Общероссийский математический портал

А. Г. Баскаков, Оценки элементов обратных матриц и спектральный анализ линейных операторов, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1997, том 61, выпуск 6, 3–26

DOI: <https://doi.org/10.4213/im164>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 16:01:33

УДК 517.984.3

А. Г. Баскаков

Оценки элементов обратных матриц и спектральный анализ линейных операторов

Используя теорию представлений абелевых групп, в статье получены оценки элементов обратных матриц линейных операторов, и эти результаты применяются к спектральной теории линейных операторов.

Библиография: 21 наименование.

Введение

Пусть X, Y – бесконечномерные комплексные банаховы пространства, $\text{Hom}(X, Y)$ – банахово пространство линейных ограниченных операторов, определенных на X со значениями в Y , и $(P_k), (Q_k), k \geq 1$, – две дизъюнктные последовательности проекторов (т.е. $P_i P_j = 0, Q_i Q_j = 0$ для $i \neq j$) из банаховых алгебр $\text{End } X = \text{Hom}(X, X)$ и $\text{End } Y = \text{Hom}(Y, Y)$ соответственно. Предположим, что ряды $\sum_{k \geq 1} P_k x, \sum_{k \geq 1} Q_k y$ безусловно сходятся к x и y соответственно для любых векторов $x \in X, y \in Y$. Следовательно, конечны величины

$$C(P) = \sup_{\alpha_k \in \mathbb{T}} \left\| \sum_{k \geq 1} \alpha_k P_k \right\|, \quad C(Q) = \sup_{\alpha_k \in \mathbb{T}} \left\| \sum_{k \geq 1} \alpha_k Q_k \right\|, \quad (1)$$

где $\mathbb{T} = \{\gamma \in \mathbb{C}: \|\gamma\| = 1\}$ – единичная окружность из комплексной плоскости. Каждую из таких рассматриваемых последовательностей проекторов назовем *разложением единицы*.

Любому оператору $A \in \text{Hom}(X, Y)$ поставим в соответствие матрицу $\mathcal{A} = (A_{ij})$ ($1 \leq i, j < \infty$), составленную из операторных блоков $A_{ij} = Q_i A P_j \in \text{Hom}(X, Y)$, и определим двустороннюю числовую последовательность $(d_A(k))$, $k \in \mathbb{Z}$, положив

$$d_A(k) = \sup_{i-j=k} \|A_{ij}\|, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Она является важной характеристикой убывания элементов матрицы $\mathcal{A}$, лежащих вне главной диагонали. Именно в терминах последовательности $(d_A(k))$ будут получены основные результаты данной статьи.

Множество (непрерывно) обратимых операторов из пространства $\text{Hom}(X, Y)$ обозначим символом $\text{Inv}(X, Y)$, при этом $\text{Inv } X = \text{Inv}(X, X)$ – группа обратимых операторов из алгебры $\text{End } X$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 95-01-00032а) и программы “Университеты России”.

Пусть $A \in \text{Inv}(X, Y)$ и $\mathcal{B} = (B_{ij})$ – матрица обратного оператора $B = A^{-1} \in \text{Hom}(Y, X)$ (т.е. $B_{ij} = P_i B Q_j$, $i, j \geq 1$). В данной статье получены конкретные оценки элементов последовательности $(d_B(k))$, используя величину $\|A^{-1}\|$ и последовательность $(d_A(k))$.

Для рассматриваемых операторов из пространства $\text{Hom}(X, Y)$ всюду считается, что выполненным одно из условий следующего предположения.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 1. Для матрицы $A = (A_{ij})$ оператора $A \in \text{Hom}(X, Y)$ выполнено одно из условий:

- 1) $\sum_{k \in \mathbb{Z}} d_A(k) < \infty$;
- 2) $\sum_{k \in \mathbb{Z}} d_A(k) \alpha(k) < \infty$, где $\alpha: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R}: t > 0\}$ – неубывающий субэкспоненциальный вес (т.е. $\lim_{|k| \rightarrow \infty} \frac{\ln \alpha(k)}{|k|} = 0$ и $\alpha(k) \geq 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$, $\alpha(m+n) \leq \alpha(m)\alpha(n) \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}$);
- 3) $\sup_{k \in \mathbb{Z}} d_A(k) \beta(k) < \infty$, где $\beta: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}_+$ – функция, для которой выполнены свойства:
 - а) $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\beta(k)} < \infty$,
 - б) $\lim_{|k| \rightarrow \infty} \frac{\ln \beta(k)}{|k|} = 0$,
 - в) существует постоянная $C(\beta) > 0$ такая, что

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\beta(k-j)\beta(j)} \leq C(\beta) \frac{1}{\beta(k)} \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad (2)$$

г) $\lim_{m \rightarrow \infty} \beta_0(m) = 0$ для функции $\beta_0: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, определенной равенствами

$$\beta_0(m) = \sup_{|k| \geq 2} \sum_{|j| \leq m-1} \frac{\beta(k)}{\beta(mk+j)}, \quad m \geq 1;$$

- 4) $\sup_{k \in \mathbb{Z}} d_A(k)(1+|k|)^q < \infty$ для некоторого $q > 1$ (в этом случае выполнено условие 3) для $\beta(k) = (1+|k|)^q$ и постоянная $C(\beta)$ будет обозначаться символом $C(q)$);
- 5) $d_A(k) \leq M\gamma^{|k|} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, для некоторых постоянных $M = M(A) > 0$ и $\gamma = \gamma(A) \in (0, 1)$;
- 6) $d_A(k) = 0$ при $|k| \geq t$ для некоторого $t = t(A) \in \mathbb{N}$ (матрица $\mathcal{A}$ оператора A конечнодиагональна или t -ленточна);
- 7) $d_A(k) = 0$ при $|k| \geq 2$ (матрица $\mathcal{A}$ трехдиагональна).

Каждое из выписанных семи условий выделяет класс линейных операторов, образующий линейное подпространство из $\text{Hom}(X, Y)$. Пять первых подпространств обозначим соответственно символами

$$\text{Hom}_1(X, Y), \text{Hom}_\alpha(X, Y), \text{Hom}_\beta(X, Y), \text{Hom}_q(X, Y), \text{Hom}_0(X, Y).$$

Отметим, что все подпространства содержатся в $\text{Hom}_1(X, Y)$, причем $\text{Hom}_\alpha(X, Y) = \text{Hom}_1(X, Y)$ при $\alpha \equiv 1$ и $\text{Hom}_\beta(X, Y) = \text{Hom}_q(X, Y)$ для $\beta(k) = (1+|k|)^q$, $k \in \mathbb{Z}$.

В первых четырех подпространствах введем следующие нормы:

$$\begin{aligned} \|A\|_1 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_A(k), & \|A\|_\alpha &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_A(k) \alpha(k), \\ \|A\|_\beta &= C(\beta) \sup_{k \in \mathbb{Z}} d_A(k) \beta(k), & \|A\|_q &= C(q) \sup_{k \in \mathbb{Z}} d_A(k) (1 + |k|)^q, \end{aligned} \quad (3)$$

где оператор A принадлежит соответствующему подпространству. Относительно этих норм все четыре подпространства полны.

При $X = Y$ будем считать $P_i = Q_i \ \forall i \geq 1$. В этом случае все четыре подпространства образуют банаховы алгебры (см. лемму 2), которые обозначим соответственно $\text{End}_1 X$, $\text{End}_\alpha X$, $\text{End}_\beta X$ и $\text{End}_q X$. Подпространство $\text{End}_0 X = \text{Hom}_0(X, X)$ образует подалгебру из $\text{End } X$, но она не является замкнутой.

Имеет место следующий результат, который будет получен как следствие других приводимых здесь утверждений (см. замечание 5).

ТЕОРЕМА 1. *Если обратимый оператор $A \in \text{Hom}(X, Y)$ принадлежит одному из подпространств*

$$\text{Hom}_\alpha(X, Y), \quad \text{Hom}_\beta(X, Y), \quad \text{Hom}_0(X, Y),$$

то оператор $A^{-1} \in \text{Hom}(Y, X)$ принадлежит соответствующему подпространству из

$$\text{Hom}_\alpha(Y, X), \quad \text{Hom}_\beta(Y, X), \quad \text{Hom}_0(Y, X).$$

В частности, если $X = Y$, то алгебры $\text{End}_\alpha X$ и $\text{End}_\beta X$ являются наполненными подалгебрами в банаховой алгебре $\text{End } X$.

Отметим, что наполненность подалгебры $\mathfrak{B}$ из $\text{End } X$ в алгебре $\text{End } X$ означает, что каждый обратимый в алгебре $\text{End } X$ оператор A из $\mathfrak{B}$ обратим также и в алгебре $\mathfrak{B}$.

Таким образом, из теоремы 1 следует, что для обратных операторов, принадлежащих первым четырем выделенным подпространствам, сохраняются асимптотические оценки элементов их матриц.

Полезность оценок скорости убывания элементов обратных матриц подтверждается при доказательстве ограниченности в L_∞ -норме операторов проектирования на подпространство сплайнов [1], [2] и при рассмотрении модификаций метода матричной прогонки [3].

Асимптотические оценки были получены в статье [4] для обратных матриц операторов, действующих в банаховом пространстве последовательностей $l_p(\Omega)$, где Ω – счетное метрическое пространство. Из [5] следует наполненность подалгебр $\text{End}_1 l_p$ ($p \in [1, \infty]$) в алгебре $\text{End } l_p$. В статьях [6], [7] теорема 1 была получена для подалгебр $\text{End}_\alpha l_p$, $\text{End}_q l_p$ и $\text{End}_0 l_p$ с использованием теоремы Бохнера–Филлипса [8] (см. также [9]), являющейся обобщением теоремы Винера об абсолютно сходящихся рядах Фурье. Наполненность подалгебры $\text{End}_\beta l_p$ (при нескольких других ограничениях на функцию β) была доказана в [10].

Однако при рассмотрении различных приложений важны не только асимптотические оценки, но и конкретные оценки, использующие величину $\|A^{-1}\|$. Такие оценки были получены для ленточных матриц в статьях [11], [12] (для самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве) и [13] (для операторов в пространстве l_p). Более подробное сравнение полученных результатов с известными имеется в конце § 4. Основной метод вывода оценок состоит в использовании ограниченных представлений множества $\mathbb{R}$ вещественных чисел, с помощью которых удастся описать каждое из выделенных в предположении 1 семи условий.

В § 1 данной статьи приводятся вспомогательные результаты. В § 2 получены оценки элементов матриц обратных операторов для операторов, удовлетворяющих условиям 5) и 7) предположения 1, которые затем существенно используются в § 3 при рассмотрении операторов из $\text{Hom}_\alpha(X, Y)$ и $\text{Hom}_\beta(X, Y)$. В § 4 получены приложения полученных результатов к некоторым вопросам спектрального анализа линейных операторов. В частности, получены условия разложимости по Фойашу линейных операторов (теорема 7) и оценки коэффициентов Фурье собственных векторов линейных операторов. Некоторые результаты для $X = Y = l_p$, $p \in [1, \infty]$, были анонсированы в заметке [14].

§ 1. Ряды Фурье линейных операторов

Для рассматриваемых разложений единицы $(P_i), (Q_i)$ всюду считаются выполненными следующие два предположения.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 2. $C(P) = C(Q) = 1$.

Для любого конечного множества Δ из множества $\mathbb{N}$ натуральных чисел символами $P(\Delta)$ и $Q(\Delta)$ обозначим операторы $P(\Delta) = \sum_{i \in \Delta} P_i$, $Q(\Delta) = \sum_{i \in \Delta} Q_i$.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 3. Для любых конечных множеств $\sigma_1, \sigma_2, \Delta_1, \Delta_2$ из $\mathbb{N}$ со свойствами $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \emptyset$, $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$ и любого оператора $A \in \text{Hom}(X, Y)$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} & \|Q(\sigma_1)AP(\Delta_1) + Q(\sigma_2)AP(\Delta_2)\| \\ &= \max\{\|Q(\sigma_1)AP(\Delta_1)\|, \|Q(\sigma_2)AP(\Delta_2)\|\}. \end{aligned}$$

Введение в банаховых пространствах X и Y новых (эквивалентных имеющимся) норм

$$\|x\|_* = \sup_{\alpha_k \in \mathbb{T}} \left\| \sum_{k \geq 1} \alpha_k P_k x \right\|, \quad \|y\|_* = \sup_{\alpha_k \in \mathbb{T}} \left\| \sum_{k \geq 1} \alpha_k Q_k y \right\|, \quad x \in X, y \in Y, \quad (4)$$

приводит к тому, что относительно этих норм $C(P) = C(Q) = 1$. Таким образом, без ограничения общности можно считать выполненным предположение 2.

Примеры разложений единицы, для которых выполнено предположение 3, приведены в § 4 (см. также замечания 8, 9).

Рассмотрим два периодических сильно непрерывных изометрических представления периода 2π :

$$P: \mathbb{R} \rightarrow \text{End } X, \quad Q: \mathbb{R} \rightarrow \text{End } X,$$

определенные следующими формулами:

$$P(t)x = \sum_{k \geq 1} P_k x e^{ikt}, \quad Q(t)y = \sum_{k \geq 1} Q_k y e^{ikt}, \quad x \in X, \quad y \in Y.$$

Каждому оператору $A \in \text{Hom}(X, Y)$ поставим в соответствие сильно непрерывную функцию $\Phi_A: \mathbb{R} \rightarrow \text{Hom}(X, Y)$, задаваемую равенствами

$$\Phi_A(t) = Q(t)AP(-t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Рассмотрим ее ряд Фурье

$$\Phi_A(t) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} A_k e^{ikt}, \quad t \in \mathbb{R},$$

где

$$A_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q(t)AP(-t)e^{-ikt}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (5)$$

Ряд $\sum_{k \in \mathbb{Z}} A_k$ назовем *рядом Фурье оператора A* , а операторы A_k , $k \in \mathbb{Z}$, – *коэффициентами Фурье* этого оператора (относительно пары разложений единицы $(P_i), (Q_i)$).

ЛЕММА 1. *Каждый коэффициент Фурье A_k ($k \in \mathbb{Z}$) оператора A допускает представление в виде сильно сходящегося ряда вида*

$$A_k = \sum_{\substack{m-n=k \\ m, n \geq 1}} Q_m A P_n, \quad (6)$$

и имеют место оценки $\|A_k\| \leq \|A\|$, $k \in \mathbb{Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сильно сходящуюся к тождественному оператору I из алгебры $\text{End } Y$ последовательность проекторов $\tilde{Q}_m = Q_1 + \dots + Q_m$, $m \geq 1$. Тогда последовательность операторов $\tilde{Q}_m A_k$, $m \geq 1$, сильно сходится к оператору A_k . Непосредственно из формулы (5) следует, что операторы $\tilde{Q}_m A_k$, $m \geq 1$, имеют вид

$$\tilde{Q}_m A_k = \sum_{j=1}^m Q_j A P_{j-k},$$

где $P_l = 0$ при $l \leq 0$. Таким образом, имеет место равенство (6). Доказываемые оценки непосредственно следуют из формулы (5). Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из сильной непрерывности функции Φ_A следует, что ее ряд Фурье сильно суммируем к Φ_A методом Чезари в любой точке из $\mathbb{R}$. Поэтому рассматриваемый оператор A является сильным пределом последовательности операторов $\tilde{A}_n = \sum_{|k| \leq n} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) A_k$, $n \geq 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Непосредственно из предположений 2 и 3, а также из леммы 1 следует, что для коэффициентов Фурье A_k , $k \in \mathbb{Z}$, оператора A имеют место равенства

$$\|A_k\| = \sup_{i-j=k} \|Q_i A P_j\| = d_A(k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Поскольку в настоящей работе изучаются только операторы из пространства $\text{Hom}_1(X, Y)$, то ряды Фурье рассматриваемых операторов являются абсолютно сходящимися.

Наряду с банаховыми пространствами X и Y рассмотрим банахово пространство Z , и пусть существует разложение единицы (G_k) из банаховой алгебры $\text{End } Z$ такое, что каждая из пар $((P_i), (Q_i))$, $((Q_i), (G_i))$ удовлетворяет условиям предположений 2 и 3.

Пусть $A \in \text{Hom}_1(X, Y)$, $B \in \text{Hom}_1(Y, Z)$ и $C = BA \in \text{Hom}(X, Z)$. Положим $G(t) = \sum_{k \geq 1} G_k e^{ikt}$, $t \in \mathbb{R}$.

Найдем коэффициенты Фурье оператора C относительно разложений единицы (P_k) , (G_k) . Для этого рассмотрим функцию $\Phi_C(t) = G(t)CP(-t)$, $t \in \mathbb{R}$, в виде произведения $\Phi_C = \Phi_B \Phi_A$ двух периодических функций Φ_B и Φ_A с абсолютно сходящимися рядами Фурье

$$\Phi_B(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} B_k e^{ikt}, \quad \Phi_A(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} A_k e^{ikt}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Используя теорему об умножении рядов Фурье векторных функций, получаем, что функция $\Phi_C: \mathbb{R} \rightarrow \text{Hom}(X, Z)$ имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье вида

$$\Phi_C(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n e^{int}, \quad t \in \mathbb{R},$$

где $C_n = \sum_{j \in \mathbb{Z}} B_{n-j} A_j$. Следовательно, оператор C допускает представление вида

$$C = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n, \quad C_n = \sum_{j \in \mathbb{Z}} B_{n-j} A_j, \quad (7)$$

причем $\|C_n\| \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \|B_{n-j}\| \|A_j\|$, и поэтому $C \in \text{Hom}_1(X, Z)$.

ЛЕММА 2. Если $A \in \text{Hom}_\alpha(X, Y)$, $B \in \text{Hom}_\alpha(Y, Z)$ (соответственно $A \in \text{Hom}_\beta(X, Y)$, $B \in \text{Hom}_\beta(Y, Z)$), то оператор $C = BA$ принадлежит подпространству $\text{Hom}_\alpha(X, Z)$ (соответственно $\text{Hom}_\beta(X, Z)$), причем $\|BA\|_\alpha \leq \|B\|_\alpha \|A\|_\alpha$ (соответственно $\|BA\|_\beta \leq \|B\|_\beta \|A\|_\beta$). В частности, $\text{End}_\alpha X$ и $\text{End}_\beta X$ – банаховы алгебры.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть вначале $A \in \text{Hom}_\alpha(X, Y)$ и $B \in \text{Hom}_\alpha(Y, Z)$. Тогда из представления (7) получаем

$$\begin{aligned} \|C\|_\alpha &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \|C_n\|_\alpha(n) \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} \|B_{n-j}\| \cdot \|A_j\| \right) \alpha(n) \\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} \|B_{n-j}\| \alpha(n-j) \|A_j\| \alpha(j) \right) = \|B\|_\alpha \|A\|_\alpha. \end{aligned}$$

Здесь использовалось неравенство $\alpha(n) = \alpha(j+n-j) \leq \alpha(n-j)\alpha(j)$.

Предположим теперь, что $A \in \text{Hom}_\beta(X, Y)$, $B \in \text{Hom}_\beta(Y, Z)$. Тогда при любом $n \in \mathbb{Z}$ имеют место оценки

$$\begin{aligned} C(\beta)\beta(n)\|C_n\| &\leq C(\beta)\beta(n) \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{C(\beta)\|B_{n-j}\|\beta(n-j)C(\beta)\|A_j\|\beta(j)}{C(\beta)\beta(n-j)C(\beta)\beta(j)} \\ &\leq \frac{\beta(n)}{C(\beta)} \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\beta(n-j)\beta(j)} \right) \|B\|_\beta \|A\|_\beta \leq \|B\|_\beta \|A\|_\beta. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Из формулы (7), используемой при доказательстве леммы 2, следует, что если $A \in \text{Hom}_0(X, Y)$, $B \in \text{Hom}_0(Y, Z)$, то $C = BA \in \text{Hom}_0(X, Z)$, причем при выполнении оценок $d_A(k) \leq M_1 \gamma_1^{|k|}$, $d_B(k) \leq M_2 \gamma_2^{|k|} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$, $M_1, M_2 > 0$, $\gamma_1, \gamma_2 \in (0, 1)$, имеют место оценки вида $d_C(k) \leq M \gamma^{|k|}$ для любого $\gamma > \max\{\gamma_1, \gamma_2\}$ и некоторой постоянной $M = M(\gamma) > 0$.

Зафиксируем некоторое натуральное число $m \geq 2$ и наряду с разложениями единицы (P_i) , (Q_i) рассмотрим “укрупненные” разложения единицы вида

$$\begin{aligned} P_k(m) &= P_{(k-1)m+1} + \dots + P_{km}, \quad k \geq 1, \\ Q_k(m) &= Q_{(k-1)m+1} + \dots + Q_{km}, \quad k \geq 1, \end{aligned} \tag{8}$$

обладающие всеми свойствами разложений единицы (P_i) и (Q_i) . Построим два новых изометрических представления:

$$P(m)(t) = \sum_{k \geq 1} P_k(m) e^{ikt}, \quad Q(m)(t) = \sum_{k \geq 1} Q_k(m) e^{ikt}, \quad t \in \mathbb{R},$$

и по этим представлениям, используя ранее сформулированный подход, для каждого оператора $A \in \text{Hom}(X, Y)$ определим ряд Фурье

$$A \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} A_k(m),$$

где $A_k(m)$, $k \in \mathbb{Z}$, – коэффициенты Фурье периодической функции $\Phi_{A,m}(t) = Q(m)(t)AP(m)(-t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Используя новые разложения единицы, введем соответствующие аналоги пространств $\text{Hom}_1(X, Y)$, $\text{Hom}_\alpha(X, Y)$ и др., которые обозначим соответственно $\text{Hom}_{1,m}(X, Y)$, $\text{Hom}_{\alpha,m}(X, Y)$ и т.д. Нормы в пространствах $\text{Hom}_{\alpha,m}(X, Y)$ и $\text{Hom}_{\beta,m}(X, Y)$ задаются формулами

$$\begin{aligned} \|A\|_{\alpha,m} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{A,m}(k) \alpha(k), \quad A \in \text{Hom}_{\alpha,m}(X, Y), \\ \|A\|_{\beta,m} &= C(\beta) \sup_{k \in \mathbb{Z}} d_{A,m}(k) \beta(k), \quad A \in \text{Hom}_{\beta,m}(X, Y), \end{aligned}$$

где

$$d_{A,m}(k) = \|A_k(m)\| = \sup_{\substack{i-j=k \\ i,j \geq 1}} \|Q_i(m)AP_j(m)\|.$$

ЛЕММА 3. Пусть конечны величины $\alpha_*(m)$, $\beta_*(m)$, $\alpha_0(m)$, $\tilde{\beta}(m)$, $\beta_0(m)$ (величина $\beta_0(m)$ определена в условии 3) предположения 1), определенные формулами

$$\begin{aligned}\alpha_*(m) &= \sup_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ 0 \leq j \leq m-1}} \frac{\alpha(mk+j)}{\alpha(k)}, & \beta_*(m) &= 2 \sup_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ |j| \leq m}} \frac{\beta(mk+j)}{\beta(k)}, \\ \alpha_0(m) &= \sup_{\substack{|k| \geq 2 \\ |j| \leq m-1}} \frac{\alpha(k)}{\alpha(mk+j)}, & \tilde{\beta}(m) &= \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{|j| \leq m-1} \frac{\beta(k)}{\beta(mk+j)}.\end{aligned}$$

Тогда $\text{Hom}_{\alpha,m}(X, Y) = \text{Hom}_{\alpha}(X, Y)$, $\text{Hom}_{\beta,m}(X, Y) = \text{Hom}_{\beta}(X, Y)$, соответствующие нормы эквивалентны и имеют место следующие оценки:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2m\alpha_*(m)} \|A\|_{\alpha} &\leq \|A\|_{\alpha,m} \leq 2\|A\|_{\alpha}, & A &\in \text{Hom}_{\alpha}(X, Y), \\ \frac{1}{\beta_*(m)} \|A\|_{\beta} &\leq \|A\|_{\beta,m} \leq \tilde{\beta}(m)\|A\|_{\beta}, & A &\in \text{Hom}_{\beta}(X, Y),\end{aligned}$$

причем $\|A\|_{\alpha,m} \leq 2\alpha_0(m)\|A\|_{\alpha}$ и $\|A\|_{\beta,m} \leq \beta_0(m)\|A\|_{\beta}$, если $A_0(m) = A_{-1}(m) = A_1(m) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждый из операторов $A_k(m)$, $k \in \mathbb{Z}$, допускает представление в виде сильно сходящегося ряда (см. формулу (6) из леммы 1)

$$A_k(m) = \sum_{\substack{i-j=k \\ i, j \geq 1}} Q_i(m)AP_j(m),$$

причем $\|A_k(m)\| = \sup_{\substack{i-j=k \\ i, j \geq 1}} \|Q_i(m)AP_j(m)\| = d_{A,m}(k)$. Поэтому, используя убывание функции α , получаем оценки

$$\begin{aligned}\|A\|_{\alpha,m} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{i-j=k} \|Q_i(m)AP_j(m)\| \alpha(k) \\ &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} (d_A((k-1)m+1) + \dots + d_A((k+1)m-1)) \alpha(k) \\ &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{d_A((k-1)m+1) \alpha((k-1)m+1)}{\alpha((k-1)m+1)} + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \frac{d_A((k+1)m-1) \alpha((k+1)m-1)}{\alpha((k+1)m-1)} \right) \alpha(k) \\ &\leq 2 \sup_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ |j| \leq m-1}} \frac{\alpha(k)}{\alpha(km+j)} \|A\|_{\alpha} \leq 2\|A\|_{\alpha} \\ &(\leq 2\alpha_0(m)\|A\|_{\alpha}, \text{ если } A_k(m) = 0, \quad k = 0, \pm 1).\end{aligned}$$

Оценку в другую сторону получаем из следующих неравенств:

$$\begin{aligned}
\|A\|_\alpha &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_A(k) \alpha(k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{j=0}^{m-1} d_A(mk+j) \alpha(mk+j) \right) \\
&\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j=0}^{m-1} (d_{A,m}(k) + d_{A,m}(k+1)) \alpha(mk+j) \\
&\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{j=0}^{m-1} \frac{d_{A,m}(k) \alpha(k) \alpha(mk+j)}{\alpha(k)} + \frac{d_{A,m}(k+1) \alpha(k+1) \alpha(mk+j)}{\alpha(k)} \right) \\
&\leq 2m \alpha_*(m) \|A\|_{\alpha,m}.
\end{aligned}$$

Имеют место следующие оценки норм операторов, определяемых с помощью функции β :

$$\begin{aligned}
\|A\|_{\beta,m} &= C(\beta) \sup_{k \in \mathbb{Z}} d_{A,m}(k) \beta(k) \leq C(\beta) \sup_{k \in \mathbb{Z}} (d_A((k-1)m+1) + \dots \\
&\quad \dots + d_A((k+1)m-1)) \beta(k) \\
&= C(\beta) \sup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{d_A((k-1)m+1)}{\beta((k-1)m+1)} \beta((k-1)m+1) + \dots \right. \\
&\quad \left. \dots + \frac{d_A((k+1)m-1)}{\beta((k+1)m-1)} \beta((k+1)m-1) \right] \beta(k) \leq \tilde{\beta}(m) \|A\|_\beta \\
&\quad (\leq \beta_0(m) \|A\|_\beta, \text{ если } A_k(m) = 0, k = 0, \pm 1), \\
\|A\|_\beta &= C(\beta) \sup_{n \in \mathbb{Z}} d_A(n) \beta(n) = C(\beta) \sup_{\substack{0 \leq j \leq m-1 \\ k \in \mathbb{Z}}} d_A(mk+j) \beta(mk+j) \\
&\leq C(\beta) \sup_{\substack{0 \leq j \leq m-1 \\ k \in \mathbb{Z}}} (d_{A,m}(k) + d_{A,m}(k+1)) \beta(mk+j) \\
&= C(\beta) \sup_{\substack{0 \leq j \leq m-1 \\ k \in \mathbb{Z}}} \left(\frac{d_{A,m}(k) \beta(k)}{\beta(k)} + \frac{d_{A,m}(k+1) \beta(k+1)}{\beta(k+1)} \right) \beta(mk+j) \\
&\leq 2\beta_*(m) \|A\|_{\beta,m}.
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В частном случае, если вес α имеет вид $\alpha(k) = (1+|k|)^\mu$ ($\mu \geq 0$), то

$$\alpha_*(m) \leq (1+|m|)^\mu, \quad \alpha_0(m) \leq 3^\mu m^{-\mu}, \quad m \geq 2,$$

причем $\alpha_*(m) = \alpha_0(m) = 1 \quad \forall m \in \mathbb{Z}$, если $\alpha(k) \equiv 1$.

Допустим, что $\beta(k) = (1+|k|)^q$, $k \in \mathbb{Z}$, $q > 1$. Тогда $\beta_*(m) \leq 2(1+m)^q$, $\beta_0(m) \leq 3^q m^{1-q}$.

**§ 2. Оценки элементов матриц обратных операторов
из класса $\text{Hom}_0(X, Y)$**

В этом параграфе доказываются следующие две теоремы для операторов из $\text{Hom}_0(X, Y)$, удовлетворяющих одному из условий 5), 7) предположения 1.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $A \in \text{Inv}(X, Y)$ удовлетворяет условию 5). Тогда нормы элементов матрицы (B_{ij}) обратного оператора $B = A^{-1} \in \text{Hom}(Y, X)$ допускают оценки вида

$$\|B_{ij}\| \leq d_B(k) \leq \left(2 - \frac{2(1-\gamma^2)}{8\tilde{\kappa}(A) + 3(1-\gamma^2)}\right) \|A^{-1}\| \left(1 - \frac{(1-\gamma)^2}{1-\gamma + 4\tilde{\kappa}(A)}\right)^{|k|}, \quad (9)$$

если $k = i - j \neq 0$,

$$\|B_{ii}\| \leq d_B(0) \leq \|A^{-1}\| \quad \forall i \geq 1,$$

где $\tilde{\kappa}(A) = M\gamma\|A^{-1}\|$. В частности,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} d_B(k) \leq \left(\frac{16\tilde{\kappa}(A)}{(1-\gamma)^2} - 1 + \frac{6 + 8\gamma + 2\gamma^2}{8\tilde{\kappa}(A) + 3(1-\gamma^2)}\right) \|A^{-1}\|,$$

причем

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_B(k) &\leq \left(\frac{16\tilde{\kappa}(A)}{(1-\gamma)^2} + \frac{-5 + 8\gamma + 5\gamma^2}{8 + 3(1-\gamma^2)}\right) \|A^{-1}\| \\ &\leq \left(\frac{16\tilde{\kappa}(A)}{(1-\gamma)^2} + 1\right) \|A^{-1}\|, \end{aligned} \quad (10)$$

если $\tilde{\kappa}(A) \geq 1$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $A \in \text{Inv}(X, Y)$ имеет трехдиагональную матрицу (A_{ij}) (т.е. выполнено условие 7)). Тогда для норм элементов матрицы (B_{ij}) оператора $B = A^{-1}$ имеют место оценки

$$\begin{aligned} \|B_{ij}\| \leq d_B(k) &\leq \left(\frac{16\bar{\kappa}(A) + 4}{8\bar{\kappa}(A) + 3}\right) \|A^{-1}\| \left(\frac{4\bar{\kappa}(A)}{1 + 4\bar{\kappa}(A)}\right)^{|k|} \\ &\leq 2\|A^{-1}\| \left(\frac{4\bar{\kappa}(A)}{1 + 4\bar{\kappa}(A)}\right)^{|k|}, \\ \|B_{ii}\| \leq d_B(0) &\leq \|A^{-1}\| \quad \forall i \geq 1, \end{aligned} \quad (11)$$

и

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} d_B(k) \leq \left(16\bar{\kappa}(A) + \frac{3 - 8\bar{\kappa}(A)}{3 + 8\bar{\kappa}(A)}\right) \|A^{-1}\| \leq 16\bar{\kappa}(A) \|A^{-1}\|, \quad (12)$$

где $\bar{\kappa}(A) = \max\{\|A_{-1}\|, \|A_1\|\} \|A^{-1}\| \leq \kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$ ($\kappa(A)$ – число обусловленности оператора A).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Рассмотрим функцию

$$\Phi_A: \mathbb{T} \rightarrow \text{Hom}(X, Y),$$

определенную на группе $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\}$ формулой

$$\Phi_A(\theta) = Q(\theta)AP(\theta^{-1}), \quad \theta \in \mathbb{T},$$

где $P(\theta) = \sum_{j \geq 1} P_j \theta^j$ и $Q(\theta) = \sum_{j \geq 1} Q_j \theta^j$. Функция Φ_A имеет ряд Фурье вида

$$\Phi_A(\theta) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} A_j \theta^j,$$

где A_j , $j \in \mathbb{Z}$, — коэффициенты Фурье оператора A . По условию теоремы (см. замечание 2) имеют место оценки

$$d_A(k) = \|A_k\| \leq M\gamma^{|k|}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Следовательно, ряд Фурье оператора A сходится абсолютно и, более того, функция Φ_A допускает голоморфное расширение на кольцо $K_\gamma = \{z \in \mathbb{C}: \gamma < |z| < 1/\gamma\}$. Это расширение обозначается тем же символом Φ_A .

Для каждого числа $\theta \in \mathbb{T}$ оператор $\Phi_A(\theta)$ обратим, и его обратный имеет вид $P(\theta)A^{-1}Q(\theta^{-1}) = \Phi_B(\theta) \in \text{Hom}(Y, X)$, где $B = A^{-1}$. Ввиду устойчивости свойства обратимости операторов при малых возмущениях и ввиду голоморфности функции $\Phi_A: K_\gamma \rightarrow \text{Hom}(X, Y)$ операторы $\Phi_A(z)$ обратимы для всех z из некоторой окрестности окружности $\mathbb{T}$. Найдем окрестность в виде кольца

$$K(\gamma_1, \gamma_2) = \{z \in \mathbb{C}: \gamma_1 < |z| < \gamma_2\} \subset K_\gamma$$

и получим оценку функции Φ_B на $K(\gamma_1, \gamma_2)$, которая позволит, используя принцип максимума модуля для голоморфных функций, получить оценки норм коэффициентов Фурье B_k , $k \in \mathbb{Z}$, ее сужения на $\mathbb{T}$ и, следовательно, приведет к оценкам последовательности $d_B(k) = \|B_k\|$, $k \in \mathbb{Z}$.

Пусть вначале число $z \in \mathbb{C}$ удовлетворяет условию $|z| = 1 - t$, где $t > 0$ и $t + \gamma < 1$. Представим его в виде $z = |z|\theta$, $\theta \in \mathbb{T}$. Имеют место оценки

$$\begin{aligned} \|\Phi_A(z) - \Phi_A(\theta)\| &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|A_k\| |z^k - \theta^k| \leq \sum_{k \neq 0} M\gamma^{|k|} (1 - |z|^{|k|}) \\ &= M \left[\sum_{k \geq 1} \gamma^k (1 - (1 - t)^k) + \sum_{k \geq 1} \gamma^k \left(\frac{1}{(1 - t)^k} - 1 \right) \right] \\ &= M\gamma \frac{2t - t^2}{(1 - t - \gamma)(1 - \gamma + \gamma t)} = \varphi(t). \end{aligned}$$

Из равенств

$$\begin{aligned}\Phi_A(z) &= \Phi_A(\theta) + (\Phi_A(z) - \Phi_A(\theta)) \\ &= \Phi_A(\theta)(I - \Phi_A(\theta)^{-1}(\Phi_A(\theta) - \Phi_A(z)))\end{aligned}\quad (13)$$

следует, что оператор $\Phi_A(z) \in \text{Hom}(X, Y)$ обратим, если число t удовлетворяет условию

$$\|\Phi_A(\theta)^{-1}\| \|\Phi_A(z) - \Phi_A(\theta)\| \leq \|A^{-1}\| \varphi(t) < 1.$$

При выполнении этого условия для всех z из кольца $\gamma < 1 - t \leq |z| \leq 1$ имеет место оценка

$$\begin{aligned}\|\Phi_B(z)\| &= \|\Phi_A(z)^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\|} \varphi(t) \\ &= \frac{\|A^{-1}\|(1 - t - \gamma)(1 - \gamma + \gamma t)}{(1 - t - \gamma)(1 - \gamma + \gamma t) - \tilde{\varkappa}(A)(2t - t^2)},\end{aligned}$$

где $\tilde{\varkappa}(A) = M\gamma\|A^{-1}\|$. Следовательно, при $z \in \mathbb{C}$ вида $z = \theta(1 - t_0)$, $\theta \in \mathbb{T}$, где $t_0 = (1 - \gamma)^2(1 - \gamma + 4\tilde{\varkappa}(A))^{-1}$, из формулы

$$\Phi_B(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} B_k z^k = \sum_{k \in \mathbb{Z}} B_k (1 - t_0)^k \theta^k$$

получаем, что при $k \leq -1$ имеют место оценки

$$\begin{aligned}d_B(k) &= \|B_k\| \leq \sup_{|z|=1-t_0} \|\Phi_B(z)\| (1 - t_0)^{|k|} \\ &\leq \left(2 - \frac{2(1 - \gamma^2)}{8\tilde{\varkappa}(A) + 3(1 - \gamma^2)}\right) \|A^{-1}\| \left(1 - \frac{(1 - \gamma)^2}{1 - \gamma + 4\tilde{\varkappa}(A)}\right)^{|k|}.\end{aligned}\quad (14)$$

Следовательно, величиной из правой части этого неравенства оцениваются нормы операторов B_{ij} при $i - j = k \leq -1$.

Из оценок (14) получаем

$$\sum_{k \leq -1} d_B(k) \leq \left(\frac{8\tilde{\varkappa}(A)}{(1 - \gamma)^2} - 1 + \frac{3 + 4\gamma + \gamma^2}{8\tilde{\varkappa}(A) + 3(1 - \gamma^2)}\right) \|A^{-1}\|. \quad (15)$$

Пусть теперь комплексное число z удовлетворяет условию $|z| = 1 + t < 1/\gamma$, где $0 < t < 1/\gamma - 1$. Тогда, записывая число z в виде $z = |z|\theta = (1 + t)\theta$, $\theta \in \mathbb{T}$, получим следующие оценки:

$$\begin{aligned}\|\Phi(z) - \Phi(\theta)\| &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|A_k\| |z^k - \theta^k| \leq \sum_{k \neq 0} M\gamma^{|k|} (|z|^k - 1) \\ &= \sum_{k \geq 1} M\gamma^k ((1 + t)^k - 1) + \sum_{k \geq 1} \left(1 - \frac{1}{(1 + t)^k}\right) \\ &= M\gamma \frac{t^2 + 2t}{(1 - \gamma - \gamma t)(1 - \gamma + t)} = \psi(t).\end{aligned}$$

Из представления (13) следует, что оператор $\Phi_A(z)$ обратим, если выполнено условие $\|A^{-1}\|\psi(t) < 1$, и тогда

$$\|\Phi_B(z)\| \leq \|A^{-1}\| (1 - \|A^{-1}\|\psi(t))^{-1}.$$

Такому условию удовлетворяет число $t_0 = (1 - \gamma)^2(\gamma - \gamma^2 + 4\tilde{\kappa}(A))^{-1}$, и поэтому функция $z \mapsto \Phi_B(z)$ голоморфна в окрестности кольца $1 \leq |z| \leq 1 + t_0$. Поскольку для чисел $z \in \mathbb{C}$, удовлетворяющих условию $|z| = 1 + t_0$, имеет место разложение в ряд вида

$$\Phi_B(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} B_k z^k = \sum_{k \in \mathbb{Z}} B_k (1 + t_0)^k \theta^k,$$

то при $k \geq 1$ имеют место оценки

$$\begin{aligned} d_B(k) = \|B_k\| &\leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\|\psi(t_0)} \cdot \frac{1}{(1 + t_0)^k} \\ &\leq \left(2 - \frac{2(1 - \gamma^2)}{8\tilde{\kappa}(A) + 3(1 - \gamma^2)}\right) \|A^{-1}\| \left(1 - \frac{(1 - \gamma)^2}{1 - \gamma + 4\tilde{\kappa}(A)}\right)^{|k|}. \end{aligned} \quad (16)$$

Поэтому

$$\sum_{k \geq 1} d_B(k) \leq \left(\frac{8\tilde{\kappa}(A)}{(1 - \gamma)^2} - 1 + \frac{3 + 4\gamma + \gamma^2}{8\tilde{\kappa}(A) + 3(1 - \gamma^2)}\right) \|A^{-1}\|. \quad (17)$$

Имея в виду, что $\|B_{ii}\| \leq \|B_0\| \leq \sup_{\theta \in \mathbb{T}} \|\Phi_B(\theta)\| = \|A^{-1}\|$, $i \geq 1$ (см. лемму 1), из (15) и (17) получаем оценку (10). Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Пусть оператор $A \in \text{Inv}(X, Y)$ удовлетворяет условию 7) предположения 1. Тогда для него выполнено условие 5) для любого $\gamma \in (0, 1)$ и числа M , равного одному из чисел $\gamma^{-1}\|A\|$, $\gamma^{-1} \max\{\|A_{-1}\|, \|A_1\|\}$. Оценки (11), (12) теоремы 3 непосредственно следуют из оценок (9), (10) теоремы 2 при $\gamma \rightarrow 0$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть оператор $A \in \text{Inv}(X, Y)$ удовлетворяет условию 6) предположения 1. Тогда для норм элементов матрицы обратного оператора $B = A^{-1}$ имеют место оценки

$$\|B_{ij}\| \leq d_B(k) \leq \left(2 + \frac{2\kappa(A) + 1}{8\kappa^2(A) + 3\kappa(A)}\right) \left(\frac{4\kappa(A)}{4\kappa(A) + 1}\right)^{|k|/m},$$

если $k = i - j \neq 0$ и

$$\|B_{ii}\| \leq d_B(0) \leq \|A^{-1}\|, \quad i \geq 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для числа m , участвующего в условии 6), рассмотрим разложения единицы, определенные формулами (8). Относительно этих разложений единицы оператор A имеет трехдиагональную матрицу. Поэтому непосредственно из теоремы 3 получаем, что

$$\begin{aligned} d_{km+p}(A) &\leq \max\{d_{k,m}(A), d_{k+1,m}(A)\} \\ &\leq \left(\frac{16\kappa(A) + 4}{8\kappa(A) + 3}\right) \|A^{-1}\| \left(\frac{4\kappa(A)}{4\kappa(A) + 1}\right)^{|k|}, \end{aligned}$$

где $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $0 \leq p \leq m - 1$. Отсюда следуют доказываемые оценки. Следствие доказано.

**§ 3. Оценки элементов обратных матриц
для операторов из пространства $\text{Hom}_1(X, Y)$**

Каждому оператору $A \in \text{Hom}_1(X, Y)$ (т.е. для A выполнено условие 1) предположения 1) сопоставим две функции $\varphi_A: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, $\psi_A: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, определенные формулами

$$\varphi_A(k) = 2 \sum_{|j| \geq k+1} d_A(j), \quad \psi_A(t) = \min\{k \in \mathbb{N}: \varphi_A(k) \leq t\}.$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть A – обратимый оператор из $\text{Hom}_1(X, Y)$. Тогда оператор $B = A^{-1}$ принадлежит пространству $\text{Hom}_1(Y, X)$ и имеет место оценка

$$\|A^{-1}\|_1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_B(k) \leq 64\kappa(A)\psi_A\left(\frac{1}{(4 + 32\kappa(A))\|A^{-1}\|}\right)\|A^{-1}\|,$$

где $\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого натурального числа $m \geq 2$ рассмотрим два разложения единицы $(P_k(m))$, $(Q_k(m))$, определенные формулами (8). Далее используем обозначения и соглашения из § 1, приведенные после этих формул.

Из леммы 3 следует, что $\text{Hom}_{1,m}(X, Y) = \text{Hom}_1(X, Y)$. Пусть $A = \sum_{k \in \mathbb{Z}} A_k(m)$ – ряд Фурье оператора A (относительно новых разложений единицы). Представим оператор A в виде

$$A = C + D, \tag{18}$$

где $C = A_{-1}(m) + A_0(m) + A_1(m)$ и $D = A - C$. Таким образом, оператор C имеет трехдиагональную матрицу (как оператор из пространства $\text{Hom}_{1,m}(X, Y)$), а для оператора D из леммы 3 получаем следующие оценки:

$$\|D\| \leq \|D\|_{1,m} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{D,m}(k) \leq 2 \sum_{|k| \geq m+1} d_A(k) = \varphi_A(m).$$

Пусть число m выбрано так, чтобы

$$\|A^{-1}\| \varphi_A(m) \leq 1/2. \tag{19}$$

Тогда оператор C обратим и

$$\|C^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \|D\|} \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \varphi_A(m)} \leq 2\|A^{-1}\|.$$

Из теоремы 3 вытекают следующие оценки для норм матричных элементов оператора $L = C^{-1}$:

$$\begin{aligned} d_{L,m}(k) &= \|L_k(m)\| \leq 2\|C^{-1}\| \left(\frac{4\kappa(C)}{1+4\kappa(C)} \right)^{|k|} \\ &\leq \frac{2\|A^{-1}\|}{1-\|A^{-1}\|\varphi_A(m)} \left(\frac{4\kappa(C)}{1+4\kappa(C)} \right)^{|k|}, \quad |k| \neq 0, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\|L_0(m)\| \leq \|A^{-1}\|(1-\|A^{-1}\|\varphi_A(m))^{-1},$$

$$\begin{aligned} \|C^{-1}\|_{1,m} &= \|L\|_{1,m} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|L_k(m)\| \\ &\leq 16\kappa(C)\|C^{-1}\| \leq \frac{16\|A^{-1}\|^2\|A\|}{(1-\|A^{-1}\|\varphi_A(m))^2}, \end{aligned} \quad (21)$$

где $\kappa(C) = \frac{\|A\|\|A^{-1}\|}{1-\|A^{-1}\|\varphi_A(m)} \geq 1$. При этом учитывается (используя теорему 3), что $\|C_k(m)\| = \|A_k(m)\| \leq \|A\|$, $k = 0, -1, 1$.

Из представления (18) с использованием (19) следует, что оператор $B = A^{-1}$ допускает представление вида

$$B = (I + C^{-1}D)^{-1}C^{-1}, \quad (22)$$

из которого, используя лемму 2, получаем оценку

$$\|B\|_{1,m} = \|A^{-1}\|_{1,m} \leq \frac{\|C^{-1}\|_{1,m}}{1 - \|D\|_{1,m}\|C^{-1}\|_{1,m}}. \quad (23)$$

Учитывая эквивалентность норм $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_{1,m}$ в пространстве $\text{Hom}_1(X, Y)$, из леммы 3 и оценок (21), (23) приходим к неравенствам

$$\begin{aligned} \|A^{-1}\|_1 &\leq 2m\|A^{-1}\|_{1,m} \\ &\leq \frac{32m\|A^{-1}\|^2\|A\|}{(1-\|A^{-1}\|\varphi_A(m))^2 \left(1 - \frac{16\|A^{-1}\|^2\|A\|\varphi_A(m)}{(1-\|A^{-1}\|\varphi_A(m))^2} \right)} \\ &= \frac{32m\kappa(A)\|A^{-1}\|}{(1-\|A^{-1}\|\varphi_A(m))^2 - 16\kappa(A)\|A^{-1}\|\varphi_A(m)}. \end{aligned}$$

Выберем число m таким, чтобы

$$(1 - \|A^{-1}\|\varphi_A(m))^2 - 16\kappa(A)\|A^{-1}\|\varphi_A(m) \geq 1/2.$$

Это условие выполнено, если $\varphi_A(m) \leq (4 + 32\kappa(A))^{-1}\|A^{-1}\|^{-1}$, и, следовательно, для таких m имеет место оценка (19).

При $m = \psi_A \left(\frac{1}{(4+32\kappa(A))\|A^{-1}\|} \right)$ получаем

$$\|A^{-1}\|_1 \leq 64m\kappa(A)\|A^{-1}\| \leq 64\kappa(A)\psi_A \left(\frac{1}{(4+32\kappa(A))\|A^{-1}\|} \right) \|A^{-1}\|.$$

Теорема доказана.

Пусть оператор A принадлежит пространству $\text{Hom}_q(X, Y)$ (т.е. выполнено условие 4) предположения 1). В этом частном случае функция φ_A допускает оценку

$$\varphi_A(k) = 2 \sum_{|j| \geq k+1} d_A(j) \leq 2 \sum_{|j| \geq k+1} \frac{\|A\|_q}{(1+|j|)^q C(q)} \leq \frac{4\|A\|_q}{(q-1)k^{q-1}C(q)}.$$

Поэтому

$$\psi_A(t) \leq \left(\frac{4\|A\|_q}{C(q)(q-1)} \right)^{1/q-1} t^{1/(1-q)} + 1.$$

Из теоремы 4 из только что приведенных оценок участвующих в ней величин следует

ТЕОРЕМА 5. *Пусть A – обратимый оператор из пространства $\text{Hom}_q(X, Y)$. Тогда оператор $B = A^{-1}$ принадлежит пространству $\text{Hom}_1(X, Y)$ и имеют место оценки*

$$\begin{aligned} \|A^{-1}\|_1 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_B(k) \leq \\ &\leq 2\nu(A)\|A^{-1}\| \left(\left[\frac{4\|A\|_q(4+2\nu(A)\|A^{-1}\|)}{C(q)(q-1)} \right]^{1/(q-1)} + 1 \right) \\ &\leq C\|A^{-1}\|^2 (1 + \|A^{-1}\|^{2/(q-1)}), \end{aligned}$$

где $\nu(A) = 32\kappa(A)$ и постоянная $C > 0$ зависит только от q , $\|A\|$ и $\|A\|_q$.

Теперь получим оценки норм элементов матриц обратных операторов для операторов из пространства $\text{Hom}_v(X, Y)$, где символ v используется для обозначения одного из символов α, β, q . При этом мы снова вернемся к доказательству теоремы 4, используя введенные там обозначения.

Рассмотрим двустороннюю последовательность $l = (l_k)$, определенную равенствами

$$l_k = 4\|A^{-1}\| \left(\frac{8\nu(A)}{8\nu(A)+1} \right)^{|k|}, \quad k \neq 0, \quad l_0 = 2\|A^{-1}\|, \quad \nu(A) = 32\|A\| \|A^{-1}\|.$$

Таким образом, оценки (20) элементов обратного оператора $L = C^{-1}$ (с учетом условия (19)) можно записать в виде $\|L_k(m)\| \leq l_k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$ ($L_k(m)$ – коэффициент Фурье оператора L).

Пусть

$$l(\alpha) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} l_k \alpha(k), \quad l(\beta) = C(\beta) \sup_{k \in \mathbb{Z}} l_k \beta(k),$$

$$l(q) = C(q) \sup_{k \in \mathbb{Z}} l_k (1 + |k|)^q, \quad q > 1.$$

Ясно, что $\|C^{-1}\|_{v,m} \leq l(v)$ при $v = \alpha, \beta, q$. Субэкспоненциальность веса α и выполнение условия 3) гарантируют конечность величин $l(v)$, $v = \alpha, \beta, q$, и, значит, $C^{-1} \in \text{Hom}_{v,m}(Y, X) = \text{Hom}_v(Y, X)$ при $v = \alpha, \beta, q$.

Из леммы 3 (учитывая, что $D_{-1}(m) = D_0(m) = D_1(m) = 0$) и замечания 4 следуют оценки

$$\|D\|_{v,m} \leq \gamma_v(m) \|D\|_v \leq \gamma_v(m) \|A\|_v, \quad v = \alpha, \beta, q,$$

где $\gamma_\alpha(m) = 2\alpha_0(m)$, $\gamma_\beta(m) = \beta_0(m)$ и $\gamma_q(m) = 3^q m^{-q+1}$. Из представления (22) и леммы 2 получаем

$$\|A^{-1}\|_{v,m} \leq \frac{\|C^{-1}\|_{v,m}}{1 - \|D\|_{v,m} \|C^{-1}\|_{v,m}} \leq \frac{l(v)}{1 - \gamma_v(m) \|A\|_v l(v)} \leq 2l(v) \quad (24)$$

для всех $m \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих условию (см. также (19))

$$\max\{\gamma_v(m) \|A\|_v l(v), \varphi_A(m) \|A^{-1}\|\} \leq 1/2.$$

Пусть функция $\Phi_{A,v}: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ определена формулой

$$\Phi_{A,v}(t) = \min\{k \in \mathbb{N}: \max\{\gamma_v(k) \|A\|_v l(v), \varphi_A(k) \|A^{-1}\|\} \leq t\}.$$

Корректность ее определения следует из свойств

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_v(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_A(k) = 0.$$

Теперь из оценок (24), леммы 3 и замечания 4 следует

ТЕОРЕМА 6. Пусть $A \in \text{Hom}(X, Y)$ – обратимый оператор, принадлежащий подпространству $\text{Hom}_v(X, Y)$, $v = \alpha, \beta, q$, причем выполнено условие $\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_0(m) = 0$ для $v = \alpha$. Тогда $A^{-1} \in \text{Hom}_v(X, Y)$ и имеют место оценки

$$\|A^{-1}\|_\alpha \leq \inf_{t \leq 1/2} 4\Phi_{A,\alpha}(t) \alpha_*(\Phi_{A,\alpha}(t)) l(\alpha), \quad v = \alpha,$$

$$\|A^{-1}\|_\beta \leq \inf_{t \leq 1/2} \beta_*(\Phi_{A,\beta}(t)) l(\beta) \leq 2\beta_*(\Phi_{A,\beta}(1/2)) l(\beta), \quad v = \beta,$$

$$\|A^{-1}\|_q \leq 4l(q)(2 + 3^{q/(1-q)} (2\|A\|_q l(q))^{1/(q-1)}), \quad v = q.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Непосредственно из теорем 3, 4 и 6 следуют все утверждения теоремы 1, исключая утверждение об операторах из пространства $\text{Hom}_\alpha(X, Y)$. Это связано с тем, что в теореме 6 выдвигалось дополнительное условие на вес α . Приводимые ниже рассуждения позволяют снять это ограничение и, тем самым, полностью доказать теорему 1.

Используем оператор C из представления (18), который имеет (согласно теореме 3) обратный оператор C^{-1} , принадлежащий пространству $\text{Hom}_0(Y, X)$ и, следовательно, пространству $\text{Hom}_\alpha(Y, X)$ (ибо α – субэкспоненциальный вес). Из леммы 2 следует, что оператор $C^{-1}A$ принадлежит банаховой алгебре $\text{End}_\alpha X$ и обратим в алгебре $\text{End } X$. В силу теоремы 1 из [10] получаем, что оператор $A^{-1}C = (C^{-1}A)^{-1}$ также принадлежит банаховой алгебре $\text{End}_\alpha X$. Еще раз используя лемму 2, приходим к выводу, что оператор $A^{-1} = (A^{-1}C)C^{-1}$ принадлежит пространству $\text{Hom}_\alpha(X, Y)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Все вышеизложенные понятия и результаты естественным образом формулируются в случае, если $(P_i), (Q_i)$ – двусторонние последовательности проекторов.

§ 4. Спектральный анализ линейных операторов

Полученные в теоремах 4–6 оценки используются в этом параграфе для получения критерия разложимости (по Фойашу) линейных операторов и оценок коэффициентов Фурье собственных векторов линейных операторов.

Пусть $l_p(E)$, $1 \leq p < \infty$, – банахово пространство суммируемых со степенью p последовательностей векторов из комплексного банахова пространства E ($\|x\|_p = (\sum_{k \geq 1} \|x_k\|^p)^{1/p} \forall x = (x_k) \in l_p(E)$). Пусть $P_k x = (0, \dots, 0, x_k, 0, \dots)$, $k \geq 1$, $x = (x_j) \in l_p(E)$ – разложение единицы в $l_p(E)$. Ясно, что для такого разложения единицы выполнены все условия предположений 2 и 3. В этом случае матричные элементы A_{ij} , $i, j \geq 1$, любого оператора $A \in \text{End } l_p(E)$ удобно рассматривать как операторы из банаховой алгебры $\text{End } E$ ($A_{ij}z$, $z \in E$ – i -й элемент последовательности Ax , где $x = (x_k) \in l_p(E)$, $x_j = z$ и $x_k = 0$ при $k \neq j$). Если $E = \mathbb{C}$, то пространство $l_p(E)$ обозначим символом l_p .

Важно отметить, что если $A \in \text{End}_1 l_p(E)$ при некотором $p \in [1, \infty]$, то его норма во всех пространствах $l_p(E)$, $p \in [1, \infty]$, не превосходит величины $\|A\|_1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Линейный оператор $A \in \text{End } X$ называется *неквазианалитическим*, если он допускает представление вида $A = A_1 + iA_2$, где A_1, A_2 – перестановочные операторы из $\text{End } X$, удовлетворяющие условиям

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\ln \|\exp iA_k t\|}{1+t^2} dt < \infty, \quad k = 1, 2.$$

Спектральные свойства неквазианалитических операторов с вещественным спектром подробно изучались в [15], а неквазианалитические операторы из определения исследовались в работах [16]–[18]. Основные свойства неквазианалитических операторов получены с использованием достаточно богатого функционального исчисления, которое строится с привлечением групп операторов $T_k(t) = \exp iA_k t$,

$t \in \mathbb{R}$. Отметим, что неквазианалитические операторы разложимы (по Фойашу) и, следовательно, обладают всеми свойствами разложимых операторов [19], [20].

ТЕОРЕМА 7. Пусть E – гильбертово пространство, оператор $A \in \text{End } l_2(E)$ является нормальным оператором в гильбертовом пространстве $l_2(E)$ и выполнено условие

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} d_A(k) \ln \ln(3 + |k|) < \infty. \quad (25)$$

Тогда оператор A является неквазианалитическим (и, следовательно, разложимым) в любом из пространств $l_p(E)$, $p \in [1, \infty)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оператор A является нормальным в $l_2(E)$, и поэтому он представим в виде $A = A_1 + iA_2$, где A_1, A_2 – перестановочные самосопряженные операторы в $l_2(E)$, причем для них также выполнено условие (25). Поэтому без ограничения общности с самого начала можно считать, что A – самосопряженный оператор в $l_2(E)$.

Для проверки неквазианалитичности оператора A в пространстве $l_p(E)$ достаточно проверить выполнение условия (см. [15])

$$\int_0^\infty \ln^+ \ln^+ \sup \{ \|R(\lambda, A)\| : \text{Im } \lambda = t \} dt < \infty, \quad (26)$$

где $R(\lambda, A) = (A - \lambda I)^{-1}$ – резольвента оператора A . Обратимся к теореме 4 и используем в § 3 обозначения. Непосредственно из определения функций φ_A , ψ_A и из условия $t \in [\varphi_A(n+1), \varphi_A(n)]$, $n \in \mathbb{N}$, следует, что $n \leq \psi_A(t) \leq n+1$. Проверяемое условие (26) получается из оценок

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \ln^+ \ln^+ \sup_{\text{Im } \lambda = t} \{ \|R(\lambda, A)\| : \text{Im } \lambda = t \} dt \\ & \leq C + \sum_{n \geq 1} \int_{\varphi_A(n+1)}^{\varphi_A(n)} \ln^+ \ln^+ \psi_A(t) dt \\ & \leq C + \sum_{n \geq 1} (\ln \ln(|n| + 3)) (\varphi_A(n) - \varphi_A(n+1)) \\ & \leq C + 2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\ln \ln(|n| + 3)) d_A(n) < \infty, \end{aligned}$$

где C – const. При этом использовалась оценка $\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{|\text{Im } \lambda|}$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Непосредственно из доказательства теоремы 7 следует, что при условии неквазианалитичности оператора $A = A_1 + iA_2 \in \text{End } l_p(E)$ (E – банахово пространство) при некотором $p_0 \in [1, \infty)$ и при выполнении условия (25) для операторов A_1 и A_2 следует неквазианалитичность во всех остальных пространствах $l_p(E)$. Отметим, что каждый оператор из $\text{End}_1 l_p(E)$ допускает расширение на банахово пространство $l_\infty(E)$, и поэтому утверждение теоремы 7 верно и при $p = \infty$.

ТЕОРЕМА 8. Пусть $U \in \text{End}_q l_2(E)$ – унитарный оператор в гильбертовом пространстве $l_2(E)$ (E – гильбертово пространство и $q > 1$). Тогда в любом из пространств l_p , $p \in [1, \infty]$, нормы его степеней допускают оценки вида

$$\|U^n\| \leq C(1 + |n|)^{2+2/(q-1)}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (27)$$

где C – константа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Операторы U^n , $n \geq 1$, представим в виде

$$U^n = \frac{1}{2\pi i} \int_S \lambda^n R(\lambda, U) d\lambda,$$

где $S = S_r = \{z \in \mathbb{C}: |z| = r > 1\}$. Учитывая, что $\|R(\lambda, U)\| \leq 1/(r-1) \quad \forall \lambda \in S$, из теоремы 5 получаем

$$\|U^n\|_{\text{End } l_p(E)} \leq \|U^n\|_1 \leq C_1 \inf_{r>1} \frac{r^{n+1}}{(r-1)^{2/(q-1)+2}} \leq C_2 n^{2+2/(q-1)}, \quad n \geq 1.$$

Поскольку оператор U^{-1} в силу теоремы 6 принадлежит $\text{End}_q l_2(E)$, то такие же оценки имеют место для отрицательных целых степеней оператора U . Теорема доказана.

Отметим, что если $U \in \text{End}_q l_2(E)$ является сжатием в $l_2(E)$, то оценки (27) имеют место только для положительных n .

Непосредственно из теоремы 8 следует, что удовлетворяющий ее условиям оператор U является C^m -унитарным оператором (в терминологии из [19] и [20, гл. XV]) при $m > 3 + \left\lfloor \frac{2}{q-1} \right\rfloor$ в любом из банаховых пространств l_p , $p \in [1, \infty]$. Функциональное исчисление в этом случае задается с помощью формулы

$$f(U) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n U^n,$$

где $f(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \theta^n$, $f \in C^m(\mathbb{T})$.

Фактическим следствием теоремы 8 является

ТЕОРЕМА 9. Пусть A – самосопряженный оператор из алгебры $\text{End}_q l_2(E)$ (E – гильбертово пространство и $q > 1$). Тогда в любом из пространств $l_p(E)$, $p \in [1, \infty]$, имеют место оценки

$$\|e^{itA}\| \leq C(1 + |t|)^{2+2/(q-1)}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Поскольку гильбертово пространство $L_2(\mathbb{R})$ суммируемых с квадратом на $\mathbb{R}$ комплекснозначных функций может быть реализовано как гильбертово пространство $l_2(E)$, где $E = L_2(0, 1)$, то полученные в теоремах 7–9 результаты могут быть перенесены на интегральные операторы, действующие в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ (в пространствах $L_p(\mathbb{R})$, $p \in [1, \infty)$).

Отметим, что в [11] для самосопряженного положительно определенного оператора $A \in \text{End } l_2$, удовлетворяющего условию 6) предположения 1, была получена оценка

$$\|A^{-1}\|_{\infty} \leq 33\sqrt{2m+1}\|A\|_2^{1/4}\|A^{-1}\|_2^{5/4},$$

где $\|A\|_p$ – норма оператора A в пространстве l_p , $p \in [1, \infty]$. Из оценки (12) (см. теорему 3) следует, что

$$\|A^{-1}\|_p \leq 16\|A\|_s\|A^{-1}\|_s^2$$

при всех $p, s \in [1, \infty]$ и для оператора A , имеющего трехдиагональную матрицу.

В [1] для оператора $A \in \text{End } l_p$, $p \in [1, \infty]$, удовлетворяющего условию 6) предположения 1, были получены оценки

$$d_{A^{-1}}(k) \leq C \left(\frac{\varkappa(A)^p - 1}{\varkappa(A)^p + 1} \right)^{|k|/(2m)}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

где $C = \text{const}$, $\varkappa(A) = \|A\|_p\|A^{-1}\|_p$. Аналог таких оценок получен нами в следствии теоремы 3, где приводимые оценки не зависят от $p \in [1, \infty]$, если считать, что $A \in \text{End } l_p$.

Полученные оценки из § 2, 3 могут быть использованы также для изучения банаховой алгебры $A_1(\mathbb{T})$ непрерывных комплекснозначных функций, определенных на окружности $\mathbb{T}$ и имеющих абсолютно сходящийся ряд Фурье. Для этого каждой функции $f \in A_1(\mathbb{T})$ сопоставим линейный оператор $T_f \in \text{End } L_2(\mathbb{T})$ вида

$$T_fx = fx, \quad x \in L_2(\mathbb{T}).$$

Относительно стандартного базиса из экспонент (см. замечание 6) оператор T_f принадлежит алгебре $\text{End}_1 L_2(\mathbb{T})$, что позволяет использовать полученные результаты. В частности, из теоремы 7 следует, что оператор T_f неквазианалитичен, если выполнено условие

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| \ln \ln(3 + |n|) < \infty,$$

где $\hat{f}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, – коэффициенты Фурье функции f . Такой результат содержит теорему Е.М. Дынькина [21].

В частности, из теоремы 6 следует, что если выполнено условие $|\hat{f}(n)| \leq C(1 + |n|)^{-q}$, $n \in \mathbb{Z}$, при некотором $q > 1$ и $f(\theta) \neq 0 \quad \forall \theta \in \mathbb{T}$, то функция $g(\theta) = 1/f(\theta)$ имеет коэффициенты Фурье $\hat{g}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющие оценкам $|\hat{g}(n)| \leq C(1 + |n|)^{-q}$, $n \in \mathbb{Z}$, причем константа C может быть эффективно оценена. Ясно также, что теорема Винера непосредственно следует из теоремы 4.

Теперь займемся оценками коэффициентов Фурье собственных векторов линейных операторов.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Пусть X и Y – сепарабельные гильбертовы пространства и $(e_n), (f_n)$ – ортонормированные базисы в X и Y соответственно. Они определяют разложения единицы $(P_n), (Q_n)$, где $P_n x = (x, e_n)e_n$, $x \in X$, $Q_n y = (y, f_n)f_n$, $n \geq 1$. Для любого оператора $A \in \text{Hom}(X, Y)$ матричные элементы имеют вид $A_{ij} = Q_i A P_j = a_{ij} I_{ij}$, $i, j \geq 1$, где $a_{ij} = (Ae_j, f_i)$ и операторы I_{ij} , $i, j \geq 1$, определяются на базисе (e_n) соотношениями $I_{ij}e_j = f_i$ и $I_{ij}e_k = 0$ при $k \neq j$. В этом случае выполнены условия предположений 2, 3 и $d_A(k) = \sup_{i-j=k} |a_{ij}|$. Матрицей оператора A естественно назвать матрицу (a_{ij}) .

Пусть $A: D(A) \subset H \rightarrow H$ – линейный замкнутый оператор с плотной областью определения $D(A)$ из гильбертова пространства H , причем $D(A)$ рассматривается как гильбертово пространство со своим скалярным произведением. Пусть (e_n) и (f_n) – ортонормированные базисы в $D(A)$ и H соответственно, относительно которых матрица $a_{ij} = (Ae_j, f_i)$, $i, j \geq 1$, оператора A удовлетворяет условию

$$|a_{ij}| \leq d_A(k) \leq C(1 + |k|)^q, \quad k = i - j \in \mathbb{Z}, \quad q > 1, \quad C > 0,$$

т.е. $A \in \text{Hom}_q(D(A), H)$ (выполнено условие 4) предположения 1).

ТЕОРЕМА 10. Пусть λ_0 – изолированная точка спектра $\sigma(A)$ оператора A , являющаяся простым собственным значением, и $a \in D(A)$, $b \in D(A^*)$ – собственные векторы оператора A и его сопряженного оператора A^* , отвечающие собственному значению λ_0 и $\bar{\lambda}_0$ соответственно, причем $(b, a) = 1$. Тогда имеют место следующие оценки:

$$|(a, f_i)(b, f_i)| \leq C(1 + |i - j|)^{-q}, \quad i, j \geq 1, \quad (28)$$

для коэффициентов Фурье $(a, f_k), (b, f_k)$, $k \geq 1$, векторов a и b относительно базиса (f_k) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\alpha \in \rho(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$. Тогда оператор $B = AR(\alpha, A)$ ограничен и вектор a является собственным вектором для B , отвечающим собственному значению $\lambda_* = \lambda_0(\alpha - \lambda_0)^{-1}$. Поэтому $BP = \lambda_* P$, где $P \in \text{End } H$ – проектор Рисса, построенный по спектральному множеству $\sigma = \{\lambda_*\} \subset \sigma(B)$, который имеет вид $Px = (x, b)a$. Проектор P можно также представить в виде

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_{S(\lambda_*, r)} R(\lambda, B) d\lambda,$$

где $S(\lambda_*, r) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_*| = r\}$ и $0 < r < \text{dist}\{\lambda_*, \sigma(B) \setminus \{\lambda_*\}\}$. Из теоремы 6 и леммы 2 следует, что $B, R(\lambda, B) \in \text{End}_q H \quad \forall \lambda \in S(\lambda_*, r)$. Следовательно, $P \in \text{End}_q H$, и поэтому его матричные элементы $p_{ij} = (Pf_j, f_i) = (f_j, b)(a, f_i)$, $i, j \geq 1$, допускают оценки вида (28). Теорема доказана.

Рассмотрим пример дифференциального оператора, для которого выполнены условия теоремы 10.

Пусть $A: D(A) \subset H \rightarrow H = L_2(0, 2\pi)$ – дифференциальный самосопряженный оператор, определяемый дифференциальным выражением

$$l(x) = (-px')' + \varphi x$$

с областью определения $D(A)$, задаваемой периодическими граничными условиями

$$x(0) = x(2\pi), \quad x'(0) = x'(2\pi). \quad (29)$$

Предполагается, что $p, \varphi: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ – периодические функции, $p > 0$ и коэффициенты Фурье $\hat{p}(n), \hat{\varphi}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, этих функций (относительно базиса из экспонент $f_n(t) = \exp int$, $n \in \mathbb{Z}$) удовлетворяют оценкам

$$|p_n| \leq C_1(1 + |n|)^{-q-1}, \quad |\varphi_n| \leq C_2(1 + |n|)^{-q}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad C_1, C_2 > 0, \quad (30)$$

где $q > 1$. Областью определения $D(A)$ является пространство Соболева $W_2^2(0, 2\pi)$ классов функций, удовлетворяющих граничным условиям (29) со скалярным произведением

$$(x, y)_W = (x, y) + (x'', y'') = \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} x(t) \overline{y(t)} dt + \int_0^{2\pi} x''(t) \overline{y''(t)} dt \right),$$

$x, y \in W_2^2(0, 2\pi)$.

В этом пространстве функции $e_n(t) = (1 + n^4)^{-1/2} \exp int$, $n \in \mathbb{Z}$, образуют ортонормированный базис на $D(A)$. Матрица $a_{mn} = (Ae_n, f_m)$, $m, n \in \mathbb{Z}$, оператора $A: W_2^2(0, 2\pi) \rightarrow L_2(0, 2\pi)$ относительно рассматриваемых базисов (f_n) и (e_n) имеет вид

$$a_{mn} = (Ae_n, f_m) = \frac{mn\hat{p}(n-m)}{\sqrt{1+n^4}} + \frac{\hat{\varphi}(n-m)}{\sqrt{1+n^4}}, \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

Поэтому $|a_{mn}| \leq C(1 + |m - n|)^{-q} \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}$, т.е. $A \in \text{Hom}_q(D(A), H)$. Следовательно, коэффициенты Фурье $\hat{a}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, любой собственной функции $a \in W_2^2(0, 2\pi)$, отвечающей простому собственному значению оператора A , допускают оценки вида

$$|\hat{a}(n)\hat{a}(m)| \leq C(1 + |m - n|)^{-q}, \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

Аналогичный результат имеет место для дифференциальных операторов более высокого порядка, и не обязательно самосопряженных.

Другой подход оценки коэффициентов Фурье собственных векторов линейных операторов рассматривался в статье [1].

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Непосредственно из доказательства приводимых в статье результатов следует, что можно не требовать выполнения предположения 3. Однако в этом случае в качестве величины $d_A(k)$ следует брать число $\|A_k\|$, где оператор $A_k \in \text{Hom}(X, Y)$ определен формулой (5).

Список литературы

1. *De Boor C.* A bound on the L_∞ -norm of the L_2 -approximation by splines in terms of a global mesh ratio // *Math. Comp.* 1976. V. 30. P. 687–694.
2. *Mityagin B.* Quadratic pencils and least-squares piecewise-polynomial approximation // *Math. Comp.* 1983. V. 40. P. 283–300.
3. *Блатов И. А., Тертерян А. А.* Об оценках элементов обратных матриц и методах неполной блочной факторизации на основе матричной прогонки // *ЖВМиМФ.* 1992. Т. 32. № 11. С. 1683–1696.
4. *Шубин М. А.* Псевдоразностные операторы и их функция Грина // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1985. Т. 49. № 3. С. 652–671.
5. *Курбатов В. Г.* Об алгебрах разностных и интегральных операторов // *Функц. анализ и его прилож.* 1990. Т. 24. № 2. С. 98–99.
6. *Баскаков А. Г.* Теорема Винера и асимптотические оценки элементов обратных матриц // *Функц. анализ и его прилож.* 1990. Т. 24. № 3. С. 64–65.
7. *Баскаков А. Г.* Абстрактный гармонический анализ и асимптотические оценки элементов обратных матриц // *Матем. заметки.* 1992. Т. 52. № 2. С. 17–26.
8. *Bochner S., Phillips R. S.* Absolute convergent Fourier expansion for non-commutative normed rings // *Ann. of Math.* 1942. № 3. P. 409–418.
9. *Allan G. R.* Ideals of vector-valued functions // *Proc. London Math. Soc.* 1968. V. 18. № 3. P. 193–216.
10. *Блатов И. А.* Об оценках элементов обратных матриц и модернизации метода матричной прогонки // *Сиб. матем. журн.* 1992. Т. 32. № 2. С. 10–21.
11. *Demko S.* Spectral Bounds for $\|A^{-1}\|_\infty$ // *J. of Approxim. Theory.* 1986. V. 48. P. 207–212.
12. *Demko S., Moss W. F., Smith P. W.* Decay Rates for Inverses of Band Matrices // *Math. Comp.* 1984. V. 43. № 168. P. 491–499.
13. *De Boor C.* Dichotomies for band matrices // *SIAM. J. Numer. Anal.* 1980. V. 17. P. 894–907.
14. *Баскаков А. Г.* О спектральных свойствах некоторых классов линейных операторов // *Функц. анализ и его прилож.* 1995. Т. 29. № 2. С. 61–64.
15. *Любич Ю. И., Мацаев В. И.* Об операторах с отделимым спектром // *Матем. сб.* 1962. Т. 56. № 4. С. 433–468.
16. *Баскаков А. Г.* Методы абстрактного гармонического анализа в теории возмущений линейных операторов // *Сиб. матем. журн.* 1983. Т. 24. № 1. С. 21–39.
17. *Баскаков А. Г.* Гармонический анализ линейных операторов. Воронеж: Изд-во ВГУ, 1987.
18. *Баскаков А. Г.* Гармонический анализ косинусной и экспоненциальной операторной функций // *Матем. сб.* 1984. Т. 124. № 5. С. 68–95.
19. *Collojaara I., Foias C.* Theory of generalized spectral operators. New York: Gordon and Breach, 1968.
20. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Спектральные операторы. Т. III. М.: Мир, 1974.
21. *Дынькин Е. М.* Теоремы типа Винера–Леви и оценки для операторов Винера–Хопфа // *Матем. иссл. Кишинев.* 1973. Т. 8. № 3(29). С. 14–25.