Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Туницкий, О глобальной разрешимости гиперболических уравнений Монжа–Ампера, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1997, том 61, выпуск 5, 177–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/im163>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 12:52:31

УДК 517.95

Д. В. Туницкий

О глобальной разрешимости гиперболических уравнений Монжа–Ампера

Статья посвящена разрешимости задачи Коши для гиперболических уравнений Монжа–Ампера; в частности, для квазилинейных уравнений с двумя независимыми переменными. Доказано, что в классе многозначных решений указанная задача имеет единственное наибольшее решение. Понятие многозначного решения восходит к Г. Монжу, С. Ли и др. Оно является историческим предшественником понятия обобщенного решения в смысле Соболева–Шварца. В работе устанавливается связь между многозначными и обобщенными решениями линейных дифференциальных уравнений.

Библиография: 25 наименований.

Условимся, что все встречающиеся ниже многообразия являются гладкими связными хаусдорфовыми и паракомпактными. Фиксированная величина k принимает значения из множества $\{1, 2, \dots, \infty\}$.

1. Многозначные решения. Пусть

$$A + Bz_{xx} + 2Cz_{xy} + Dz_{yy} + E(z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2) = 0 \quad (1.1)$$

– уравнение Монжа–Ампера. Коэффициенты A, B, C, D и E зависят от x, y, p, q и z , где x и y – независимые переменные, $z = z(x, y)$ – неизвестная функция, и использованы обозначения Монжа

$$p = z_x(x, y), \quad q = z_y(x, y). \quad (1.2)$$

Будем считать, что A, B, C, D и E – C^k -гладкие функции, определенные во всем пространстве $\mathbb{R}^5$ параметров x, y, p, q и z .

Предположим, что z – дважды непрерывно дифференцируемая в некоторой области S плоскости xy функция, удовлетворяющая уравнению (1.1). Выражения (1.2) вместе с

$$x = x, \quad y = y, \quad z = z(x, y) \quad (1.3)$$

задают в пространстве $\mathbb{R}^5$ двумерную поверхность

$$\sigma: S \rightarrow \mathbb{R}^5. \quad (1.4)$$

В силу (1.1) и (1.2) вектор-функция $\sigma(x, y)$ удовлетворяет равенствам

$$\sigma^* \omega_0 = 0, \quad (1.5)$$

$$\sigma^* \omega_2 = 0. \quad (1.6)$$

Здесь σ^* – отвечающий отображению σ оператор поднятия дифференциальной формы на прообраз,

$$\begin{aligned} \omega_0 &= dz - p dx - q dy, \\ \omega_2 &= A dx \wedge dy + B dp \wedge dy + C(dx \wedge dp + dq \wedge dy) + D dx \wedge dq + E dp \wedge dq \end{aligned} \quad (1.7)$$

(см. [1, § 3] и [2]). Оператор поднятия σ^* коммутирует с оператором внешнего дифференцирования. Следовательно, из первого соотношения (1.5) вытекает

$$\sigma^*(\omega_1) = 0, \quad (1.8)$$

где

$$\omega_1 = d\omega_0 = dx \wedge dp + dy \wedge dq. \quad (1.9)$$

Согласно принципу Э. Картана всякое дифференциальное уравнение можно свести к замкнутой относительно внешнего дифференцирования системе внешних дифференциальных уравнений на подходящем многообразии [3, п. 79]. В частности, проведенные выше рассуждения показывают, что уравнению (1.1) в пространстве $\mathbb{R}^5$ отвечает система (1.5), (1.6), (1.8). Дифференциальная форма ω_0 задает в пространстве $\mathbb{R}^5$ контактную структуру, а ω_2 соответствует левой части уравнения Монжа–Ампера (1.1). Дифференциальная форма ω_2 выбрана таким образом, что коэффициенты при мономах $dx \wedge dy$ и $dq \wedge dy$ совпадают, и отсутствует сомножитель dz . Формы, обладающие этим свойством, называют *эффективными* [1, § 1]. В рассматриваемом случае простым алгебраическим критерием эффективности произвольной 2-формы ω служат условия

$$\frac{d}{dz} \lrcorner \omega = 0, \quad \omega \wedge \omega_1 = 0.$$

Пусть S – двумерное многообразие и (1.4) – погружение. Это погружение называется *многозначным решением* уравнения (1.1), если для него выполнены уравнения (1.5), (1.6) (см. [4]).

Мотивацией такого определения служит то, что в случае погружения (1.2)–(1.4) уравнения (1.5), (1.6) выполнены. Дополнительные обоснования можно найти в работах [1], [2], [5] и [6].

2. Гиперболичность. Пфаффиан эффективной дифференциальной формы ω_2

$$\text{Pf}(\omega_2) = -C^2 + BD - AE \quad (2.1)$$

с точностью до знака совпадает с дискриминантом характеристической формы уравнения (1.1), вычисленным на решении z [7, с. 492]. Если функция (2.1) отрицательна:

$$\text{Pf}(\omega_2) < 0, \quad (2.2)$$

то уравнение (1.1) называется *гиперболическим*.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Понятие гиперболичности можно распространить на уравнения, для которых оценка (2.2) выполнена со знаком “ $\leq$ ”. Это возможно сделать в случае, когда уравнение Монжа–Ампера удовлетворяет условию Е. Леви (см. [5], [6] и [8]).

Положим для $j = 1, 2$

$$\lambda_j = (-1)^{3-j} \sqrt{-\text{Pf}(\omega_2)}.$$

Характеристическим расслоением H_j уравнения (1.1) называется подрасслоение касательного расслоения $T\mathbb{R}^5$, слой $H_j(m)$ которого в каждой точке $m \in \mathbb{R}^5$ определяется равенством

$$H_j(m) = \{\xi \in T_m\mathbb{R}^5 \mid \xi \lrcorner (\omega_2 - \lambda_j \omega_1) = 0, \quad \xi \lrcorner \omega_0 = 0\}. \quad (2.3)$$

Имеют место две следующие леммы.

ЛЕММА 2.2. *Для характеристических расслоений H_1 и H_2 гиперболического уравнения (1.1) справедливы следующие свойства:*

- (a) H_j – двумерное C^k -подрасслоение в $T\mathbb{R}^5$ для $j = 1, 2$;
- (b) векторы $g_1 \in H_1(m)$ и $g_2 \in H_2(m)$ косоортогональны относительно ω_1 , т.е. $(g_1 \wedge g_2) \lrcorner \omega_1 = 0$;
- (c) если для фиксированного $j = 1, 2$ векторы g_1, g_2 принадлежат $H_j(m)$ и как $g_1 \neq 0$, так и $g_2 \neq 0$, то $(g_1 \wedge g_2) \lrcorner \omega_1 \neq 0$;
- (d) для всякой точки $m \in \mathbb{R}^5$ $H_1(m) \cap H_2(m) = 0$;
- (e) если для фиксированного $j = 1, 2$ векторы g_1, g_2 принадлежат $H_j(m)$ и как $g_1 \neq 0$, так и $g_2 \neq 0$, то $(g_1 \lrcorner \omega_1) \wedge (g_2 \lrcorner \omega_1) = c(\omega_2 + \lambda_j \omega_1)$, где c – отличный от нуля скаляр;
- (f) существуют два линейно независимых векторных поля

$$\xi_{j1}, \quad \xi_{j2} \quad (2.4)$$

класса C^k , порождающих характеристическое расслоение H_j .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) Можно показать, что характеристическое расслоение H_j порождается векторными полями

$$\begin{aligned} e_{j1} &= E \left(\frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial z} \right) - D \frac{\partial}{\partial p} + (C - \lambda_j) \frac{\partial}{\partial q}, \\ e_{j2} &= E \left(\frac{\partial}{\partial y} + q \frac{\partial}{\partial z} \right) + (C + \lambda_j) \frac{\partial}{\partial p} - B \frac{\partial}{\partial q}, \\ e_{j3} &= B \left(\frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial z} \right) + (C - \lambda_j) \left(\frac{\partial}{\partial y} + q \frac{\partial}{\partial z} \right) - A \frac{\partial}{\partial p}, \\ e_{j4} &= (C + \lambda_j) \left(\frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial z} \right) + D \left(\frac{\partial}{\partial y} + q \frac{\partial}{\partial z} \right) - A \frac{\partial}{\partial q}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Среди этих векторных полей ровно два линейно независимых в каждой точке m пространства $\mathbb{R}^5$. Это вытекает из определения λ_j и неравенства (2.2). Например, в тех точках, где $E \neq 0$, независимы e_{j1} и e_{j2} , а в тех точках, где $B \neq 0$, независимы e_{j3} и e_{j2} . Иными словами, H_1 и H_2 являются двумерными векторными C^k -подрасслоениями касательного расслоения $T\mathbb{R}^5$.

Свойства (b), (c), (d) и (e) проверяются непосредственно. Подробности см. в [9].

(f) Известно, что любое векторное расслоение над $\mathbb{R}^5$ тривиально [10, гл. 4, § 2]. Тем самым, для $j = 1, 2$ на $\mathbb{R}^5$ существуют два линейно независимых векторных поля (2.4), порождающих характеристическое расслоение H_j . Лемма доказана.

ЛЕММА 2.3. Пусть уравнение (1.1) гиперболично и (1.4) – некоторое C^k -решение этого уравнения. Тогда при $j = 1, 2$ на многообразии S существует единственное одномерное C^{k-1} -подрасслоение

$$h_j \subset TS \quad (2.6)$$

такое, что для всякой точки $r \in S$

$$\sigma_*(h_j(r)) \subset H_j(\sigma(r)). \quad (2.7)$$

Доказательство см. в п. 7.

По теореме Фробениуса для любой точки $r \in S$ при $j = 1, 2$ существует единственное максимальное интегральное многообразие

$$\gamma_{jr}: Z_{jr} \rightarrow S \quad (2.8)$$

подрасслоения (2.6), содержащее точку r , $r \in \gamma_{jr}(Z_{jr})$ (см. [11, п. 1.64]). Здесь Z_{jr} – соответствующее одномерное многообразие, т.е. подмногообразие (2.8) является кривой на многообразии S .

Будем называть эту кривую *характеристикой* уравнения (1.1), лежащей на решении (1.4), проходящей через точку $r \in S$ и принадлежащей j -у семейству, $j = 1, 2$.

3. Задача Коши. Зададим для уравнения (1.1) начальное значение – погружение

$$l: Z \rightarrow \mathbb{R}^5, \quad (3.1)$$

$Z = (a, b)$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, для которого

$$l^*(\omega_0) = 0. \quad (3.2)$$

Погружение (3.1), обладающее свойством (3.2), называется *начальной кривой* для уравнения (1.1), если это погружение *свободно*, т.е.

$$\dot{l}(t) \notin H_j(l(t)) \quad (3.3)$$

при $j = 1, 2$ и $a < t < b$.

Будем говорить, что многозначное решение (1.4) уравнения (1.1) является *решением задачи Коши*, заданной начальной кривой (3.1), если найдется такой монеоморфизм

$$L: Z \rightarrow S, \quad (3.4)$$

т.е. гомеоморфизм на свой образ, для которого

$$l = \sigma \circ L. \quad (3.5)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. В случае, если решение (1.4) C^k -гладко, из представления (3.5) вытекает, что (3.4) является C^k -вложением [11, п. 1.32]. Таким образом, решением задачи Коши (1.1), (3.1) служит пара (σ, L) , состоящая из удовлетворяющего системе уравнений (1.5), (1.6) C^k -погружения (1.4) и удовлетворяющего представлению (3.5) C^k -вложения (3.4).

Решение (σ, L) задачи (1.1), (3.1) называется *определенным*, если для каждой точки $r \in S$ пересечение

$$L(Z) \cap \gamma_{jr}(Z_{jr}) \quad (3.6)$$

при $j = 1, 2$ состоит в точности из одной точки. Ниже при доказательстве леммы 8.4 будет установлено, что для определенного решения в точности из одной точки r состоит также и пересечение

$$\gamma_{1r}(Z_{1r}) \cap \gamma_{2r}(Z_{2r}). \quad (3.7)$$

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть уравнение Монжа–Ампера (1.1) гиперболично, а его коэффициенты и начальная кривая (3.1) C^k -гладки. Предположим, что (σ, L) – определенное C^k -решение задачи (1.1), (3.1). Тогда существует единственный C^k -диффеоморфизм

$$\Phi: S \rightarrow W, \quad (3.8)$$

обладающий следующими свойствами:

(а) множество W является открытым подмножеством квадрата

$$\Pi(a, b) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid a < u, v < b\} \quad (3.9)$$

(бесконечного, если либо $a = -\infty$, либо $b = +\infty$) и содержит диагональ

$$\delta = \{(t, t) \in \mathbb{R}^2 \mid a < t < b\}; \quad (3.10)$$

(б) при $a < t < b$ имеет место равенство

$$\Phi \circ L(t) = (t, t); \quad (3.11)$$

(с) образом характеристики (2.8) при $j = 1$ служит интервал координатной прямой $u = \text{const}$, а при $j = 2$ – интервал координатной прямой $v = \text{const}$;

(д) вместе с каждой точкой (u, v) множество W содержит замкнутый треугольник

$$T(u, v) = \text{conv}((u, u), (u, v), (v, v)) \quad (3.12)$$

с вершинами (u, u) , (u, v) и (v, v) .

Доказательство см. в п. 8.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Диффеоморфизм (3.8), отвечающий согласно теореме 3.2 определенному решению (σ, L) , будем называть *характеристическим*.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. Из свойств (а) и (д) теоремы 3.2 вытекает, что множество

$$W = \Phi(S) \quad (3.13)$$

связно и односвязно, а потому стягиваемо [12, § 10]. Тем самым, всякому определенному C^k -решению (σ, L) задачи (1.1), (3.1) можно сопоставить отображения

$$\psi: W \rightarrow \mathbb{R}^5, \quad (3.14)$$

$$G: (a, b) \ni t \mapsto (t, t) \in W, \quad (3.15)$$

где

$$\psi = \sigma \circ \Phi^{-1}, \quad (3.16)$$

Φ – отвечающий решению (σ, L) характеристический диффеоморфизм и W – стягиваемое открытое подмножество квадрата (3.9), содержащее диагональ (3.10). По свойству (с) лежащие на этом решении характеристики – это интервалы координатных прямых, а по свойствам (б) и (д) пара (ψ, G) является определенным C^k -решением задачи (1.1), (3.1), для которого при $a < t < b$

$$\psi(t, t) = l(t). \quad (3.17)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.5. Фактически теорема 3.2 означает, что всякое определенное многозначное решение гиперболического уравнения Монжа–Ампера допускает введение в целом характеристической системы координат. Характеристические координаты были использованы в работе Г. Леви [13] для построения локального классического решения нелинейного гиперболического уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными. Уточнение методики Г. Леви опубликовано в статье [14].

4. Формула Даламбера. Воспользуемся замечанием 3.4 для построения многозначного определенного решения волнового уравнения

$$z_{xy} = 0, \quad (4.1)$$

принимаящего начальное значение (3.1).левой части уравнения (4.1) соответствует эффективная 2-форма

$$\tilde{\omega}_2 = (dx \wedge dp + dq \wedge dy)/2.$$

Поэтому в данном случае из внешних дифференциальных уравнений (1.6) и (1.8) для погружения (3.14), (3.16) получаем

$$\psi^*(dx \wedge dp) = 0, \quad \psi^*(dy \wedge dq) = 0. \quad (4.2)$$

Предположим, что для начальной кривой (3.1)

$$\begin{aligned} l^*(x) &= x_0(t), & l^*(y) &= y_0(t), \\ l^*(p) &= p_0(t), & l^*(q) &= q_0(t), & l^*(z) &= z_0(t), \end{aligned} \quad (4.3)$$

где в силу (3.2)

$$\dot{z}_0(t) - p_0(t)\dot{x}_0(t) - q_0(t)\dot{y}_0(t) = 0. \quad (4.4)$$

Характеристическое расслоение H_1 уравнения (4.1) согласно лемме 2.2, (f) и формулам (2.5) порождается векторными полями

$$\tilde{\xi}_{11} = \frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial z}, \quad \tilde{\xi}_{12} = \frac{\partial}{\partial p}, \quad (4.5)$$

а расслоение H_2 – векторными полями

$$\tilde{\xi}_{21} = \frac{\partial}{\partial y} + q \frac{\partial}{\partial z}, \quad \tilde{\xi}_{22} = \frac{\partial}{\partial q}. \quad (4.6)$$

Поэтому условие (3.3) свободности начальной кривой (3.1) сводится к равенству

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \dot{x}_0(t) & 0 & \dot{p}_0(t) & 0 \\ 0 & \dot{y}_0(t) & 0 & \dot{q}_0(t) \end{pmatrix} = 2. \quad (4.7)$$

Из (4.2), (3.17) и (4.3) заключаем, что при $(u, v) \in \Pi(a, b)$

$$\begin{aligned}\psi^*(x) &= x_0(v), & \psi^*(p) &= p_0(v), \\ \psi^*(y) &= y_0(u), & \psi^*(q) &= q_0(u).\end{aligned}\tag{4.8}$$

Согласно уравнению (1.5)

$$\begin{aligned}d\psi^*(z) &= \psi^*(p) d\psi^*(x) + \psi^*(q) d\psi^*(y), \\ \psi^*(z) &= z_0(u) + \int_u^v \left(\frac{\partial}{\partial v} \lrcorner d\psi^*(z) \right) (u, t) dt, \\ \psi^*(z) &= z_0(v) + \int_v^u \left(\frac{\partial}{\partial u} \lrcorner d\psi^*(z) \right) (t, v) dt\end{aligned}$$

для $(u, v) \in \Pi(a, b)$. В симметричной форме

$$\begin{aligned}\psi^*(z) &= \frac{1}{2} \left(z_0(u) + z_0(v) \right. \\ &\quad \left. + \int_u^v \left(\left(\frac{\partial}{\partial v} \lrcorner d\psi^*(z) \right) (u, t) - \left(\frac{\partial}{\partial u} \lrcorner d\psi^*(z) \right) (t, v) \right) dt \right).\end{aligned}\tag{4.9}$$

Пара (ψ, G) , где G – отображение (3.15), а ψ – отображение (4.8), (4.9), служит определенным многозначным решением задачи Коши (4.1), (3.1). Поскольку выполнено условие (4.7), то отображение ψ является погружением, причем если (3.1) C^k -гладко, то C^k -гладко и ψ . Полученные выражения (4.8), (4.9) представляют собой многозначный аналог известной *формулы Даламбера*. Подобные выражения можно получить для любого уравнения Монжа–Ампера (1.1), коэффициенты A, B, C, D и E которого постоянны.

Действительно, пусть (1.1) – произвольное гиперболическое уравнение Монжа–Ампера с постоянными коэффициентами. По лемме 2.2, (f) можно выбрать векторные поля (2.4), порождающие при $j = 1, 2$ характеристические расслоения H_j , отвечающие этому уравнению. Пусть в рассматриваемом случае эти поля при $j, l = 1, 2$ имеют вид

$$\xi_{jl} = \xi_{jl}^1 \left(\frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial z} \right) + \xi_{jl}^2 \left(\frac{\partial}{\partial y} + p \frac{\partial}{\partial z} \right) + \xi_{jl}^3 \frac{\partial}{\partial p} + \xi_{jl}^4 \frac{\partial}{\partial q},\tag{4.10}$$

где коэффициенты ξ_{jl}^n , $n = 1, 2, 3, 4$, постоянны. По лемме 2.2, (b), (c) можно так выбрать векторные поля (4.10), чтобы

$$\omega_1(\xi_{j1}, \xi_{j2}) = 1\tag{4.11}$$

при $j = 1, 2$, и

$$\omega_1(\xi_{3-jl}, \xi_{jg}) = 0\tag{4.12}$$

при $l, g = 1, 2$ во всем пространстве $\mathbb{R}^5$.

Пусть

$$f: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5 \quad (4.13)$$

– отображение, определенное равенствами

$$\begin{aligned} f^*x &= \xi_{11}^1x + \xi_{21}^1y + \xi_{12}^1p + \xi_{22}^1q, \\ f^*y &= \xi_{11}^2x + \xi_{21}^2y + \xi_{12}^2p + \xi_{22}^2q, \\ f^*p &= \xi_{11}^3x + \xi_{21}^3y + \xi_{12}^3p + \xi_{22}^3q, \\ f^*q &= \xi_{11}^4x + \xi_{21}^4y + \xi_{12}^4p + \xi_{22}^4q, \\ f^*z &= x(-p + \xi_{11}^1(\xi_{11}^3x/2 + \xi_{21}^3y + \xi_{12}^3p + \xi_{22}^3q) \\ &\quad + \xi_{11}^2(\xi_{11}^4x/2 + \xi_{21}^4y + \xi_{12}^4p + \xi_{22}^4q)) \\ &\quad + y(-q + \xi_{21}^1(\xi_{11}^3y/2 + \xi_{12}^3p + \xi_{22}^3q) + \xi_{21}^2(\xi_{11}^4y/2 + \xi_{12}^4p + \xi_{22}^4q)) \\ &\quad + p(\xi_{12}^1(\xi_{11}^3p/2 + \xi_{22}^3q) + \xi_{12}^2(\xi_{11}^4p/2 + \xi_{22}^4q)) + q^2(\xi_{22}^1\xi_{22}^3 + \xi_{22}^2\xi_{22}^4)/2 + z. \end{aligned} \quad (4.14)$$

ЛЕММА 4.1. *Отображение (4.13), (4.14) является контактным диффеоморфизмом, переводящим уравнение (1.1) в уравнение (4.1). Иными словами, найдутся такие гладкие функции c_1 и c_2 , что*

$$f^*\omega_2 = c_1\tilde{\omega}_2 + c_2\omega_0. \quad (4.15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственная проверка с использованием условий (4.11), (4.12) показывает, что для отображения (4.13), (4.14) при $j, l = 1, 2$ выполняются соотношения

$$f_*(\tilde{\xi}_{jl}) = \xi_{jl}, \quad f_*\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z},$$

где $\tilde{\xi}_{jl}$ – векторные поля (4.5), (4.6), а ξ_{jl} – векторные поля (4.10). По лемме 2.2, (d) пять векторных полей (4.5), (4.6) и $\frac{\partial}{\partial z}$ линейно независимы. Аналогичным образом линейно независимы пять векторных полей (4.10) и $\frac{\partial}{\partial z}$. Следовательно, отображение (4.13), (4.14) является контактным диффеоморфизмом, который переводит характеристические расслоения уравнения (4.1) в характеристические расслоения уравнения (1.1). Тем самым уравнения (1.1) и (4.1) контактно эквивалентны, т.е. имеет место выражение (4.15). Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. *Пусть (1.4) – многозначное решение уравнения (4.1). Тогда*

$$f \circ \sigma: S \rightarrow \mathbb{R}^5 \quad (4.16)$$

– многозначное решение уравнения (1.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 4.1 отображение (4.16) является погружением, и согласно (4.15)

$$(f \circ \sigma)^*(\omega_2) = \sigma^* \circ f^*(\omega_2) = \sigma^*(c_1 \tilde{\omega}_2 + c_2 \omega_0) = 0.$$

Следствие доказано.

Доказанное следствие позволяет использовать следующий алгоритм нахождения в квадратурах определенного многозначного решения задачи Коши (3.1) для произвольного гиперболического уравнения (1.1) с постоянными коэффициентами. По коэффициентам A , B , C и D и формулам (2.5) строятся характеристические векторные поля (4.10), удовлетворяющие равенствам (4.11), и контактный диффеоморфизм (4.13), (4.14). Далее, по формулам (4.8), (4.9) находится решение (ψ, G) уравнения (4.1), принимающее начальное значение

$$f^{-1} \circ l: Z \rightarrow \mathbb{R}^5.$$

По следствию 4.2 пара $(f \circ \psi, G)$ служит определенным многозначным решением задачи Коши (1.1), (3.1) для $(u, v) \in \Pi(a, b)$.

ПРИМЕР 4.3. Применение описанного алгоритма к нелинейному уравнению

$$z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 + 1 = 0 \quad (4.17)$$

и начальной кривой (3.1), (4.3) дает следующее определенное многозначное решение (ψ, G) : для $(u, v) \in \Pi(a, b)$

$$\begin{aligned} \psi^*(x) &= (q_0(u) - q_0(v) + x_0(u) + x_0(v))/2, \\ \psi^*(y) &= (p_0(v) - p_0(u) + y_0(v) + y_0(u))/2, \\ \psi^*(p) &= (p_0(v) + p_0(u) + y_0(v) - y_0(u))/2, \\ \psi^*(q) &= (q_0(u) + q_0(v) + x_0(u) - x_0(v))/2, \end{aligned} \quad (4.18)$$

$\psi^*(z)$ вычисляется согласно (4.9), а G – согласно (3.15).

5. Существование и единственность. Среди множества всех определенных решений

$$(\sigma, L) \quad (5.1)$$

задачи Коши (1.1), (3.1) особый интерес представляет решение

$$(\tilde{\sigma}, \tilde{L}), \quad (5.2)$$

где $\tilde{\sigma}: \tilde{S} \rightarrow \mathbb{R}^5$, $\tilde{L}: (a, b) \rightarrow \tilde{S}$, наибольшее по отношению включения.

Формализованное понятие такого решения дает

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Мнозначное определенное C^k -решение (5.2) задачи (1.1), (3.1) называется *непродолжаемым*, если для любого другого многозначного определенного C^k -решения (5.1) этой задачи существует такой гомеоморфизм

$$\varphi: S \rightarrow \tilde{S}, \quad (5.3)$$

что

$$\tilde{\sigma} \circ \varphi = \sigma, \quad \varphi \circ L = \tilde{L}. \quad (5.4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. Поскольку решения (5.1) и (5.2) C^k -гладки, то из представлений (5.4) вытекает, что (5.3) является C^k -вложением (ср. с замечанием 3.1).

ПРИМЕР 5.3. Найденные в п. 4 решение (4.8), (4.9) задачи (4.1), (3.1) и решение (4.18), (4.9) задачи (4.17), (3.1) являются непродолжаемыми решениями. Действительно, по построению эти решения определены в квадрате (3.9), и их характеристическими диффеоморфизмами служат тождественные отображения. Следовательно, по теореме 3.2 эти решения непродолжаемы.

Имеет место

ТЕОРЕМА 5.4 (СУЩЕСТВОВАНИЕ). Пусть уравнение Монжа–Ампера (1.1) гиперболично, а его коэффициенты и начальная кривая (3.1) C^k -гладки. Тогда существует C^k -гладкое непродолжаемое решение (5.2) задачи Коши (1.1), (3.1).

Доказательство см в п. 9.

В категории гладких многообразий два диффеоморфных многообразия изоморфны, т.е. по существу неразличимы. В случае начальных кривых и определенных решений естественно считать неразличимыми те объекты, которые отличаются друг от друга регулярной перепараметризацией. Введем

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.5. Пусть для гиперболического уравнения (1.1) наряду с начальной кривой (3.1) задана другая начальная кривая

$$\begin{aligned} \tilde{l}: \tilde{Z} &\rightarrow \mathbb{R}^5, \\ \tilde{Z} &= (\tilde{a}, \tilde{b}), \quad -\infty \leq \tilde{a} < \tilde{b} \leq +\infty. \end{aligned} \quad (5.5)$$

(а) Начальные значения (3.1) и (5.5) *эквивалентны*, если существует такой гомеоморфизм

$$\nu: Z \rightarrow \tilde{Z}, \quad (5.6)$$

что

$$\tilde{l} \circ \nu = l. \quad (5.7)$$

(б) Предположим, что определенные многозначные решения (5.1) и (5.2) уравнения (1.1) принимают эквивалентные начальные значения (3.1) и (5.5) соответственно. Эти решения *эквивалентны*, если существует такой гомеоморфизм (5.3), что

$$\tilde{\sigma} \circ \varphi = \sigma, \quad \varphi \circ L = \tilde{L} \circ \nu. \quad (5.8)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.6. Тривиальная проверка показывает, что отношения эквивалентности начальных значений и решений рефлексивны, симметричны и транзитивны. По аналогии с замечанием 5.2 в данном случае из представления (5.7) вытекает, что (5.6) является C^k -диффеоморфизмом, а из первого представления (5.8) вытекает, что (5.3) является C^k -диффеоморфизмом.

ТЕОРЕМА 5.7 (ЕДИНСТВЕННОСТЬ). Пусть уравнение Монжа–Ампера (1.1) гиперболично, а его коэффициенты и начальные кривые (3.1) и (5.5) C^k -гладки. Предположим, что (5.2) – непродолжаемое решение уравнения Монжа–Ампера (1.1), принимающее начальное значение (3.1), и (5.1) – непродолжаемое решение этого же уравнения, принимающее начальное значение (5.5). Тогда если начальные значения (3.1) и (5.5) эквивалентны, то решения (5.1) и (5.2) также эквивалентны.

Доказательство см в п. 10.

Решения, приведенные в примере 5.3, кроме свойства непродолжаемости, обладают еще свойством полноты: две любые характеристики, принадлежащие различным семействам, обязательно пересекаются. Это свойство справедливо для всех непродолжаемых решений гиперболических уравнений Монжа–Ампера с постоянными коэффициентами. В общем случае для непродолжаемого решения гиперболического уравнения Монжа–Ампера свойство полноты в указанной форме не выполняется. Сформулируем его в соответствующей форме.

Пусть (5.1) – определенное решение гиперболического уравнения (1.1), принимающее начальное значение (3.1), и (3.8) – отвечающий ему характеристический диффеоморфизм. Положим

$$\rho_1(u, v) = \left| \int_u^v \left\| \psi_* \left(\frac{\partial}{\partial v} \right) (u, t) \right\| dt \right|, \quad (5.9)$$

$$\rho_2(u, v) = \left| \int_u^v \left\| \psi_* \left(\frac{\partial}{\partial u} \right) (t, v) \right\| dt \right|, \quad (5.10)$$

где ψ вычисляется согласно (3.16), а $\| \cdot \|$ – стандартная евклидова норма в $\mathbb{R}^5$. Функция $\rho_j(u, v)$ определена на множестве (3.13) при $j = 1, 2$. Геометрический смысл ее значения – это длина в $\mathbb{R}^5$ образа интервала характеристики j -го семейства, соединяющего точку $(u, v) \in W$ с диагональю (3.10), т.е. с начальной кривой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.8. Мнозначное определенное C^k -решение (5.1) задачи (1.1), (3.1) называется *полным*, если для всякой точки

$$(\tilde{u}, \tilde{v}) \in \Pi(a, b) \quad (5.11)$$

либо

$$(\tilde{u}, \tilde{v}) \in W, \quad (5.12)$$

либо для всякого $j \in \{1, 2\}$ и любого положительного N найдется точка

$$(u_j, v_j) \in \overset{\circ}{T}(\tilde{u}, \tilde{v}), \quad (5.13)$$

где $\overset{\circ}{T}(\tilde{u}, \tilde{v})$ – внутренность треугольника $T(\tilde{u}, \tilde{v})$, для которой

$$\rho_j(u_j, v_j) \geq N \quad (5.14)$$

при $j = 1, 2$.

Иными словами, определенное решение является полным, если оно обладает следующим свойством. Характеристики различных семейств, выпущенные из двух фиксированных точек начальной кривой в соответствующем направлении, либо пересекаются, либо множество длин лучей характеристик каждого из семейств, выпущенных в этом же направлении из отрезка начальной кривой, соединяющего эти точки, неограничено.

ТЕОРЕМА 5.9 (полнота). *Пусть уравнение Монжа–Ампера (1.1) гиперболично, а его коэффициенты и начальная кривая (3.1) C^k -гладки. Предположим, что (5.1) – определенное C^k -решение задачи (1.1), (3.1). Это решение полно тогда и только тогда, когда оно непродолжаемо.*

Доказательство см. в п. 11.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.10. Непродолжаемые решения гиперболических уравнений Монжа–Ампера служат аналогом непродолжаемых решений обыкновенных дифференциальных уравнений [15, § 3]. При этом свойство полноты является аналогом свойства непродолжаемых решений обыкновенных дифференциальных уравнений стремиться к границе области определения этих уравнений [15, § 22], [16, гл. 2, § 3].

ЗАМЕЧАНИЕ 5.11. Для некоторых задач важно уметь находить ту часть непродолжаемого решения гиперболического уравнения Монжа–Ампера, которая однозначно проектируется на плоскость независимых переменных, т.е. является классическим решением. В частности, это нужно для построения регулярных погружений метрик отрицательной кривизны в трехмерное евклидово пространство [12, § 19], [17]. В работе [18] оценены снизу размеры области, в которой определено классическое решение задачи Коши для уравнения (1.1) с коэффициентами $E = 1$ и A, B, C, D , зависящими только от x и y .

6. Многозначные и обобщенные решения. В [19] и [20] исследуется связь между многозначными решениями и обобщенными решениями в смысле Соболева–Шварца линейных однородных дифференциальных уравнений. Данный пункт посвящен установлению связи между многозначными решениями и обобщенными решениями для произвольных линейных дифференциальных уравнений второго порядка.

Пусть

$$L[z] = \sum_{|l|=0}^2 a_l(x, y) \frac{\partial^{|l|} z}{\partial x^{l_1} \partial y^{l_2}}$$

– линейный дифференциальный оператор с двумя независимыми переменными x и y . Здесь $l = (l_1, l_2)$ – мультииндекс, $|l| = l_1 + l_2$, а коэффициенты a_l и аргумент

$z = z(x, y)$ – гладкие функции на плоскости $\mathbb{R}^2$ параметров x, y . Рассмотрим отвечающее оператору L дифференциальное уравнение второго порядка

$$L[z] = f, \quad (6.1)$$

где $f = f(x, y)$ – фиксированная гладкая функция на $\mathbb{R}^2$.

Уравнение (6.1) является уравнением Монжа–Ампера вида (1.1) с

$$A = a_{10}p + a_{01}q - f, \quad B = a_{20}, \quad C = a_{11}/2, \quad D = a_{02}, \quad E = 0. \quad (6.2)$$

Тем самым, к нему применимо определение многозначного решения из п. 1. Пусть (1.4) – гладкое многозначное решение уравнения (6.1). Обозначим через π ,

$$\pi: \mathbb{R}^5 \ni (x, y, p, q, z) \mapsto (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

проекцию из координатного пространства $xypqz$ на плоскость xy , а через μ – композицию этой проекции с погружением (1.4),

$$\mu = \pi \circ \sigma.$$

Фиксируем на плоскости xy произвольное открытое подмножество $V \subseteq \mu(S)$ и положим для всякого $w \in C_0^\infty(V)$

$$\tilde{\sigma}(w) = \int_{\mu^{-1}(V)} \sigma^*(\pi^*(w)z \, dx \wedge dy). \quad (6.3)$$

ЛЕММА 6.1. *Предположим, что для гладкого многозначного решения (1.4) уравнения (6.1) многообразие S ориентировано и ограничение отображения μ на множество $\mu^{-1}(V)$ собственнo. Тогда выражение (6.3) определяет на V обобщенную функцию $\tilde{\sigma}$ порядка нуль такую, что*

$$\text{sing supp } \tilde{\sigma} \subseteq C(\mu) \cap V, \quad (6.4)$$

где $C(\mu)$ – множество критических значений отображения μ , и для всякого $w \in C_0^\infty(V)$ выполняются следующие свойства:

(а) для первых производных $\tilde{\sigma}$ справедливы представления

$$\tilde{\sigma}_x(w) = \int_{\mu^{-1}(V)} \sigma^*(\pi^*(w)p \, dx \wedge dy), \quad \tilde{\sigma}_y(w) = \int_{\mu^{-1}(V)} \sigma^*(\pi^*(w)q \, dx \wedge dy);$$

(б) для вторых производных $\tilde{\sigma}$ справедливы представления

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{xx}(w) &= \int_{\mu^{-1}(V)} \sigma^*(\pi^*(w)dp \wedge dy), & \tilde{\sigma}_{yy}(w) &= \int_{\mu^{-1}(V)} \sigma^*(\pi^*(w)dx \wedge dq), \\ \tilde{\sigma}_{xy}(w) &= \int_{\mu^{-1}(V)} \sigma^*(\pi^*(w)dx \wedge dp) = \int_{\mu^{-1}(V)} \sigma^*(\pi^*(w)dq \wedge dy); \end{aligned}$$

(с) для оператора (6.1) справедливо представление

$$L[\tilde{\sigma}](w) = \int_{\mu^{-1}(V)} \sigma^*(\pi^*(w)\omega_2 + f \, dx \wedge dy),$$

где ω_2 – эффективная дифференциальная 2-форма (1.7), (6.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для подынтегральной 2-формы из правой части выражения (6.3) имеем

$$\sigma^*(\pi^*(w)z dx \wedge dy) = \mu^*(w)\sigma^*(z dx \wedge dy). \quad (6.5)$$

В силу собственности ограничения отображения μ на множество $\mu^{-1}(V)$ и финитности w заключаем, что функция $\mu^*(w)$, а потому и форма (6.5) финитны на $\mu^{-1}(V)$. Следовательно, интеграл в правой части (6.3) определен для всякого $w \in C_0^\infty(V)$ [21, с. 396].

Ясно, что функционал (6.3) линеен на $C_0^\infty(V)$. Докажем его непрерывность. Пусть K – произвольный компакт, лежащий в V . Тогда согласно (6.5) для $w \in C_0^\infty(K)$

$$|\tilde{\sigma}(w)| \leq \int_{\mu^{-1}(K)} |\mu^*(w)| |\sigma^*(z dx \wedge dy)| \leq \sup_K |w| R(K),$$

где $R(K) = \int_{\mu^{-1}(K)} |\sigma^*(z dx \wedge dy)|$. По условию отображение μ собственнo, а потому множество $\mu^{-1}(K)$ компактно и $R(K)$ – конечное положительное число, т.е. функционал (6.3) непрерывен на $C_0^\infty(V)$. Таким образом, выражение (6.3) определяет на V обобщенную функцию порядка нуль [22, § 2.1].

Для всякого регулярного значения $m \in V$ отображения μ существует такая окрестность $U \subseteq V$, что прообраз $\mu^{-1}(U)$ представим в виде дизъюнктного объединения

$$\mu^{-1}(U) = \coprod_{g=1}^s U_g.$$

Здесь s – некоторое целое положительное число, а U_g – открытое подмножество S , ограничение на которое отображения μ является диффеоморфизмом [21, с. 411]. Следовательно, при $w \in C_0^\infty(U)$ по свойству аддитивности интеграла

$$(\tilde{\sigma} | U)(w) = \int_{\mu^{-1}(U)} \sigma^*(\pi^*(w)z dx \wedge dy) = \sum_{g=1}^s \int_{U_g} \sigma^*(z) \sigma^*(\pi^*(w) dx \wedge dy).$$

Положим для $g = 1, \dots, s$

$$b_g = \mu | U_g : U_g \rightarrow U.$$

Поскольку $\pi^*x = x$ и $\pi^*y = y$, то

$$\begin{aligned} \sigma^*x &= \mu^*x, & \sigma^*y &= \mu^*y, \\ (\tilde{\sigma} | U)(w) &= \sum_{g=1}^s \int_{U_g} \sigma^*(z) b_g^*(w dx \wedge dy), \end{aligned} \quad (6.6)$$

откуда по формуле замены переменных в интеграле

$$(\tilde{\sigma} | U)(w) = \sum_{g=1}^s \int_U (b_g^{-1})^*(\sigma^*(z)) w dx \wedge dy = \int_U z \circ \sigma \circ \left(\sum_{g=1}^s b_g^{-1} \right) w dx \wedge dy.$$

Иными словами, у всякого регулярного значения $m \in V$ отображения μ существует такая окрестность $U \subseteq V$, для которой

$$\tilde{\sigma} \mid U = z \circ \sigma \circ \left(\sum_{g=1}^s b_g^{-1} \right).$$

Правая часть полученного представления является гладкой функцией, что доказывает включение (6.4) [22, §2.2].

(а) По определению (6.3) и равенствам (6.6)

$$\tilde{\sigma}_y(w) = -\tilde{\sigma}(w_y) = - \int_{\mu^{-1}(V)} \sigma^*(z) \mu^*(w_y dx \wedge dy) = \int_{\mu^{-1}(V)} \sigma^*(z) d\mu^*(w dx).$$

По условию отображение μ собственное, поэтому линейная форма $\sigma^*(z) \mu^*(w dx)$ имеет компактный носитель, и по формуле Стокса

$$\tilde{\sigma}_y(w) = - \int_{\mu^{-1}(V)} d\sigma^*(z) \wedge \mu^*(w dx)$$

[21, с. 424]. Отсюда в силу (1.5) и (6.6) выводим

$$\tilde{\sigma}_y(w) = - \int_{\mu^{-1}(V)} \sigma^*(p dx + q dy) \wedge \mu^*(w dx) = \int_{\mu^{-1}(V)} \sigma^*(\pi^*(w) q dx \wedge dy).$$

Второе из равенств (а) установлено. Первое устанавливается аналогично.

(b) По свойству (а)

$$\tilde{\sigma}_{xy}(w) = -\tilde{\sigma}_y(w_x) = - \int_{\mu^{-1}(V)} \sigma^*(\pi^*(w_x) q dx \wedge dy),$$

откуда аналогично доказательству свойства (а) получаем

$$\tilde{\sigma}_{xy}(w) = - \int_{\mu^{-1}(V)} \sigma^*(q) d\mu^*(w dy) = \int_{\mu^{-1}(V)} \sigma^*(\pi^*(w) dq \wedge dy).$$

Последнее из равенств (b) установлено. Остальные устанавливаются аналогично.

(с) По определению оператора L и свойствам (а) и (b)

$$L[\tilde{\sigma}](w) = \sum_{|l|=0}^2 \frac{\partial^{|l|} \tilde{\sigma}}{\partial x^{l_1} \partial y^{l_2}} (a_l w) = \int_{\mu^{-1}(V)} \sigma^*(\pi^*(w) \omega_2 + f dx \wedge dy).$$

Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.2. По теореме Сарда [21, с. 243] из включения (6.4) вытекает, что носитель сингулярности обобщенной функции (6.3) имеет меру нуль.

Применим лемму 6.1 для построения обобщенного решения уравнения (6.1) по известному многозначному решению (1.4) этого уравнения. В качестве V возьмем внутренность образа отображения μ ,

$$V = \text{int } \mu(S), \quad (6.7)$$

и пусть $V = \coprod_{g=1}^{\infty} V_g$ – разложение открытого множества V на связные компоненты V_g , $g = 1, \dots, \infty$. Фиксируем на плоскости $\mathbb{R}^2$ ориентацию, согласованную с 2-формой $dx \wedge dy$.

ТЕОРЕМА 6.3. *Допустим, что для гладкого многозначного решения (1.4) уравнения (6.1) многообразие S ориентировано и ограничение отображения μ на каждое из множеств $\mu^{-1}(V_g)$ собственное. Предположим, что*

$$f|_{V_g} = 0 \quad (6.8)$$

всякий раз, когда степень отображения $\mu|_{\mu^{-1}(V_g)}$

$$d_g = \deg(\mu|_{\mu^{-1}(V_g)})$$

обращается в нуль. Тогда выражение

$$\tilde{\sigma}(w) = \sum_{\substack{g=1 \\ d_g \neq 0}}^{\infty} \int_{\mu^{-1}(V_g)} \sigma^*(\pi^*(w)z \, dx \wedge dy) / d_g \quad (6.9)$$

задает обобщенное решение уравнения (6.1) на множестве (6.7). Это решение является обобщенной функцией порядка нуль, не зависит от выбора ориентации на S , для него справедливо включение (6.4), и его носитель сингулярности имеет меру нуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 6.1 каждое из слагаемых в правой части (6.9) определяет обобщенную функцию порядка нуль на соответствующем множестве V_g . Следовательно, по принципу локализации [22, § 2.2] выражение (6.9) задает на множестве (6.7) обобщенную функцию порядка нуль. Независимость этой обобщенной функции от выбора ориентации на S обусловлена тем, что при замене ориентации этого многообразия на противоположную происходит одновременное изменение знака интегралов в правой части (6.9) и степеней d_g .

По лемме 6.1, (с) для $w \in C_0^\infty(V)$ имеем

$$L[\tilde{\sigma}](w) = \sum_{|l|=0}^2 \frac{\partial^{|l|} \tilde{\sigma}}{\partial x^{l_1} \partial y^{l_2}}(a_l w) = \sum_{\substack{g=1 \\ d_g \neq 0}}^{\infty} \int_{\mu^{-1}(V_g)} \frac{\sigma^*(\pi^*(w)\omega_2 + f \, dx \wedge dy)}{d_g},$$

откуда в силу (1.6) и (6.6) получаем

$$L[\tilde{\sigma}](w) = \sum_{\substack{g=1 \\ d_g \neq 0}}^{\infty} \int_{\mu^{-1}(V_g)} \frac{\mu^*(fw \, dx \wedge dy)}{d_g}. \quad (6.10)$$

По свойству степени собственного отображения [21, с. 409]

$$\int_{\mu^{-1}(V_g)} \mu^*(fw \, dx \wedge dy) = d_g \int_{V_g} fw \, dx \wedge dy.$$

Поэтому из равенства (6.10) и свойства (6.8) функции f выводим

$$L[\tilde{\sigma}](w) = \sum_{g=1}^{\infty} \int_{V_g} fw \, dx \wedge dy = \int_V fw \, dx \wedge dy,$$

т.е. $z = \tilde{\sigma}$ служит обобщенным решением уравнения (6.1).

Справедливость для обобщенной функции (6.9) включения (6.4) вытекает из леммы 6.1, а то, что ее носитель сингулярности имеет меру нуль, – из замечания 6.2. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.4. Конструкция обобщенного решения из теоремы 6.3 не использует двумерность пространства независимых переменных. Поэтому все рассуждения данного пункта по аналогии переносятся на случай линейного дифференциального уравнения второго порядка с произвольным количеством независимых переменных. Более того, указанная конструкция применима и к системам линейных дифференциальных уравнений произвольного порядка с произвольным количеством неизвестных функций и независимых переменных.

7. Доказательство леммы 2.3. Прежде чем приступить к непосредственному доказательству леммы 2.3, установим ряд вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 7.1. Пусть G_1 и G_2 – C^k -гладкие векторные расслоения над некоторым многообразием M и $F: G_1 \rightarrow G_2$ – C^k -биморфизм. Если $G_3 \subset G_2$ – t -мерное C^k -подрасслоение, то

$$F^{-1}(G_3) = \{\xi \in G_1 \mid F(\xi) \in G_3\}$$

является t -мерным C^k -подрасслоением расслоения G_1 , для которого

$$F(F^{-1}(G_3)) = G_3.$$

Доказательство см в [10, гл. 4, § 2].

Для всякого многозначного решения (1.4) рассмотрим векторное расслоение

$$\sigma^* \tau: \sigma^*(T\mathbb{R}^5) \rightarrow S, \quad (7.1)$$

индуцированное отображением σ из касательного расслоения

$$\tau: T\mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5, \quad (7.2)$$

и пусть

$$F: \sigma^*(T\mathbb{R}^5) \rightarrow T\mathbb{R}^5 \quad (7.3)$$

– соответствующий естественный биморфизм векторных расслоений (7.1) и (7.2), накрывающий σ [10, гл. 4, § 2].

Биморфизм (7.3) позволяет поднять дифференциальные формы (1.7) и (1.9) с $\mathbb{R}^5$ до $\sigma^*(T\mathbb{R}^5)$ -дифференциальных форм

$$F^*\omega_0, \quad F^*\omega_1, \quad F^*\omega_2 \quad (7.4)$$

на S : для $\xi, \eta \in \sigma^*(T\mathbb{R}^5)$ и $a = 1, 2$

$$(\xi \wedge \eta) \lrcorner F^*\omega_a = F(\xi \wedge \eta) \lrcorner \omega_a, \quad \xi \lrcorner F^*\omega_0 = F\xi \lrcorner \omega_0. \quad (7.5)$$

По аналогии с (2.3) при $j = 1, 2$ положим

$$H'_j(r) = \{\xi \in \sigma^*(T\mathbb{R}^5) \mid \xi \lrcorner F^*(\omega_2 - \lambda_j \omega_1) = 0, \quad \xi \lrcorner F^*\omega_0 = 0\}. \quad (7.6)$$

ЛЕММА 7.2. Для всякого многозначного C^k -решения (1.4) множество

$$H'_j = \bigcup_{r \in S} H'_j(r) \quad (7.7)$$

является двумерным C^k -подрасслоением расслоения (7.1), для которого при $j = 1, 2$

$$F(H'_j(r)) = H_j(\sigma(r)). \quad (7.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО осуществляется на основании определений (2.3), (7.6) и леммы 7.1.

СЛЕДСТВИЕ 7.3. Если для фиксированного $j = 1, 2$ векторы g_1, g_2 принадлежат H'_j и как $g_1 \neq 0$, так и $g_2 \neq 0$, то

- (а) $(g_1 \wedge g_2) \lrcorner F^*\omega_1 \neq 0$,
- (б) $(g_1 \lrcorner F^*\omega_1) \wedge (g_2 \lrcorner F^*\omega_1) = c(F^*\omega_2 + \lambda_j F^*\omega_1)$, где c – отличный от нуля скаляр.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из определения (7.6), равенства (7.8) и леммы 2.2, (с), (е).

ЛЕММА 7.4. Для всякого многозначного C^k -решения (1.4) существует единственный C^{k-1} -мономорфизм $T^*\sigma: TS \rightarrow \sigma^*(T\mathbb{R}^5)$ векторных расслоений над S , для которого $F \circ T^*\sigma = \sigma_*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [23, гл. 3, § 3].

СЛЕДСТВИЕ 7.5. Всякое многозначное C^k -решение (1.4) однозначно определяет двумерное векторное C^{k-1} -подрасслоение

$$N = T^*\sigma(TS) \subset \sigma^*(T\mathbb{R}^5),$$

которое аннулирует $\sigma^*(T\mathbb{R}^5)$ -дифференциальные формы $F^*\omega_0$, $F^*\omega_1$ и $F^*\omega_2$:

$$F^*\omega_2 \mid N = 0, \quad F^*\omega_1 \mid N = 0, \quad F^*\omega_0 \mid N = 0. \quad (7.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То, что N – двумерное векторное подрасслоение в $\sigma^*(T\mathbb{R}^5)$, вытекает из леммы 7.4 и известных свойств векторных расслоений [10, гл. 4, § 2]. Согласно (1.6), лемме 7.4 и определению (7.5) для $\xi, \eta \in TS$ имеем

$$0 = (\xi \wedge \eta) \lrcorner \sigma^*\omega_2 = \sigma_*(\xi \wedge \eta) \lrcorner \omega_2 = F \circ T^*\sigma(\xi \wedge \eta) \lrcorner \omega_2 = T^*\sigma(\xi \wedge \eta) \lrcorner F^*\omega_2,$$

поэтому в силу конструкции N получаем первое из равенств (7.9). Второе и третье равенства устанавливаются аналогично. Следствие доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.3. Для подрасслоений (7.7) и подрасслоения N из следствия 7.5 положим

$$h'_j(r) = N(r) \cap H'_j(r) \quad (7.10)$$

при $j = 1, 2$ и $r \in S$.

По следствию 7.3, (b) и равенствам (7.9)

$$N(r) \neq H'_j(r). \quad (7.11)$$

По следствию 7.3, (b) и равенствам (7.9) для векторов $g_1, g_2 \in H'_j(r)$

$$(g_1 \lrcorner F^*\omega_1) \mid N \wedge (g_2 \lrcorner F^*\omega_1) \mid N = 0,$$

т.е. $\sigma^*(T\mathbb{R}^5)$ -ковекторы $(g_1 \lrcorner F^*\omega_1) \mid N$ и $(g_2 \lrcorner F^*\omega_1) \mid N$ линейно зависимы. Тем самым, существуют такие числа a и b , что

$$((ag_1 + bg_2) \lrcorner F^*\omega_1) \mid N = 0.$$

Кроме того, по определению (7.6)

$$(ag_1 + bg_2) \lrcorner F^*\omega_0 = 0.$$

Из двух последних соотношений и равенств (7.9) заключаем, что

$$ag_1 + bg_2 \in N(r).$$

В силу (7.11) это означает, что пространство (7.10) одномерно, и потому

$$h'_j = \bigcup_{r \in S} h'_j(r)$$

является одномерным C^{k-1} -подрасслоением в расслоении (7.1), а также и в N , и в H'_j . Следовательно, согласно (7.8)

$$F(h'_j(r)) \subset H_j(\sigma(r)). \quad (7.12)$$

По лемме 7.4 и следствию 7.5 отображение

$$\nu: TS \ni \xi \mapsto T^*\sigma(\xi) \in N \quad (7.13)$$

– это C^{k-1} -биморфизм векторных расслоений над S . По лемме 7.1 $h_j = \nu^{-1}(h'_j)$ является одномерным C^{k-1} -подрасслоением в расслоении TS , для которого в силу включения (7.12) и леммы 7.4

$$\sigma^*(h_j(r)) = F \circ T^*\sigma(\nu^{-1}(h'_j(r))) = F(h'_j(r)) \subset H_j(\sigma(r)).$$

Таким образом, для h_j выполнено включение (2.7).

Предположим, что $\tilde{h}_j \subset TS$ – некоторое одномерное подрасслоение, удовлетворяющее включению (2.7). Тогда по лемме 7.4 для $r \in S$

$$\sigma_*(\tilde{h}_j(r)) = F \circ T^*\sigma(\tilde{h}_j(r)) = F \circ \nu(\tilde{h}_j(r)) \subset H_j(\sigma(r)),$$

т.е. $\nu(\tilde{h}_j(r)) \subset H'_j(r)$. Поскольку $\nu(\tilde{h}_j(r)) \subset N(r)$, то согласно (7.10)

$$\nu(\tilde{h}_j(r)) = h'_j(r) = \nu(h_j(r))$$

и $\tilde{h}_j(r) = h_j(r)$ в силу биморфности (7.13). Лемма 2.3 доказана.

8. Доказательство теоремы 3.2. Для определенного решения (σ, L) задачи Коши (1.1), (3.1) пересечение (3.6) состоит ровно из одной точки, что позволяет при $j = 1, 2$ задать проекцию

$$\pi_j: S \ni r \mapsto L^{-1}(L(Z) \cap \gamma_{jr}(Z_{jr})) \in Z. \quad (8.1)$$

Для доказательства теоремы 3.2 требуется установить ряд свойств, которыми эта проекция обладает.

Согласно лемме 2.3 определенному решению (σ, L) отвечает C^{k-1} -подрасслоение (2.6). Любая точка r_0 многообразия S обладает окрестностью V , над которой это подрасслоение тривиализуется. Иными словами, на V существует C^{k-1} -векторное поле

$$X: V \rightarrow TS, \quad (8.2)$$

порождающее ограничение подрасслоения (2.6) на V , т.е. при $r \in V$

$$h_j(r) = X(r)\mathbb{R}^1. \quad (8.3)$$

Рассмотрим на V непродолжаемую интегральную кривую

$$\begin{aligned} X_t(r): (a(r), b(r)) &\rightarrow V, \\ \dot{X}_t(r) &= X(X_t(r)), \end{aligned} \quad (8.4)$$

векторного поля X , проходящую через точку $r \in V$,

$$X_0(r) = r. \quad (8.5)$$

Следуя [11, п. 1.48], положим для всякого вещественного t

$$\mathcal{D}_t = \{r \in V \mid a(r) < t < b(r)\}. \quad (8.6)$$

Известно, что отображение

$$X_t: \mathcal{D}_t \rightarrow \mathcal{D}_{-t} \quad (8.7)$$

является C^{k-1} -дiffeоморфизмом, отображающим открытое подмножество $\mathcal{D}_t$ на открытое подмножество $\mathcal{D}_{-t}$.

ЛЕММА 8.1. *Для любого $r \in V$ и $a(r) < t < b(r)$ диффеоморфизм (8.7) переводит вектор $X(r)$ в вектор $X(X_t(r))$:*

$$(X_t)_*(X(r)) = X(X_t(r)). \quad (8.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По правилу дифференцирования композиции отображений и в силу уравнения (8.4)

$$\left. \frac{d}{dw} \right|_{w=0} X_t(X_w(r)) = (X_t)_*(X(r)).$$

Поскольку $X_t(X_w(r)) = X_{t+w}(r)$, то

$$\left. \frac{d}{dw} \right|_{w=0} X_t(X_w(r)) = \left. \frac{d}{dw} \right|_{w=0} X_{t+w}(r) = X(X_t(r)).$$

Сопоставляя полученные равенства, выводим (8.8). Лемма доказана.

ЛЕММА 8.2. Пусть (σ, L) – определенное C^k -решение задачи Коши (1.1), (3.1). Тогда для фиксированного индекса $j \in \{1, 2\}$ и всякой точки $r \in S$ найдутся окрестность этой точки U и C^{k-1} -диффеоморфизм

$$\varphi: W \rightarrow U, \quad (8.9)$$

где W – некоторый открытый прямоугольник,

$$W = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u_1 < u < u_2 \mid v_1 < v < v_2\}, \quad (8.10)$$

$v_1 < 0 < v_2$, удовлетворяющие следующим свойствам:

(а) при фиксированном u отображение $\varphi(u, \cdot): (v_1, v_2) \rightarrow S$ служит интегральным многообразием подрасслоения (2.6);

(б) кривая $\varphi(\cdot, 0): (u_1, u_2) \rightarrow S$ совпадает на интервале (u_1, u_2) с вложением (3.4):

$$\varphi(\cdot, 0) = L \mid (u_1, u_2);$$

(в) для проекции (8.1) имеет место равенство $\pi_j \circ \varphi(u, v) = u$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем произвольную точку $r_0 \in S$ и рассмотрим соответствующее этой точке интегральное многообразие (2.8)

$$\gamma_{jr_0}: Z_{jr_0} \rightarrow S \quad (8.11)$$

подрасслоения (2.6). Многообразие Z_{jr_0} одномерно и, следовательно, диффеоморфно либо окружности, либо открытому интервалу вещественной прямой [10, гл. 1, § 2]. В случае, когда это многообразие диффеоморфно окружности, выберем из него одну точку, отличную от точек $\gamma_{jr_0}^{-1}(r_0)$ и $\gamma_{jr_0}^{-1}(L \circ \pi_j(r_0))$. Таким образом, не ограничивая общности, можно считать, что в подмногообразии (8.11) $Z_{jr_0} = (\alpha, \beta)$ – открытый интервал.

Обозначим через c_1 и c_2 числа из этого интервала, отвечающие точкам r_0 и $L \circ \pi_j(r_0)$:

$$\gamma_{jr_0}(c_1) = r_0, \quad \gamma_{jr_0}(c_2) = L \circ \pi_j(r_0),$$

и выберем числа b_1 и b_2 так, чтобы $\alpha < b_1 < c_1$, $c_2 < b_2 < \beta$. Ограничение отображения (8.11) на отрезок $[b_1, b_2]$ является гомеоморфизмом на свой образ [24, с. 195, 196], а потому ограничение отображения (8.11) на интервал (b_1, b_2) является вложением. Следовательно, по теореме о трубчатой окрестности подмножество $\gamma_{jr_0}((b_1, b_2)) \subseteq S$ имеет в S окрестность V , которая диффеоморфна $\mathbb{R}^2$. Подрасслоение (2.6) тривиализуется над окрестностью V [10, гл. 4, § 2], т.е. на V существует C^{k-1} -векторное поле (8.2), обладающее свойством (8.3). Тем самым, векторное поле (8.2) не имеет стационарных точек, и в силу теории Пуанкаре–Бендиксона все интегральные кривые (8.4) непериодичны [16, гл. 7, § 3]. Непериодичность означает, что для интегральной кривой, проходящей через точку r_0 , найдется единственное число $t = t(r_0)$ такое, что

$$X_t(L \circ \pi_j(r_0)) = r_0. \quad (8.12)$$

Для определенности будем считать, что $t > 0$.

Множества (8.6) обладают свойствами монотонности:

$$\mathcal{D}_{t_1} \subseteq \mathcal{D}_{t_2}$$

при $|t_1| \geq |t_2|$ и $t_1 t_2 \geq 0$, и непрерывности:

$$\mathcal{D}_v = \bigcup_b \mathcal{D}_b,$$

где $|b| > |v|$ и $bv > 0$ [11, п. 1.48, (f)]. Поскольку согласно (8.12) $L \circ \pi_j(r_0) \in \mathcal{D}_t$, то эти свойства позволяют выбрать числа v_1 и v_2 , $v_1 < 0 < t < v_2$, так, чтобы

$$L \circ \pi_j(r_0) \in \mathcal{D}_{v_1} \cap \mathcal{D}_{v_2}.$$

Непрерывность вложения (3.4) позволяет выбрать числа u_1 и u_2 , $u_1 < \pi_j(r_0) < u_2$, так, чтобы и

$$L((u_1, u_2)) \subset \mathcal{D}_{v_1} \cap \mathcal{D}_{v_2}.$$

Фиксируем выбранные указанным образом числа u_1 , u_2 , v_1 , v_2 и отвечающий им прямоугольник (8.10).

Построение прямоугольника (8.10) гарантирует, что для точек $(u, v) \in W$ определено отображение

$$\varphi(u, v) = X_v(L(u)), \quad (8.13)$$

для которого $r_0 \in \varphi(W)$. Это отображение C^{k-1} -гладко как композиция C^{k-1} -гладких отображений и инъективно в силу непериодичности интегральных кривых векторного поля (8.2).

По правилу дифференцирования композиции отображений

$$\varphi_*(u, v) \left(\frac{\partial}{\partial u} \right) = (X_v)_*(L(u))(\dot{L}(u)), \quad (8.14)$$

а согласно (8.4)

$$\varphi_*(u, v) \left(\frac{\partial}{\partial v} \right) = \frac{\partial}{\partial v} X_v(L(u)) = X(X_v(L(u))), \quad (8.15)$$

откуда по лемме 8.1 выводим

$$\varphi_*(u, v) \left(\frac{\partial}{\partial v} \right) = (X_v)_*(L(u))(X(L(u))). \quad (8.16)$$

Свойство свободности (3.3) начальной кривой (3.1) и равенство (3.5) обеспечивают линейную независимость векторов $\dot{L}(u)$ и $X(L(u))$ при $u_1 < u < u_2$. Отображение X_v является диффеоморфизмом, и потому векторы (8.14) и (8.16) также линейно независимы при $u_1 < u < u_2$ и $v_1 < v < v_2$. Это означает, что (8.13) – диффеоморфизм.

(а) Свойство (а) равносильно равенству (8.15).

(б) Свойство (б) вытекает из определений (8.13) и (8.5).

(с) Свойство (с) вытекает из определения (8.1) и свойств (а) и (б). Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 8.3. *Проекция (8.1) при $j = 1, 2$ является C^{k-1} -гладким отображением таким, что для касательного вектора $\xi \in T_r S$*

$$d\pi_j(\xi) = 0 \quad (8.17)$$

тогда и только тогда, когда ξ лежит в пространстве $h_j(r)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем произвольную точку $r \in S$ и выберем ее окрестность U и C^{k-1} -диффеоморфизм (8.9) в соответствии с леммой 8.2. По свойству (с) проекция (8.1) C^{k-1} -гладка и

$$d(\pi_j \circ \varphi) = d\pi_j \circ \varphi_* = du,$$

а по свойству (а) $\xi \in T_r S$ тогда и только тогда лежит в пространстве $h_j(r)$, когда $\varphi_*(\xi)$ коллинеарен $\frac{\partial}{\partial v}$, т.е. когда выполнено условие (8.17). Следствие доказано.

ЛЕММА 8.4. *Пусть выполнены все условия теоремы 3.2. Тогда отображение*

$$\Phi: S \ni r \mapsto (u, v) = (\pi_1(r), \pi_2(r)) \in \mathbb{R}^2, \quad (8.18)$$

где π_1 и π_2 – проекции (8.1), является C^{k-1} -диффеоморфизмом, для которого выполнены свойства (а), (б), (с) и (д) теоремы 3.2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию решение (σ, L) является определенным. Поэтому согласно построению (8.1) отображение (8.18) инъективно и C^{k-1} -гладко в силу следствия 8.3.

Выберем ненулевые вектора $\xi_1, \xi_2 \in T_r S$ так, чтобы при $j = 1, 2$ $\xi_j \in h_j(r)$. Поскольку (1.4) – погружение, то по леммам 2.3 и 2.2.(d) эти векторы линейно независимы, т.е. образуют базис пространства $T_r S$. По определению (8.18)

$$\Phi_*(r)(\xi_j) = \xi_j \lrcorner d\pi_1(r) \frac{\partial}{\partial u} + \xi_j \lrcorner d\pi_2(r) \frac{\partial}{\partial v},$$

откуда по следствию 8.3

$$\Phi_*(r)(\xi_1) = \xi_1 \lrcorner d\pi_2(r) \frac{\partial}{\partial v} \neq 0, \quad \Phi_*(r)(\xi_2) = \xi_2 \lrcorner d\pi_1(r) \frac{\partial}{\partial u} \neq 0.$$

Полученные соотношения означают, что векторы $\Phi_*(r)(\xi_1)$ и $\Phi_*(r)(\xi_2)$ линейно независимы. Следовательно, отображение (8.18) для всякого $r \in S$ переводит базис пространства $T_r S$ в базис пространства $T_{\Phi(r)} \mathbb{R}^2$ и поэтому является диффеоморфизмом.

(а) Образ $W = \Phi(S)$ отображения (8.18) – это открытое подмножество в $\mathbb{R}^2$, которое в силу определения (8.1) лежит внутри квадрата (3.9), а подмногообразие (3.4) отображается на диагональ (3.10).

(b) По определениям (8.18) и (8.1) имеет место (3.11).

(с) По следствию 8.3 образ $\Phi \circ \gamma_{jr}(Z_{jr})$ характеристики (2.8) при отображении (8.18) лежит на координатной прямой $u = \pi_1(r)$ для $j = 1$ и на прямой $v = \pi_2(r)$ для $j = 2$. Следовательно, $\Phi \circ \gamma_{jr}$ – вещественнозначная функция на Z_{jr} . Поскольку (8.18) – локальный диффеоморфизм, то $(\Phi \circ \gamma_{jr})_*$ – мономорфизм, и функция $\Phi \circ \gamma_{jr}$ не имеет критических точек. Отвечающее характеристике (2.8) многообразие Z_{jr} одномерно при любом $r \in S$ и, следовательно, диффеоморфно либо окружности, либо открытому интервалу вещественной прямой [10, гл. 1, § 2]. Отсутствие у функции $\Phi \circ \gamma_{jr}$ критических точек означает, что Z_{jr} диффеоморфно интервалу. Поэтому мономорфность $(\Phi \circ \gamma_{jr})_*$ равносильна строгой монотонности функции $\Phi \circ \gamma_{jr}$, и, следовательно, образ $\Phi \circ \gamma_{jr}(Z_{jr})$ является интервалом соответствующей координатной прямой.

Для всякого $r \in S$ координатные прямые $u = \pi_1(r)$ и $v = \pi_2(r)$ пересекаются ровно в одной точке. Тем самым, в силу строгой монотонности функций $\Phi \circ \gamma_{1r}$ и $\Phi \circ \gamma_{2r}$ пересечение (3.7) также состоит ровно из одной точки, что равносильно инъективности отображения (8.18). Иными словами, локальный диффеоморфизм (8.18) является диффеоморфизмом.

(d) Определенность решения (σ, S) и свойства (а), (b) и (с) гарантируют, что всякая точка (u, v) множества $W = \Phi(S)$ может быть соединена с диагональю (3.10) отрезками координатных прямых, целиком содержащимися в W . Это равносильно тому, что треугольник (3.12) лежит внутри W . Лемма доказана.

По лемме 8.4 отвечающее определенному C^k -решению (σ, L) отображение (3.14), (3.16) C^{k-1} -гладко. Имеет место

ЛЕММА 8.5. Пусть (3.14), (3.16) – это C^{k-1} -отображение, отвечающее определенному C^k -решению (σ, L) согласно лемме 8.4. Тогда для этого отображения справедливы включения

$$\psi_* \left(\frac{\partial}{\partial u} \right) \in H_1, \quad (8.19)$$

$$\psi_* \left(\frac{\partial}{\partial v} \right) \in H_2. \quad (8.20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По свойству (с) леммы 8.4 и определению характеристик (2.8) для отображения (3.16) на множестве справедливы включения (8.19), (8.20). Лемма доказана.

Рассмотрим на $\mathbb{R}^5$ векторные поля (2.4), удовлетворяющие лемме 2.2, (f). Имеет место

ЛЕММА 8.6. Включение (8.19) равносильно уравнениям

$$\psi_* \left(\frac{\partial}{\partial u} \right) \lrcorner (\xi_{1g} \lrcorner \omega_1) = 0, \quad (8.21)$$

$$\psi_* \left(\frac{\partial}{\partial u} \right) \lrcorner \omega_0 = 0, \quad (8.22)$$

где $g = 1, 2$, включение (8.20) равносильно уравнениям

$$\psi_* \left(\frac{\partial}{\partial v} \right) \lrcorner (\xi_{2g} \lrcorner \omega_1) = 0, \quad (8.23)$$

$$\psi_* \left(\frac{\partial}{\partial v} \right) \lrcorner \omega_0 = 0. \quad (8.24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы является следствием определения (2.3) и леммы 2.2, (a), (b). Лемма доказана.

Запишем уравнения (8.21)–(8.24) покомпонентно. Положим

$$\psi^1 = \psi^* x, \quad \psi^2 = \psi^* y, \quad \psi^3 = \psi^* p, \quad \psi^4 = \psi^* q, \quad \psi^5 = \psi^* z. \quad (8.25)$$

Тогда из (8.21) и (8.23) выводим

$$\sum_{g=1}^4 \eta_g^{1w}(\psi) \psi_u^g(u, v) = 0, \quad (8.26)$$

$$\sum_{g=1}^4 \eta_g^{2w}(\psi) \psi_v^g(u, v) = 0, \quad (8.27)$$

где $w = 0, 1$, η_g^{nw} – это g -я компонента линейной дифференциальной формы $\xi_{ng} \lrcorner \omega_1$ и $n = 1, 2$. Из (8.22) и (8.24) выводим

$$\psi_u^5 - \psi^3 \psi_u^1 - \psi^4 \psi_u^2 = 0, \quad (8.28)$$

$$\psi_v^5 - \psi^3 \psi_v^1 - \psi^4 \psi_v^2 = 0. \quad (8.29)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 8.7. Полученная система уравнений (8.26)–(8.29) аналогична системе уравнений, которую Г. Леви использовал в работе [13] для построения локального классического решения нелинейного гиперболического уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными.

По лемме 2.2, (d), (f) векторные поля ξ_{11} , ξ_{12} , ξ_{21} и ξ_{22} линейно независимы в каждой точке $t \in \mathbb{R}^5$. Следовательно, в силу невырожденности контактной формы ω_0 квадратная матрица (N_g^{w+n}) ,

$$N_g^{n+w} = \eta_g^{nw}, \quad (8.30)$$

размера 4×4 также невырождена. Поэтому справедлива

ЛЕММА 8.8. *Всякое C^1 -отображение (3.14), компоненты (8.25) которого удовлетворяют системе пяти уравнений (8.26)–(8.28), имеет в W непрерывную смешанную производную ψ_{uv} .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [14, секция 4].

Лемма 8.8 и невырожденность матрицы (8.30) позволяет провести следующее построение. Про дифференцируем уравнения (8.26) по v , уравнения (8.27) по u и разрешим полученные уравнения относительно $\psi_{uv}^1, \psi_{uv}^2, \psi_{uv}^3$ и ψ_{uv}^4 . В результате получим следующее утверждение.

ЛЕММА 8.9. *Пусть (3.14) – произвольное C^1 -отображение, компоненты (8.25) которого удовлетворяют системе пяти уравнений (8.26)–(8.28). Предположим, что множество W содержит диагональ (3.10), на которой отображение (3.14) принимает начальное значение (3.17). Тогда компоненты этого отображения удовлетворяют системе уравнений*

$$\psi_{uv}^g = \sum_{\alpha, \beta=1}^4 \Psi_{\alpha\beta}^g(\psi) \psi_u^\alpha \psi_v^\beta. \quad (8.31)$$

Здесь $g = 1, \dots, 5$ и $\Psi_{\alpha\beta}^g$ являются известными полиномами от коэффициентов матрицы (8.30), их первых производных и коэффициентов матрицы, обратной к (8.30). На диагонали (3.10)

$$\psi_u(t, t) = \mu_1(t), \quad (8.32)$$

$$\psi_v(t, t) = \mu_2(t), \quad (8.33)$$

где μ_1 и μ_2 являются известными полиномами от композиции коэффициентов обратной к (8.30) матрицы с начальной кривой (3.1) и первых производных компонент (4.3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вывод уравнений (8.31) при $g = 1, 2, 3, 4$ описан в предшествующем лемме абзаце. Вывод из уравнения (8.28) уравнения (8.31) при $g = 5$ осуществляется аналогичным образом. Продифференцируем начальное значение (3.17):

$$\psi_u(t, t) + \psi_v(t, t) = \dot{I}(t). \quad (8.34)$$

Выразив отсюда $\psi_v(t, t)$ и подставив результат в (8.27), получим систему (8.27), (8.28) пяти независимых линейных алгебраических уравнений относительно $\psi_u(t, t)$, решая которую, находим (8.32). Из (8.34) и (8.32) выводим (8.33) с $\mu_2(t) = \dot{I}(t) - \mu_1(t)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 8.10. Пусть множество W обладает свойствами (а) и (д) теоремы 3.2. Тогда всякое C^1 -отображение (3.14), компоненты (8.25) которого удовлетворяют системе пяти уравнений (8.26)–(8.28) и принимают начальное значение (3.17), C^k -гладко.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 8.8 отображение (3.14) обладает непрерывными смешанными производными ψ_{uv} , для которых согласно лемме 8.9 выполнены уравнения (8.31), и принимает начальные значения (3.17) и (8.32), (8.33). Положим

$$\psi_1 = \psi_u, \quad \psi_2 = \psi_v. \quad (8.35)$$

Для компонент этих отображений при $g = 1, \dots, 5$ имеем

$$\psi_{1v}^g = \sum_{\alpha, \beta=1}^4 \Psi_{\alpha\beta}^g(\psi) \psi_1^\alpha \psi_2^\beta, \quad (8.36)$$

$$\psi_{2u}^g = \sum_{\alpha, \beta=1}^4 \Psi_{\alpha\beta}^g(\psi) \psi_1^\alpha \psi_2^\beta, \quad (8.37)$$

$$\psi_1(t, t) = \mu_1(t), \quad \psi_2(t, t) = \mu_2(t). \quad (8.38)$$

Тем самым получаем задачу Коши (8.36)–(8.38) относительно ψ_1 и ψ_2 , входные данные которой C^{k-1} -гладки. Отсюда вытекает C^{k-1} -гладкость отображений (8.35). Доказательство этого факта аналогично доказательству существования производных высших порядков по параметрам и начальным значениям для решений обыкновенных дифференциальных уравнений [16, гл. 5, § 4]. Лемма доказана.

ЛЕММА 8.11. Пусть (3.14), (3.16) – C^{k-1} -отображение, отвечающее определенному C^k -решению (σ, L) задачи Коши (1.1), (3.1) согласно лемме 8.4. Тогда это отображение C^k -гладко.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 8.5 для этого отображения выполняются включения (8.19), (8.20), которые по лемме 8.6 равносильны системе уравнений (8.21)–(8.24). Покомпонентная запись уравнений этой системы имеет вид (8.26)–(8.29), откуда по лемме 8.10 заключаем, что отображение (3.14), (3.16) C^{k-1} -гладко. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.2. Существование. По лемме 8.4 отображение (8.18) является C^{k-1} -диффеоморфизмом, для которого выполнены свойства (а), (b), (c) и (d) теоремы 3.2. Рассмотрим отвечающее решению (σ, S) C^{k-1} -погружение (3.14), (3.16). По лемме 8.11 это погружение C^k -гладко и, следовательно, (8.18) также является C^k -гладким [11, пп. 1.32, 1.35].

Единственность. Пусть существует еще один диффеоморфизм $\tilde{\Phi}$, удовлетворяющий теореме 3.2. По определению проекции (8.1) и свойству (b) для любого $r \in S$ при $a < t < b$ и $j = 1, 2$

$$\tilde{\Phi} \circ L(\pi_j(r)) = (\pi_j(r), \pi_j(r)).$$

Следовательно, по свойству (c) теоремы 3.2

$$u \circ \tilde{\Phi}(r) = u \circ \tilde{\Phi}(L(\pi_1(r))) = \pi_1(r), \quad v \circ \tilde{\Phi}(r) = v \circ \tilde{\Phi}(L(\pi_2(r))) = \pi_2(r),$$

т.е. $\tilde{\Phi}$ совпадает с диффеоморфизмом (8.18). Теорема доказана.

9. Доказательство теоремы 5.4. Прежде чем приступить к непосредственному доказательству теоремы 5.4, установим ряд вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 9.1. Пусть (3.14) – C^k -погружение, для которого справедливы включения (8.19), (8.20). Тогда это погружение является многозначным C^k -решением уравнения (1.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По свойству (b) леммы 2.2 и определению характеристического расслоения (2.3) это погружение удовлетворяет на множестве W уравнениям (1.8), (1.5) и (1.6). Лемма доказана.

ЛЕММА 9.2. Пусть множество W удовлетворяет свойствам (а) и (d) теоремы 3.2. Предположим, что компоненты (8.25) C^k -отображения (3.14) удовлетворяют системе (8.26)–(8.28) и принимают начальное значение (3.17). Тогда пара (ψ, G) отображений (3.14), (3.15) является определенным C^k -решением задачи Коши (1.1), (3.1), характеристическим диффеоморфизмом которого служит тождественное отображение id_W .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнения (8.26), (8.27) служат покомпонентной записью равенств (8.21) и (8.23), а уравнение (8.28) – равенства (8.22). По свойствам скобки Ли

$$\begin{aligned} 0 &= \left[\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right] \lrcorner \psi^*(\omega_0) = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial}{\partial v} \lrcorner \psi^*(\omega_0) \right) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial}{\partial u} \lrcorner \psi^*(\omega_0) \right) - \left(\frac{\partial}{\partial u} \wedge \frac{\partial}{\partial v} \right) \lrcorner \psi^*(\omega_1), \end{aligned}$$

откуда в силу (8.22) выводим

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial}{\partial v} \lrcorner \psi^*(\omega_0) \right) = \left(\psi_* \left(\frac{\partial}{\partial u} \right) \wedge \psi_* \left(\frac{\partial}{\partial v} \right) \right) \lrcorner \omega_1. \quad (9.1)$$

По лемме 8.6 равенства (8.21) и (8.22) равносильны включению (8.19), и, следовательно, вектор $\psi_* \left(\frac{\partial}{\partial u} \right)$ компланарен базисным векторам (2.4) при $j = 2$. Поэтому из равенств (8.23) получаем, что правая часть в соотношении (9.1) равна нулю, т.е.

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial}{\partial v} \lrcorner \psi^*(\omega_0) \right) (u, v) = 0 \quad (9.2)$$

при $(u, v) \in W$. Выражение (8.34), полученное в результате дифференцирования начального значения (3.17), равносильно равенству

$$\psi_* \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \right) (t, t) = \dot{i}(t), \quad (9.3)$$

$a < t < b$, из которого в силу условия (3.2) заключаем, что

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \right) \lrcorner \psi^*(\omega_0) \right) (t, t) = 0.$$

На основании полученного соотношения и равенства (8.22) выводим

$$\left(\frac{\partial}{\partial v} \lrcorner \psi^*(\omega_0) \right) (t, t) = 0. \quad (9.4)$$

Поскольку по условию леммы множество W удовлетворяет свойствам (а) и (d) теоремы 3.2, то из (9.2) и (9.4) вытекает равенство (8.24). Таким образом, по лемме 8.6 для отображения (3.14) вместе с включением (8.19) выполнено и включение (8.20).

Компоненты первых производных (8.35) отображения (3.14) удовлетворяют системам уравнений (8.36) и (8.37). Каждую из этих систем можно рассматривать как систему линейных однородных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных ψ_1 и ψ_2 соответственно. Из условия свободности (3.3) начальной кривой, включений (8.19), (8.20) и равенства (9.3) вытекает, что каждая из производных (8.35) отлична от нуля во всех точках диагонали (3.10):

$$\psi_* \left(\frac{\partial}{\partial u} \right) \neq 0, \quad \psi_* \left(\frac{\partial}{\partial v} \right) \neq 0. \quad (9.5)$$

Поскольку по условию множество W обладает свойствами (а) и (d) из теоремы 3.2, то отсюда по теореме единственности для обыкновенных дифференциальных уравнений, примененной к системам (8.36) и (8.37), получаем, что оценки (9.5) справедливы на всем множестве W . По лемме 2.2, (d) характеристические подрасслоения H_1 и H_2 дизъюнкты, и потому из включений (8.19), (8.20) и оценок (9.5) заключаем, что $\psi_* \left(\frac{\partial}{\partial u} \right)$ и $\psi_* \left(\frac{\partial}{\partial v} \right)$ линейно независимы, т.е. отображение (3.14) является погружением.

Таким образом, отображение (3.14) является погружением, для которого выполняются включения (8.19), (8.20). По лемме 9.1 это погружение является многозначным решением уравнения (1.1). Отображение id_W обладает свойствами (а)–(d) теоремы 3.2, а потому служит характеристическим диффеоморфизмом решения (ψ, G) . Лемма доказана.

ЛЕММА 9.3. Пусть множества W_1 и W_2 обладают свойствами (а) и (d) теоремы 3.2. Тогда пересечение и объединение $W_1 \cap W_2$, $W_1 \cup W_2$ этих множеств также обладают свойствами (а) и (d) теоремы 3.2.

Доказательство тривиально.

ЛЕММА 9.4. Пусть множества W_1 и W_2 обладают свойствами (а) и (d) теоремы 3.2 и заданы C^k -отображения

$$\psi_1: W_1 \rightarrow \mathbb{R}^5, \quad (9.6)$$

$$\psi_2: W_2 \rightarrow \mathbb{R}^5, \quad (9.7)$$

которые являются решениями системы уравнений (8.26)–(8.28) и принимают начальное значение (3.17). Тогда

$$\psi_1|_{W_1 \cap W_2} = \psi_2|_{W_1 \cap W_2}. \quad (9.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 9.3 множество $W_1 \cap W_2$ обладает свойствами (а) и (d) теоремы 3.2, откуда в силу теоремы единственности для задачи (8.26)–(8.28), (3.17) (см. [14, с. 843]) вытекает равенство (9.8). Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 9.5. Пусть выполнены все условия леммы 9.4. Тогда на множестве $W = W_1 \cup W_2$ существует C^k -отображение

$$\psi: W \rightarrow \mathbb{R}^5, \quad (9.9)$$

которое является решением системы уравнений (8.26)–(8.28), принимает начальное значение (3.17) и для которого

$$\psi|_{W_1} = \psi_1, \quad \psi|_{W_2} = \psi_2. \quad (9.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 9.4 отображения (9.6) и (9.7) на пересечении $W_1 \cap W_2$ совпадают. Следовательно, выражения (9.10) корректно определяют C^k -отображение (9.9), которое является решением системы уравнений (8.26)–(8.28), принимающим начальное значение (3.17). Следствие доказано.

ЛЕММА 9.6. Существуют множество W , обладающее свойствами (а) и (d) теоремы 3.2, и C^k -отображение (9.9), которое является решением системы уравнений (8.26)–(8.28) и принимает начальное значение (3.17).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование множества W , обладающего свойствами (а) и (d) теоремы 3.2, и C^1 -отображения (9.9), которое является решением системы уравнений (8.26)–(8.28) и принимает начальное значение (3.17), является содержанием известной теоремы существования (см. [14, с. 840]). Поскольку уравнения (8.26)–(8.28) и начальное значение (3.17) C^k -гладки, то по лемме 8.10 отображение (9.9) C^k -гладко. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.4. Рассмотрим систему подмножеств плоскости $\mathbb{R}^2$

$$\{W_\zeta \mid \zeta \in Z\}, \quad (9.11)$$

которой принадлежат те и только те множества W_ζ , для которых выполнены свойства (а) и (b) теоремы 3.2 и на которых определены C^k -отображения

$$\psi_\zeta: W_\zeta \rightarrow \mathbb{R}^5, \quad (9.12)$$

удовлетворяющие системе уравнений (8.26)–(8.28) и начальному условию (3.17). Положим

$$\tilde{S} = \bigcup_{\zeta \in Z} W_\zeta. \quad (9.13)$$

По лемме 9.6 множество (9.13) непусто. По лемме 9.3 оно обладает свойствами (а) и (b) теоремы 3.4. По следствию 9.5 на нем определено такое C^k -отображение

$$\tilde{\sigma}: \tilde{S} \rightarrow \mathbb{R}^5, \quad (9.14)$$

для которого выполняются равенства

$$\tilde{\sigma} \mid W_\zeta = \psi_\zeta, \quad (9.15)$$

$\zeta \in Z$, система уравнений (8.26)–(8.28) и начальное условие (3.17). Покажем, что пара отображений (5.2), где

$$\tilde{L}: (a, b) \ni t \mapsto (t, t) \in \tilde{S} \quad (9.16)$$

– непродолжаемое решение задачи Коши (1.1), (3.1).

По лемме 9.2 пара (5.2) отображений (9.14) и (9.16) является определенным C^k -решением задачи Коши (1.1), (3.1). Предположим, что пара (5.1) отображений (1.4) и (3.4) также является определенным C^k -решением задачи Коши (1.1), (3.1). Тогда по теореме 3.2 для этого решения существует единственный C^k -диффеоморфизм Φ (см. (3.8)), обладающий свойствами (а)–(d) (характеристический диффеоморфизм, отвечающий определенному решению (5.1)).

В соответствии с замечанием 3.4 решению (5.1) можно сопоставить на множестве (3.13) пару C^k -отображений (3.14)–(3.16) так, что справедливо равенство (3.17). В силу лемм 8.5 и 8.6 компоненты (8.25) отображения (3.14) удовлетворяют системе уравнений (8.26)–(8.28). Поэтому множество (3.13) содержится в системе подмножеств (9.11). Следовательно, оно является подмножеством множества (9.13), и отображение (3.14), (3.16) при некотором $\zeta \in Z$ совпадает с отображением (9.12). Отсюда согласно (9.15) заключаем, что (3.14) служит ограничением отображения (9.14) на множество (3.13):

$$\tilde{\sigma} \mid W = \psi. \quad (9.17)$$

Зададим монеоморфизм (5.3) посредством выражения $\varphi = \Phi$. Согласно (9.17) и (3.16) для φ и решений (5.1), (5.2) справедливо первое из равенств (5.4). А согласно теореме 3.2, (b) и определению (9.16) справедливо и второе из равенств (5.4). Теорема доказана.

10. Доказательство теоремы 5.7. Прежде чем приступить к непосредственному доказательству теоремы 5.7, установим ряд вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 10.1. Пусть для уравнения (1.1) заданы начальные значения (3.1) и (5.5), которые эквивалентны, и пусть эта эквивалентность осуществляется диффеоморфизмом (5.6). Предположим, что (σ, L) – определенное C^k -решение задачи Коши (1.1), (3.1) и (3.8) – отвечающий этому решению характеристический диффеоморфизм. Тогда пара отображений (μ, F) , где

$$\begin{aligned}\mu &= \sigma \circ \Phi^{-1} \circ (N \mid W)^{-1}, \\ N: \Pi(a, b) \ni (u, v) &\mapsto (\nu(u), \nu(v)) \in \Pi(\tilde{a}, \tilde{b}), \\ F: \tilde{Z} \ni t &\mapsto (t, t) \in \Pi(\tilde{a}, \tilde{b}),\end{aligned}$$

является определенным C^k -решением задачи Коши (1.1), (5.5). Это решение эквивалентно решению $(\sigma, S): \mu \circ \varphi = \sigma$ и $\varphi \circ L(t) = F \circ \nu(t)$, где

$$\varphi = N \circ \Phi. \quad (10.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что погружение μ является многозначным C^k -решением уравнения (1.1). При $\tilde{a} < t < \tilde{b}$

$$\mu \circ F(t) = \sigma \circ \Phi^{-1} \circ (N \mid W)^{-1}(t, t) = \sigma \circ \Phi^{-1}(\nu^{-1}(t), \nu^{-1}(t)),$$

откуда по теореме 3.2, (b) и определению 5.5, (a)

$$\mu \circ F(t) = \sigma \circ \Phi^{-1}(\Phi \circ L(\nu^{-1}(t))) = \sigma \circ L(\nu^{-1}(t)) = l(\nu^{-1}(t)) = \tilde{l}(t).$$

Тем самым установлено, что (μ, F) – это решение задачи Коши (1.1), (5.5). Отображение N переводит координатные прямые в координатные прямые, следовательно, в силу свойств характеристического диффеоморфизма Φ (теорема 3.2, (c)–(d)) это решение является определенным.

Зададим гомеоморфизм (5.6) посредством выражения (10.1). Согласно определению (3.13) множества W

$$\mu \circ \varphi = \sigma \circ \Phi^{-1} \circ (N \mid W)^{-1} \circ N \circ \Phi = \sigma,$$

т.е. первое из равенств (5.8) выполнено. По теореме 3.2, (b)

$$\varphi \circ L(t) = N \circ \Phi \circ L(t) = N(t, t) = (\nu(t), \nu(t)) = F \circ \nu(t),$$

т.е. второе из равенств (5.8) также выполнено. Лемма доказана.

Рассмотрим многозначные C^k -решения (1.4) и (9.14) уравнения (1.1). По лемме 2.3 на решении (1.4) определено одномерное векторное C^{k-1} -подрасслоение (2.6), а на решении (9.14) – подрасслоение

$$\tilde{h}_j \subset T\tilde{S}. \quad (10.2)$$

Подрасслоение (2.6) определяется включением (2.7), а подрасслоение (10.2) – включением

$$\tilde{\sigma}_*(\tilde{h}_j(\tilde{r})) \subset H_j(\tilde{\sigma}(\tilde{r})), \quad (10.3)$$

где $\tilde{r} \in \tilde{S}$ и $j = 1, 2$. Интегральные многообразия подрасслоения (2.6) – это характеристики (2.8) решения (1.4), а интегральные многообразия подрасслоения (10.2) – это характеристики

$$\gamma_{j\tilde{r}}: \tilde{Z}_{j\tilde{r}} \rightarrow \tilde{S} \quad (10.4)$$

решения (9.14). Имеет место

ЛЕММА 10.2. Пусть для многозначных решений (1.4) и (9.14) существует такое вложение (5.3), что

$$\tilde{\sigma} \circ \varphi = \sigma. \quad (10.5)$$

Тогда для подрасслоений (2.6) и (10.2) при $j = 1, 2$ и $r \in S$ справедливы равенства

$$\varphi_*(h_j(r)) = \tilde{h}_j(\varphi(r)), \quad (10.6)$$

а для характеристик (2.8) и (10.4) – включения

$$\varphi \circ \gamma_{jr}(Z_{jr}) \subset \tilde{\gamma}_{j\varphi(r)}(\tilde{Z}_{j\varphi(r)}). \quad (10.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Включение (2.7) и соотношение (10.5) обеспечивают выполнение включения

$$\tilde{\sigma}_*(\varphi_*(h_j(r))) \subset H_j(\tilde{\sigma}(\varphi(r))). \quad (10.8)$$

По лемме 2.3 включение (10.3) однозначно определяет подрасслоение (10.2), поэтому из (10.8) вытекает (10.6).

Выберем произвольную точку $w \in Z_{jr}$. Для касательного пространства $T_w Z_{jr}$ по определению характеристики (2.8) имеем

$$(\varphi \circ \gamma_{jr})_*(T_w Z_{jr}) = \varphi_*((\gamma_{jr})_*(T_w Z_{jr})) = \varphi_*(h_j(\gamma_{jr}(w))),$$

откуда в силу (10.6) получаем

$$(\varphi \circ \gamma_{jr})_*(T_w Z_{jr}) = \tilde{h}_j(\varphi(\gamma_{jr}(w))).$$

Следовательно, подмногообразие $\varphi \circ \gamma_{jr}$ является интегральным многообразием подрасслоения (10.2). Оно, очевидно, содержит точку $\varphi(r)$, а поскольку $\tilde{\gamma}_{j\varphi(r)}$ – это наибольшее интегральное многообразие подрасслоения (10.2), содержащее точку $\varphi(r)$, то справедливо включение (10.7). Лемма доказана.

ЛЕММА 10.3. Пусть (5.1) и (5.2) – два непродолжаемых решения задачи Коши (1.1), (3.1). Тогда они эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению 5.1 для непродолжаемого решения (5.2) найдется такое вложение (5.3), для которого справедливы равенства (5.4). Аналогичным образом, для непродолжаемого решения (5.1) найдется вложение $\tilde{\varphi}: \tilde{S} \rightarrow S$ такое, что справедливы равенства

$$\sigma \circ \tilde{\varphi} = \tilde{\sigma}, \quad \tilde{\varphi} \circ \tilde{L} = L.$$

Следовательно, для вложений $\tilde{\varphi} \circ \varphi$ и $\varphi \circ \tilde{\varphi}$ имеем

$$\tilde{\sigma} \circ (\varphi \circ \tilde{\varphi}) = \tilde{\sigma}, \quad (\varphi \circ \tilde{\varphi}) \circ \tilde{L} = \tilde{L}, \quad \sigma \circ (\tilde{\varphi} \circ \varphi) = \sigma, \quad (\tilde{\varphi} \circ \varphi) \circ L = L. \quad (10.9)$$

Положим $f = \tilde{\varphi} \circ \varphi: S \rightarrow S$. Отображение (3.4) является вложением, поэтому из (10.9) вытекает

$$f \mid L(Z) = \text{id}_{L(Z)}. \quad (10.10)$$

Выберем произвольную точку $r \in S$. По условию решение (5.1) является определенным, т.е. при $j = 1, 2$ пересечение (3.6) состоит в точности из одной точки r_j , лежащей в $L(Z)$, и пересечение (3.7) состоит в точности из одной точки r :

$$r = \gamma_{1r_1}(Z_{1r_1}) \cap \gamma_{2r_2}(Z_{2r_2}). \quad (10.11)$$

Отсюда по лемме 10.2 (см. (10.7))

$$f(r) = \gamma_{1f(r_1)}(Z_{1f(r_1)}) \cap \gamma_{2f(r_2)}(Z_{2f(r_2)}),$$

что в силу (10.10) обеспечивает справедливость выражения

$$f(r) = \gamma_{1r_1}(Z_{1r_1}) \cap \gamma_{2r_2}(Z_{2r_2}),$$

сопоставляя которое с (10.11), заключаем, что $f(r) = \tilde{\varphi} \circ \varphi(r) = r$.

Аналогичным образом для всякого $\tilde{r} \in \tilde{S}$ устанавливается, что $\varphi \circ \tilde{\varphi}(\tilde{r}) = \tilde{r}$. Таким образом, вложения φ и $\tilde{\varphi}$ являются взаимно обратными отображениями, т.е. диффеоморфизмами, и, следовательно, решения (5.1) и (5.2) эквивалентны. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.7. По лемме 10.1 для непродолжаемого решения (5.2) задачи Коши (1.1), (3.1) найдется эквивалентное ему определенное решение (μ, F) ,

$$\mu: U \rightarrow \mathbb{R}^5, \quad F: \tilde{Z} \rightarrow U,$$

задачи Коши (1.1), (5.5). Иными словами, существует такой диффеоморфизм $\varphi: \tilde{S} \rightarrow U$, что

$$\mu \circ \varphi = \tilde{\sigma}, \quad \varphi \circ \tilde{L} = F \circ \nu, \quad (10.12)$$

где ν – диффеоморфизм (5.6).

Рассмотрим произвольное определенное C^k -решение (α, X) , $\alpha: V \rightarrow \mathbb{R}^5$, $X: \tilde{Z} \rightarrow V$, задачи (1.1), (5.5). По лемме 10.1 для этого решения найдется эквивалентное ему определенное решение (β, Y) , $\beta: W \rightarrow \mathbb{R}^5$, $Y: Z \rightarrow W$, задачи Коши (1.1), (3.1). Иными словами, существует такой диффеоморфизм $\psi: W \rightarrow V$, что

$$\alpha \circ \psi = \beta, \quad \psi \circ Y = X \circ \nu. \quad (10.13)$$

Поскольку (5.2) является непродолжаемым решением задачи (1.1), (3.1), то для решения (β, Y) найдется такое вложение $\gamma: W \rightarrow \tilde{S}$, что

$$\tilde{\sigma} \circ \gamma = \beta, \quad \gamma \circ Y = \tilde{L}. \quad (10.14)$$

Зададим вложение

$$\rho = \varphi \circ \gamma \circ \psi^{-1}: V \rightarrow U.$$

В силу (10.12)–(10.14) имеем

$$\begin{aligned} \mu \circ \rho &= \mu \circ \varphi \circ \gamma \circ \psi^{-1} = \tilde{\sigma} \circ \gamma \circ \psi^{-1} = \beta \circ \psi^{-1} = \alpha, \\ \rho \circ X &= \varphi \circ \gamma \circ \psi^{-1} \circ X = \varphi \circ \gamma \circ Y \circ \nu^{-1} = \varphi \circ \tilde{L} \circ \nu^{-1} = F \circ \nu \circ \nu^{-1} = F. \end{aligned}$$

Полученные соотношения означают, что определенное решение (μ, F) является непродолжаемым.

Таким образом установлено, что эквивалентное непродолжаемому решению (5.2) задачи Коши (1.1), (3.1) определенное решение (μ, F) задачи Коши (1.1), (5.5) также непродолжаемо. Следовательно, по лемме 10.3 решение (μ, F) эквивалентно непродолжаемому решению (5.1) задачи Коши (1.1), (5.5). Поскольку в силу замечания 5.6 отношение эквивалентности решений транзитивно, то отсюда вытекает, что решения (5.1) и (5.2) также эквивалентны. Теорема доказана.

11. Доказательство теоремы 5.9. Прежде чем приступить к непосредственному доказательству теоремы 5.9, установим ряд вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 11.1. Пусть (5.1) и (5.2) – определенные решения задачи Коши (1.1), (3.1), а отображения (3.8) и

$$\tilde{\Phi}: \tilde{S} \rightarrow \tilde{W} \quad (11.1)$$

– отвечающие этим решениям характеристические диффеоморфизмы. Предположим, что существует такое вложение (5.3), для которого выполнены соотношения (5.4). Тогда

$$\tilde{\Phi} \circ \varphi = \Phi. \quad (11.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим диффеоморфизм

$$f = \tilde{\Phi} \circ \varphi: S \rightarrow f(S). \quad (11.3)$$

По теореме 3.2, (b) для характеристического диффеоморфизма (11.1)

$$\tilde{\Phi} \circ \tilde{L}(t) = (t, t)$$

при $a < t < b$, поэтому согласно (5.4) имеем

$$f \circ L(t) = \tilde{\Phi} \circ \varphi \circ L(t) = \tilde{\Phi} \circ \tilde{L}(t) = (t, t).$$

Следовательно, диффеоморфизм (11.3) обладает свойствами (a) и (b) теоремы 3.2. По теореме 3.2 для характеристического диффеоморфизма (11.1) имеют место свойства (c) и (d), а по лемме 10.2 вложение (5.3) отображает характеристики решения (5.1) в соответствующие характеристики решения (5.2). Отсюда вытекает, что диффеоморфизм (11.3) обладает и свойствами (c) и (d) теоремы 3.2. Поэтому согласно этой теореме он совпадает с Φ , т.е. справедливо равенство (11.2). Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 11.2. Пусть (5.1) и (5.2) – определенные решения задачи Коши (1.1), (3.1) и отображения (3.8) и (11.1) – отвечающие этим решениям характеристические диффеоморфизмы. Предположим, что решение (5.2) является непродолжаемым. Тогда справедливы следующие утверждения:

- (a) $\Phi(S) \subseteq \tilde{\Phi}(\tilde{S})$;
- (b) решение (5.1) тогда и только тогда непродолжаемо, когда

$$\Phi(S) = \tilde{\Phi}(\tilde{S}). \quad (11.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) По определению 5.1 и замечанию 5.2 существует такое вложение (5.3), что выполнены соотношения (5.4). По лемме 11.1 для характеристических диффеоморфизмов (3.8) и (11.1) имеет место соотношение (11.2). Следовательно,

$$\Phi(S) = \tilde{\Phi} \circ \varphi(S) \subseteq \tilde{\Phi}(\tilde{S}).$$

(б) Предположим, что решение (5.1) непродолжаемо. Тогда из доказанного утверждения (а) вытекает равенство (11.4).

Обратно, предположим, что для решения (5.1) выполнено равенство (11.4). По лемме 11.1

$$\tilde{\Phi}(\tilde{S}) = \Phi(S) = \tilde{\Phi} \circ \varphi(S). \quad (11.5)$$

По условию отображение (11.1) – диффеоморфизм, и, следовательно, из (11.5) вытекает, что $\tilde{S} = \varphi(S)$, т.е. вложение (5.3) является диффеоморфизмом. Таким образом, решения (5.1) и (5.2) эквивалентны, откуда в силу определений 5.1 и 5.5, (б) ясно, что (5.1) – непродолжаемое решение. Следствие доказано.

Поставим для системы пяти уравнений (8.26)–(8.28) задачу Гурса на координатных прямых:

$$\psi(u, 0) = a_1(u), \quad \psi(0, v) = a_2(v), \quad (11.6)$$

где a_1 и a_2 – непрерывно дифференцируемые на отрезках $[0, b]$, $b > 0$, и $[0, c]$, $c > 0$, вектор-функции. Предположим, что выполнены условия согласования уравнений (8.26)–(8.28) с начальными значениями (11.6):

$$\begin{aligned} \sum_{g=1}^4 \eta_g^{1w}(a_1(u)) \dot{a}_{1u}^g(u) &= 0, \quad \sum_{g=1}^4 \eta_g^{2w}(a_2(v)) \dot{a}_{2v}^g(v) = 0, \\ \dot{a}_1^5(u) - a_1^3(u) \dot{a}_1^1(u) - a_1^4(u) \dot{a}_1^2(u) &= 0, \quad a_1(0) = a_2(0), \end{aligned} \quad (11.7)$$

$w = 0, 1$. Имеет место следующий известный факт.

ЛЕММА 11.3. Пусть коэффициенты уравнений (8.26), (8.27) непрерывно дифференцируемы в пространстве $\mathbb{R}^5$ и выполнены условия согласования (11.7). Тогда найдется такое положительное число β , что в каждом из двух прямоугольников

$$\{(u, v) \in \mathbb{R}^5 \mid 0 \leq u \leq b, \quad 0 \leq v \leq \beta\}, \quad (11.8)$$

$$\{(u, v) \in \mathbb{R}^5 \mid 0 \leq u \leq \beta, \quad 0 \leq v \leq c\} \quad (11.9)$$

существует непрерывно дифференцируемое решение $\psi(u, v)$ системы уравнений (8.26)–(8.28), принимающее начальные значения (11.6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО осуществляется посредством комбинации метода Хартмана–Уинтера [14. с. 843–844] с методом мажорантных оценок [25, гл. 1, § 8].

Для всякой точки (u_0, v_0) из квадрата (3.9) положим

$$\overset{\circ}{T}(u_0, v_0) = \text{int } T(u_0, v_0). \quad (11.10)$$

ЛЕММА 11.4. Пусть (5.1) – определенное C^k -решение задачи Коши (1.1), (3.1) и (3.8) – отвечающий ему характеристический диффеоморфизм, и пусть погружение (3.14) задано посредством выражения (3.16). Предположим, что точка (u_0, v_0) из квадрата (3.9) такова, что открытый треугольник $\overset{\circ}{T}(u_0, v_0)$ содержится в W ,

$$\overset{\circ}{T}(u_0, v_0) \subseteq W,$$

и существуют положительное число C и индекс $j \in \{1, 2\}$, для которых

$$\rho_j(u, v) \leq C \quad (11.11)$$

при $(u, v) \in \overset{\circ}{T}(u_0, v_0)$, где ρ_j задано посредством (5.9), (5.10). Тогда образ множества $\overset{\circ}{T}(u_0, v_0)$ относительно погружения (3.14), (3.16) $\psi(\overset{\circ}{T}(u_0, v_0))$ ограничен в $\mathbb{R}^5$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию $(u_0, v_0) \in \Pi(a, b)$, и потому отрезок Q прямой $u = v$ с границами (u_0, u_0) и (v_0, v_0) лежит внутри диагонали (3.10). Следовательно, найдется такое $N > 0$, что

$$\|\psi(u, u)\| \leq N \quad (11.12)$$

при $(u, u) \in Q$. Для определенности будем считать, что оценка (11.11) выполнена при $j = 1$. Тогда при $(u, v) \in \overset{\circ}{T}(u_0, v_0)$ имеем

$$\begin{aligned} \|\psi(u, v)\| &= \left\| \psi(u, u) + \int_u^v \psi_v(u, t) dt \right\| \\ &\leq \|\psi(u, u)\| + \left| \int_u^v \|\psi_v(u, t)\| dt \right| = \|\psi(u, u)\| + \rho_1(u, v) \leq N + C. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 11.5. Пусть выполнены условия леммы 11.4. Тогда образы множества $\overset{\circ}{T}(u_0, v_0)$ относительно первых производных погружения (3.14), (3.16)

$$\psi_u(\overset{\circ}{T}(u_0, v_0)), \quad (11.13)$$

$$\psi_v(\overset{\circ}{T}(u_0, v_0)) \quad (11.14)$$

ограничены в $\mathbb{R}^5$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для определенности будем считать, что оценка (11.11) выполнена при $j = 1$. По леммам 8.5, 8.6 и 8.9 компоненты (8.25) погружения (3.14), (3.16) удовлетворяют системе уравнений (8.31) и принимают начальные значения (8.32), (8.33). Поэтому аналогично выводу оценки (11.12) можно выбрать такое положительное число N , чтобы при $(u, u) \in Q$

$$\|\psi_u(u, u)\| \leq N, \quad (11.15)$$

где Q – отрезок диагонали (3.10) с границами (u_0, u_0) и (v_0, v_0) .

Рассмотрим подынтегральные функции в правых частях выражений (5.9) и (5.10) соответственно,

$$\begin{aligned} f_1(u, v) &= \left\| \psi_* \left(\frac{\partial}{\partial v} \right) (u, v) \right\| = \sqrt{(\psi_v^1)^2 + (\psi_v^2)^2 + (\psi_v^3)^2 + (\psi_v^4)^2 + (\psi_v^5)^2}, \\ f_2(u, v) &= \left\| \psi_* \left(\frac{\partial}{\partial u} \right) (u, v) \right\| = \sqrt{(\psi_u^1)^2 + (\psi_u^2)^2 + (\psi_u^3)^2 + (\psi_u^4)^2 + (\psi_u^5)^2}, \end{aligned}$$

и продифференцируем вторую из них по v . В результате, учитывая (8.31), получим

$$f_{2u} = \frac{1}{f_2} \sum_{g=1}^5 \psi_u^g \sum_{\alpha, \beta=1}^4 \Psi_{\alpha\beta}^g(\psi) \psi_u^\alpha \psi_v^\beta.$$

Полученное соотношение можно записать в виде

$$f_{2u} = f_1 f_2 F(\psi, \psi_u, \psi_v), \quad (11.16)$$

где

$$F = \sum_{g=1}^5 \frac{\psi_u^g}{f_2} \sum_{\alpha, \beta=1}^4 \Psi_{\alpha\beta}^g(\psi) \frac{\psi_u^\alpha \psi_v^\beta}{f_2 f_1}.$$

По лемме 11.4 и определению функций f_1 и f_2 найдется такое положительное число K , для которого

$$|F(\psi, \psi_u, \psi_v)| \leq K \quad (11.17)$$

при $(u, v) \in \overset{\circ}{T}(u_0, v_0)$.

Соотношение (11.16) представляет собой обыкновенное линейное дифференциальное уравнение первого порядка, решая которое относительно f_2 , находим

$$f_2(u, v) = f_2(u, u) \exp \int_u^v f_1 F(u, t) dt.$$

Согласно оценкам (11.15), (11.17) и определению (5.9) выводим

$$|f_2(u, v)| \leq N \exp \left(K \left| \int_u^v f_1(u, t) dt \right| \right) = N \exp(K \rho_1(u, v)),$$

откуда в силу оценки (11.11) получаем, что при $(u, v) \in \overset{\circ}{T}(u_0, v_0)$

$$|f_2(u, v)| \leq N \exp(CK). \quad (11.18)$$

Таким образом, множество (11.14) ограничено в $\mathbb{R}^5$.

Определение (5.9) и неравенство (11.18) обеспечивают оценку

$$\rho_2(u, v) \leq |u_0 - v_0| N \exp(CK).$$

Опираясь на эту оценку, по аналогии с доказательством ограниченности множества (11.14) доказывается ограниченность множества (11.13). Лемма доказана.

По леммам 8.5, 8.6 и 8.9 компоненты (8.25) погружения (3.14), (3.16) удовлетворяют системе уравнений (8.31) и принимают начальные значения (8.32), (8.33). Интегрируя систему уравнений (8.31) по u , с учетом (8.33) находим

$$\psi_v^g(u, v) = \mu_2(v) + \sum_{\alpha, \beta=1}^4 \int_v^u \Psi_{\alpha\beta}^g(\psi) \psi_u^\alpha \psi_v^\beta(t, v) dt, \quad (11.19)$$

где $g = 1, \dots, 5$, а, интегрируя по v , с учетом (8.32) находим

$$\psi_u^g(u, v) = \mu_1(u) + \sum_{\alpha, \beta=1}^4 \int_v^u \Psi_{\alpha\beta}^g(\psi) \psi_u^\alpha \psi_v^\beta(u, t) dt.$$

ЛЕММА 11.6. *Пусть выполнены все условия леммы 11.4. Тогда отображения ψ , ψ_u и ψ_v равномерно непрерывны на множестве $\overset{\circ}{T}(u_0, v_0)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равномерная непрерывность ψ вытекает из леммы 11.5 и формулы конечных приращений.

Для определенности будем считать, что

$$v_0 > u_0. \quad (11.20)$$

По лемме 8.9 функции μ_1 и μ_2 непрерывны на интервале (a, b) , а потому равномерно непрерывны на отрезке $[u_0, v_0]$. Это равносильно тому, что функция

$$w(\varepsilon) = \sup_{\substack{|t' - t''| < \varepsilon \\ u_0 \leq t', t'' \leq v_0}} \left(\|\mu_1(t'') - \mu_1(t')\| + \|\mu_2(t'') - \mu_2(t')\| \right)$$

стремится к нулю при стремлении к нулю ε :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} w(\varepsilon) = 0.$$

Из (11.19) выводим

$$\begin{aligned} |\psi_v^g(u, v') - \psi_v^g(u, v'')| \leq w(\varepsilon) + & \left| \sum_{\alpha, \beta=1}^4 \int_{v''}^{v'} \Psi_{\alpha\beta}^g(\psi) \psi_u^\alpha \psi_v^\beta(t, v'') dt \right. \\ & + \sum_{\alpha, \beta=1}^4 \int_{v'}^u [\Psi_{\alpha\beta}^g(\psi) \psi_u^\alpha]_{(t, v')}^{(t, v'')} \psi_v^\beta(t, v'') dt \\ & \left. + \sum_{\alpha, \beta=1}^4 \int_{v'}^u (\Psi_{\alpha\beta}^g(\psi) \psi_u^\alpha)(t, v') [\psi_v^\beta]_{(t, v')}^{(t, v'')} dt \right|, \end{aligned}$$

где $(u, v'), (u, v'') \in \overset{\circ}{T}(u_0, v_0)$ и использовано обозначение $[f]_Y^X = f(X) - f(Y)$. Поэтому согласно леммам 11.4 и 11.5 найдутся такое положительное число N и такая функция $\tilde{w}(\varepsilon)$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \tilde{w}(\varepsilon) = 0$, что для всякой точки $(u, v) \in \overset{\circ}{T}(u_0, v_0)$ и функции

$$\zeta(\varepsilon, u, v) = \sup_{\substack{|t-v| < \varepsilon \\ (u, t) \in \overset{\circ}{T}(u_0, v_0)}} \|\psi_v(u, v) - \psi_v(u, t)\|$$

при $(u, t) \in \overset{\circ}{T}(u_0, v_0)$ справедлива оценка

$$\zeta(\varepsilon, u, v) \leq \tilde{w}(\varepsilon) + N \left| \int_t^u \zeta(\varepsilon, \tau, v) d\tau \right|.$$

Полученная оценка в силу неравенства Гронуолла обеспечивает выполнение соотношения

$$\zeta(\varepsilon, u, v) \leq \tilde{w}(\varepsilon) \exp(N|u - v|) \leq \tilde{w}(\varepsilon) \exp(N|u_0 - v_0|).$$

Следовательно, производная ψ_v равномерно непрерывна по v в треугольнике $\overset{\circ}{T}(u_0, v_0)$. По леммам 11.4 и 11.5 и в силу (8.31) смешанная производная ψ_{uv} ограничена в треугольнике $\overset{\circ}{T}(u_0, v_0)$. Поэтому производная ψ_v равномерно непрерывна и по u .

Таким образом, равномерная непрерывность производной ψ_v в треугольнике $\overset{\circ}{T}(u_0, v_0)$ установлена. Равномерная непрерывность производной ψ_u устанавливается аналогично. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 11.7. Пусть выполнены все условия леммы 11.4. Тогда в замкнутом треугольнике $T(u_0, v_0)$ существует единственное непрерывно дифференцируемое отображение $\tilde{\psi}$, которое совпадает в треугольнике (11.10) с погружением (3.14), (3.16),

$$\tilde{\psi}|_{\overset{\circ}{T}(u_0, v_0)} = \psi, \quad (11.21)$$

и удовлетворяет системе пяти уравнений (8.26)–(8.28).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 11.6 погружение ψ равномерно непрерывно в $\overset{\circ}{T}(u_0, v_0)$ вместе со своими первыми производными. Поэтому единственным отображением, удовлетворяющим на $\overset{\circ}{T}(u_0, v_0)$ равенству (11.21), является отображение $\tilde{\psi}$, полученное из ψ продолжением на $T(u_0, v_0)$ по непрерывности. Непрерывность в треугольнике $T(u_0, v_0)$ производных $\tilde{\psi}_u$ и $\tilde{\psi}_v$ вытекает из леммы 11.6 и формулы конечных приращений. Для компонент (8.25) погружения ψ выполнение уравнений системы (8.26)–(8.28) в треугольнике $\overset{\circ}{T}(u_0, v_0)$ обеспечено леммами 8.5 и 8.6. Поэтому в силу (11.21) компоненты отображения $\tilde{\psi}$ по непрерывности удовлетворяют этим уравнениям в замкнутом треугольнике $T(u_0, v_0)$. Следствие доказано.

ЛЕММА 11.8. Пусть выполнены все условия леммы 11.4. Тогда внутри квадрата (3.9) найдется такая точка

$$(u_1, v_1), \quad (11.22)$$

которая обладает следующими свойствами. Треугольник

$$T(u_0, v_0) \subset \overset{\circ}{T}(u_1, v_1), \quad (11.23)$$

и в треугольнике $T(u_1, v_1)$ определено C^k -отображение

$$\tilde{\psi}: T(u_1, v_1) \rightarrow \mathbb{R}^5, \quad (11.24)$$

которое удовлетворяет системе пяти уравнений (8.26)–(8.28), принимает начальное значение (3.17) и совпадает в треугольнике $\overset{\circ}{T}(u_0, v_0)$ с погружением (3.14), (3.16):

$$\tilde{\psi}|_{\overset{\circ}{T}(u_0, v_0)} = \psi. \quad (11.25)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для определенности будем считать, что имеет место неравенство (11.20).

По следствию 11.7 продолжение погружения (3.14), (3.16) на замкнутый треугольник $T(u_0, v_0)$ служит непрерывно дифференцируемым решением системы пяти уравнений (8.26)–(8.28), принимающим в силу (11.21) начальное значение (3.17). Будем для него использовать то же обозначение ψ , что и для (3.14), (3.16).

Согласно леммам 8.5, 8.6 непрерывно дифференцируемое решение системы (8.26)–(8.28), принимающее начальное значение (3.17), определено в окрестности W диагонали (3.10). Тем самым найдутся такие положительное число ε и непрерывно дифференцируемые отображения

$$\tilde{\psi}_1: T(u_0 - \varepsilon, v_0) \rightarrow \mathbb{R}^5, \quad \tilde{\psi}_2: T(u_0, v_0 + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^5,$$

что треугольники $T(u_0 - \varepsilon, v_0)$ и $T(u_0, v_0 + \varepsilon)$ лежат внутри W , а отображения $\tilde{\psi}_1$ и $\tilde{\psi}_2$ являются решениями системы (8.26)–(8.28), принимающими начальное значение (3.17).

По лемме 11.3 указанное ε можно выбрать таким образом, что прямоугольники

$$\begin{aligned}\Pi_1 &= \{(u, v) \mid u_0 - \varepsilon \leq u \leq u_0, \quad u_0 \leq v \leq v_0\}, \\ \Pi_2 &= \{(u, v) \mid u_0 \leq u \leq v_0, \quad v_0 \leq v \leq v_0 + \varepsilon\}, \\ \Pi_3 &= \{(u, v) \mid u_0 - \varepsilon \leq u \leq u_0, \quad v_0 \leq v \leq v_0 + \varepsilon\}\end{aligned}$$

содержатся внутри квадрата (3.9), и существуют непрерывно дифференцируемые отображения

$$\tilde{\psi}_3: \Pi_1 \rightarrow \mathbb{R}^5, \quad \tilde{\psi}_4: \Pi_2 \rightarrow \mathbb{R}^5, \quad \tilde{\psi}_5: \Pi_3 \rightarrow \mathbb{R}^5,$$

которые являются решениями системы (8.26)–(8.28), принимающими начальные значения

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}_3(u, u_0) &= \tilde{\psi}_1(u, u_0), & \tilde{\psi}_3(u_0, v) &= \psi(u_0, v), \\ \tilde{\psi}_4(v_0, v) &= \tilde{\psi}_2(v_0, v), & \tilde{\psi}_4(u, v_0) &= \psi(u, v_0), \\ \tilde{\psi}_5(u, v_0) &= \tilde{\psi}_3(u, v_0), & \tilde{\psi}_5(u_0, v) &= \tilde{\psi}_4(u_0, v).\end{aligned}\tag{11.26}$$

Зададим точку (11.22) и отображение (11.24) посредством выражений

$$\begin{aligned}u_1 &= u_0 - \varepsilon, & v_1 &= v_0 + \varepsilon, \\ \tilde{\psi} \mid T(u_0, v_0) &= \psi, & \tilde{\psi} \mid T(u_0 - \varepsilon, u_0) &= \tilde{\psi}_1, & \tilde{\psi} \mid T(v_0, v_0 + \varepsilon) &= \tilde{\psi}_2, \\ \tilde{\psi} \mid \Pi_1 &= \tilde{\psi}_3, & \tilde{\psi} \mid \Pi_2 &= \tilde{\psi}_4, & \tilde{\psi} \mid \Pi_3 &= \tilde{\psi}_5.\end{aligned}\tag{11.27}$$

Заданное таким образом отображение (11.24) непрерывно в силу постановки задач Гурса (11.26) и по построению удовлетворяет равенству (11.25). Для точки (11.22) справедливо включение (11.23). Чтобы установить непрерывную дифференцируемость (11.24), достаточно показать, что

$$\tilde{\psi}_{1v} = \tilde{\psi}_{3v}\tag{11.28}$$

на отрезке $v = u_0, \quad u_0 - \varepsilon \leq u \leq u_0$,

$$\tilde{\psi}_{3u} = \psi_u\tag{11.29}$$

на отрезке $u = u_0, \quad u_0 \leq v \leq v_0$,

$$\tilde{\psi}_{3v} = \tilde{\psi}_{5v}\tag{11.30}$$

на отрезке $v = v_0, \quad u_0 - \varepsilon \leq u \leq u_0$,

$$\tilde{\psi}_{4u} = \tilde{\psi}_{2u}\tag{11.31}$$

на отрезке $u = v_0$, $v_0 \leq v \leq v_0 + \varepsilon$,

$$\tilde{\psi}_{4u} = \psi_v \quad (11.32)$$

на отрезке $v = v_0$, $u_0 \leq u \leq v_0$ и

$$\tilde{\psi}_{5u} = \tilde{\psi}_{4u} \quad (11.33)$$

на отрезке $u = u_0$, $v_0 \leq v \leq v_0 + \varepsilon$. Аналогично доказательству леммы 8.10 устанавливается, что каждое из отображений $\psi_2(u) = \tilde{\psi}_{1v}(u, u_0)$ и $\psi_2(u) = \tilde{\psi}_{3v}(u, u_0)$ на отрезке $v = u_0$, $u_0 - \varepsilon \leq u \leq u_0$ удовлетворяет системе обыкновенных дифференциальных уравнений (8.37), где согласно (11.26)

$$\psi_1(u) = \tilde{\psi}_{3u}(u, u_0) = \tilde{\psi}_{1u}(u, u_0),$$

и принимает начальное значение

$$\psi_2(u_0) = \psi(u_0, u_0).$$

Следовательно, по теореме единственности имеет место равенство (11.28). Равенства (11.29)–(11.33) доказываются аналогично.

Таким образом, построенное в соответствии с (11.27) отображение (11.24) непрерывно дифференцируемо, является решением системы (8.26)–(8.28) и принимает начальное значение (3.17), а потому C^k -гладко в силу леммы 8.10. Лемма доказана.

ЛЕММА 11.9. Пусть выполнены все условия леммы 11.4, и, сверх того, пусть (5.1) является непродолжаемым решением. В этом случае включение

$$(u_0, v_0) \in W \quad (11.34)$$

равносильно существованию положительного числа C и индекса j из $\{1, 2\}$ таких, что в треугольнике (11.10) выполнена оценка (11.11).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнено включение (11.34). В этом случае по теореме 3.2, (d) треугольник $T(u_0, v_0)$ содержится в W , а потому погружение (3.14), (3.16) и его первые производные равномерно ограничены. Следовательно, согласно определениям (5.9), (5.10) найдется такое положительное C , что оценка (11.11) выполнена как при $j = 1$, так и при $j = 2$.

Обратно, пусть найдутся такие положительное число C и индекс $j \in \{1, 2\}$, что в треугольнике $\overset{\circ}{T}(u_0, v_0)$ выполнена оценка (11.11). В соответствии с замечанием 3.4 погружение (3.14), (3.16) принимает начальное значение (3.17), а его компоненты (8.25) по леммам 8.5, 8.6 удовлетворяют системе уравнений (8.26)–(8.28). По лемме 11.8 внутри квадрата (3.9) найдется такая точка (11.22), обладающая

свойством (11.23), что в треугольнике $T(u_1, v_1)$ определено C^k -отображение (11.24), которое удовлетворяет системе пяти уравнений (8.26)–(8.28), принимает начальное значение (3.17) и обладает свойством (11.25). Следовательно, по лемме 9.3 множество

$$\widetilde{W} = W \cup \overset{\circ}{T}(u_1, v_1) \quad (11.35)$$

обладает свойствами (а) и (d) теоремы 3.2, и по следствию 9.5 на нем определено C^k -решение системы уравнений (8.26)–(8.28), принимающее начальное значение (3.17). Отсюда по лемме 9.2 заключаем, что на множестве (11.35) существует определенное C^k -решение задачи Коши (1.1), (3.1), характеристическим диффеоморфизмом которого служит тождественное отображение $\text{id}_{\widetilde{W}}$. По следствию 11.2 $\widetilde{W} \subseteq W$, а потому в силу (11.23) и $(u_0, v_0) \in W$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.9. Рассмотрим отвечающие определенному решению (5.1) характеристический диффеоморфизм (3.8) и погружение (3.14), (3.16).

Необходимость. Пусть решение (5.1) непродолжаемо. Выберем произвольную точку (5.11), для которой не выполнено свойство (5.12) определения 5.8. Для определенности будем считать, что $\tilde{u} < \tilde{v}$. Построим пересечение $W \cap Q$, где Q – отрезок $u = \tilde{u}$, $\tilde{u} \leq v \leq \tilde{v}$. Это пересечение связно и содержит точку $(\tilde{u}, \tilde{u})$ по теореме 3.2, (d). В силу открытости W это означает, что $W \cap Q$ – непустой полуинтервал, т.е. найдется такое число v_0 , $\tilde{u} < v_0 < \tilde{v}$, что

$$W \cap Q = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u = \tilde{u}, \tilde{u} \leq v < v_0\}.$$

По построению

$$(\tilde{u}, v_0) \notin W. \quad (11.36)$$

По теореме 3.2 $\overset{\circ}{T}(\tilde{u}, v_0) \subseteq W$. Тем самым, если для точки $(\tilde{u}, \tilde{v})$ с $\tilde{v} = v_0$ не выполнены свойства (5.13), (5.14) определения 5.8, то для точки (u_0, v_0) с $u_0 = \tilde{u}$ выполнены все условия леммы 11.4. По лемме 11.9 отсюда вытекает включение $(\tilde{u}, v_0) \in W$, которое противоречит (11.36).

Достаточность. Пусть решение (5.1) полно. Рассмотрим непродолжаемое решение (5.2) задачи Коши (1.1), (3.1) и отвечающий ему характеристический диффеоморфизм (11.1). Предположим, что точка

$$(\tilde{u}, \tilde{v}) \in \widetilde{W}.$$

Тогда по лемме 11.9 существуют положительное число C и индекс $j = 1, 2$ такие, что в треугольнике (11.10) с $u_0 = \tilde{u}$ и $v_0 = \tilde{v}$ выполнена оценка (11.11). Поэтому согласно определению 5.8 справедливо включение (5.12), т.е. $\widetilde{W} \subseteq W$. Отсюда по следствию 11.2, (а) получаем $\widetilde{\Phi}(\widetilde{S}) = \widetilde{W} = W = \Phi(S)$, и по следствию 11.2, (b) решение (5.1) является непродолжаемым. Теорема доказана.

Список литературы

1. *Лычагин В. В.* Контактная геометрия и нелинейные дифференциальные уравнения второго порядка // УМН. 1979. Т. 34. № 1. С. 137–165.
2. *Лычагин В. В.* Нелинейные дифференциальные уравнения и контактная геометрия // ДАН СССР. 1978. Т. 238. № 2. С. 273–276.
3. *Карпан Э.* Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения. М.: Изд-во МГУ, 1962.
4. *Виноградов А. М.* Мнозначные решения и принцип классификации нелинейных дифференциальных уравнений // ДАН СССР. 1973. Т. 210. № 1. С. 11–14.
5. *Тунцкий Д. В.* Мнозначные решения гиперболических уравнений Монжа–Ампера // Дифференц. уравн. 1993. Т. 29. № 12. С. 2178–2189.
6. *Tunitsky D. V.* Hyperbolicity and multivalued solutions of Monge–Ampere equations // AMS Translations. Ser. 2. V. 167. P. 245–260.
7. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.
8. *Тунцкий Д. В.* Задача Коши для гиперболических уравнений Монжа–Ампера // Изв. РАН. Сер. матем. 1993. Т. 57. № 4. С. 174–191.
9. *Тунцкий Д. В.* О контактной линеаризации уравнений Монжа–Ампера // Изв. РАН. Сер. матем. 1996. Т. 60. № 2. С. 195–200.
10. *Хирш М.* Дифференциальная топология. М.: Мир, 1979.
11. *Уорнер Ф.* Основы теории гладких многообразий и групп Ли. М.: Мир, 1987.
12. *Бакельман И. Я., Вернер А. Л., Кантор Б. Е.* Введение в дифференциальную геометрию в “целом”. М.: Наука, 1973.
13. *Lewy H.* Über das Anfangswert Problem eine hyperbolischen nichtlinearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in zwei Veränderlichen // Math. Ann. 1927. Bd. 98. S. 179–191.
14. *Hartman P., Wintner A.* On hyperbolic partial differential equations // Amer. J. Math. 1952. V. 74. № 4. P. 834–864.
15. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1982.
16. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
17. *Тунцкий Д. В.* О регулярном изометрическом погружении в E^3 неограниченных областей отрицательной кривизны // Матем. сб. 1987. Т. 134. № 1. С. 119–134.
18. *Тунцкий Д. В.* О задаче Коши для уравнений Монжа–Ампера гиперболического типа // Матем. заметки. 1992. Т. 51. № 6. С. 80–90.
19. *Лычагин В. В.* Геометрия и топология ударных волн // ДАН СССР. 1982. Т. 34. № 6. С. 551–555.
20. *Лычагин В. В.* Геометрическая теория особенностей решений нелинейных дифференциальных уравнений // Проблемы геометрии. Т. 20. М.: ВИНТИ, 1988. С. 207–247.
21. *Постников М. М.* Гладкие многообразия. М.: Наука, 1987.
22. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов. Т. 1. М.: Мир, 1986.
23. *Ленг С.* Введение в теорию дифференцируемых многообразий. М.: Мир, 1967.
24. *Александров П. С.* Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Наука, 1977.
25. *Рождественский Б. Л., Яценко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1978.