} \mathcal{D}_2 v + \begin{pmatrix} d \\ 1 \end{pmatrix} \mathcal{D}_1 v \right) = \varphi \quad \text{на} \quad \partial Q,$$

где $c = -ia$ на L_1 , $c = b\dot{x}_2$ на L_2 ; $d = a$ на L_1 и $d = b\dot{x}_1$ на L_2 . Здесь, как и ранее, $\dot{x}_j = dx_j/ds$ – производная по дуге при естественной параметризации.

Уравнению $\partial_{\bar{z}}^2 v = f$ соответствует характеристический многочлен $-\lambda + i$. Значит, согласно следствию 8 условие (4.14) необходимо и достаточно для нетеровости задачи. При этом, так как здесь $l = 1$, $k = 1$, индекс дается равенством $J = 2 \text{ind } \bar{G} - 3(m-1)$, где G – квадратная матрица второго порядка, (c, d) – ее первая строка, а $(i, 1)$ – вторая. После преобразований отсюда следует (4.15).

ПРИМЕР 2. Требуется найти индекс краевой задачи

$$\partial_{\bar{z}}v_j + A_jv_j + B_j\bar{v}_j = f_j \in \mathcal{X}(n+1; Q), \quad j = 1, 2, \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} a_1\partial_zv_1 + b_1\partial_{\bar{z}}\bar{v}_1 + c_1v_1 + d_1\bar{v}_1 - a_2\partial_zv_2 - b_2\partial_{\bar{z}}\bar{v}_2 \\ - c_2v_2 - d_2\bar{v}_2 = \varphi \in \mathcal{Y}(n-1; \partial Q), \quad v \in \mathcal{X}(n+2; Q), \end{aligned} \quad (4.17)$$

где a_1, b_1 и т.д. – скалярные функции. Запишем краевые условия в виде (4.2). Имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\begin{pmatrix} -ia_1 - i\bar{b}_1 & ia_2 + i\bar{b}_2 \\ -a_1 + \bar{b}_1 & a_2 - \bar{b}_2 \end{pmatrix} \mathcal{D}_2 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 + \bar{b}_1 & -a_2 - \bar{b}_2 \\ -ia_1 + i\bar{b}_1 & ia_2 - i\bar{b}_2 \end{pmatrix} \mathcal{D}_1 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right. \\ \left. + \begin{pmatrix} c_1 + \bar{d}_1 & -c_2 - \bar{d}_2 \\ -ic_1 + i\bar{d}_1 & ic_2 - i\bar{d}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \quad \text{на} \quad \partial Q, \end{aligned} \quad (4.18)$$

где $\varphi_1 + i\varphi_2 = \varphi$. (При получении (4.18) мы воспользовались эквивалентностью равенства вида $A + \bar{B} = \varphi$ двум равенствам: $\operatorname{Re}(A + B) = \varphi_1$, $\operatorname{Re}(-iA + iB) = \varphi_2$, $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$.)

Как и в примере 1, получим, что для нетеровости задачи необходимо и достаточно выполнения условия: $\det G(x) \neq 0$ всюду на ∂Q , где

$$G = \begin{pmatrix} -ia_1 - i\bar{b}_1 & ia_2 + i\bar{b}_2 & a_1 + \bar{b}_1 & -a_2 - \bar{b}_2 \\ -a_1 + \bar{b}_1 & a_2 - \bar{b}_2 & -ia_1 + i\bar{b}_1 & ia_2 - i\bar{b}_2 \\ i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & i & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что $\det \bar{G} = 8i(b_2\bar{a}_1 - \bar{a}_2b_1)$. Следовательно, задача (4.16), (4.17) тогда и только тогда нетерова, когда

$$b_2(x)\bar{a}_1(x) - b_1(x)\bar{a}_2(x) \neq 0 \quad \text{всюду на} \quad \partial Q.$$

При этом индекс задачи дается равенством

$$J = 2 \operatorname{ind}(b_2\bar{a}_1 - b_1\bar{a}_2) - 6(m-1).$$

Аналогично можно изучить задачу (4.16), (4.17), где a_1, b_1, a_2, b_2 тождественно равны нулю на L_1 . Здесь результат такой. Для нетеровости задачи необходимо и достаточно выполнения условий: $a(x) \equiv (b_2\bar{a}_1 - b_1\bar{a}_2)(x) \neq 0$ всюду на L_1 , $b \equiv d_1\bar{c}_2 - d_2\bar{c}_1 \neq 0$ всюду на L_2 . При этом индекс дается формулой

$$J = 2(\operatorname{ind} |_{L_1} a + \operatorname{ind} |_{L_2} b) + 4(m-r) - 6(m-1),$$

где r такое же, как в (4.15).

§ 5. Краевые задачи для систем, эллиптических по Дуглису–Ниренбергу

1. Напомним понятие эллиптичности по Дуглису–Ниренбергу. В ограниченной области Q плоскости рассмотрим систему

$$\mathcal{L}(x, \mathcal{D})v = f \in \mathcal{X}_{-s}^r(Q), \quad (5.1)$$

где $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, \mathcal{D}) = \{a_{ij}(x, \mathcal{D})\}$ – квадратная матрица порядка k , элементы которой – линейные дифференциальные выражения. Коэффициенты $a_{ij}(x, \mathcal{D})$ (как дифференциального выражения) – непрерывные в $\overline{Q}$ функции.

Матрице $\mathcal{L}$ поставим в соответствие матрицу $\mathcal{L}(x, \xi) = \{a_{ij}(x, \xi)\}$ с полиномиальными по ξ_1 и ξ_2 , $(\xi_1, \xi_2) = \xi$, элементами. Говорят, что система (5.1) *эллиптическая по Дуглису–Ниренбергу*, если найдутся целые числа s_i и t_i , $i = 1, \dots, k$, удовлетворяющие следующим условиям:

- 1) сумма $n = \sum_{i=1}^k (s_i + t_i)$ (для всех $x \in \overline{Q}$) равна степени полинома $L(x, \xi) = \det \mathcal{L}(x, \xi)$, т.е. $n = \text{ord } L$;
- 2) сумма $s_i + t_j$ не меньше степени $a_{ij}(x, \xi)$, причем, если $s_i + t_j < 0$, считаем, что $a_{ij} = 0$;
- 3) пусть $\mathcal{L}_0(x, \xi)$ – главная часть $\mathcal{L}(x, \xi)$, каждый элемент которой есть главная однородная часть $a_{ij}(x, \xi)$, состоящая из слагаемых степени $s_i + t_j$.

Тогда

$$\det \mathcal{L}_0(x, \xi) \neq 0, \quad x \in \overline{Q}, \quad \xi \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}. \quad (5.2)$$

Набор чисел $\{s_i, t_i\}$, участвующий в определении эллиптичности, определен неоднозначно. Каждый такой набор можно заменить на $\{s_i - a, t_i + a\}$, где a – любое целое. Более того, в предположении, что матрица $\mathcal{L}_0$ имеет клеточно диагональную структуру: $\mathcal{L}_0 = \text{diag}(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_q)$, причем $1 \leq q \leq k$, с квадратными блоками $\mathcal{L}_i$ на диагонали, в пределах каждого блока от s_i можно отнять, а к t_i прибавить одно и то же число (любое). В дальнейшем эти целые числа будем считать такими, что для каждого блока $\max s_i = 0$. При такой нормировке набор определен однозначно.

Система (5.1), для которой все s_i равны нулю, называется *системой Петровского*. В предыдущих параграфах был рассмотрен частный случай последней, когда все t_i равны r .

2. Для системы (5.1) мы будем изучать краевую задачу со следующим условием на границе:

$$\text{Re}(\mathcal{B}(x, \mathcal{D})v) = \varphi \in \mathcal{Y}_0^r(\partial Q), \quad v \in \mathcal{X}_t^r(Q), \quad (5.3)$$

где $\mathcal{B}(x, \mathcal{D}) = \{b_{ij}(x, \mathcal{D})\}$ – прямоугольная $(n \times k)$ -матрица, элементы которой – линейные дифференциальные выражения с непрерывными коэффициентами. Предполагаем, что существуют целые числа $o_1, \dots, o_n$ такие, что $o_i + t_j$ не больше степени $\text{ord } b_{ij}$ (причем при $o_i + t_j < 0$ имеем $b_{ij} = 0$). Кроме того, $o_i = \max_j (\text{ord } b_{ij} - t_j)$.

В дальнейшем коэффициенты уравнений и краевых условий такие, что для них выполнено одно из следующих условий.

УСЛОВИЕ (А). Пусть $r > o_0 = \max\{o_j \mid j = 1, \dots, n\}$ – неотрицательное целое число и $p > 1$. Тогда $\partial Q \in C_\alpha^{r+t_0}$, $t_0 = \max_j\{t_j\}$, $0 < \alpha < 1$; коэффициенты операторов $a_{ij}(x, \mathcal{D})$ принадлежат $C_\alpha^{r-s_i}(\bar{Q})$, а коэффициенты операторов $b_{ij}(x, \mathcal{D})$ принадлежат $C_\gamma^{r-o_i-1}(\partial Q)$, $\gamma = (p-1)/p + \varepsilon$, со сколь угодно малым $\varepsilon > 0$.

УСЛОВИЕ (В). Пусть $r \geq \max\{0, o_0\}$. Тогда $\partial Q \in C_\alpha^{r+t_0}$, коэффициенты операторов a_{ij} принадлежат $C_\alpha^{r-s_i}(\bar{Q})$, а $b_{ij} \in C_\alpha^{r-o_i}(\partial Q)$. (Здесь α, t_0 такие же, как в (А).)

(Условия на коэффициенты младших членов операторов a_{ij} и b_{ij} в условии (А) можно ослабить так, чтобы они оставались вполне непрерывными.)

Опишем теперь пространства, над которыми мы изучаем (5.1), (5.3). В условии (А) правые части (5.1), (5.3) принадлежат пространствам

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{-s}^r &= \mathcal{X}_{-s}^r(Q) = \mathcal{X}(r, -s_1, \dots, -s_k; Q) = \prod_{i=1}^k W_p^{r-s_i}(Q), \\ \mathcal{Y}_0^r &= \mathcal{Y}_0^r(\partial Q) = \mathcal{Y}(r, o_1, \dots, o_n; \partial Q) = \prod_{i=1}^n W_p^{r-o_i-1/p}(\partial Q) \end{aligned} \quad (5.4)$$

соответственно. А искомая принадлежит $\mathcal{X}_t^r = \mathcal{X}_t^r(Q) = \mathcal{X}(r, t_1, \dots, t_k; Q)$. В условии (В) правые части и искомая принадлежат пространствам Гёльдера, полученным из предыдущих заменой символа W_p на C_α , Q на $\bar{Q}$ и $1/p$ на 0 в $\mathcal{Y}$. Мы будем пользоваться и такими обозначениями: $\mathcal{X}(r+t_0; Q)$ – это пространство $\mathcal{X}_t^r$, где все $t_i = t_0$; $\mathcal{X}(r; Q)$ получено из (5.4) (или его гёльдеровского варианта) при $s_1 = \dots = s_k = 0$.

Сведем задачу (3.1), (3.3), подействовав на уравнения некоторыми степенями оператора Коши–Римана и произведя замену искомого посредством таких же операторов, к задаче для системы (2.1). Для обоснования этого нам потребуются операторы $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$. Опишем их. Пусть $\bar{\partial}$ – оператор задачи (4.4) для случая одного уравнения. Рассмотрим оператор $\mathcal{M}_1 = (\bar{\partial}^{t_0-t_1}, \dots, \bar{\partial}^{t_0-t_k})$ (при $t_0 = t_j$ считаем, что $\bar{\partial}^0 = \mathcal{E}$ – тождественный оператор), определенный на пространстве $\mathcal{X}(r+t_0; Q)$. При этом для $v = (v_1, \dots, v_k) \in \mathcal{X}(r+t_0; Q)$ имеем

$$\mathcal{M}_1 v = (\bar{\partial}^{t_0-t_1} v_1, \dots, \bar{\partial}^{t_0-t_k} v_k) \equiv (u_1, \dots, u_k) = u,$$

где u_j при $t_j \neq t_0$ представляется в виде

$$u_j = (\partial_z^{t_0-t_j} v_1, (\operatorname{Re} v_j, \operatorname{Re}(\partial_z v_j), \dots, \operatorname{Re}(\partial_z^{t_0-t_j-1} v_j)))|_{\partial Q}.$$

Умножим $\mathcal{M}_1 v$ на матрицу перестановок, которая переставляет граничные члены в конец вектора u так, что полученный при этом вектор w принадлежит $\mathcal{W} = \mathcal{X}_t^r(Q) \times V_1(\partial Q)$, где

$$V_1 = V_1(\partial Q) = \prod_{j=1}^k \mathcal{Y}(r, t_0-1, t_0-2, \dots, t_j; \partial Q) \quad (5.5)$$

(здесь в произведении опущены множители с $t_j = t_0 = \max_j(t_j)$). Полученный таким образом оператор, действующий из $\mathcal{X}(s + t_0; Q)$ в $\mathcal{W}$, обозначим $\mathcal{M}$. Пусть $\mathcal{N}_1$ – оператор, определенный аналогично $\mathcal{M}$, но теперь вместо $t_0 - t_j$ берем $-s_j$ и $\mathcal{N}_1: \mathcal{X}_{-s}^r(Q) \rightarrow \mathcal{X}(r; Q) \times V_2(\partial Q)$, где

$$V_2 = V_2(\partial Q) = \prod_{j=1}^k \mathcal{Y}(r, -1, -2, \dots, s_j, \partial Q) \quad (5.6)$$

(здесь пропущены множители, для которых $s_j = 0$). Тогда $\mathcal{N} = (\mathcal{N}_1, \mathcal{E})$, где $\mathcal{E}$ – тождественный оператор, действующий в $V = \mathcal{Y}_0^r(\partial Q) \times V_1(\partial Q)$. Следовательно, $\mathcal{N}$ отображает $\mathcal{X}_{-s}^r(Q) \times V$ в $\mathcal{X}(r; Q) \times V$. Операторы $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ нетеровые, и их индексы, согласно (4.4) с $k = 1$, даются формулами

$$\begin{aligned} \operatorname{ind} \mathcal{M} &= \sum_{j=1}^k \operatorname{ind}(\partial^{-t_0-t_j}) = - \sum_{j=1}^k (t_0 - t_j)(m-1), \\ \operatorname{ind} \mathcal{N} &= - \sum_{j=1}^k (-s_j)(m-1). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Пусть теперь $\mathcal{A}: \mathcal{X}_t^r(Q) \rightarrow \mathcal{X}_{-s}^r(Q) \times \mathcal{Y}_0^r(\partial Q)$ – оператор задачи (5.1), (5.3), и пусть $\mathcal{E}$ – тождественный оператор, действующий в $V_1(\partial Q)$, $\mathcal{A}_1 = (\mathcal{A}, \mathcal{E})$ – оператор, действующий из $\mathcal{X}_t^r(Q) \times V_1(\partial Q)$ в $\mathcal{X}_{-s}^r(Q) \times \mathcal{Y}_0^r(\partial Q) \times V_1(\partial Q)$. Рассмотрим оператор

$$\mathcal{A}_0 = \mathcal{N} \mathcal{A}_1 \mathcal{M}: \mathcal{X}(r + t_0; Q) \rightarrow \mathcal{X}(r; Q) \times V_2(\partial Q) \times \mathcal{Y}_0^r(\partial Q) \times V_1(\partial Q),$$

где V_1 и V_2 из (5.5), (5.6). Так как $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ нетеровые, операторы $\mathcal{A}_0$ и $\mathcal{A}_1$ нетеровые или не нетеровые одновременно. Далее, из нетеровости $\mathcal{A}_1$, очевидно, следует нетеровость $\mathcal{A}$, и обратно, причем $\operatorname{ind} \mathcal{A}_1 = \operatorname{ind} \mathcal{A}$. Поэтому $\mathcal{A}_0$ и $\mathcal{A}$ нетеровые или не нетеровые одновременно. И в случае нетеровости с учетом (5.7) имеем

$$\operatorname{ind} \mathcal{A} = \operatorname{ind} \mathcal{A}_0 - \left(\sum_{j=1}^k (t_j + s_j) - kt_0 \right) (m-1). \quad (5.8)$$

Изучим теперь оператор $\mathcal{A}_0$. Легко видеть, что он есть оператор следующей краевой задачи:

$$S(\mathcal{D})\mathcal{L}(x, \mathcal{D})T(\mathcal{D})v = f \in \mathcal{X}(r; Q), \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\partial_{\bar{z}}^{i-1} v_j) &= \varphi_{ij} \in \mathcal{Y}(r, t_0 - j; \partial Q), \quad j = 1, \dots, k, \quad i = 1, \dots, t_0 - t_j, \\ \operatorname{Re}(\mathcal{B}(x, \mathcal{D})T(\mathcal{D})v) &= \varphi \in \mathcal{Y}_0^r(\partial Q), \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left(\partial_{\bar{z}}^{j-1} \sum_{q=1}^k a_{iq}(x, \mathcal{D})\partial_{\bar{z}}^{t_0-t_q} v_q\right) &= \psi_{ij} \in \mathcal{Y}(r, -j; \partial Q), \\ j &= 1, \dots, -s_i, \quad i = 1, \dots, k, \quad v \in \mathcal{X}(r + t_0; Q), \end{aligned}$$

где $S(\mathcal{D})$ и $T(\mathcal{D})$ – диагональные матрицы:

$$S(\mathcal{D}) = \text{diag}(\partial_{\bar{z}}^{-s_1}, \dots, \partial_{\bar{z}}^{-s_k}), \quad T(\mathcal{D}) = \text{diag}(\partial_{\bar{z}}^{t_0-t_1}, \dots, \partial_{\bar{z}}^{t_0-t_k}).$$

Считаем, что $\partial_{\bar{z}}^0$ есть единица. В первой группе краевых условий (5.10) отсутствуют члены, для которых $t_0 - t_j = 0$, а в 3-й – $s_i = 0$.

Для системы (5.9), очевидно, имеем

$$\det(S(\xi)\mathcal{L}_0(x, \xi)T(\xi)) = (\xi_1 + i\xi_2)^{kt_0-n} \det \mathcal{L}_0(x, \xi).$$

Поэтому согласно (5.2) она эллиптическая. Далее заметим, что матрица T выравнивает порядки столбцов матрицы $\mathcal{L}$, а S – порядки строк, и они становятся равными t_0 . (Под порядком строки или столбца понимаем наибольший из порядков элементов.) Заметим также, что число краевых условий (5.10) равно kt_0 . Таким образом, (5.9), (5.10) – эллиптическая задача, изученная в § 2–4.

Пусть l – максимальный из порядков граничных условий (5.10). Возможны два случая: а) $l = t_0 - 1$, б) $l = t_0 + o_0$, $o_0 \geq 0$, так как третье из краевых условий порядка $t_0 - 1$, а второе $t_0 + o_0$.

Рассмотрим оба случая по отдельности. При $l = t_0 - 1$ следуем § 3. Выровним порядки всех граничных условий до $t_0 - 1$ при помощи дифференцирований по дуге и составим матрицу $G = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{t_0}\}$, записав краевые условия в виде (3.2). Далее, представим систему (5.9) в виде (2.1) с $r = t_0$ и найдем разложение (1.2) для матрицы (2.4). Тогда критерием нетеровости задачи (5.9), (5.10) и вместе с ней задачи (5.1), (5.3) будет условие

$$\det \tau(x) \neq 0 \quad \text{всюду на} \quad \partial Q, \quad \tau = (\overline{G} \overline{T}_1, GT_2). \quad (5.11)$$

При выполнении (5.11) индекс задачи (5.1), (5.3), согласно (3.3) с $r = t_0$ и (5.8), дается равенством

$$J = 2\kappa - kt_0(t_0 - 1)(m - 1) - \sum_{j=1}^k (t_j + s_j)(m - 1), \quad (5.12)$$

где κ – индекс $\det \tau$. Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 10. Пусть $o_0 \leq -1$. Тогда для нетеровости (5.1), (5.3) необходимо и достаточно выполнения условия (5.11). При этом индекс задачи дается равенством (5.12).

СЛЕДСТВИЕ 9. Пусть все корни полинома $P(\lambda) = \det \mathcal{L}_0(x, \xi)$, $\xi = (-\lambda, 1)$ (см. (5.2)), расположены выше прямой $\text{Im } \lambda = 0$ или все ниже. Тогда в (5.11), (5.12) $\tau = \overline{G}$ в первом случае и $\tau = G$ во втором.

Следствие доказывается аналогично следствию 8.

Пусть теперь $o_0 \geq 0$. Тогда $l = t_0 + o_0 \geq t_0$, поэтому здесь следуем § 4. (В условиях (А), (В) и в пространствах $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ следует заменить r на $r + 1$.) Сначала повышаем порядок системы (5.9) до $l + 1$ в соответствии с п. 1) алгоритма из п. 3 § 4, затем выполняем и последующие шаги алгоритма. В результате получим

критерий нетеровости в форме (5.11) и с учетом (4.9), где $r = t_0$, и (5.8) имеем для индекса формулу

$$J = 2\kappa - \left(kl(l+1) + \sum_{j=1}^k (t_j + s_j) \right) (m-1), \quad (5.13)$$

где $l = t_0 + o_0$, κ – индекс функции $\det \tau$. Итак, имеет место

ТЕОРЕМА 11. *При $o_0 \geq 0$ для нетеровости (5.1), (5.3) необходимо и достаточно выполнения условия (5.11). При этом индекс задачи дается равенством (5.13).*

СЛЕДСТВИЕ 10. *Когда все корни $P(\lambda)$ расположены выше прямой $\text{Im}(\lambda) = 0$, имеет место утверждение теоремы с $\tau = \overline{G}$, когда ниже – с $\tau = G$.*

3. Правильно эллиптический случай. Система (5.1) правильно эллиптическая, если корни характеристического полинома $P(\lambda)$, с учетом кратности, расположены поровну в верхней и нижней полуплоскостях. Для таких систем число n в условии 1) четное. Краевое условие здесь такое:

$$\mathcal{B}(x; \mathcal{D})v = \varphi \quad \text{на} \quad \partial Q, \quad (5.14)$$

где теперь $\mathcal{B}$ – прямоугольная $((n/2) \times k)$ -матрица. Все предположения пп. 1, 2 сохраняются, за исключением поля, над которым рассматриваются пространства; $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ – здесь комплексные пространства над полем $\mathbb{C}$. Поступая аналогично § 2–4, получим, что справедлива

ТЕОРЕМА 12. *Задача (5.1), (5.14), где $o_0 \leq -1$, нетерова лишь тогда, когда имеет место (5.11). При этом индекс задачи дается равенством*

$$J = \kappa - 2^{-1} \left\{ kt_0(t_0 - 1) + \sum_{j=1}^k (t_j + s_j) \right\} (m-1), \quad (5.15)$$

где κ – индекс функции $\det \tau$.

В случае $o_0 \geq 0$ критерием нетеровости является (5.11), а индекс дается равенством

$$J = \kappa - 2^{-1} \left\{ kl(l+1) + \sum_{j=1}^k (t_j + s_j) \right\} (m-1), \quad (5.16)$$

где κ – индекс функции $\det \tau$, $l = t_0 + o_0$.

(Разумеется матрица τ в (5.15) отличается от τ в (5.16).)

Рассмотрим теперь задачу (5.1), (5.3) с действительными коэффициентами над действительными пространствами. Тогда система (5.1) автоматически правильно эллиптическая. Это следует из рассуждений, аналогичных п. 2 § 2. В данном случае также имеет место действительный аналог теоремы 12 с той же формулой для индекса.

4. Результаты предыдущих пунктов имеют место и для более общих краевых условий. Опишем их. Пусть $L_1, \dots, L_s$ – такие же части границы, как и в п. 2 § 3. И пусть порядок каждой строки матрицы $\mathcal{B}(x, \mathcal{D})$ меняется при переходе от одной части границы к другой, т.е. на L_1 он имеет одно значение, на L_2 другое и т.д. Тогда o_i также меняется. Пусть $o_0 = \max_j \max_i \{o_i|_{L_j}\}$. Теперь в условиях (А), (В) и пр. o_0 именно такое. При помощи дифференцирований по дуге выровниваем порядки краевых условий на каждом L_j (последнее не влияет на нетеровость и индекс). В результате мы приходим к изученной ранее задаче. Следовательно, и в данном случае имеют место все предыдущие утверждения.

Краевые задачи для правильно эллиптических систем изучены в [7], но там нет формул для индекса. Однако последние для правильно эллиптических систем известны. Это формулы типа Атьи–Зингера. Наши формулы удобнее для практических применений. Однако такое применение к системе Стокса дается в следующем параграфе.

5. Алгоритм нахождения индекса для систем Дуглиса–Ниренберга.

1) Если в краевой задаче (5.1), (5.3) $t_0 - t_j > 0$, $t_0 = \max_j(t_j)$, заменим j -ю компоненту v_j искомой на новую u_j (в уравнениях и краевых условиях) по формуле $v_j = \partial_{\bar{z}}^{t_0 - t_j} u_j$. Прделаем это для каждого j и сохраним порядок расположения уравнений. И при этом каждый раз к краевым условиям нужно добавлять $t_0 - t_j$ краевых условий: $\operatorname{Re}(\partial_{\bar{z}}^{i-1} u_j) = \varphi_{ij}$, $i = 1, \dots, t_0 - t_j$, $\partial_{\bar{z}}^0 = 1$.

2) Если $s_j < 0 = \max\{s_1, \dots, s_k\}$, действуем на j -е уравнение системы, полученной на предыдущем шаге 1), оператором $\partial_{\bar{z}}^{-s_j}$. К краевым условиям добавим условия

$$\operatorname{Re}\left(\partial_{\bar{z}}^{i-1} \sum_{q=1}^k a_{iq}(x, \mathcal{D}) \partial_{\bar{z}}^{t_0 - t_q} u_q\right) = \psi_{ij}, \quad i = 1, \dots, -s_j.$$

В результате 1), 2) мы получим краевую задачу (5.9), (5.10) для эллиптической системы порядка t_0 .

3) Применим к (5.9), (5.10) алгоритм из п. 3 § 4. В результате получим формулу (5.12) или (5.13).

4) В случае, когда все корни характеристического многочлена $P(\lambda)$ расположены в верхней полуплоскости или все в нижней, выполним 1), 2) с учетом следствий 9, 10.

5) Краевую задачу (5.1), (5.14) для правильно эллиптической системы сначала представим в виде (5.1), (5.3), как в п. 7) алгоритма п. 3 § 4. Затем выполним 1)–3). Если к тому же коэффициенты действительные, задачу рассматриваем над действительными пространствами.

6) Когда на разных частях границы заданы краевые условия разных порядков, сначала выровниваем порядки на всей границе. Затем выполняем 1)–5).

§ 6. Краевые задачи для системы Стокса

1. Компоненты вектора скорости $u = (u^1, u^2)$ и давление q установившегося плоско-параллельного течения вязкой несжимаемой однородной жидкости (с ма-

лым числом Рейнольдса) удовлетворяют системе Стокса:

$$\Delta u - \nabla p = f, \quad \operatorname{div} u = 0,$$

где $p = \nu^{-1}q$, Δ – оператор Лапласа, $\nabla = (\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$, $\operatorname{div} u = \sum_i \mathcal{D}_i u^i$. Здесь ν – кинематический коэффициент вязкости, который считаем постоянной. Плотность жидкости положена равной единице. Переход от давления q к p совершен для удобства [15].

Мы хотим изучить краевые задачи для системы Стокса, где $\operatorname{div} u$ не обязательно равна нулю. А именно, задачи вида

$$\Delta u^j - \mathcal{D}_j p = f_j, \quad j = 1, 2, \quad \mathcal{D}_1 u^1 + \mathcal{D}_2 u^2 = f_3, \quad x \in Q, \quad (6.1)$$

$$\mathcal{B}(x, \mathcal{D})U = \varphi \quad \text{на} \quad \partial Q, \quad (6.2)$$

где $U = (u^1, u^2, p)$ – столбец из неизвестных. Легко видеть, что (6.1) есть система Дуглиса–Ниренберга. Здесь набор чисел $t_1 = t_2 = 2$, $t_3 = 1$, $s_1 = s_2 = 0$, $s_3 = -1$ удовлетворяет всем требованиям п. 1 § 5. В частности, $\det \mathcal{L}_0(\xi) = |\xi|^4 \neq 0$ при $\xi \neq 0$. Кроме того, она правильно эллиптическая.

Матрица $\mathcal{B}(x, \mathcal{D})$ краевого условия – (2×3) -матрица, элементы которой – дифференциальные выражения порядка не больше единицы с действительными коэффициентами.

В этом пункте мы получим факторизацию (1.2) для эллиптической матрицы, соответствующей (6.1). Она потребуется нам для нахождения индекса краевых задач.

В соответствии с алгоритмом из п. 5 § 5 краевые условия представим в виде

$$\operatorname{Re}(\mathcal{B}(x, \mathcal{D})U) = \varphi_1, \quad \operatorname{Re}(-i\mathcal{B}(x, \mathcal{D})U) = \varphi_2.$$

В соответствии с пп. 1), 2) алгоритма, заменим p на новую искомую v^3 посредством уравнения Коши–Римана:

$$p = \partial_{\bar{z}} v^3 = \mathcal{D}_1 v^3 + i\mathcal{D}_2 v^3,$$

и добавим к краевым условиям условие $\operatorname{Re} v^3 = \psi_1$. Действуем на третье уравнение оператором $\partial_{\bar{z}}$ и добавим к условиям на границе $\operatorname{Re}(\operatorname{div} u) = \psi_2$. После этих действий мы имеем краевую задачу типа (5.9), (5.10). Запишем уравнения в матричной форме и умножим слева на матрицу, обратную матрице коэффициентов при $\mathcal{D}_1^2 = \partial^2 / \partial x_1^2$. Тогда имеем

$$\mathbf{a}\mathcal{D}_2^2 v + \mathbf{b}\mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2 v + \mathcal{D}_1^2 v = f, \quad x \in Q, \quad (6.2)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\mathcal{B}(\mathcal{D}) \operatorname{diag}(1, 1, \partial_{\bar{z}})v) &= \varphi_1, & \operatorname{Re} v_3 &= \psi_1, \\ \operatorname{Re}(-i\mathcal{B}(x, \mathcal{D}) \operatorname{diag}(1, 1, \partial_{\bar{z}})v) &= \varphi_2, & \\ \operatorname{Re}(\mathcal{D}_1 v^1 + \mathcal{D}_2 v^2) &= \varphi_3, & x &\in \partial Q, \end{aligned} \quad (6.3)$$

где

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ -1 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ i & 1 & i \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}, \quad v^j = u^j, \quad j = 1, 2,$$

φ_1 и φ_2 – двухкомпонентные векторы, φ_3, ψ_1 – скалярные функции.

Согласно § 5 задача (6.1), (6.2) в смысле нетеровости эквивалентна (6.2), (6.3). (Пространства, над которыми рассматривается задача, такие же, как в § 5.) Система (6.2) – эллиптическая система трех уравнений второго порядка с характеристическим полиномом $P(\lambda) = (\lambda - i)^4(\lambda + i)^2$. Теперь в соответствии с нашим алгоритмом составим матрицу (2.4):

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{E} \\ \mathbf{a} & \mathbf{b} \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{0}$ и $\mathbf{E}$ – нулевая и единичная матрицы порядка 3. Характеристический многочлен $\det(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{E})$ равен $(\lambda - i)^4(\lambda + i)^2$. Поэтому матрица $\mathbf{B}$ имеет два собственных значения: i и $-i$, первое кратности 4, второе кратности 2. В соответствии с § 1 определим матрицы $\mathcal{P}_{\pm}$ – (1.3). Несложные вычисления дают следующие выражения для $\mathcal{P}_{+}$ и $\mathcal{P}_{-}$:

$$\mathcal{P}_{+} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2i & 0 & -i \\ i & 3 & 0 & 1 & i & 0 \\ 1 & -i & 3 & -i & -1 & i \\ -i & 1 & 0 & 3 & -i & 0 \\ 0 & -2i & -1 & 0 & 2 & i \\ i & 1 & -i & 1 & -i & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P}_{-} = E - \mathcal{P}_{+}.$$

Легко проверить, что последние четыре столбца $\mathcal{P}_{+}$ и последние два $\mathcal{P}_{-}$ базисные. Обозначим их e_1, e_2, e_3, e_4 и e_5, e_6 соответственно. Тогда матрица T_0 , составленная из $e_1, \dots, e_6$, и реализует требуемую факторизацию (1.2). Выпишем $\Lambda_1, \Lambda_2, T_0, T_0^{-1}$:

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & i & -1 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & -1 & 2i & -1 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}, \quad \Lambda_2 = \begin{pmatrix} -2i & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T_0 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 2i & 0 & -i & 0 & i \\ 0 & 1 & i & 0 & -i & 0 \\ 3 & -i & -1 & i & 1 & -i \\ 0 & 3 & -i & 0 & i & 0 \\ -1 & 0 & 2 & i & 2 & -i \\ -i & 1 & -i & 3 & i & 1 \end{pmatrix}, \quad T_0^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2i & 0 & 0 & 1 & 0 \\ i & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & i & 0 & -i & 1 & 0 \\ -2i & 0 & i & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Первые четыре столбца T_0 есть T_1 , а последние два есть T_2 . Легко видеть также, что i и $-i$ есть собственные значения Λ_1 и Λ_2 соответственно.

Выпишем также необходимое и достаточное условия нетеровости задачи (6.1), (6.2) и формулу для индекса. Заметим, что максимальный порядок краевых условий в (6.3) равен единице. Поэтому согласно алгоритму нужно выровнять порядки краевых условий до единицы при помощи дифференцирования по дуге d/ds . После чего представим краевые условия в матричной форме:

$$\operatorname{Re}(\mathbf{b}_1 \mathcal{D}_2 v + \mathbf{b}_2 \mathcal{D}_1 v) = \varphi, \quad (6.4)$$

где $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ – прямоугольные (6×3) -матрицы. Положим $G = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$. Тогда для нетеровости задачи необходимо и достаточно выполнения условия:

$$\det \tau(x) = \det(\overline{G} \overline{T}_1, GT_2) \neq 0 \quad \text{всюду на } \partial Q, \quad (6.5)$$

и при выполнении последнего индекс задачи дается равенством (5.15), где $t_1 = t_2 = 2$, $t_3 = 1$, $s_1 = s_2 = 0$, $s_3 = -1$, $t_0 = 2$, $k = 3$. Имеем

$$J = \varkappa - 5(m - 1), \quad (6.6)$$

где $\varkappa = \operatorname{ind}(\det \tau)$.

2. Краевая задача с условием прилипания на границе. Эта задача хорошо изучена (см. [16]), она фредгольмова с одномерным ядром. Здесь мы даем новое доказательство этого. Рассмотрим для системы (6.1), где $f_j \in \mathcal{X}(r, 0; Q)$, $j = 1, 2$, $f_3 \in \mathcal{X}(r, 1; Q)$, краевую задачу с условиями

$$u^j = \varphi_j \in \mathcal{Y}(r, -2; \partial Q) \quad (6.7)$$

на границе. И пусть искомые u^j , $j = 1, 2$, и p принадлежат $\mathcal{X}(r, 2; Q)$ и $\mathcal{X}(r, 1; Q)$ соответственно (обозначения см. в §5). Этой задаче соответствует задача (6.2), (6.3) со следующими краевыми условиями: $\operatorname{Re} v^1 = \varphi_1$, $\operatorname{Re} v^2 = \varphi_2$, $\operatorname{Re} v^3 = \varphi_3$, $\operatorname{Re}(-iv^1) = \varphi_4$, $\operatorname{Re}(-iv^2) = \varphi_5$, $\operatorname{Re}(\mathcal{D}_2 v^2 + \mathcal{D}_1 v^1) = \varphi_6$. Подействуем на первые пять из них оператором $d/ds = \dot{x}_2 \mathcal{D}_2 + \dot{x}_1 \mathcal{D}_1$, $\dot{x}_j = dx_j/ds$. Затем представим краевые условия в виде (6.4). Тогда для τ из (6.5), (6.6) в данном случае имеем

$$\tau = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \dot{x}_2 & 3\dot{x}_1 - 2i\dot{x}_2 & i\dot{x}_1 & i\dot{x}_2 & i\dot{x}_1 & i\dot{x}_2 \\ -\dot{x}_1 & \dot{x}_2 & 2\dot{x}_1 - i\dot{x}_2 & -i\dot{x}_1 & 2\dot{x}_1 - i\dot{x}_2 & -i\dot{x}_1 \\ 3\dot{x}_2 + i\dot{x}_1 & \dot{x}_1 + i\dot{x}_2 & i\dot{x}_1 - \dot{x}_2 & 3\dot{x}_1 - i\dot{x}_2 & \dot{x}_2 + i\dot{x}_1 & \dot{x}_1 - i\dot{x}_2 \\ i\dot{x}_2 & 2\dot{x}_2 + 3i\dot{x}_1 & -\dot{x}_1 & -\dot{x}_2 & \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \\ -i\dot{x}_1 & i\dot{x}_2 & \dot{x}_2 + 2i\dot{x}_1 & \dot{x}_1 & -\dot{x}_2 - 2i\dot{x}_1 & -\dot{x}_1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда легко следует, что $\det \tau = -4^{-3}(\dot{x}_2 + i\dot{x}_1)^5$. Очевидно, что $\det \tau(x) \neq 0$ всюду на ∂Q . Значит, задача (6.1), (6.7) нетерова. Тогда согласно (6.6) получим, что индекс задачи равен 0, т.е. фредгольмова. Опишем ядро задачи. Пусть правые части в (6.1), (6.7) равны нулю. Умножим первое уравнение на u^1 , второе на u^2 , сложим и проинтегрируем по частям. Тогда с учетом третьего уравнения и краевых условий получим

$$\int_Q (|\nabla u^1|^2 + |\nabla u^2|^2) dx = 0.$$

Отсюда с учетом краевых условий получим: $u^j(x) = 0$, $j = 1, 2$, всюду в $\bar{Q}$. Тогда из уравнений имеем $p = \text{const}$. Таким образом, $\dim \text{Ker } \mathcal{A} = 1$, где $\mathcal{A}$ – оператор задачи (6.1), (6.7). Так как $\text{ind } \mathcal{A} = 0$, имеем $\dim \text{Ker } \mathcal{A}^* = 1$. Проинтегрировав третье уравнение (6.1), получим, что условие

$$\int_Q f_3 dx - \int_{\partial Q} (\varphi_1 n_1 + \varphi_2 n_2) ds = 0, \quad (6.8)$$

где $(n_1, n_2) = \mathbf{n}$ – нормаль к границе, необходимо для разрешимости (6.1), (6.7). Теперь заметим, что левая часть (6.8) определяет нетривиальный непрерывный функционал U^* над пространством правых частей (6.1), (6.7). С учетом этого заметим, что (6.8) эквивалентно включению $U^* \in \text{Ker } \mathcal{A}^*$. Значит, для разрешимости (6.1), (6.7) необходимо и достаточно выполнения условия $\langle U^*, \mathcal{A}U \rangle = 0$, т.е. (6.8). Итак, доказана

ТЕОРЕМА 13 (ср. [16]). *Задача (6.1), (6.7) фредгольмова с одномерным ядром: $u_1 = u_2 = 0$, $p = c \in \mathbb{R}$. Для разрешимости неоднородной задачи необходимо и достаточно выполнения (6.8).*

3. Задача с косой производной. Так мы называем, по аналогии с известной задачей для гармонических функций, задачу для системы (6.1) с краевыми условиями

$$\beta \mathcal{D}_2 u^j + \delta \mathcal{D}_1 u^j = \varphi_j \in \mathcal{Y}(r, -1; \partial Q), \quad (6.9)$$

где $\beta^2 + \delta^2 \neq 0$ всюду на ∂Q , β, δ – достаточно гладкие функции (см. условия (A), (B) §5). Справедлива

ТЕОРЕМА 14. *Задача (6.1), (6.9) нетерова, и ее индекс дается равенством $J = -4(\text{ind}(\delta + i\beta) + m - 1)$.*

(Пространства, над которыми рассматривается задача, такие же, как в п. 2.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поступая аналогично п. 2, получим $\det \tau = -4^{-3} \times (\dot{x}_2 + i\dot{x}_1)(\delta - i\beta)^4$. Следовательно, условие: $\delta^2(x) + \beta^2(x) \neq 0$ всюду на ∂Q – необходимо и достаточно для нетеровости задачи. Формула для индекса следует из (6.6) с учетом $\text{ind}(\delta - i\beta) = -\text{ind}(\delta + i\beta)$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 11. *Пусть векторное поле (δ, β) в каждой точке границы направлено по касательной. Тогда задача фредгольмова, причем ядро размерности $2m + 3$. Для разрешимости задачи необходимо и достаточно выполнения $2m + 3$ условий*

$$\int_{\Gamma_j} \varphi_i ds = 0, \quad i = 1, 2, \quad \int_Q f_3 dx = \int_{\partial Q} (-x_2 \varphi_1 + x_1 \varphi_2) ds, \quad (6.10)$$

где Γ_j , $j = 0, \dots, t$, – связные компоненты границы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем на Γ_j естественную параметризацию. Тогда, очевидно, $(\delta, \beta) = (\dot{x}_1, \dot{x}_2)$ или $(\delta, \beta) = -(\dot{x}_1, \dot{x}_2)$. Отсюда и из теоремы следует, что индекс равен нулю, т.е. задача фредгольмовая. Все условия (6.10), кроме последнего, получаются из требования однозначности u^1 и u^2 в $\bar{Q}$, после интегрирования (6.9) по Γ_j (заметим, что левая часть (6.9) есть du^j/ds). Поэтому они необходимы для разрешимости. Пусть они выполнены; тогда (6.9) можно представить в виде

$$u^i = \int_0^s \varphi_i(x(s)) ds + c_i^j \quad \text{на } \Gamma_j, \quad i = 1, 2, \quad j = 0, \dots, m, \quad (6.11)$$

где c_i^j – произвольные действительные числа. Поэтому при фиксированных c_i^j задача аналогична задаче из теоремы 13. Подставим в (6.8) вместо φ_i правые части (6.11); тогда получим, что последнее соотношение (6.10) также необходимо и достаточно для разрешимости задачи вместе с остальными. Следствие доказано.

4. Краевая задача со свободной границей. Рассмотрим для (6.1) задачу с краевыми условиями:

$$\beta_{0i1} + \delta_{0i2} = \varphi_i \in \mathcal{Y}(r, -1; \partial Q), \quad (6.12)$$

где β, δ – достаточно гладкие функции, $o_{11}(u) = 2\mathcal{D}_1 u^1 - p$, $o_{22}(u) = 2\mathcal{D}_2 u^2 - p$, $o_{12}(u) = o_{21}(u) = \mathcal{D}_2 u^1 + \mathcal{D}_1 u^2$. (Пространства, над которыми рассматривается краевая задача, как здесь, так и ниже такие же, как в п. 2.) Собственно *задачей со свободной границей* называется задача, для которой (β, δ) есть нормаль к границе [15]. (При этом и граница области искомая, т.е. подлежит определению, но этим мы тут не занимаемся.)

Здесь для определителя матрицы τ из (6.5) получим $\det \tau = 4^{-1}(\dot{x}_2 + i\dot{x}_1) \times (\beta - i\delta)^4$. Следовательно, (6.5) эквивалентно условию: $(\beta - i\delta)(x) \neq 0$ всюду на ∂Q . При этом индекс дается равенством $J = 4(\text{ind}(\beta - i\delta) - m + 1)$. Таким образом, справедлива

ТЕОРЕМА 15. *Для нетеровости задачи (6.1), (6.12) необходимо и достаточно выполнения условия: $(\beta - i\delta)(x) \neq 0$ всюду на ∂Q . Для индекса имеем: $J = 4(\text{ind}(\beta - i\delta) - m + 1)$.*

Согласно теореме для фредгольмовости задачи необходимо и достаточно, чтобы $\text{ind}(\beta - i\delta) = m - 1$. Отметим такие случаи:

- 1) (β, δ) совпадает с нормалью к границе;
- 2) (β, δ) совпадает с вектором касательной;
- 3) на одних компонентах границы имеем 1), на других 2).

В случае 1) можно описать ядро задачи и получить условия, обеспечивающие разрешимость задачи.

СЛЕДСТВИЕ 12 (ср. [18]). *Задача со свободной границей фредгольмовая, причем общее решение однородной задачи дается равенствами $p = 0$, $u^1 =$*

$ax_2 + b$, $u^2 = -ax_1 + b$, где $a, b, c \in \mathbb{R}$. Для разрешимости неоднородной задачи необходимо и достаточно выполнения условий

$$\begin{aligned} \int_Q (x_2 f_1 - x_1 f_2 + x_2 \mathcal{D}_1 f_3 - x_1 \mathcal{D}_2 f_3) dx &= \int_{\partial Q} (x_2 \varphi_1 - x_1 \varphi_2) ds, \\ \int_Q (f_i + \mathcal{D}_i f_3) dx &= \int_{\partial Q} \varphi_i ds, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (6.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предыдущему замечанию о фредгольмовости достаточно описать ядро задачи и получить (6.13). Для любых вектор-функций $u, v \in \mathcal{X}(r, 0, 0; Q)$ и любого $p \in \mathcal{X}(r, 1; Q)$ имеем тождество

$$\begin{aligned} \int_Q \{(\Delta u - \nabla(p - \operatorname{div} u)) \cdot v - p \operatorname{div} v\} dx \\ = -2^{-1} \sum_{i,j=1}^2 \int_Q (\mathcal{D}_j u^i + \mathcal{D}_i u^j)(\mathcal{D}_j v^i + \mathcal{D}_i v^j) dx + \int_{\partial Q} o_n(u) \cdot v ds, \end{aligned} \quad (6.14)$$

где $u = (u^1, u^2)$, $v = (v^1, v^2)$, $o_n = (o_{11}n_1 + o_{12}n_2, o_{21}n_1 + o_{22}n_2)$. Соотношение (6.14) получается интегрированием тождества

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^2 \mathcal{D}_i(o_{ji}(u)v^j) &= (\Delta u - \nabla(p - \operatorname{div} u)) \cdot v - p \operatorname{div} v \\ &+ 2^{-1} \sum_{i,j=1}^2 (\mathcal{D}_j u^i + \mathcal{D}_i u^j)(\mathcal{D}_j v^i + \mathcal{D}_i v^j). \end{aligned}$$

Пусть u, p – решение однородной задачи, и пусть $v = u$. Тогда из (6.14) получим $\mathcal{D}_j u^i + \mathcal{D}_i u^j = 0$. Отсюда следует, что $u^1 = ax_2 + b$, $u^2 = -ax_1 + b$, где $a, b, c \in \mathbb{R}$. Из краевых условий и уравнений следует тогда, что $p = 0$. Итак, $\dim \operatorname{Ker} \mathcal{A} = 3$. Значит, $\dim \operatorname{Ker} \mathcal{A}^* = 3$. Рассмотрим (6.14), где u, p – решение неоднородной задачи. Положим в нем последовательно v равным $(x_2, -x_1)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$. В результате получим необходимость (6.13). Достаточность доказывается аналогично теореме 13. Следствие доказано.

5. Смешанная краевая задача. Пусть L_1 и L_2 – части границы такие же, как в п. 2 § 3. Рассмотрим для системы (6.1) задачу с краевыми условиями

$$\begin{aligned} u^j &= \varphi_j \in \mathcal{Y}(r, -2; L_1), \quad o_{i1}(u)n_1 + o_{i2}(u)n_2 = \psi_i, \\ \psi_i &\in \mathcal{Y}(r, -1; L_2), \quad i, j = 1, 2, \end{aligned} \quad (6.15)$$

где (n_1, n_2) – нормаль к границе. Справедлива

ТЕОРЕМА 16. *Задача (6.1), (6.15) однозначно разрешима для любых правых частей.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и выше, получим, что определитель τ равен $-4^{-3}(\dot{x}_2 + i\dot{x}_1)^5$ на L_1 и $4^{-1}(\dot{x}_2 + i\dot{x}_1)(n_1 - in_2)^4$ на L_2 . С учетом того, что $(n_1, n_2) = \pm(\dot{x}_2, -\dot{x}_1)$, отсюда следует $\text{ind}(\det \tau) = 5(m - 1)$. Следовательно, ввиду (6.6) задача фредгольмовая. Пусть в (6.14) u, p – решение однородной задачи и $v = u$. Тогда получим, что $u^1 = ax_2 + b$, $u^2 = -ax_1 + b$, $p = 0$. С учетом равенства $u^j = 0$ на L_1 получим, что однородная задача имеет только тривиальное решение. Это в силу фредгольмовости доказывает теорему.

6. Пусть $a = (\beta, \delta)$ – гладкое векторное поле, определенное на ∂Q , $a^\perp = (\delta, -\beta)$ – ортогональное поле. Для системы (6.1) рассмотрим задачу с условиями

$$o_n(u) \cdot a + ku \cdot a = \varphi_1 \in \mathcal{Y}(r, -1; \partial Q), \quad u \cdot a^\perp = \varphi_2 \in \mathcal{Y}(r, -2; \partial Q), \quad (6.15)$$

где $u = (u^1, u^2)$; $k > 0$ – достаточно гладкая функция (см. условия (A), (B) §5); $u \cdot a$ – обычное скалярное произведение векторов.

Условие (6.15), где a – поле касательных, возникает в вопросах управления течением жидкости при помощи тонкой полимерной смазки [17].

Как и ранее, здесь получим $\det \tau = 2 \cdot 4^{-3}|a|^4(\dot{x}_2 + i\dot{x}_1)^5$. Следовательно, задача тогда и только тогда нетеровая, когда $a(x) \neq 0$ всюду на ∂Q . При этом из (6.6) получим, что индекс J равен 0, т.е. задача фредгольмова.

Опишем теперь ядро задачи. С этой целью заметим, что подынтегральное выражение в граничном члене (6.14) можно представить в виде

$$o_n(u) \cdot v = [(o_n(u) \cdot a)(v \cdot a) + (o_n(u) \cdot a^\perp)(v \cdot a^\perp)]/|a|^2.$$

Пусть u, p – решение однородной задачи и $v = u$; тогда с учетом предыдущего равенства из (6.14) получим

$$2^{-1} \sum_{i,j=1}^2 \int_Q (\mathcal{D}_j u^i + \mathcal{D}_i u^j)^2 dx + \int_{\partial Q} k|a|^{-2}(u \cdot a)^2 ds = 0. \quad (6.16)$$

Так как $k > 0$, отсюда согласно второму граничному условию имеем, что $u(x) = 0$ на ∂Q . Тогда из (6.16), аналогично следствию 12, получим: $u(x) = 0$ всюду в $\bar{Q}$. Тогда из уравнений получим $p = c \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим теперь два случая:

- 1) a совпадает с полем касательных к ∂Q ;
- 2) нет такого совпадения.

В первом случае коэффициент при p в граничном условии есть нуль, а во втором нет. Поэтому в случае 1) однородная задача имеет одномерное ядро: $u = 0$, $p = c \in \mathbb{R}$, а во втором – ядро тривиальное. Значит, в силу фредгольмовости задачи во втором случае задача однозначно разрешима для любых правых частей. А для разрешимости задачи в случае 1) необходимо и достаточно выполнения условия

$$\int_Q f_3 dx = \int_{\partial Q} \varphi_2 n \cdot a^\perp / |a|^2 ds. \quad (6.17)$$

Оно следует из интегрирования третьего равенства (6.1) с учетом равенств

$$u \cdot n = [(u \cdot a)(n \cdot a) + (u \cdot a^\perp)(n \cdot a^\perp)]/|a|^2, \quad n \cdot a = 0.$$

Итак, имеет место

ТЕОРЕМА 17. Пусть $a = a(x) \neq 0$, $x \in \partial Q$, не является полем касательных; тогда задача (6.1), (6.15) однозначно разрешима для любых правых частей. Если a – поле касательных, то $u = 0$, $p = c \in \mathbb{R}$ – решение однородной задачи. Для разрешимости неоднородной задачи необходимо и достаточно выполнения условия (6.17).

Автор благодарен В. В. Жикову, А. П. Солдатову, Е. И. Моисееву за полезные обсуждения.

Список литературы

1. Бицадзе А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981.
2. Вексуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. 2-е изд., перераб. М.: Наука, 1988.
3. Вольперт А. И. Об индексе и нормальной разрешимости граничных задач для эллиптических систем на плоскости // Тр. ММО. 1961. Т. 10. С. 41–87.
4. Жура Н. А. Краевые задачи типа Бицадзе–Самарского для эллиптических в смысле Дуглиса–Ниренберга систем // Дифференц. уравн. 1992. Т. 28. № 1. С. 81–91.
5. Солдатов А. П. Метод теории функций в краевых задачах на плоскости. 1. Гладкий случай // Изв. АН. Сер. матем. 1991. Т. 55. № 1. С. 1070–1100.
6. Сиражудинов М. М. О задаче Римана–Гильберта для эллиптических систем первого порядка в многосвязной области // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 11. С. 39–62.
7. Солонников В. А. Об общих краевых задачах для систем, эллиптических в смысле А. Дуглиса–Л. Ниренберга // Тр. МИАН. 1966. Т. 92. С. 235–297.
8. Виноградов В. С. Граничная задача для эллиптической системы первого порядка на плоскости // Дифференц. уравн. 1971. Т. 7. № 8. С. 1440–1448.
9. Вольперт А. И. Нормальная разрешимость граничных задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений на плоскости // Теор. и прикл. матем. 1958. Вып. 1. С. 28–57.
10. Сакс Р. С. Краевые задачи для эллиптических систем дифференциальных уравнений. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1975.
11. Боярский В. В. Теория обобщенного аналитического вектора // Ann. Polon. Mathem. 1968. Т. 17. № 3. С. 281–320.
12. Солдатов А. П. Общая краевая задача $(k-1)$ -го порядка для эллиптических уравнений // ДАН СССР. 1990. Т. 311. № 1. С. 39–43.
13. Пресдорф З. Некоторые классы сингулярных уравнений. М.: Мир, 1979.
14. Боярский В. В. Некоторые краевые задачи для уравнений эллиптического типа на плоскости. Дис. . . канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1955.
15. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1988.
16. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: ГИФМЛ, 1961.
17. Белоносов С. М., Черноус К. А. Краевые задачи для уравнений Навье–Стокса. М.: Наука, 1985.
18. Солонников В. А. Разрешимость задач о движении вязкой несжимаемой жидкости, ограниченной свободной поверхностью // Некоторые проблемы газовой динамики. Сб. научных трудов. Вып. XXII. Новосибирск: Изд-во ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1975. С. 182–197.

Дагестанский государственный университет
г. Махачкала, Россия

Поступило в редакцию
29.III.1995