Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Я. Эйдерман, Оценки потенциалов и δ -субгармонических функций вне исключительных множеств, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1997, том 61, выпуск 6, 181–218

DOI: <https://doi.org/10.4213/im166>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 17:25:10

УДК 517.53

В. Я. Эйдерман

Оценки потенциалов и δ -субгармонических функций вне исключительных множеств

Показано, что оценки потенциалов, полученные Н. С. Ландкофом, являются в некотором смысле неулучшаемыми. При доказательстве данного факта установлены точные оценки меры Хаусдорфа и емкости канторовых множеств в $\mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, а также оценки потенциалов на этих множествах. Эти результаты применяются в последующих разделах работы. Теорема Фростмана [7, с. 35] о сравнении меры Хаусдорфа и емкости дополняется неравенствами, связывающими емкость и h -обхват по Хаусдорфу. Найдено точное условие на измеряющие функции, при котором сходимость интеграла $\int_0 K(t) dh(t)$ в теореме Фростмана является необходимой (здесь h – измеряющая функция, K – ядро потенциала). Теорема Н. В. Говорова об оценке субгармонической функции в круге (в свою очередь развивающая теорему Валирона–Бернштейна об оценке снизу модуля голоморфной функции) распространена на δ -субгармонические функции ограниченного вида в шаре из $\mathbb{R}^m$, $m \geq 2$. При этом вместо задачи об оценке суммы радиусов исключительных дисков рассмотрена некоторая более общая задача. Изучена точность полученных результатов.

Библиография: 17 наименований.

§ 0. Введение

Цель данной работы – оценить размеры исключительного множества $C \subset \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, на котором потенциал по неотрицательной мере или модуль δ -субгармонической функции (т.е. функции, представимой в виде разности двух субгармонических) превосходит заданную величину. При этом массивность множества C мы опишем в метрических терминах, оценивая радиусы шаров, покрывающих C .

Рассмотрим потенциал

$$U(x) = \int_{\mathbb{R}^m} K(|x - y|) d\mu(y),$$

где $x \in \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, и μ – (неотрицательная) мера в $\mathbb{R}^m$. Относительно ядра $K(r)$ будем предполагать, что функция $K(r)$ неотрицательна, не возрастает и непрерывна при $r > 0$. Функцию $h(t)$ будем называть *измеряющей*, если она непрерывна, возрастает при $t \geq 0$ и $h(0) = 0$. Положим $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^m : |y - x| < r\}$. Шар $B(0, r)$ будем обозначать также через B_r .

Следующая ниже теорема А в случае степенных и логарифмических ядер была получена Н. С. Ландкофом [1], [2, с. 251]. Доказательство этой теоремы в более общей ситуации повторяет по существу рассуждение из [1], [2].

Работа выполнена при поддержке по грантам МВ 6000, МВ 6300 Международного научного фонда и по гранту 94-1.2-13 Государственного комитета РФ по высшему образованию.

ТЕОРЕМА А. Пусть $\mu(\mathbb{R}^m) = \mathcal{N} < \infty$, и пусть $h(t)$ – возрастающая на интервале $(0, r_0)$ функция, нормированная условиями

$$h(0) = 0, \quad h(r_0) = \mathcal{N}.$$

Тогда множество G точек, где выполнено неравенство

$$U(x) > \int_0^{r_0} K(t) dh(t), \quad (0.1)$$

можно покрыть не более чем счетной системой шаров $B^k(x_k, r_k)$, для которых $r_k \leq r_0$ и

$$\sum_k h(r_k) < A_m \mathcal{N}, \quad (0.2)$$

где A_m – число, зависящее только от размерности пространства m . При этом кратность покрытия не превосходит A_m , и для каждого шара B^k будет $h(r_k) < \mu(B_k)$.

Теорема А является содержательной лишь в случае, когда интеграл в (0.1) сходится (если этот интеграл расходится, то множество G будет пустым).

В § 2 мы приведем для удобства читателя короткое доказательство теоремы А. Схема этого доказательства применяется в целом ряде работ (статьи [3]–[5] лишь некоторые из них) и в настоящее время является стандартной. Аналогичный по существу метод использовался ранее У. Хейманом [6].

В данной работе мы покажем (§ 2), что оценка (0.2) исключительного множества G является в некотором смысле точной (ранее этот факт оставался незамеченным). Для этого мы предварительно установим (§ 1) некоторые свойства канторовых множеств. Результаты § 2 затем применяются к исследованию двух классических задач. В § 3 мы улучшаем некоторые известные теоремы о сравнении меры Хаусдорфа и емкости и исследуем точность полученных результатов. В § 4 мы устанавливаем оценки вне исключительных множеств для δ -субгармонических функций в шаре. Некоторые сведения об истории изучаемых задач приводятся в § 3, 4 соответственно.

В заключение напомним характеристики множеств, необходимые для дальнейшего изложения (см., например, [7]).

Пусть $E \subset \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, – ограниченное аналитическое множество и K – введенное выше ядро. Емкостью $C_K(E)$ множества E называется величина

$$C_K(E) = \sup \mu(E),$$

где верхняя грань берется по всем (неотрицательным) мерам μ с носителями, содержащимися в E , для которых $\int_{\mathbb{R}^m} K(|x-y|) d\mu(y) \leq 1$, $x \in E$. Данное определение будет содержательным, если $K(r) \rightarrow +\infty$ при $r \rightarrow 0+$ и

$$\int_0^\infty K(r) dr^m < \infty. \quad (0.3)$$

Пусть теперь $E \subset \mathbb{R}^m$ – ограниченное множество и h – измеряющая функция. Мера Хаусдорфа $\Lambda_h(E)$ определяется равенством

$$\Lambda_h(E) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left\{ \inf_{r_i \leq \rho} \sum_i h(r_i) \right\},$$

где нижняя грань берется по всем покрытиям множества E не более чем счетными наборами шаров с радиусами r_i , не превосходящими ρ .

Следующая характеристика ограниченного множества E (h -обхват по Хаусдорфу), в отличие от меры Хаусдорфа, будет всегда конечной:

$$M_h(E) = \inf \sum_i h(r_i),$$

где нижняя грань берется по всем покрытиям множества E не более чем счетными наборами шаров. Существенно отметить, что величины $\Lambda_h(E)$ и $M_h(E)$ обращаются в нуль одновременно [7].

§ 1. Канторовы множества в $\mathbb{R}^m$, $m \geq 1$

Пусть задана последовательность положительных чисел $\{l_j\}_{j=0}^\infty$ такая, что $2l_j \leq l_{j-1}$, $j \geq 1$. Возьмем некоторый отрезок $E^{(0)} \subset \mathbb{R}^1$ длины l_0 . От концов этого отрезка внутрь $E^{(0)}$ отложим отрезки $E_j^{(1)}$, $j = 1, 2$, длины которых равны l_1 . Обозначим $E^{(1)} = \bigcup_{j=1}^2 E_j^{(1)}$. Возможно, что $E^{(0)} = E^{(1)}$, но пересечение $E_1^{(1)} \cap E_2^{(1)}$ может состоять лишь из одной точки (либо оказаться пустым). Далее, на каждом отрезке $E_j^{(1)}$ аналогичным образом расположим два отрезка $E_{j,i}^{(2)}$ длины l_2 . Объединение полученных четырех отрезков $E_{j,i}^{(2)}$ обозначим через $E^{(2)}$. Продолжая этот процесс, получим последовательность множеств $E^{(n)}$, причем $E^{(n)}$ состоит из 2^n отрезков длины l_n . Обозначим $E_n = \underbrace{E^{(n)} \times \dots \times E^{(n)}}_{m \text{ раз}}$

и $E = \bigcap_{n=0}^\infty E_n$. Множество $E = E(\{l_j\})$ называется m -мерным канторовым множеством.

ЛЕММА 1.1. Пусть при некоторых постоянных $r_0 > 0$ и $0 < b < 1$ измеряющая функция $h(t)$ удовлетворяет условию

$$h(\tau_1)\tau_1^{-m} \geq bh(\tau_2)\tau_2^{-m}, \quad 0 < \tau_1 \leq \tau_2 \leq r_0. \quad (1.1)$$

Тогда для любого $l_0 \in (0, r_0]$ существуют числа $l_j > 0$ такие, что $2l_j \leq l_{j-1}$, $j = 1, 2, \dots$, и

$$b2^{-mj}h(l_0) \leq h(l_j) \leq 2^{-mj}h(l_0). \quad (1.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приводимое рассуждение во многом аналогично доказательству леммы 3.1 из [8]. Положим $N_0 = 0$. Пусть при некотором $i \geq 0$ числа N_k , $k = 1, \dots, i$, уже определены и при некотором $j > N_i$ числа l_k , $k = 1, \dots, j - 1$, построены, причем

$$h(l_{N_i}) = 2^{-mN_i} h(l_0). \quad (1.3)$$

Возможны два случая:

1) $h(l_{j-1}/2) \geq 2^{(N_i-j)m} h(l_{N_i})$. Тогда полагаем $N_{i+1} = j$ и определяем величину l_j из равенства $h(l_j) = 2^{(N_i-j)m} h(l_{N_i})$. При этом, очевидно, $l_j \leq l_{j-1}/2$, выполнено условие (1.2) и имеет место (1.3) с индексом $i + 1$ вместо i ;

2) $h(l_{j-1}/2) < 2^{(N_i-j)m} h(l_{N_i})$. Тогда полагаем $l_j = l_{j-1}/2$. Применяя (1.3), получим, что второе неравенство в (1.2) выполнено. Для проверки первого неравенства в (1.2) отметим вначале, что из равенств $l_j = l_{j-1}/2$ при $N_i + 1 \leq j < N_{i+1}$ следует соотношение $l_j/l_{N_i} = 2^{N_i-j}$. Отсюда и из (1.1), (1.3) имеем

$$h(l_j) \geq b(l_j/l_{N_i})^m h(l_{N_i}) = b2^{(N_i-j)m} 2^{-mN_i} h(l_0) = b2^{-jm} h(l_0),$$

что и требовалось доказать.

ЛЕММА 1.2. Пусть $E = E(\{l_j\})$ — m -мерное канторово множество, $M_h(E)$ определено в §0. Тогда найдутся положительные постоянные Q_1 , Q_2 , зависящие только от m и такие, что

$$Q_1 L \leq M_h(E) \leq Q_2 L, \quad \text{где} \quad L = \inf_{1 \leq j < \infty} 2^{mj} h(l_j). \quad (1.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Второе неравенство в (1.4) следует из того, что каждый куб с ребром l_j можно покрыть не более чем Q_2 шарами радиуса l_j , где Q_2 зависит только от m .

Для доказательства первого неравенства в (1.4) рассмотрим некоторое покрытие множества E шарами B_j . Если среди них найдется шар с радиусом $r_j > l_0$, то неравенство $\sum_j h(r_j) \geq Q_1 L$ очевидно. В случае $r_j \leq l_0$ рассуждение имеет лишь незначительные отличия от доказательства теоремы 3.1 из [8], поэтому мы ограничимся только указаниями этих отличий. В [8] следует положить $k_j \equiv 2$, $M_1 = 3$, $M_2 = 1$ и заметить, что для L , определенного в (1.4), неравенство (3.11) из [8] будет выполняться не только при достаточно больших значениях j , но при всех $j \geq 1$. Кроме того, случай 1 в [8, с. 179] не имеет места, и его анализ опускается.

ЛЕММА 1.3. Пусть $E_n = E_n(\{l_j\})$, $j = 1, \dots, n$, — множество, состоящее из 2^{mn} кубов со стороной l_n , описанное в начале §1, пусть $K(t)$ — неотрицательная невозрастающая непрерывная функция при $t > 0$. Предположим, далее, что μ_n — мера, распределенная на E_n , причем во внутренних точках каждого из 2^{mn} кубов, образующих E_n , сконцентрирована мера, равная $2^{-mn} \mathcal{N}$. Тогда найдутся натуральное число p и положительное число c_0 , зависящие только от m и такие, что

$$\int_{E_n} K(|x - y|) d\mu_n(y) > c_0 \mathcal{N} \sum_{i=0}^{n-p} 2^{-mi} K(l_i) \quad \forall x \in E_n. \quad (1.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем некоторую точку $x \in E_n$ и рассмотрим цепочку вложенных кубов $x \in \Delta_n \subset \Delta_{n-1} \subset \dots \subset \Delta_0$, где Δ_j — один из кубов, образующих множество E_j . Каждый куб Δ_j , $j < n$, этой цепочки содержит помимо куба Δ_{j+1} еще $2^m - 1$ равных ему кубов с ребром l_{j+1} ; мера μ_n этих кубов не менее чем $2^{-(j+1)m}(2^m - 1)\mathcal{N}$. Выбирая целое p таким, чтобы $2^p \geq \sqrt{m}$, имеем

$$\begin{aligned} \int_{E_n} K(|x - y|) d\mu_n(y) &\geq \sum_{j=0}^{n-1} \int_{\Delta_j \setminus \Delta_{j+1}} K(|x - y|) d\mu_n(y) \\ &+ \int_{\Delta_n} K(|x - y|) d\mu_n(y) > \sum_{j=0}^n K(\sqrt{m} l_j) 2^{-(j+1)m} (2^m - 1) \mathcal{N} \\ &\geq \mathcal{N} (2^m - 1) 2^{-(p+1)m} \sum_{j=0}^n K(2^p l_j) 2^{-(j-p)m} \\ &> \mathcal{N} (2^m - 1) 2^{-(p+1)m} \sum_{j=p}^n K(l_{j-p}) 2^{-(j-p)m} = c_0 \mathcal{N} \sum_{i=0}^{n-p} K(l_i) 2^{-mi}, \end{aligned}$$

где $c_0 = (2^m - 1) 2^{-(p+1)m}$, и неравенство (1.5) доказано.

ЛЕММА 1.4. Пусть измеряющая функция $h(t)$ и положительные числа $\mathcal{N}$, r_0 , b таковы, что $h(r_0) = \mathcal{N}$, и выполнено (1.1), а условия на ядро $K(r)$ те же, что и в лемме 1.3. Тогда существует m -мерное канторово множество E со следующими свойствами: для любого $n \geq 0$ и для любой меры μ_n , описанной в условиях леммы 1.3, выполнено неравенство

$$\int_{E_n} K(|x - y|) d\mu_n(y) \geq c_1 \int_{l_{n-p}}^{r_0} K(t) dh(t) \quad \forall x \in E, \quad (1.6)$$

где постоянные p и c_1 зависят только от m ;

$$M_h(E) \geq c_2 \mathcal{N}, \quad c_2 = Q_1 b, \quad Q_1 = Q_1(m). \quad (1.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $l_0 = r_0$ и рассмотрим последовательность $\{l_j\}$, существование которой утверждается в лемме 1.1. Эта последовательность порождает канторово множество $E = E(\{l_j\})$. Покажем, что это множество E искомого. При $x \in E_n$ в силу (1.5) и (1.2) имеем

$$\begin{aligned} \int_{E_n} K(|x - y|) d\mu_n(y) &> c_0 h(l_0) \sum_{j=0}^{n-p} K(l_j) 2^{-mj} \\ &= c_0 2^{-m} h(l_0) \sum_{j=0}^{n-p} K(l_j) 2^{-m(j-1)} \geq c_0 2^{-m} \sum_{j=1}^{n-p} K(l_j) h(l_{j-1}) \\ &> c_1 \sum_{j=1}^{n-p} \int_{l_j}^{l_{j-1}} K(t) dh(t) = c_1 \int_{l_{n-p}}^{r_0} K(t) dh(t), \quad c_1 = c_0 2^{-m}. \end{aligned}$$

Применяя первые неравенства в (1.4) и (1.2), получим

$$M_h(E) \geq Q_1 b h(l_0) = Q_1 b \mathcal{N},$$

и лемма доказана.

В качестве следующего применения леммы 1.3 мы получим оценки емкости канторовых множеств.

ЛЕММА 1.5. Пусть $E_n = E_n(\{l_j\})$, $j = 1, \dots, n$, а ядро $K(r)$ удовлетворяет условию (0.3). Тогда

$$\begin{aligned} Q'_3 \left(2^{-mn} l_n^{-m} \int_0^{l_n} K(t) dt^m + \sum_{i=0}^n 2^{-mi} K(l_i) \right)^{-1} \\ \leq C_K(E_n) \leq Q'_4 \left(\sum_{i=0}^{n-p} 2^{-mi} K(l_i) \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где положительные постоянные Q'_3 , Q'_4 , p зависят только от m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть μ_n – распределение единичной массы с равномерной плотностью на множестве E_n и $x \in E_n$. Первое неравенство в (1.8) вытекает из оценки

$$\int_{E_n} K(|x-y|) d\mu_n(y) \leq c \left(2^{-mn} l_n^{-m} \int_0^{l_n} K(t) dt^m + \sum_{i=0}^n 2^{-mi} K(l_i) \right), \quad c = c(m),$$

полученной в [7, с. 38]. Для доказательства второго неравенства в (1.8) рассмотрим некоторую меру ν_n , сосредоточенную на E_n и такую, что $U^{\nu_n}(x) \leq 1$ на E_n ; здесь и далее через $U^{\mu_n}(x)$, $U^{\nu_n}(x)$ мы обозначаем потенциалы с ядром K по мерам μ_n и ν_n соответственно. В силу (1.5) ($\mathcal{N} = 1$)

$$1 < P U^{\mu_n}(x) \quad \forall x \in E_n, \quad \text{где} \quad P = \left(c_0 \sum_{i=0}^{n-p} 2^{-mi} K(l_i) \right)^{-1}.$$

Поэтому (ср. с п. (В) доказательства теоремы 4 из [7, с. 26, 27])

$$\nu_n(E_n) < P \int_{E_n} U^{\mu_n} d\nu_n = P \int_{E_n} U^{\nu_n} d\mu_n \leq P.$$

Отсюда сразу следует, что $C_K(E_n) \leq P$, и лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1.1. Пусть $E = E(\{l_j\})$ – m -мерное канторово множество. Найдутся положительные постоянные Q_3 , Q_4 , зависящие только от m и такие, что

$$Q_3 L_1 \leq C_K(E) \leq Q_4 L_1, \quad \text{где} \quad L_1 = \left(\sum_{i=0}^{\infty} 2^{-mi} K(l_i) \right)^{-1}. \quad (1.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое неравенство в (1.9) сразу вытекает из оценок для $U^{\mu_n}(x)$, проведенных в [7, с. 38, 39]. (Вывод этого неравенства (даже в более общей ситуации) имеется также в [8, с. 180, 181].) В силу обобщенного принципа максимума $C_K(E) \leq d_m C_K(E_n)$, где константа $d_m \geq 1$ зависит только от m . Отсюда и из (1.8) непосредственно следует второе неравенство в (1.9).

Из следствия 1.1 сразу получается хорошо известный критерий обращения емкости в нуль.

СЛЕДСТВИЕ 1.2 [7, с. 38]. Пусть $E = E(\{l_j\})$ – m -мерное канторово множество. Тогда

$$C_K(E) > 0 \iff \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-mi} K(l_i) < \infty. \quad (1.10)$$

Приведенное здесь доказательство импликации

$$C_K(E) > 0 \implies \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-mi} K(l_i) < \infty,$$

основанное на лемме 1.3, нам представляется проще, чем рассуждение в [7]. Кроме того, наше доказательство позволяет получить оценку сверху в (1.9).

§2. О точности теоремы А

Основным результатом данного раздела являются следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть измеряющая функция $h(t)$ и положительные числа $\mathcal{N}$, r_0 , b таковы, что $h(r_0) = \mathcal{N}$ и выполнено условие (1.1), а ядро $K(r)$ – неотрицательная, невозрастающая, непрерывная функция при $t > 0$. Тогда найдутся компакт G , мера μ на G и постоянные c_1 , c_2 , Q_1 со следующими свойствами: $\mu(\mathbb{R}^m) = \mathcal{N}$;

$$U(x) = \int_{\mathbb{R}^m} K(|x-y|) d\mu(y) \geq c_1 \int_0^{r_0} K(t) dh(t) \quad \forall x \in G, \quad c_1 = c_1(m) > 0; \quad (2.1)$$

$$M_h(G) \geq c_2 \mathcal{N}, \quad c_2 = Q_1 b, \quad Q_1 = Q_1(m). \quad (2.2)$$

Теорема 2.1 остается справедливой и в случае

$$\int_0^{r_0} K(t) dh(t) = \infty. \quad (2.3)$$

Оценка (2.1) означает при этом, что $U(x) = \infty \quad \forall x \in G$.

Теорема 2.1 утверждает, что при условии (1.1) не может быть получено существенно лучшей оценки множества G , на котором значения потенциала $U(x)$ “велики” (т.е. имеют тот же порядок, что и $\int_0^{r_0} K(t) dh(t)$), чем оценка (0.2). Возникает вопрос: является ли условие (1.1) необходимым?

ТЕОРЕМА 2.2. *Предположим, что измеряющая функция $h(t)$, ядро $K(t)$, числа $r_0 > 0$, $\mathcal{N} > 0$, $\gamma \in (0, 1)$ и непрерывная положительная функция $b(t)$, $0 < t \leq r_0$, обладают следующими свойствами: $h(r_0) = \mathcal{N}$; $b(t) \leq \gamma^2$ при $0 < t \leq r_0$;*

$$h(\tau_1)\tau_1^{-m} \geq b(\tau_2)h(\tau_2)\tau_2^{-m}, \quad 0 < \tau_1 \leq \tau_2 \leq r_0; \quad (2.4)$$

функция $K(t)$ неотрицательна, не возрастает, непрерывна при $t > 0$ и $K(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow 0+$;

$$K(t(b(t))^{-1/m}) > \gamma K(t), \quad 0 < t \leq r_0. \quad (2.5)$$

Тогда существует компакт G , мера μ на G и постоянная c_3 такие, что: $\mu(\mathbb{R}^m) = \mathcal{N}$;

$$\int_{\mathbb{R}^m} K(|x-y|) d\mu(y) \geq c_3 \int_0^{r_0} K(t) dh(t) \quad \forall x \in G, \quad c_3 = c_3(\gamma, m) > 0; \quad (2.6)$$

$$M_h(G) \geq Q_1 \mathcal{N}, \quad Q_1 = Q_1(m). \quad (2.7)$$

Таким образом, если ядро $K(t)$ “не слишком быстро” возрастает при $t \rightarrow 0+$, то условие (1.1) в теореме 2.1 можно ослабить, заменив постоянную b функцией $b(t)$, “не слишком быстро” стремящейся к 0 при $t \rightarrow 0+$. При этом скорость убывания функции $b(t)$ ограничена условием (2.5). В §3 (см. следствие 3.2 и комментарий после него) будет показано, что для широкого класса ядер и функций $b(t)$ условие (2.5) является окончательным. Оставляя точные формулировки до §3, ограничимся пока следующим примером.

ПРИМЕР 2.1. При $K(t) = \log \frac{1}{t}$ можно положить $b(t) = t^{(1-\varepsilon)m}$, $\varepsilon > 0$.

Действительно, в этом случае $K(t(b(t))^{-1/m}) = \varepsilon K(t)$, и условие (2.5) выполнено. При этом нельзя взять $\varepsilon = 0$.

В то же время для степенных ядер $K(t) = t^{-\alpha}$, $\alpha > 0$, постоянную b в (1.1) нельзя заменить функцией $b(t)$, стремящейся к 0 (пусть даже сколь угодно медленно).

Перейдем к доказательству теоремы А и теорем 2.1, 2.2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ А. Без ограничения общности можно предполагать, что интеграл в (0.1) сходится. Назовем точку $x \in \mathbb{R}^m$ *нормальной* (относительно μ), если неравенство $\mu(B(x, r)) \leq h(r)$ выполняется для всех $r < r_0$. Интегрируя по частям, получаем, что в каждой нормальной точке x

$$U(x) \leq \int_0^{r_0} K(r) dh(r).$$

Поэтому неравенство (0.1) может выполняться лишь в точках, не являющихся нормальными. Для каждой такой точки x найдется число $r = r(x) < r_0$ такое, что $h(r) < \mu(B(x, r))$. Мы получаем покрытие множества G шарами. Применяя лемму Безиковича–Ландкофа [9, с. 2–6], [2, с. 246], выделим подпокрытие кратности не выше A_m . Обозначая через r_k радиусы шаров этого покрытия, имеем

$$\sum_k h(r_k) < \sum_k \mu(B^k(x_k, r_k)) \leq A_m \mu(\mathbb{R}^m).$$

Теорема А доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1. В качестве G возьмем множество E из леммы 1.4. Пусть μ_n – распределение массы величины $\mathcal{N}$ с равномерной плотностью на множестве E_n . Из последовательности $\{\mu_n\}$ можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторой мере μ на E . Легко видеть, что для любого $n > 0$ мера μ удовлетворяет условиям лемм 1.3, 1.4. Согласно (1.6) $\forall x \in E$

$$\int_E K(|x - y|) d\mu(y) = \int_{E_n} K(|x - y|) d\mu(y) \geq c_1 \int_{l_{n-p}}^{r_0} K(t) dh(t), \quad n = 1, 2, \dots$$

Отсюда и следует (2.1). Неравенство (2.2) выполнено в силу (1.7).

Для доказательства теоремы 2.2 нам понадобится следующая лемма.

ЛЕММА 2.1. В условиях теоремы 2.2 существует такая измеряющая функция $\omega(t)$, $t \geq 0$, и такое число $R_0 \geq r_0$, что $\omega(t) \leq h(t)$ при $0 \leq t \leq r_0$, $\omega(R_0) = h(r_0)$,

$$\omega(\tau_1)\tau_1^{-m} \geq \omega(\tau_2)\tau_2^{-m}, \quad 0 < \tau_1 \leq \tau_2 \leq R_0, \quad (2.8)$$

$$\int_0^{R_0} K(t) d\omega(t) \geq c_4 \int_0^{r_0} K(t) dh(t), \quad c_4 = c_4(\gamma) > 0. \quad (2.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим вначале $R_0 = r_0(b(r_0))^{-1/m}$. Продолжим функцию $h(t)$ с отрезка $[0, r_0]$ на полупрямую, положив $h(t) = h(r_0)$, $t > r_0$. Подставляя в (2.4) $\tau_1 = t$, $\tau_2 = r_0$, получим

$$h(t) \geq h(R_0)R_0^{-m}t^m, \quad 0 < t \leq R_0. \quad (2.10)$$

Разобьем отрезок $I = [0, R_0]$ на два множества, I_1 и I_2 :

$$I_1 = \{r \in (0, R_0]: h(t) \geq h(r)r^{-m}t^m, 0 < t \leq r\} \cup \{0\}, \quad I_2 = I \setminus I_1.$$

В силу непрерывности функции $h(t)$ множество I_1 замкнуто. Согласно (2.10) $R_0 \in I_1$. Поэтому множество I_2 открыто. Обозначим через (α_i, β_i) интервалы, образующие множество I_2 : $I_2 = \bigcup_i (\alpha_i, \beta_i)$. Покажем, что

$$h(\alpha_i) = h(\beta_i)\beta_i^{-m}\alpha_i^m. \quad (2.11)$$

Если $\alpha_i = 0$, то равенство (2.11) тривиально. Пусть $\alpha_i > 0$ и $h(\alpha_i) > h(\beta_i)\beta_i^{-m}\alpha_i^m$ (противоположное неравенство не имеет места, так как $\beta_i \in I_1$). Поскольку $\alpha_i \in I_1$, $\beta_i \in I_1$, то

$$h(t) \geq h(\alpha_i)\alpha_i^{-m}t^m, \quad 0 < t \leq \alpha_i; \quad h(t) \geq h(\beta_i)\beta_i^{-m}t^m, \quad 0 < t \leq \beta_i.$$

Возьмем $a \in (h(\beta_i)\beta_i^{-m}, h(\alpha_i)\alpha_i^{-m})$ и рассмотрим функцию $\varphi(t) = h(t) - at^m$. Тогда $\varphi(t) > 0$ при $0 < t \leq \alpha_i$ и $\varphi(\beta_i) < h(\beta_i) - h(\beta_i)\beta_i^{-m}\beta_i^m = 0$. Поэтому найдется $r \in (\alpha_i, \beta_i)$ такое, что $\varphi(r) = 0$ и $\varphi(t) \geq 0$ при $0 < t \leq r$. Очевидно, $r \in I_1$, что противоречит условию $(\alpha_i, \beta_i) \subset I_2$. Итак, (2.11) доказано.

Определим теперь функцию $\omega(t)$:

$$\omega(t) = \begin{cases} h(t), & t \in I_1, \\ h(\beta_i)\beta_i^{-m}t^m, & t \in (\alpha_i, \beta_i), \quad i = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (2.12)$$

В силу (2.11) функция $\omega(t)$ будет непрерывной. Легко видеть, что условие (2.8) выполнено. Так как $\beta_i \in I_1$, то $\omega(t) \leq h(t)$; так как $R_0 \in I_1$, то $\omega(R_0) = h(R_0) = h(r_0)$. Возможно, что $\omega(t) = h(r_0)$ на некотором участке $R_0 - \delta_0 \leq t \leq R_0$, где $r_0 \leq R_0 - \delta_0$. Чтобы $\omega(t)$ была строго возрастающей, отбросим этот участок, приняв $R_0 = r_0(b(r_0))^{-1/m} - \delta_0$. Осталось установить неравенство (2.9).

Предположим вначале, что одно из чисел α_i (пусть α_1) равно 0. Тогда найдется последовательность $r_i \downarrow 0+$ такая, что

$$h(r_i) < 2h(\beta_1)\beta_1^{-m}r_i^m. \quad (2.13)$$

Действительно, в противном случае $h(r) \geq 2h(\beta_1)\beta_1^{-m}r^m$ при $0 < r \leq \delta < \beta_1$. Рассматривая функцию $\varphi(t) = h(t) - at^m$ с $a = 2h(\beta_1)\beta_1^{-m}$ и замечая, что $\varphi(\beta_1) < 0$, опять придем к существованию такого числа r , что $r \in (0, \beta_1)$ и $r \in I_1$. Мы снова пришли к противоречию с включением $(\alpha_1, \beta_1) \subset I_1$.

Рассмотрим некоторый интервал (r_i, r_{i-1}) . В силу условия (2.5) $t^m/b(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0+$. Поэтому, при необходимости переходя к подпоследовательности, можно предполагать, что

$$r_i(b(r_i))^{-1/m} < r_{i-1}. \quad (2.14)$$

Применяя (2.13), (2.12) и (2.14), имеем

$$\frac{h(r_i)}{h(r_{i-1})} \leq \frac{h(r_i)}{\omega(r_{i-1})} \leq \frac{2h(\beta_1)\beta_1^{-m}r_i^m}{h(\beta_1)\beta_1^{-m}r_{i-1}^m} < 2b(r_i). \quad (2.15)$$

С другой стороны, подстановка в (2.4) $\tau_1 = r_i$, $\tau_2 = r_{i-1}$ дает

$$h(r_i)r_i^{-m}r_{i-1}^m/b(r_{i-1}) \geq h(r_{i-1}).$$

Поэтому для функции $H(t) = h(r_i)r_i^{-m}t^m/b(t)$, $r_i \leq t \leq r_{i-1}$, выполнены неравенства $H(r_i) < 2h(r_{i-1})$, $H(r_{i-1}) \geq h(r_{i-1})$. Следовательно, существует такое $y_i \in (r_i, r_{i-1}]$, что $h(r_{i-1}) \leq H(y_i) \leq 2h(r_{i-1})$, или

$$h(r_{i-1}) \leq h(r_i)r_i^{-m}y_i^m/b(y_i) \leq 2h(r_{i-1}). \quad (2.16)$$

Введем в рассмотрение функцию

$$H_i(t) = \begin{cases} h(r_i)r_i^{-m}t^m/b(t), & 0 < t \leq y_i, \\ h(r_i)r_i^{-m}y_i^m/b(y_i), & y_i \leq t \leq r_{i-1}. \end{cases} \quad (2.17)$$

Условие (2.4) при $\tau_1 = r_i$, $\tau_2 = t$ дает $h(t) \leq h(r_i)r_i^{-m}t^m/b(t)$, $r_i \leq t \leq r_0$. Отсюда и из (2.16) $h(t) \leq H_i(t)$, $r_i \leq t \leq r_{i-1}$.

Положим $Y_i = y_i(b(y_i))^{-1/m}$. Нам понадобятся следующие оценки ядра K :

$$K(Y_i) \leq c_5 K(r_{i-1}), \quad c_5 = c_5(\gamma) > 1, \quad (2.18)$$

$$K(t) \leq \gamma^{-1} (Y_i/t)^{m/2} K(Y_i), \quad 0 < t \leq Y_i. \quad (2.19)$$

Применяя (2.16) и первые два неравенства из (2.15), получим

$$Y_i^m \geq r_i^m h(r_{i-1})/h(r_i) \geq r_{i-1}^m/2.$$

В силу (2.5) и условия $b(t) \leq \gamma^2$ имеем

$$K(t) < \gamma^{-1} K(t(b(t))^{-1/m}) \leq \gamma^{-1} K(t\gamma^{-2/m}). \quad (2.20)$$

Если теперь натуральное число j таково, что $\gamma^{2j} \leq 1/2$, то

$$K(Y_i) \leq K(r_{i-1}2^{-1/m}) \leq K(r_{i-1}\gamma^{2j/m}) \leq \gamma^{-j} K(r_{i-1}),$$

и (2.18) установлено. Возьмем теперь некоторое $t \in (0, Y_i)$ и определим натуральное число k из соотношений

$$\gamma^{2(k+1)/m} Y_i < t \leq \gamma^{2k/m} Y_i. \quad (2.21)$$

В силу (2.20)

$$K(t) \leq K(\gamma^{2(k+1)/m} Y_i) \leq \gamma^{-(k+1)} K(Y_i).$$

Из (2.21) следует, что $\gamma^{-k} \leq (Y_i/t)^{m/2}$, и (2.19) доказано.

Имеем

$$\begin{aligned} \int_{r_i}^{r_{i-1}} K(t) dh(t) &< K(r_{i-1})h(r_{i-1}) - \int_{r_i}^{r_{i-1}} h(t) dK(t) \\ &\leq K(r_{i-1})H_i(r_{i-1}) - \int_0^{r_{i-1}} H_i(t) dK(t) = \int_0^{r_{i-1}} K(t) dH_i(t) \\ &= \int_0^{y_i} K(t) dH_i(t) \stackrel{(2.5), (2.17)}{\leq} \frac{h(r_i)}{\gamma r_i^m} \int_0^{y_i} K(t(b(t))^{-1/m}) d(t^m/b(t)) \\ &= \frac{h(r_i)}{\gamma r_i^m} \int_0^{Y_i} K(t) dt^m \stackrel{(2.19)}{\leq} \frac{h(r_i)}{\gamma^2 r_i^m} Y_i^{m/2} K(Y_i) \int_0^{Y_i} t^{-m/2} dt^m \\ &= 2\gamma^{-2} h(r_i) r_i^{-m} Y_i^m K(Y_i) \stackrel{(2.16), (2.18)}{\leq} 4\gamma^{-2} c_5 h(r_{i-1}) K(r_{i-1}). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Далее, используя соотношения (2.12), (2.14), (2.13) и $b(t) \leq \gamma^2$, получим

$$\omega(r_{i-1}) - \omega(r_i) = \frac{h(\beta_1)}{\beta_1^m} (r_{i-1}^m - r_i^m) > \frac{h(\beta_1)}{\beta_1^m} r_{i-1}^m (1 - b(r_i)) \geq \frac{h(r_{i-1})}{2} (1 - \gamma^2).$$

Отсюда и из (2.22)

$$\begin{aligned} \int_{r_i}^{r_{i-1}} K(t) d\omega(t) &\geq K(r_{i-1})[\omega(r_{i-1}) - \omega(r_i)] \\ &\geq K(r_{i-1})h(r_{i-1})(1 - \gamma^2)/2 \geq c_4 \int_{r_i}^{r_{i-1}} K(t) dh(t), \\ c_4 &= \gamma^2(1 - \gamma^2)(8c_5)^{-1}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\int_0^{\beta_1} K(t) d\omega(t) \geq c_4 \int_0^{\beta_1} K(t) dh(t), \quad 0 < c_4 < \gamma.$$

Рассмотрим теперь случай $\alpha_i > 0$. Если $\alpha_i(b(\alpha_i))^{-1/m} \geq \beta_i$, то в силу (2.5) $K(\beta_i) \geq K(\alpha_i(b(\alpha_i))^{-1/m}) > \gamma K(\alpha_i)$, откуда

$$\int_{\alpha_i}^{\beta_i} K(t) d\omega(t) > K(\beta_i)[\omega(\beta_i) - \omega(\alpha_i)] = K(\beta_i)[h(\beta_i) - h(\alpha_i)] > \gamma \int_{\alpha_i}^{\beta_i} K(t) dh(t).$$

Пусть $\alpha_i(b(\alpha_i))^{-1/m} < \beta_i$. Тогда к интервалу (α_i, β_i) почти дословно (с некоторыми упрощениями) применимы рассуждения, проведенные выше для интервала (r_i, r_{i-1}) . При этом вместо r_i возьмем α_i , а вместо r_{i-1} и β_1 возьмем β_i . (Упрощения связаны с тем, что вместо неравенства (2.13) имеет место равенство (2.11).) Опять приходим к оценке

$$\int_{\alpha_i}^{\beta_i} K(t) d\omega(t) > c_4 \int_{\alpha_i}^{\beta_i} K(t) dh(t), \quad 0 < c_4 < \gamma.$$

Отсюда и из (2.12)

$$\begin{aligned} \int_0^{R_0} K(t) d\omega(t) &= \int_{I_1} K(t) dh(t) + \int_{I_2} K(t) d\omega(t) \\ &\geq c_4 \int_0^{R_0} K(t) dh(t) = c_4 \int_0^{r_0} K(t) dh(t), \end{aligned}$$

и доказательство леммы 2.1 завершено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.2. Возьмем функцию $\omega(t)$, построенную в лемме 2.1. Согласно (2.8) $\omega(t)$ удовлетворяет условию (1.1) с $b = 1$; кроме того, $\omega(R_0) = \mathcal{N}$. По теореме 2.1 найдется множество G такое, что

$$U(x) \geq c_1 \int_0^{R_0} K(t) d\omega(t); \quad M_\omega(G) \geq Q_1 \mathcal{N}.$$

Из (2.9) сразу следует (2.6). Поскольку $h(t) \geq \omega(t)$, то $M_h(G) \geq M_\omega(G) \geq Q_1 \mathcal{N}$, что и требовалось доказать.

§ 3. О связи между мерой Хаусдорфа и емкостью

В данном параграфе предполагается (без дополнительных оговорок), что функция $K(t)$ неотрицательна, не возрастает, непрерывна при $t > 0$, $K(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow 0+$ и выполнено условие (0.3).

Хорошо известна следующая теорема Фростмана (мы приводим ее в усиленной формулировке, принадлежащей Л. Карлесону).

ТЕОРЕМА 3.1 [7, с.35]. *Для любого ограниченного множества E из неравенства $C_K(E) > 0$ следует, что $\Lambda_{K^{-1}}(E) = \infty$, где*

$$\overline{K}(r) = r^{-m} \int_0^r K(t) dt^m. \quad (3.1)$$

Обратно, если E – аналитическое множество и $\Lambda_h(E) > 0$ для такой измеряющей функции $h(t)$, что

$$\int_0^\infty K(t) dh(t) < \infty, \quad (3.2)$$

то $C_K(E) > 0$. (Равносильная формулировка: если $C_K(E) = 0$ и выполнено (3.2), то $\Lambda_h(E) = 0$.)

Для ядер $K(t) = \varphi_m(t)$, где

$$\varphi_m(t) = \begin{cases} -\log t, & m = 2, \\ t^{2-m}, & m > 2, \end{cases} \quad (3.3)$$

этот результат передоказан в [10]. Покажем, что с помощью теоремы А можно дополнить вторую часть теоремы 3.1, получив оценку сверху для $M_h(E)$.

Наряду с емкостью $C_K(E)$ рассмотрим емкость $C'_K(E) = \sup \mu(E)$, где верхняя грань берется по всем неотрицательным мерам μ , носители $S(\mu)$ которых содержатся в E и $U^\mu(x) \leq 1 \quad \forall x \in S(\mu)$. Очевидно, $C_K(E) \leq C'_K(E)$. В силу обобщенного принципа максимума существует постоянная d_m , зависящая только от размерности m , такая, что $C'_K(E) \leq d_m C_K(E)$. Если же имеет место (строгий) принцип максимума, то $C_K(E) = C'_K(E)$. (Заметим, что данное определение емкости $C'_K(E)$ эквивалентно определению внутренней емкости в [2, с.181].) Величина $C_K^*(E) = \inf \{C'_K(G) : G \supset E, G \text{ – открытое множество}\}$ называется *внешней емкостью* множества E . Очевидно, $C'_K(E) \leq C_K^*(E)$; для аналитических множеств $C'_K(E) = C_K^*(E)$.

Обозначим $\hat{h}(r) = h(r) \left(\int_0^r K(t) dh(t) \right)^{-1}$. Нетрудно убедиться, что $\hat{h}$ – измеряющая функция. Пусть E – ограниченное множество и $C_K^*(E) < \hat{h}(\infty)$. Тогда найдется $r_0 = r_0(E)$ такое, что $\hat{h}(r_0) = C_K^*(E)$, или

$$h(r_0) = C_K^*(E) \int_0^{r_0} K(t) dh(t). \quad (3.4)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Предположим, что выполнено условие (3.2). Пусть, далее, E – ограниченное множество и r_0 определено из соотношения (3.4). Тогда*

$$M_h(E) \leq A_m h(r_0), \quad (3.5)$$

где A_m зависит только от m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [7, с. 24], [2, с. 187] найдется такая мера ν с носителем на $\overline{E}$, что $\nu(E) = C_K^*(E)$ и соответствующий потенциал $U^\nu(x)$ удовлетворяет неравенствам $U^\nu(x) \geq 1$ всюду на E , за исключением множества нулевой C^* -емкости, и $U^\nu(x) \leq 1$ всюду на носителе $S(\nu)$ меры ν . Таким образом, $E = G_1 \cup G_2$, где $U^\nu(x) \geq 1 \quad \forall x \in G_1$, и $C_K^*(G_2) = 0$. В силу определения C^* -емкости $G_2 \subset G_3$, где G_3 – множество типа G_δ , и $C_K^*(G_3) = 0$. По теореме 3.1 $M_h(G_2) = 0$. Поэтому $M_h(E) = M_h(G_1)$. Положим

$$h_0(t) = h(t) \left(\int_0^{r_0} K(t) dh(t) \right)^{-1}, \quad 0 \leq t \leq r_0.$$

Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и введем измеряющую функцию $h_1(t)$ такую, что $h_1(r_0) = h_0(r_0) = C_K^*(E)$, $(1 + \varepsilon)^{-1} h_0(t) < h_1(t) \leq h_0(t)$ при $0 \leq t \leq r_0$ и $h_1(t) < h_0(t)$ при некотором $t \in (0, r_0)$. Интегрированием по частям проверяется неравенство

$$\int_0^{r_0} K(t) dh_1(t) < \int_0^{r_0} K(t) dh_0(t) = 1.$$

Поэтому $G := \{x \in \mathbb{R}^m : U^\nu(x) > \int_0^{r_0} K(t) dh_1(t)\} \supset G_1$. Применим теперь теорему А, в которой вместо $h(t)$ и $\mathcal{N}$ возьмем $h_1(t)$ и $C_K^*(E)$ соответственно. Из (0.2) имеем

$$(1 + \varepsilon)^{-1} \sum_k h_0(r_k) \leq \sum_k h_1(r_k) < A_m C_K^*(E).$$

Следовательно,

$$M_h(E) = M_h(G_1) \leq M_h(G) \leq \sum_k h(r_k) < (1 + \varepsilon) A_m C_K^*(E) \int_0^{r_0} K(t) dh(t).$$

В силу произвольности ε и равенства (3.4) получаем (3.5).

Предложение 3.1 можно доказать и другим способом, основываясь на идеях доказательства теоремы 3.1 (см. [7]).

Покажем, что оценка (3.5) является точной в следующем смысле.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *Для любой измеряющей функции $h(t)$, удовлетворяющей условиям (1.1), (3.2), и для любого числа $r_0 > 0$ найдется такой компакт E , что*

$$M_h(E) \geq c_2 h(r_0), \quad C_K^*(E) \leq h(r_0) \left(a \int_0^{r_0} K(t) dh(t) \right)^{-1}, \quad (3.6)$$

где c_2 – число из теоремы 2.1, и a зависит только от m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\mathcal{N} = h(r_0)$. В качестве E возьмем компакт G из теоремы 2.1. Тогда первое неравенство в (3.6) следует из (2.2). Для вывода второго неравенства в (3.6) поступим так же, как и при доказательстве леммы 1.5. Пусть c_1 и μ – число и мера из теоремы 2.1, $P = (c_1 \int_0^{r_0} K(t) dh(t))^{-1}$ и ν – внешняя равновесная мера компакта E (т.е. такая же мера, как в предложении 3.1). В силу (2.1) $PU^\mu(x) \geq 1 \quad \forall x \in E$, а в силу обобщенного принципа максимума $U^\nu(x) \leq d_m$ на E . Отсюда имеем

$$C_K^*(E) \leq P \int_E U^\mu d\nu = P \int_E U^\nu d\mu \leq d_m P \mathcal{N},$$

что и требовалось доказать.

Можно доказать аналог предложения 3.2, основываясь на теореме 2.2. В этом случае вместо (1.1) следует использовать условия теоремы 2.2. Мы опускаем подробности.

В случае, когда удастся решить уравнение (3.4) и выразить r_0 через $C_K^*(E)$, мы получаем оценки для $M_h(E)$ непосредственно через емкость.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Пусть $h(t) = t^p$, $0 < p < m$. Тогда

$$\begin{aligned} M_h(E) &\leq A_m \left(\frac{p}{p-\alpha} C_K^*(E) \right)^{\frac{p}{\alpha}}, & K(t) &= t^{-\alpha}, & 0 < \alpha < p; \\ M_h(E) &\leq A_m \exp \left(1 - \frac{p}{C_K^*(E)} \right), & K(t) &= \log \frac{1}{t}, & C_K^*(E) \leq p. \end{aligned} \quad (3.7)$$

В то же время для любого δ из указанных ниже интервалов найдется компакт E_δ такой, что

$$\begin{aligned} c_2 \delta &\leq M_h(E_\delta) \leq A_m \left(\frac{p}{p-\alpha} C_K^*(E_\delta) \right)^{\frac{p}{\alpha}} \leq A_m a^{-\frac{p}{\alpha}} \delta, \\ K(t) &= t^{-\alpha}, & \delta &\in (0, \infty); \\ c_2 \delta &\leq M_h(E_\delta) \leq A_m \exp \left(1 - \frac{p}{C_K^*(E_\delta)} \right) \leq c_6 \delta^a, \\ K(t) &= \log \frac{1}{t}, & \delta &\in (0, 1), & c_6 &= c_6(m). \end{aligned} \quad (3.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенства (3.7) непосредственно следуют из предложения 3.1. Для доказательства оценок (3.8) положим $r_0 = \delta^{1/p}$ и возьмем в качестве E_δ компакт из предложения 3.2. Тогда первые и третьи неравенства в (3.8) вытекают из (3.6).

ЗАМЕЧАНИЕ 1). По существу оценки (3.7) были ранее получены Н. С. Ландкофом [2, с. 253, следствие 2], и наш подход имеет много общего с методом, примененным в [2]. Расхождение между следствием 2 из [2, с. 253] и первым неравенством из (3.7) объясняется некорректным переходом к неравенству (3.4.5) в [2, с. 252]:

множитель $\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta-p}\right)^{\frac{\beta}{p-\alpha}}$ нельзя заменить числом e , если величина $p - \alpha$ достаточно близка к β (здесь мы использовали обозначения из [2]). Окончателюность оценок (3.7), насколько нам известно, ранее не исследовалась.

2) Из неравенств, полученных при доказательстве первой части теоремы 3.1 в [7, с. 35, 111], можно вывести и оценку сверху для емкости:

$$C_K(E) \leq cM_{\bar{K}-1}(E), \quad c = c(m).$$

Рассмотрим теперь вопрос о точности теоремы 3.1. Известно, что первая часть теоремы 3.1 является окончательной.

ТЕОРЕМА 3.2 [7, с. 41]. *Для любой функции $K(r)$ и любой измеряющей функции $h(r)$, обладающей тем свойством, что*

$$\liminf_{r \rightarrow 0} h(r)\bar{K}(r) = 0, \quad (3.9)$$

существует множество E канторовского типа, для которого $C_K(E) > 0$, $M_h(E) = 0$.

Исследуем необходимость условия (3.2) во второй части теоремы 3.1. В. Ерохин [10] замечает, что если $\int_0 \varphi_m(t) dh(t) = \infty$, то существует компакт $E \subset \mathbb{R}^m$ такой, что $\Lambda_h(E) \geq 1$, но $C_{\varphi_m}(E) = 0$ (доказательство в [10] не приводится). В [8] показано, что это утверждение, вообще говоря, неверно. Пусть задано некоторое ядро $K(t)$. Существует измеряющая функция $h(t)$, удовлетворяющая условию

$$\int_0 K(t) dh(t) = \infty \quad (3.10)$$

и такая, что для всякого аналитического множества E , для которого $C_K(E) = 0$, будет и $\Lambda_h(E) = 0$. Более того, нетрудно доказать следующий факт.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. *Для каждого ядра $K(t)$ существует такая измеряющая функция $h(t)$, для которой выполнено (3.10) и $\Lambda_h(\mathbb{R}^m) = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существует последовательность $\{r_i\}_{i=0}^{\infty}$ положительных чисел такая, что $2r_i < r_{i-1}$ и $K(r_i)r_{i-1}^m \geq i$, $i \geq 1$. Определим функцию $h(t)$ так, чтобы $h(t)$ была непрерывной, строго возрастающей, $h(r_i) = r_i^m i^{-1}$, и чтобы выполнялось первое неравенство из следующей цепочки:

$$\begin{aligned} \int_{r_i}^{r_{i-1}} K(t) dh(t) &\geq \frac{1}{2} K(r_i) (h(r_{i-1}) - h(r_i)) \\ &= \frac{1}{2} K(r_i) (r_{i-1}^m (i-1)^{-1} - r_i^m i^{-1}) \geq \frac{1}{4} K(r_i) r_{i-1}^m i^{-1} \geq \frac{1}{4}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Отсюда следует, что условие (3.10) выполнено. Установим теперь равенство $\Lambda_h(\mathbb{R}^m) = 0$. Для этого достаточно доказать, что для любого шара B_R будет $\Lambda_h(B_R) = 0$. Зафиксируем некоторое $R > 0$ и возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Найдется такое i , что $i^{-1} < \varepsilon$. Далее, существует постоянная $A = A(m) > 1$, обладающая следующим свойством. Шар B_R можно покрыть не более чем $A(R/r_i)^m$ шарами с одинаковыми радиусами ρ_k , равными r_i . Имеем

$$\sum_k h(\rho_k) \leq A \left(\frac{R}{r_i} \right)^m h(r_i) = A \left(\frac{R}{r_i} \right)^m \frac{r_i^m}{i} < AR^m \varepsilon.$$

Поскольку ε выбиралось произвольно, то $\Lambda_h(B_R) = 0$, откуда и следует нужное утверждение.

Итак, чтобы нашлось множество E со свойствами $\Lambda_h(E) > 0$ и $C_K(E) = 0$, необходимо, помимо (3.10), наложить на измеряющую функцию h некоторое дополнительное условие регулярности. Положим, как и в [8], $\psi(t) = t^m/h(t)$.

ТЕОРЕМА 3.3 [8, с. 175]. Пусть функция $q(t)$ определена в интервале $(0, r_0)$, $r_0 > 0$, и $\delta \leq q(t) \leq 1 - \delta$, $\delta > 0$. Пусть, далее, измеряющая функция $h(t)$ удовлетворяет условию (3.10) и

$$\psi(tq(t)) \leq \psi(t), \quad 0 < t < r_0. \quad (3.12)$$

Тогда найдется компактное множество E канторовского типа такое, что $\Lambda_h(E) > 0$, но $C_K(E) = 0$.

Условие (3.12) менее ограничительное, чем условия регулярности в ряде предшествующих теорем аналогичного характера. Краткий обзор этих результатов имеется в [8]. В [8] показано также, что если условие $q(t) \geq \delta > 0$ отбросить и допустить стремление (пусть даже сколь угодно медленное) функции $q(t)$ к 0 при $t \rightarrow 0+$, то теорема 3.3, вообще говоря, уже неверна. Но соответствующее построение в [8] (теорема 1.3) проведено лишь для ядер, достаточно быстро стремящихся к ∞ при $t \rightarrow 0+$. Теорема 1.3 из [8] не охватывает даже случая $K(t) = \varphi_m(t)$, $2 \leq m \leq 6$, для которого вопрос об окончательности условия (3.12) оставался открытым.

Покажем вначале, что условия теоремы 3.3 можно заменить условием (1.1).

ТЕОРЕМА 3.4. Пусть измеряющая функция $h(t)$ удовлетворяет условию (3.10) и при некоторых постоянных $r_0 > 0$ и $0 < b < 1$ выполнено условие (1.1). Тогда найдется компакт $E \subset \mathbb{R}^m$ такой, что $\Lambda_h(E) > 0$, но $C_K(E) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В качестве E возьмем компакт G из теоремы 2.1. Свойство $\Lambda_h(E) > 0$ выполнено в силу (2.2). Поскольку $U^\mu(x) = \infty \quad \forall x \in E$, то $C_K(E) = 0$. (Действительно, пусть $C_K(E) > 0$. Возьмем такую меру ν на E , что $U^\nu(x) \leq 1 \quad \forall x \in E$. Тогда соотношения $\infty = \int_E U^\mu d\nu = \int_E U^\nu d\mu \leq \mu(E) < \infty$ приводят к противоречию.)

Нетрудно показать, что если измеряющая функция $h(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 3.3, то $h(t)$ удовлетворяет и условию (1.1) с $b = \delta^m$ (но не наоборот). Поэтому теорема 3.4 усиливает теорему 3.3. Условие (1.1) равносильно тому, что функция $\psi(t)$ является почти возрастающей на интервале $(0, r_0)$. Возникает вопрос: можно ли улучшить теорему 3.4?

ТЕОРЕМА 3.5. *Предположим, что измеряющая функция $h(t)$, ядро $K(t)$, числа $r_0 > 0$, $\gamma \in (0, 1)$ и непрерывная положительная функция $b(t)$, $0 < t \leq r_0$, таковы, что $b(t) \leq \gamma^2$ при $0 < t \leq r_0$ и выполнены условия (3.10), (2.4), (2.5). Тогда существует такой компакт $E \subset \mathbb{R}^m$, что $\Lambda_h(E) > 0$, но $C_K(E) = 0$.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.4 со ссылкой на теорему 2.2 вместо теоремы 2.1.

Таким образом, ситуация здесь та же, что и в теореме 2.2: если рост ядра $K(t)$ и убывание функции $b(t)$ при $t \rightarrow 0+$ связаны условием (2.5), то условие (1.1) в теореме 3.4 можно ослабить, заменив его неравенством (2.4). Следующая теорема 3.6 утверждает, что для широкого класса ядер и функций $b(t)$ условие (2.5) является окончательным.

ТЕОРЕМА 3.6. *Предположим, что ядро $K(t)$ и функция $b(t)$ удовлетворяют следующим условиям: найдется такое число $p > 1$, что*

$$\int_0^r K(t) dt^m < pK(r)r^m, \quad 0 < r \leq r_0; \quad (3.13)$$

функция $b(t)t^{-m}$ не возрастает при $0 < t \leq r_0$; $b(t) \leq 1/2$;

$$\liminf_{t \rightarrow 0+} \left\{ K(t(b(t))^{-1/m}) / K(t) \right\} = 0. \quad (3.14)$$

Тогда существует такая измеряющая функция $h(t)$, что:

- 1) *выполнены условия (3.10) и (2.4);*
- 2) *если $E \subset \mathbb{R}^m$ — аналитическое множество и $C_K(E) = 0$, то $\Lambda_h(E) = 0$.*

ЛЕММА 3.1. *В условиях теоремы 3.6 найдутся две измеряющие функции, $h(t)$ и $\omega(t)$, такие, что функция $h(t)$ удовлетворяет условиям (2.3), (2.4),*

$$\int_0^\infty K(t) d\omega(t) < \infty \quad (3.15)$$

и для любого ограниченного множества $E \subset \mathbb{R}^m$ справедливо неравенство $M_h(E) \leq c_7 M_\omega(E)$, где постоянная c_7 зависит только от m .

Чтобы не прерывать изложения, мы приведем довольно объемное доказательство леммы 3.1 в конце данного параграфа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.6. Возьмем функции h и ω из леммы 3.1. Пусть $C_K(E) = 0$. Тогда по теореме 3.1 $M_\omega(E) = 0$ и в силу леммы 3.1 $M_h(E) = 0$.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. *Пусть непрерывная функция $b(t)$ не убывает, функция $b(t)t^{-m}$ не возрастает при $t > 0$ и выполнено условие (3.13).*

- 1) *$b(0) > 0$. Тогда для каждой измеряющей функции h , удовлетворяющей условиям (3.10), (2.4), найдется компакт E со свойствами $\Lambda_h(E) > 0$, $C_K(E) = 0$.*

2) $b(0) = 0$. Чтобы для каждой измеряющей функции h , удовлетворяющей условиям (3.10), (2.4), нашелся компакт E со свойствами $\Lambda_h(E) > 0$, $C_K(E) = 0$, необходимо и достаточно выполнения условия

$$\liminf_{t \rightarrow 0+} \left\{ K(t(b(t))^{-1/m}) / K(t) \right\} > 0.$$

Мы видим, что условие регулярности функции h , записанное в виде (2.4), позволяет достаточно полно описать класс измеряющих функций, для которых условие (3.2) в теореме 3.1 является необходимым. Мы замечаем также, что в предположениях п. 2) следствия 3.2 выполнение неравенства (2.5) при некотором $\gamma > 0$ необходимо для справедливости теорем 2.2 и 3.5. Действительно, пусть имеет место (3.14). Тогда заключение теоремы 3.5 противоречит теореме 3.6. Поскольку теорема 3.5 является следствием теоремы 2.2, то и теорема 2.2 оказывается неверной, если отказаться от условия (2.5).

Хорошо известно, что невозможно полное описание емкости в терминах мер Хаусдорфа. В [8] доказана следующая теорема 5.3, иллюстрирующая этот факт: для любой измеряющей функции $h(t)$ и любого ядра $K(t)$ найдется такой компакт E , для которого либо $C_K(E) > 0$, $\Lambda_h(E) = 0$; либо $C_K(E) = 0$, $\Lambda_h(E) > 0$.

Профессор М. И. Дьяченко поставил следующий вопрос. Всегда ли имеет место одна из импликаций: ($C_K(E) > 0 \Rightarrow \Lambda_h(E) > 0$) либо обратная ей?

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. Пусть измеряющая функция $h(t)$ и ядро $K(t)$ удовлетворяют условиям (3.10), (1.1) и (3.9). Тогда найдутся такие компакты E_1, E_2 , что

$$C_K(E_1) > 0, \quad \Lambda_h(E_1) = 0; \quad (3.16)$$

$$C_K(E_2) = 0, \quad \Lambda_h(E_2) > 0. \quad (3.17)$$

Например, условия предложения 3.4 выполнены при $K(t) = t^{-\alpha}$, $h(t) = t^\alpha / \log \frac{1}{t}$, $0 < \alpha < m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование компакта E_1 со свойствами (3.16) следует из теоремы 3.2. Существование компакта, удовлетворяющего условиям (3.17), вытекает из теоремы 3.4.

ЗАМЕЧАНИЕ. Ю. В. Нетрусов [11] ввел такие функции $h_{\varphi, \theta}$ множества E , которые, подобно величине $M_h(E)$, определяются через радиусы шаров, покрывающих E , и при этом обладают следующим свойством: емкость в пространствах Бесова эквивалентна этим функциям $h_{\varphi, \theta}$.

В заключении §3 докажем лемму 3.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.1. Рассмотрим вначале случай

$$t(b(t))^{-1/m} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0+. \quad (3.18)$$

В силу (3.14) найдется последовательность $\{t_i\}_{i=0}^\infty$ такая, что $t_i \downarrow 0$ и

$$d_i \stackrel{\text{def}}{=} K(t_i(b(t_i))^{-1/m}) / K(t_i) \downarrow 0, \quad i \rightarrow \infty. \quad (3.19)$$

Далее, существует последовательность $\{b_i\}_{i=0}^{\infty}$ положительных чисел со свойствами

$$b_i \leq 1, \quad \sum_{i=0}^{\infty} b_i = \infty, \quad \sum_{i=0}^{\infty} d_i b_i < \infty. \quad (3.20)$$

Построим теперь последовательности чисел $\{k_i\}$, $\{r_i\}$, $\{h_i\}$, $i = 0, 1, \dots$. Положим $k_0 = 0$, $h_0 = r_0^m$. Пусть числа k_i , r_i , h_i , $i = 0, \dots, n-1$, уже определены. В силу условия (0.3) $K(t)t^m \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0+$. Отсюда и из (3.18) следует, что найдется такой индекс $k_n > k_{n-1}$, для которого

$$t_{k_n}(b(t_{k_n}))^{-1/m} \leq r_{n-1}, \quad b_n/K(t_{k_n}) < h_{n-1}, \quad b_n t_{k_n}^{-m}/K(t_{k_n}) \geq 2h_{n-1}r_{n-1}^{-m}. \quad (3.21)$$

Положим

$$r_n = t_{k_n}, \quad g(r_n) = b_n/K(r_n), \quad h_n = \max\{b(r_n)g(r_n), h_{n-1}r_{n-1}^{-m}r_n^m\}. \quad (3.22)$$

Таким образом, нужные последовательности построены. Легко видеть (см. (3.21)), что $2h_{i-1}r_{i-1}^{-m}r_i^m \leq g(r_i) < h_{i-1}$, $i \geq 1$. Поэтому найдется $y_i \in (r_i, r_{i-1})$ такое, что

$$h_{i-1}r_{i-1}^{-m}y_i^m = g(r_i). \quad (3.23)$$

Определим теперь функцию $g(t)$:

$$g(t) = \begin{cases} g(r_i), & r_i \leq t \leq y_i, \\ h_{i-1}r_{i-1}^{-m}t^m, & y_i < t < r_{i-1}, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots \quad (3.24)$$

Поскольку (см. (3.22), (3.23)) $h_i < g(r_i) < h_{i-1}$, то $g(t)$ будет неубывающей функцией при $t > 0$ и $g(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0+$. Из неравенств $b(t) \leq 1/2$, $h_{i-1}r_{i-1}^{-m}r_i^m \leq g(r_i)/2$ и из (3.22) следует, что $h_i \leq g(r_i)/2$. Отсюда

$$g(r_i + 0) - g(r_i - 0) = g(r_i) - h_i \geq g(r_i)/2. \quad (3.25)$$

Покажем, что $g(t)$ удовлетворяет условию

$$g(\tau_1)\tau_1^{-m} \geq b(\tau_2)g(\tau_2)\tau_2^{-m}, \quad 0 < \tau_1 \leq \tau_2 \leq r_0. \quad (3.26)$$

Из (3.24) сразу следует, что

$$g(\tau_1)\tau_1^{-m} \geq g(\tau_2)\tau_2^{-m} > b(\tau_2)g(\tau_2)\tau_2^{-m}, \quad r_i \leq \tau_1 \leq \tau_2 < r_{i-1}. \quad (3.27)$$

Пусть теперь $r_i \leq \tau_1 < r_{i-1}$, $r_j \leq \tau_2 < r_{j-1}$, $i > j$. Рассмотрим вначале случай $r_j \leq \tau_2 \leq y_j$. Выберем ξ так, чтобы $y_i < \xi < r_{i-1}$ и $\xi \geq \tau_1$. Поскольку по условию леммы 3.1 функция $b(\tau)\tau^{-m}$ не возрастает, то

$$\begin{aligned} b(\tau_2)g(\tau_2)\tau_2^{-m} &\stackrel{(3.24)}{\leq} g(r_j)b(r_j)r_j^{-m} \stackrel{(3.22)}{\leq} h_j r_j^{-m} \stackrel{(3.22)}{\leq} h_{j+1}r_{j+1}^{-m} \leq \dots \\ &\dots \leq h_{i-1}r_{i-1}^{-m} \stackrel{(3.24)}{=} g(\xi)\xi^{-m} \stackrel{(3.27)}{\leq} g(\tau_1)\tau_1^{-m}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Если же $y_j < \tau_2 < r_{j-1}$, то

$$g(\tau_2)\tau_2^{-m} \stackrel{(3.24)}{=} h_{j-1}r_{j-1}^{-m} \stackrel{(3.22)}{\leq} h_j r_j^{-m} \stackrel{(3.28)}{\leq} g(\tau_1)\tau_1^{-m},$$

и (3.26) установлено.

Чтобы завершить построение искомой функции $h(t)$, “подправим” функцию $g(t)$ на отрезках $[r_i, y_i]$. Положим $h(r_i) = h_i$, $h(y_i) = g(y_i)$. При $t \in (r_i, y_i)$ определим $h(t)$ таким образом, чтобы она была непрерывной, строго возрастающей, удовлетворяющей условию (2.4) и неравенствам

$$h(t) \leq g(t), \quad \int_{r_i}^{y_i} K(t) dh(t) \geq \frac{1}{2} K(r_i)(g(r_i + 0) - g(r_i - 0)).$$

(В качестве $h(t)$ при $r_i < t < y_i$ можно, например, взять ломаную с вершинами $A_i(r_i, h_i)$, $B_i(r_i + \varepsilon_i, g(r_i) - \varepsilon_i)$, $C_i(y_i, g(r_i))$ с достаточно малыми ε_i .) При $y_i < t < r_{i-1}$ положим $h(t) = g(t)$. Применяя (3.25), имеем

$$\int_0 K(t) dh(t) \geq \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{\infty} K(r_i)g(r_i) \stackrel{(3.22)}{=} \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{\infty} b_i \stackrel{(3.20)}{=} \infty.$$

Отсюда и из (3.26) следует, что условия (2.3) и (2.4) выполнены.

Займемся теперь построением функции $\omega(t)$. Положим (см. (3.22))

$$J = \{j: j \geq 1, h_j = b(r_j)g(r_j) > h_{j-1}r_{j-1}^{-m}r_j^m\} \quad (3.29)$$

(множество J может оказаться пустым или конечным). Натуральные числа, образующие множество J , мы занумеруем в порядке возрастания и обозначим через i_l , $l \geq 1$; $i_0 := 0$. Положим

$$\eta_0 = r_0, \quad \eta_l = r_{j_l}(g(r_{j_l})/h_{j_l})^{1/m} \stackrel{(3.29)}{=} r_{j_l}(b(r_{j_l}))^{-1/m}, \quad j_l = i_l \in J. \quad (3.30)$$

Тогда

$$\eta_l^m h_{j_l} r_{j_l}^{-m} = g(r_{j_l}) \stackrel{(3.23)}{=} h_{j_l-1} r_{j_l-1}^{-m} y_{j_l}^m \stackrel{(3.29)}{<} h_{j_l} r_{j_l}^{-m} y_{j_l}^m, \quad \text{т.е. } r_{j_l} < \eta_l < y_{j_l}, \quad j_l \geq 1.$$

Предположим, что j не является наибольшим индексом из J и $j' = i_{l+1}$. Поскольку индексы из промежутка $(j, j' - 1]$ не принадлежат J , то (см. (3.29) и (3.22))

$$h_{j'-1} r_{j'-1}^{-m} = h_{j'-2} r_{j'-2}^{-m} = \dots = h_j r_j^{-m} \quad (3.31)$$

(если $j = j' - 1$, то равенство тривиально). Положим $\alpha_l = y_{i_{l+1}} > \eta_{l+1}$. Имеем

$$g(\eta_l) \eta_l^{-m} \stackrel{(3.24)}{=} g(r_{j_l}) \eta_l^{-m} \stackrel{(3.30)}{=} h_{j_l} r_{j_l}^{-m} = h_{j'-1} r_{j'-1}^{-m} \stackrel{(3.23), (3.24)}{=} g(\alpha_l) \alpha_l^{-m}. \quad (3.32)$$

Так как $r_{i_{l+1}} < \eta_{l+1} < y_{i_{l+1}} = \alpha_l$, то (см. (3.24)) $g(\eta_{l+1}) = g(\alpha_l)$.

Введем функцию $\Omega(t)$:

$$\Omega(t) = \begin{cases} g(\eta_{l+1}) = g(\alpha_l), & \eta_{l+1} < t < \alpha_l, \\ g(\alpha_l)\alpha_l^{-m}t^m = g(\eta_l)\eta_l^{-m}t^m, & \alpha_l \leq t \leq \eta_l. \end{cases} \quad (3.33)$$

Если же j – наибольший индекс из J или если множество J пусто (при этом $j = 0$), то полагаем $\alpha_l = 0$ и $\Omega(t) = g(\eta_l)\eta_l^{-m}t^m$, $0 \leq t \leq \eta_l$.

Определенная таким образом функция $\Omega(t)$ будет непрерывной и неубывающей при $0 \leq t \leq r_0$. Полагая для краткости $i_l = j$, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{r_0} K(t) d\Omega(t) &\stackrel{(3.33)}{=} \sum_l \int_{\alpha_l}^{\eta_l} K(t) d\Omega(t) = \sum_l g(\eta_l)\eta_l^{-m} \int_{\alpha_l}^{\eta_l} K(t) dt^m \\ &\stackrel{(3.13)}{<} p \sum_l g(\eta_l) K(\eta_l) \stackrel{(3.24), (3.30)}{=} p \sum_l g(r_j) K(r_j) (b(r_j))^{-1/m} \\ &\stackrel{(3.19)}{=} p \sum_l g(r_j) d_{k_j} K(r_j) \stackrel{(3.22)}{=} p \sum_l b_j d_{k_j} \leq p \sum_l b_j d_j \stackrel{(3.20)}{<} \infty. \end{aligned} \quad (3.34)$$

В качестве $\omega(t)$ возьмем такую непрерывную возрастающую функцию, что $\Omega(t)/2 \leq \omega(t) \leq \Omega(t)$. Интегрируя по частям и используя (3.34) нетрудно показать, что условие (3.15) при этом будет выполнено.

Предположим теперь, что $\lim_{t \rightarrow 0+} t(b(t))^{-1/m} > 0$. Тогда найдется $\delta > 0$ такое, что $b(t) < \delta^{-1}t^m$. Можно считать r_0 достаточно малым, чтобы $\delta^{-1}r_0^m \leq 1$. Возьмем последовательность $\{r_i\}_{i=0}^\infty$ такую, что $2r_i < r_{i-1}$ и $K(r_i)r_{i-1}^m \geq 1$. Положим $h_i = r_i^m$, $\Omega(t) = \omega(t) = t^m$ при $0 \leq t \leq r_0$, $\alpha_0 = 0$, $\eta_0 = r_0$. Определим функцию $h(t)$ так, чтобы она была непрерывной, строго возрастающей и удовлетворяющей условиям (ср. с (3.11))

$$h(r_i) = h_i, \quad \int_{r_i}^{r_{i-1}} K(t) dh(t) \geq \frac{1}{4}$$

(например, опять возьмем в качестве $h(t)$ на промежутках $(r_i, r_{i-1}]$, $i \geq 1$, ломаные с вершинами $A_i(r_i, h_i)$, $B_i(r_i + \varepsilon_i, h_{i-1} - \varepsilon_i)$, $C_i(r_{i-1}, h_{i-1})$ с достаточно малыми ε_i). Если теперь $0 < \tau_1 \leq \tau_2 \leq r_0$, то

$$h(\tau_1)\tau_1^{-m} \geq 1 \geq \delta^{-1}r_0^m \geq b(\tau_2)\tau_2^{-m}r_0^m \geq b(\tau_2)h(\tau_2)\tau_2^{-m}.$$

Таким образом, условия (2.3), (2.4) и (3.15) выполнены. При $t > r_0$ положим $h(t) = \Omega(t) = t^m$.

Осталось доказать последнее утверждение леммы 3.1. Пусть E – ограниченное множество в $\mathbb{R}^m$. Возьмем некоторое покрытие множества E не более чем счетным набором шаров $B^j(x_j, \xi_j)$. Для каждого шара B^j возможны два случая.

1. $\Omega(\xi_j) < h(\xi_j)$. При $\eta_{l+1} < t < \alpha_l$ в силу (3.33) $h(t) \leq g(t) \leq g(\alpha_l) = \Omega(t)$. Поэтому рассматриваемый случай возможен лишь при $\alpha_l \leq \xi_j \leq \eta_l$. Если $\alpha_l > 0$, то положим $\zeta_j := \alpha_l$. При этом (см. (3.33)) $\Omega(\alpha_l) = g(\alpha_l) = h(\alpha_l)$. Если $\alpha_l = 0$, то найдем $r_i \in (0, \xi_j)$, и мы положим $\zeta_j := r_i$. Из (3.33) вытекает, что при таком определении чисел ζ_j будет

$$h(\zeta_j) = \Omega(\zeta_j) \quad \text{и} \quad \Omega(t) = h(\zeta_j)\zeta_j^{-m}t^m \quad \text{при} \quad \zeta_j \leq t \leq \xi_j. \quad (3.35)$$

Шар B^j покроем не более чем $A(\xi_j/\zeta_j)^m$ шарами $B^{j,k}$ с одинаковыми радиусами $\xi_{j,k} = \zeta_j$, где A зависит только от m .

2. $\Omega(\xi_j) \geq h(\xi_j)$. В этом случае полагаем $\xi_{j,k} = \zeta_j = \xi_j$, $k = 1$.

Мы получили покрытие множества E шарами $B^{j,k}(x_{j,k}, \xi_{j,k})$, причем

$$\sum_{j,k} h(\xi_{j,k}) \leq \sum_j A(\xi_j/\zeta_j)^m h(\zeta_j) \leq A \sum_j \Omega(\xi_j)$$

(в случае 1 последнее неравенство обращается в равенство – см. (3.35), в случае 2 оно тривиально). Отсюда следует, что $M_h(E) \leq AM_\Omega(E)$. Поскольку $\Omega(t) \leq 2\omega(t)$, то $M_h(E) \leq 2AM_\omega(E)$, и лемма 3.1 доказана.

§ 4. Оценки δ -субгармонических функций в шаре

В данном параграфе мы рассматриваем δ -субгармонические функции ограниченного вида в единичном шаре $B_1 \subset \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$. Приведем необходимые определения и факты.

Функция $u(x)$ называется δ -субгармонической в B_1 , если она представима в виде $u(x) = u_1(x) - u_2(x)$, где u_1, u_2 – субгармонические функции в B_1 (определение субгармонической функции см., например, в [12, с. 56, 57]). Пусть μ_1, μ_2 – меры, ассоциированные с u_1, u_2 в представлении Рисса этих функций; $S_r = \{x \in \mathbb{R}^m : |x| = r\}$; σ_1 – площадь сферы S_1 ; $d\sigma_r$ – элемент площади сферы S_r ; $g(x, y, r)$ – функция Грина шара B_r ; $u^+ = \max(u, 0)$, $u^- = u^+ - u$. Будем предполагать, что величины $u^-(0)$ и $u^+(0)$ конечны. Неванлинновская характеристика $T_u(r)$ функции u определяется равенством

$$T_u(r) = \frac{1}{\sigma_1 r^{m-1}} \int_{S_r} u^+(x) d\sigma_r(x) + \int_{B_r} g(0, y, r) d\mu_2(y).$$

Хорошо известно, что функция $T_u(r)$ не убывает. Функции $u(x)$ с ограниченной характеристикой называются также *функциями ограниченного вида* или *функциями класса N* (класса Неванлинны). В дальнейшем мы рассматриваем функции из этого класса. Положим $T_u(1) = \lim_{r \rightarrow 1-} T_u(r)$. Из формулы Пуассона–Иенсена [12, с.139] следует, что

$$T_{-u}(r) = T_u(r) - u(0). \quad (4.1)$$

Краткий обзор результатов, приведших к изучаемой задаче, мы начнем с теоремы Валирона–Бернштейна [13, с. 73], [14, с. 33, 34] (мы цитируем эту теорему в той форме, какую ей придал Н. В. Говоров [4, с. 142]).

ТЕОРЕМА 4.1 [4]. Пусть функция $f(z)$ регулярна в круге $\{|z| \leq 1\}$, причем $|f(0)| \geq 1$, и пусть задано число $P \geq 2$. Тогда множество тех точек круга $|z| \leq 1/(2e)$, в которых $\ln|f(z)| < -P \ln(\max_{|z|=1}|f(z)|)$, может быть покрыто конечным числом кружков $\{|z - z_n| \leq r_n\}$, удовлетворяющих условию

$$\sum_n r_n \leq 3e^{2-P}. \quad (4.2)$$

Н. В. Говоров [4, теорема 4, с. 142] улучшил теорему 4.1, заменив правую часть в неравенстве (4.2) на $(2e)^{1-P}$ (в предположении, что $P \geq 5$). При этом теорема 4.1 была распространена в [4] на субгармонические функции $u(z)$ в единичном круге. Более того, Н. В. Говоров доказал аналог теоремы 4.1, оценив функцию $u(z)$ в произвольном круге $B_r = \{|z| < r\}$, $0 < r \leq 1$.

ТЕОРЕМА 4.2 [4, теоремы 1 и 5]. Пусть функция $u(z)$ субгармонична в круге B_1 , причем $\sup_{|z|<1} u(z) = M$, $0 < M < \infty$, и $u(0) \geq 0$. Пусть, далее, $0 < r \leq 1$ и $1 < P < \infty$. Тогда найдется не более чем счетное множество кругов $B^k(z_k, r_k)$ таких, что

$$\sum_k r_k \leq \begin{cases} r^P(1-r), & 0 < r < 1 - \frac{1}{P}, \\ \frac{1}{P}, & 1 - \frac{1}{P} \leq r \leq 1; \end{cases} \quad (4.3)$$

$$u(z) \geq -APM, \quad z \in B_r \setminus \bigcup_k B^k, \quad (4.4)$$

где A – некоторая абсолютная положительная постоянная.

(При $r = 1$ аналогичный результат был независимо получен А. Ф. Гришиным [3].)

Далее через A мы будем обозначать различные положительные постоянные, зависящие только от размерности пространства. В [4] показано, что можно положить $A = 5$ при $0 < r < 1 - 1/P$ и $A = 9$ при $r = 1$. Заметим, что стремление получить как можно более точную оценку константы A существенно усложняет доказательство (см. [4, с. 141, замечание 2]). В частности, при доказательстве теоремы 2 в [4] был использован аналог метода Картана [14, с. 31–33], [15] вместо более простого метода Хеймана–Ландкофа, примененного нами в §2 при доказательстве теоремы А. В дальнейшем мы не ставим перед собой задачу нахождения наименьших значений констант A , входящих в наши утверждения.

В случае $r = 1$ Л. С. Кудина распространила теорему 4.2 на δ -субгармонические функции в шаре $B_1 \subset \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$.

ТЕОРЕМА 4.3 [5]. Пусть $u(x)$ – δ -субгармоническая функция ограниченного вида в шаре B_1 . Для любого $P > 1$ можно указать систему шаров $B^k(x_k, r_k)$ такую, что $\sum_k r_k^{m-1} < 1/P$ и

$$u(x) < APT_u(1), \quad x \in B_1 \setminus \bigcup_k B^k, \quad (4.5)$$

где положительная постоянная A зависит только от m .

Если v – субгармоническая функция, удовлетворяющая условиям теоремы 4.2, то в силу (4.1) имеем $T_{-v}(r) = T_v(r) - v(0) \leq T_v(r) \leq M$. Применяя теперь теорему 4.3 к функции $u = -v$, получим, что оценка (4.5) улучшает неравенство (4.4) при $r = 1$. Мы видим также, что соотношения (4.1), (4.5) позволяют получить и оценку снизу для δ -субгармонической функции $u(x)$. В то же время остается открытым вопрос о размерах исключительного множества в оценке функции $u(x)$ при $x \in B_r \subset \mathbb{R}^m$, $m > 2$, $0 < r < 1$. (Согласно неравенству (4.3) если $m = 2$, $r < 1$ и P достаточно велико, то величина $\sum_k r_k$ гораздо меньше, чем $1/P$. Естественно ожидать, что аналогичное свойство имеет место и при $m > 2$.)

В данной работе мы рассмотрим более общую постановку задачи, оценивая вместо величины $\sum_k r_k^{m-1}$ сумму $\sum_k h(r_k/(1 - |x_k|))$, где h – некоторая измеряющая функция. Такой подход позволит нам, во-первых, улучшить теоремы 4.2, 4.3 даже в случае $m = 2$ (за исключением оценок для A) и, во-вторых, исследовать окончательность полученных оценок.

Изложим теперь основные результаты данного параграфа, после чего перейдем к их доказательству. Пусть измеряющая функция h удовлетворяет условию

$$\int_0^1 \varphi_m(t) dh(t) < \infty, \quad (4.6)$$

где φ_m определена в (3.3).

(Условие (4.6) равносильно следующему: $\int_0^1 t^{1-m} dh(t) < \infty$.)

Для $x \in B_1$, $P > 1$, $t > 0$ положим

$$v_x(t, P) = \begin{cases} Ph(t) \left(\int_0^t \ln \frac{1}{r} dh(r) \right)^{-1} \ln \frac{1}{|x|+t(1-|x|)}, & m = 2, \\ P(1-|x|)^{m-1} h(t) \left(\int_0^t r^{2-m} dh(r) \right)^{-1} (|x|+t(1-|x|))^{2-m}, & m > 2. \end{cases} \quad (4.7)$$

Обозначим через G_P множество таких точек $x \in B_1$, для которых найдутся значения $t \in (0, 1/6)$, удовлетворяющие уравнению $v_x(t, P) = 1$ (при достаточно больших P множество G_P не будет пустым). Наименьшее из таких t обозначим через $t(x, P)$. Легко видеть, что G_P является шаром $B_{r(P)}$, где $r(P) < 1$ (оценка радиуса этого шара приводится далее в лемме 4.3).

ТЕОРЕМА 4.4. Пусть $u(x)$ — δ -субгармоническая функция ограниченного вида в шаре $B_1 \subset \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, а измеряющая функция $h(t)$ удовлетворяет условию (4.6). Тогда для любого $P > P_0(h)$ можно указать систему шаров $B^k(x_k, r_k)$ такую, что

$$\sum_{x_k \in G_P} h\left(\frac{r_k}{1-|x_k|}\right) / h(t(x_k, P)) < 1, \quad (4.8)$$

$$\sum_{\substack{x_k \notin G_P \\ r_k < (1-|x_k|)/6}} (1-|x_k|)^{m-1} h\left(\frac{r_k}{1-|x_k|}\right) < \frac{1}{P} \int_0^{1/6} \varphi_m(t) dh(t), \quad (4.9)$$

$$\sum_{\substack{x_k \notin G_P \\ r_k \geq (1-|x_k|)/6}} r_k^{m-1} < \frac{1}{P}, \quad (4.10)$$

и вне шаров B^k имеет место оценка (4.5) с постоянной A , зависящей только от m .

Если удастся упростить выражение для $v_x(t, P)$, то из теоремы 4.4 выводятся утверждения, в которые вместо G_P и $t(x, P)$ входят явно определяемые величины.

ТЕОРЕМА 4.5. Пусть измеряющая функция h удовлетворяет условию (4.6) и при некотором $\delta > 0$

$$h(t)\varphi_m(t) \geq \delta \int_0^t \varphi_m(r) dh(r), \quad 0 < t \leq 1/6. \quad (4.11)$$

Если $P > P_0(\delta, m)$, то для радиусов шаров, вне которых выполнена оценка (4.5), справедливы неравенства

$$\sum_{|x_k| < 1 - (\delta P)^{-1}} h\left(\frac{r_k}{1 - |x_k|}\right) / h(|x_k|^{2\delta P}) < 1, \quad m = 2, \quad (4.12)$$

$$\sum_{|x_k| < 1 - (\delta P)^{-1/(m-1)}} h\left(\frac{r_k}{1 - |x_k|}\right) / h\left(\frac{|x_k|}{1 - |x_k|} \cdot \left(\frac{1}{\delta P(1 - |x_k|)}\right)^{\frac{1}{m-2}}\right) < 1, \quad m > 2, \quad (4.13)$$

$$\sum_{\substack{|x_k| \geq 1 - (\delta P)^{-1/(m-1)} \\ r_k < (1 - |x_k|)/6}} (1 - |x_k|)^{m-1} h\left(\frac{r_k}{1 - |x_k|}\right) < \frac{1}{6^{m-2}\delta P} h\left(\frac{1}{6}\right) \varphi_m\left(\frac{1}{6}\right), \quad m \geq 2, \quad (4.14)$$

$$\sum_{\substack{|x_k| \geq 1 - (\delta P)^{-1/(m-1)} \\ r_k \geq (1 - |x_k|)/6}} r_k^{m-1} < \frac{1}{P}, \quad m \geq 2. \quad (4.15)$$

Нетрудно показать, что теоремы 4.2, 4.3 следуют из теоремы 4.5, причем в усиленном виде, если взять $h(t) = t^{m-1}$. При этом неравенство (4.14) переходит в (4.15). Но если выбрать $h(t)$ ближе к “критической” функции, при которой интеграл в (4.6) расходится, то получится еще более содержательное утверждение. В этом случае оценки (4.8), (4.9) и (4.12)–(4.14) радиусов “малых” шаров становятся еще более точными.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Пусть задано $\varepsilon \in (0, 1]$. Тогда для каждого $P > P_0(\varepsilon, m)$ найдется система шаров $B^k(x_k, r_k)$, вне которых имеет место оценка (4.5) и при $r_P = 1 - (\varepsilon P)^{-1/(m-1)}$ справедливы неравенства

$$\sum_{|x_k| < r_P} \left[\ln \frac{1}{|x_k|} / \ln \frac{1 - |x_k|}{r_k} \right]^{1+\varepsilon} < \left(\frac{1}{\varepsilon P} \right)^{1+\varepsilon}, \quad m = 2, \quad (4.16)$$

$$\sum_{|x_k| < r_P} \left(\frac{r_k}{|x_k|} \right)^{m-2+\varepsilon} (1 - |x_k|)^{\frac{m-2+\varepsilon}{m-2}} < \left(\frac{1}{\varepsilon P} \right)^{\frac{m-2+\varepsilon}{m-2}}, \quad m > 2, \quad (4.17)$$

$$\sum_{|x_k| \geq r_P} r_k^{m-1} < \frac{1}{P}, \quad m \geq 2. \quad (4.18)$$

Из следствия 4.1 выводится следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Пусть задано $\varepsilon \in (0, 1]$. Тогда для каждого $P > P_0(\varepsilon, m)$ найдется система шаров $B^k(x_k, r_k)$, вне которых имеет место оценка (4.5)

и при $r_P = 1 - (\varepsilon P)^{-1/(m-1)}$ справедливы неравенства

$$\sum_{B^k \cap B_r \neq \emptyset} \ln^{-(1+\varepsilon)} \frac{1 - |x_k|}{r_k} < \ln^{-(1+\varepsilon)} \frac{1}{r^{\varepsilon P}}, \quad 0 < r \leq r_P, \quad m = 2, \quad (4.19)$$

$$\sum_{B^k \cap B_r \neq \emptyset} \left(\frac{r_k}{|x_k|} \right)^{m-2+\varepsilon} < \left(\frac{1}{\varepsilon P(1-r)} \right)^{\frac{m-2+\varepsilon}{m-2}}, \quad 0 < r \leq r_P, \quad m > 2, \quad (4.20)$$

$$\sum_{B^k \cap B_{r_P} = \emptyset} r_k^{m-1} < \frac{1}{P}, \quad m \geq 2. \quad (4.21)$$

Заметим, что система шаров B^k в следствии 4.2 зависит только от P , но не от r . Если значение r увеличивается в пределах от 0 до r_P , то в суммы из неравенств (4.19), (4.20) просто подключаются новые шары, входящие в эту систему.

Покажем, как из следствия 4.2 выводится теорема 4.2. Функция $\phi(t) = \exp(-t^{-1/2})$, обратная к функции $\ln^{-2} \frac{1}{t}$, выпукла при $0 < t \leq 1/9$. Применяя ϕ к обеим частям неравенства (4.19) с $\varepsilon = 1$, получим (очень грубую) оценку

$$\sum_{B^k \cap B_r \neq \emptyset} \frac{r_k}{1 - |x_k|} < r^P, \quad 0 < r < 1 - \frac{d}{P}, \quad (4.22)$$

где константа $d > 1$ выбрана таким образом, что $(1 - d/P)^P < 1/9$. Покажем, что в сумму из (4.22) входят лишь те круги $B^k(x_k, r_k)$, для которых $|x_k| < \sqrt{r}$. Действительно, если $|x_k| \geq \sqrt{r}$ и $B^k \cap B_r \neq \emptyset$, то в силу (4.22) получим

$$|x_k| - r_k > |x_k| - r^P(1 - |x_k|) \geq \sqrt{r} - r^P(1 - \sqrt{r}) = r + (1 - \sqrt{r})(\sqrt{r} - r^P) > r,$$

т.е. $B^k \cap B_r = \emptyset$, и мы пришли к противоречию. Разобьем круг $B_{\sqrt{r}}$ на кольца $G^i = \{r^{2^i} \leq |x| < r^{2^{i+1}}\}$, $i = 0, 1, \dots$. В силу (4.22)

$$\sum r_k < r^{2^{i-1}P}(1 - r^{2^i}) =: a_i, \quad \text{где } k: x_k \in G^i, \quad B^k \cap B_r \neq \emptyset, \quad i = 0, 1, \dots$$

Поскольку

$$\frac{a_{i+1}}{a_i} = r^{2^{i-1}P}(1 + r^{2^i}) < 2 \left(1 - \frac{d}{P}\right)^{P/2} < 2e^{-d/2} =: q$$

(последнее неравенство следует из возрастания функции $(1 - t^{-1})^t$ при $t > 1$), то $a_{i+1} < qa_i$. Поэтому

$$\sum_{B^k \cap B_r \neq \emptyset} r_k < \sum_{i=1}^{\infty} a_i < \frac{a_0}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} r^{P/2}(1 - r) < r^{P/d}(1 - r),$$

если абсолютная постоянная d выбрана достаточно большой. Полагая $P' = P/d$, придем к теореме 4.2 с константой $A' = Ad$ в (4.4) вместо A .

При $\varepsilon = 1$ из оценки (4.20) следует неравенство

$$\sum_{B^k \cap B_r \neq \emptyset} r_k^{m-1} < \left(\frac{1}{P(1-r)} \right)^{\frac{m-1}{m-2}}. \quad (4.23)$$

Если зафиксировать $r < 1$, то с ростом P правая часть в (4.23) будет убывать как $P^{-\frac{m-1}{m-2}}$, т.е. быстрее, чем P^{-1} . Поэтому следствие 4.2 улучшает теорему 4.3. С другой стороны, мы покажем (теорема 4.6), что во всем шаре B_1 оценка исключительного множества, полученная в теореме 4.3, является точной.

Таким образом, следствие 4.2 не только содержит теоремы 4.2, 4.3, но и несет дополнительную информацию о размерах исключительного множества.

Обсудим теперь точность теоремы 4.4.

ТЕОРЕМА 4.6. *Предположим, что измеряющая функция $h(t)$ удовлетворяет условию (4.6), а также условию (1.1) при $m > 2$ и условию*

$$h(\tau_1)\tau_1^{-2} \geq \tau_2^{2-\beta}h(\tau_2)\tau_2^{-2}, \quad 0 < \tau_1 \leq \tau_2 \leq r_0, \quad \beta > 0, \quad (4.24)$$

при $m = 2$. Для каждого $P > P_0$ найдутся множество E и супергармоническая функция u такие, что

$$u(x) > aPT_u(1) \quad \forall x \in E, \quad (4.25)$$

и для любого покрытия множества E шарами $B^k(x_k, r_k)$ с $r_k < 1/10$ справедливы неравенства

$$\sum_{x_k \in G_P} h\left(\frac{r_k}{1-|x_k|}\right) / h(t(x_k, P)) > 1, \quad (4.26)$$

$$\sum_k r_k^{m-1} > \frac{1}{P}, \quad m \geq 2. \quad (4.27)$$

При этом константа P_0 зависит только от h и m , а положительная постоянная a — только от m и b при $m > 2$ и только от β при $m = 2$.

Таким образом, вне исключительного множества, размеры которого ограничены неравенством (4.8), оценка (4.5) функции u является наилучшей. (Речь может идти лишь об уточнении постоянной A .) Покажем, что и следствие 4.1 является в этом смысле точным.

СЛЕДСТВИЕ 4.3. *Пусть задано $\varepsilon \in (0, 1]$. Для каждого $P > P_0(m, \varepsilon)$ найдутся множество E и супергармоническая функция u такие, что имеет место оценка (4.25) с $a = a(m)$ и, кроме того, для любого покрытия множества E шарами $B^k(x_k, r_k)$ с $r_k < 1/10$ справедливы неравенства*

$$\sum_{|x_k| < r_P} \left[\ln \frac{1}{|x_k|} / \ln \frac{1-|x_k|}{r_k} \right]^{1+\varepsilon} > \left(\frac{1}{\varepsilon P} \right)^{1+\varepsilon}, \quad m = 2, \quad (4.28)$$

$$\sum_{|x_k| < r_P} \left(\frac{r_k}{|x_k|} \right)^{m-2+\varepsilon} (1-|x_k|)^{\frac{m-2+\varepsilon}{m-2}} > \left(\frac{1}{\varepsilon P} \right)^{\frac{m-2+\varepsilon}{m-2}}, \quad m > 2, \quad (4.29)$$

и неравенство (4.27) (здесь $r_P = 1 - (\varepsilon P)^{-1/(m-1)}$).

Перейдем к доказательству приведенных результатов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.4. Обозначим через $P_0(h)$ такое число, что при $P > P_0(h)$ будет $B_{1/5} \subset G_P$. В дальнейшем важную роль будет играть ядро $\mathcal{K}(x, y)$ (иногда называемое *ядром Мартина*):

$$\mathcal{K}(x, y) = \begin{cases} \frac{g(x, y, 1)}{g(0, y, 1)}, & x, y \in B_1, \\ (1 - |x|^2)|x - y|^{-m}, & x \in B_1, \quad y \in S_1. \end{cases} \quad (4.30)$$

Из теорем о представлении субгармонических функций следует, что для каждой δ -субгармонической функции u ограниченного вида найдется мера η со следующими свойствами:

$$\text{supp } \eta \subseteq \bar{B}_1, \quad \eta(\bar{B}_1) = \eta(\mathbb{R}^m) = T_u(1), \quad u(x) \leq \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{K}(x, y) d\eta(y) \quad (4.31)$$

(подробнее см. [5]). Однако непосредственно применить метод, использованный в §2 при доказательстве теоремы А, мешает то обстоятельство, что ядро $\mathcal{K}(x, y)$ не является функцией вида $K(|x - y|)$. Тем не менее мы сможем использовать этот метод, если для каждого $x \in B_1$ мажорируем ядро $\mathcal{K}(x, y)$ функцией $K_x(|x - y|)$ (аналогичный подход применялся и в [5], но имеющихся там оценок недостаточно). Нужные оценки дают леммы 4.1 и 4.2.

ЛЕММА 4.1. *Справедливы неравенства*

$$\mathcal{K}(x, y) \leq \begin{cases} d_1 \ln \frac{1 - |x|}{|x - y|} / \ln \frac{1}{|x| + |x - y|}, \\ \quad |x| < \frac{1}{5}, \quad |x - y| < \frac{1}{6}(1 - |x|), \quad m = 2, \\ \frac{d_2}{1 - |x|} \ln \frac{1 - |x|}{|x - y|} \\ \quad \forall x \in B_1, \quad |x - y| < \frac{1}{6}(1 - |x|), \quad m = 2, \\ \frac{d_3}{1 - |x|} \left(\frac{|x| + |y - x|}{|x - y|} \right)^{m-2} \\ \quad \forall x \in B_1, \quad |x - y| < \frac{1}{2}(1 - |x|), \quad m > 2, \\ d_4 \frac{1 - |x|}{|x - y|^m} \\ \quad \forall x \in B_1, \quad \forall y \in \bar{B}_1, \quad m \geq 2, \end{cases} \quad (4.32)$$

где d_1, d_2 – абсолютные постоянные, а d_3, d_4 зависят только от m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для функции Грина

$$g(x, y, 1) = \begin{cases} \ln \left| \frac{1 - \bar{x}y}{x - y} \right|, & m = 2, \\ |x - y|^{2-m} - (|y| |x - y|^{-2})^{2-m}, & m > 2, \end{cases} \quad (4.33)$$

справедливы соотношения

$$\begin{aligned} g(x, y, 1) &= \frac{1}{2} \ln \left[1 + \frac{(1 - |x|^2)(1 - |y|^2)}{|x - y|^2} \right], \quad m = 2, \\ \frac{1}{2} &\leq g(x, y, 1) / \frac{(1 - |x|^2)(1 - |y|^2)}{|x - y|^{m-2}(|y| |x - y|^{-2})^2} \leq m - 2, \quad m > 2 \end{aligned} \quad (4.34)$$

(мы опускаем элементарные выкладки). Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(x, y) &= \frac{1}{2} \ln \left[1 + \frac{(1 - |x|^2)(1 - |y|^2)}{|x - y|^2} \right] \bigg/ \ln \frac{1}{|y|}, \quad m = 2, \\ \frac{1}{2(m - 2)} &\leq \mathcal{K}(x, y) \bigg/ \frac{(1 - |x|^2)|y|^{m-2}}{|x - y|^{m-2}(|y| |x - y|^{-2})^2} \leq 2(m - 2), \quad m > 2. \end{aligned} \quad (4.35)$$

При $|x - y| < \frac{1}{6}(1 - |x|)$ имеем $|1 - \bar{x}y| = |1 - \bar{x}(x + (y - x))| < 1 - |x|^2 + |y - x| < \frac{13}{6}(1 - |x|)$. Отсюда и из (4.33) следуют первые два неравенства в (4.32). Оценка $\ln \frac{1}{r} > \ln(1 + (1 - r)) \geq (1 - r) \ln 2$ и равенство в (4.35) приводят к последнему соотношению в (4.32) при $m = 2$.

Рассмотрим случай $m > 2$. Учитывая, что при $|x - y| < 1 - |x|$ будет $|y| < 1$, имеем $|y| |x - y|^{-2} \geq 1 - |x| |y| > 1 - |x|$. Отсюда и из (4.35) получаем третье неравенство в (4.32). Наконец, четвертое неравенство в (4.32) также вытекает из (4.35), если воспользоваться оценкой $|y| |x - y|^{-2} > |x - y|$.

ЛЕММА 4.2. *Для любого $x \in B_1$ существует непрерывная убывающая функция $K_x(t)$ такая, что $\mathcal{K}(x, y) \leq K_x(|x - y|)$ и*

$$K_x(t) \leq \begin{cases} d_1 \ln \frac{1 - |x|}{t} \bigg/ \ln \frac{1}{|x| + t}, & |x| < \frac{1}{5}, \quad t < \frac{1}{6}(1 - |x|), \quad m = 2, \\ \frac{d_2}{1 - |x|} \ln \frac{1 - |x|}{t}, & |x| \geq \frac{1}{5}, \quad t < \frac{1}{6}(1 - |x|), \quad m = 2, \\ \frac{d'_3}{1 - |x|} \left(\frac{|x| + t}{t} \right)^{m-2} & \forall x \in B_1, \quad t < \frac{1}{6}(1 - |x|), \quad m > 2, \\ d'_4 \frac{1 - |x|}{t^m} & \forall x \in B_1, \quad t \geq \frac{1}{6}(1 - |x|), \quad m \geq 2, \end{cases} \quad (4.36)$$

где d_1, d_2 — абсолютные постоянные, а d'_3, d'_4 зависят только от m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Установим вначале, что при $|x| < \frac{1}{5}$ функция

$$f_x(t) = \ln \frac{1 - |x|}{t} \bigg/ \ln \frac{1}{|x| + t}$$

убывает на интервале $(0, \frac{1}{6}(1 - |x|))$. Действительно,

$$\begin{aligned} f'_x(t) &= \left(\frac{1}{|x| + t} \ln \frac{1 - |x|}{t} - \frac{1}{t} \ln \frac{1}{|x| + t} \right) \ln^{-2} \frac{1}{|x| + t} \\ &< \left[t \ln \frac{1}{t} - (|x| + t) \ln \frac{1}{|x| + t} \right] \frac{1}{t(|x| + t)} \ln^{-2} \frac{1}{|x| + t} < 0 \end{aligned}$$

(в последнем неравенстве мы воспользовались тем, что функция $-\tau \ln \tau$ возрастает при $0 < \tau \leq \frac{1}{e}$ и $|x| + t < |x| + \frac{1}{6}(1 - |x|) = \frac{1}{6} + \frac{5}{6}|x| < \frac{1}{3} < \frac{1}{e}$). Существование функции $K_x(t)$ с нужными свойствами следует теперь из леммы 4.1.

Продолжим доказательство теоремы 4.4. Назовем точку $x \in G_P$ *нормальной* (относительно η), если неравенство

$$\eta(B(x, r)) \leq \frac{A_m T_u(1)}{h(t(x, P))} h\left(\frac{r}{1 - |x|}\right), \quad m \geq 2, \quad (4.37)$$

выполняется $\forall r \in (0, t(x, P)(1 - |x|))$. Здесь, как и в теореме А, $A_m > 1$ – константа из леммы Безиковича–Ландкофа. Точку $x \in B_1 \setminus G_P$ назовем *нормальной*, если для всех r из указанных ниже интервалов выполнены неравенства

$$\eta(B(x, r)) \leq \begin{cases} A_m P T_u(1)(1 - |x|)^{m-1} h\left(\frac{r}{1-|x|}\right) / \int_0^{1/6} \varphi_m(t) dh(t), & 0 < r < \frac{1}{6}(1 - |x|), \\ 6^{m-1} A_m P T_u(1) r^{m-1}, & r = \frac{1}{6}(1 - |x|), \\ 6^{m-1} A_m P T_u(1) r^{m-1}, & \frac{1}{6}(1 - |x|) < r \leq P^{-\frac{1}{m-1}} \end{cases} \quad (4.38)$$

(если $1 - |x| \geq 6P^{-1/(m-1)}$, то третий случай отсутствует).

Оценим функцию $u(x)$ в нормальных точках. Величины, стоящие в правых частях соотношений (4.37), (4.38), являются возрастающими функциями переменной r , причем на правых концах областей определения эти функции превосходят $T_u(1) = \eta(\mathbb{R}^m)$. Отсюда и из (4.37)

$$\begin{aligned} u(x) &\leq \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{K}(x, y) d\eta(y) \\ &\leq \frac{A_m T_u(1)}{h(t(x, P))} \int_0^{t(x, P)(1-|x|)} K_x(t) dh\left(\frac{t}{1-|x|}\right), \quad x \in G_P. \end{aligned} \quad (4.39)$$

При $|x| < 1/5$, $x \in G_P$, $m = 2$ из (4.39) и (4.36) выводим

$$\begin{aligned} u(x) &\leq \frac{d_1 A_m T_u(1)}{-h(t(x, P)) \ln(|x| + t(x, P)(1 - |x|))} \int_0^{t(x, P)(1-|x|)} \ln \frac{1 - |x|}{t} dh\left(\frac{t}{1 - |x|}\right) \\ &= d_1 A_m T_u(1) P \end{aligned}$$

(мы воспользовались равенством (4.7) при $t = t(x, P)$ и тем, что $v_x(t(x, P), P) = 1$).

При $|x| \geq 1/5$, $x \in G_P$, $m = 2$ из (4.39), (4.36), (4.7) получим

$$u(x) \leq \frac{d_2 A_m T_u(1)}{h(t(x, P))(1 - |x|)} \int_0^{t(x, P)(1-|x|)} \ln \frac{1 - |x|}{t} dh\left(\frac{t}{1 - |x|}\right) < 5d_2 A_m T_u(1) P.$$

При $x \in G_P$, $m > 2$ из (4.39), (4.36), (4.7) выводим

$$\begin{aligned} u(x) &< \frac{d'_3 A_m T_u(1)}{h(t(x, P))(1 - |x|)} \int_0^{t(x, P)(1-|x|)} \left(\frac{|x| + t}{t}\right)^{m-2} dh\left(\frac{t}{1 - |x|}\right) \\ &< \frac{d'_3 A_m T_u(1)(|x| + t(x, P)(1 - |x|))^{m-2}}{h(t(x, P))(1 - |x|)^{m-1}} \int_0^{t(x, P)} r^{2-m} dh(r) = d'_3 A_m T_u(1) P. \end{aligned}$$

Пусть $x \notin G_P$, $m = 2$. Тогда $|x| \geq 1/5$. Применяя (4.36), (4.38), получим

$$\begin{aligned} u(x) &< A_m P T_u(1) \left[d_2 \int_0^{(1-|x|)/6} \ln \frac{1 - |x|}{t} dh\left(\frac{t}{1 - |x|}\right) / \int_0^{1/6} \ln \frac{1}{t} dh(t) + 6^2 d'_4 \right] \\ &\quad + 6 A_m P T_u(1) d'_4 (1 - |x|) \int_{(1-|x|/6)}^{P^{-1}} t^{-2} dt < A P T_u(1), \end{aligned}$$

где A – абсолютная постоянная.

Осталось рассмотреть случай $x \notin G_P$, $m > 2$. Имеем

$$\begin{aligned} u(x) &< A_m P T_u(1) \left[d'_3 (1 - |x|)^{m-2} \right. \\ &\quad \times \int_0^{(1-|x|)/6} \left(\frac{|x|+t}{t} \right)^{m-2} dh \left(\frac{t}{1-|x|} \right) / \int_0^{1/6} t^{2-m} dh(t) + 6^m d'_4 \Big] \\ &\quad + 6^{m-1} A_m P T_u(1) d'_4 (1 - |x|) \int_{(1-|x|)/6}^{P^{-1/(m-1)}} t^{-m} dt^{m-1} < A P T_u(1), \\ &\quad A = A(m). \end{aligned}$$

Итак, в каждой нормальной точке $x \in B_1$ имеет место оценка

$$u(x) < A P T_u(1), \quad A = A(m).$$

Обозначим через E множество точек, не являющихся нормальными. Тогда для каждой точки $x \in E$ существует значение $r(x) \in (0, 1)$ такое, что при $r = r(x)$ в (4.37), (4.38) выполняются противоположные неравенства. Мы получаем покрытие множества E шарами. По лемме Безикевича–Ландкофа [9, с. 2–6], [2, с. 246] можно выделить не более чем счетное подпокрытие множества E шарами $B^k(x_k, r_k)$, причем кратность этого подпокрытия будет не более чем A_m . Подставим в неравенства, обратные неравенствам (4.37), (4.38), $r = r_k$, $x = x_k$ и просуммируем по k . Учитывая, что

$$\sum_k \eta(B(x_k, r_k)) \leq A_m \eta(\mathbb{R}^m) = A_m T_u(1),$$

придем к оценкам (4.8)–(4.10). Теорема 4.4 доказана.

ЛЕММА 4.3. Пусть измеряющая функция h удовлетворяет условиям теоремы 4.5 и $d_m = 4$ при $m = 2$, $d_m = 6^{\frac{m-2}{m-1}}$, $m > 2$. Тогда

$$\begin{aligned} G'_P &:= \{x: |x| < 1 - d_m(\delta P)^{-1/(m-1)}\} \subset G_P, \quad m \geq 2, \\ t(x, P) &< |x|^{\delta P/2} \quad \text{при} \quad \delta P > 8, \quad x \in G'_P, \quad m = 2, \quad (4.40) \\ t(x, P) &\leq \frac{|x|}{1-|x|} \left\{ [\delta P(1-|x|)]^{1/(m-2)} - 1 \right\}^{-1} \leq \frac{6}{5} \frac{|x|}{1-|x|} [\delta P(1-|x|)]^{-1/(m-2)} \\ &\quad \text{при} \quad \delta P > 6^{m-2}, \quad x \in G'_P, \quad m > 2. \quad (4.41) \end{aligned}$$

С другой стороны, если

$$h(t)\varphi_m(t) \leq \delta_1 \int_0^t \varphi_m(r) dh(r), \quad 0 < t \leq 1/6, \quad (4.42)$$

и $\delta_1 P > P_0$ (P_0 – абсолютная постоянная), то

$$G_P \subset G''_P := \{x: |x| < 1 - (\delta_1 P)^{-1/(m-1)}\}, \quad m \geq 2.$$

Заметим, что условие (4.42) выполнено всегда с $\delta_1 = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4.3. При $m = 2$ из (4.7), (4.11) выводим

$$v_x(t, P) \geq \delta P \ln \frac{1}{|x| + t(1 - |x|)} \bigg/ \ln \frac{1}{t}. \quad (4.43)$$

Предположим, что при некотором $x \neq 0$ уравнение

$$\delta P \ln \frac{1}{|x| + t(1 - |x|)} \bigg/ \ln \frac{1}{t} = 1 \quad (4.44)$$

имеет решение на интервале $(0, 1/6)$ и $\tau(x)$ – наименьшее из этих решений. Тогда $v_x(\tau(x), P) \geq 1$. Поскольку $v_x(t, P) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0+$ (см. (4.7)), то на промежутке $(0, \tau(x)]$ существует хотя бы одно решение уравнения $v_x(t, P) = 1$, т.е. $x \in G_P$. Так как $t(x, P)$ – наименьшее из этих решений, то $t(x, P) \leq \tau(x)$. Перепишем (4.44) в виде

$$[|x| + \tau(x)(1 - |x|)]^{\delta P} = \tau(x)$$

и покажем, что задача сводится к доказательству неравенства

$$(r + r^{\delta P/2}(1 - r))^{\delta P} < r^{\delta P/2}, \quad 0 < r < 1 - \frac{4}{\delta P}, \quad \delta P \geq 8. \quad (4.45)$$

Заметим вначале, что

$$r^{\delta P/2} < \left(1 - \frac{4}{\delta P}\right)^{\delta P/2} < e^{-2} \quad \text{при} \quad 0 < r < 1 - \frac{4}{\delta P}, \quad \delta P > 4 \quad (4.46)$$

(мы воспользовались тем, что функция $f(t) := (1 - t^{-1})^t$ возрастает при $t > 1$ и $f(t) \rightarrow e^{-1}$ при $t \rightarrow \infty$). Неравенство (4.45) означает, что

$$(|x| + \tau(1 - |x|))^{\delta P} < \tau, \quad \text{где} \quad \delta P \geq 8, \quad \tau = |x|^{\delta P/2}, \quad |x| < 1 - \frac{4}{\delta P}.$$

Поскольку при $\tau \rightarrow 0+$ левая часть неравенства стремится к $|x|^{\delta P} > 0$, а правая – к 0, то существует значение $\tau = \tau(x) < |x|^{\delta P/2} < e^{-2} < 1/6$ (см. (4.46)), при котором достигается равенство. Таким образом, из неравенства (4.45) вытекает и существование решения уравнения (4.44), и нужная оценка для $t(x, P)$. Для доказательства неравенства (4.45) рассмотрим два случая.

1. $r \leq (e - 1)^{-2}$. Тогда $r + r^{\delta P/2}(1 - r) < r + r^{\delta P/2} < r + r^2 < r^{1/2}$, откуда и следует (4.45).

2. $(e - 1)^{-2} < r < 1 - 4(\delta P)^{-1}$. Применяя (4.46), получим

$$r + r^{\delta P/2}(1 - r) < r + e^{-2}(1 - r) = \sqrt{r} - (1 - \sqrt{r})[\sqrt{r}(1 - e^{-2}) - e^{-2}] < \sqrt{r},$$

так как $\sqrt{r}(1 - e^{-2}) - e^{-2} > (e - 1)^{-1}(1 - e^{-2}) - e^{-2} > 0$.

Итак, неравенство (4.45) установлено, а вместе с ним доказана и первая часть леммы 4.3 при $m = 2$.

При $m > 2$ из (4.7) и (4.11) получаем

$$v_x(t, P) \geq \delta P(1 - |x|)^{m-1}(|x| + t(1 - |x|))^{2-m} t^{m-2}.$$

Приравнивая правую часть к 1 и обозначая через $\tau(x)$ решение полученного уравнения, имеем

$$\tau(x) = \frac{|x|}{1 - |x|} \left\{ [\delta P(1 - |x|)]^{1/(m-2)} - 1 \right\}^{-1}.$$

При $x \in G'_P$ будет $\delta P > 6^{m-2}(1 - |x|)^{1-m}$, откуда $0 < \tau(x) < |x|/(5 + |x|) \leq 1/6$. Поскольку $v_x(\tau(x), P) \geq 1$ и $v_x(t, P) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0+$, то опять приходим к тому, что $x \in G_P$ и $t(x, P) \leq \tau(x)$. Из оценки $[\delta P(1 - |x|)]^{1/(m-2)} > 6(1 - |x|)^{-1} > 6$ следует второе неравенство в (4.41).

Далее, при $m = 2$ из (4.7) и (4.42) выводим

$$v_x(t, P) \leq \delta_1 P \ln \frac{1}{|x| + t(1 - |x|)} \bigg/ \ln \frac{1}{t} < \frac{1}{\ln 6} \cdot \frac{\delta_1 P(1 - |x|)}{|x| + t(1 - |x|)}, \quad 0 < t < \frac{1}{6}.$$

Если $|x| \geq 1 - (\delta_1 P)^{-1}$ и P достаточно велико, то $v_x(t, P) < 1$ при $0 < t < 1/6$ и, следовательно, $x \notin G_P$. Случай $m > 2$ рассматривается аналогично, и мы опускаем подробности. Лемма 4.3 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.5. Будем считать число $P_0(\delta, m)$ настолько большим, что $B_{1/5} \subset G'_P$ при $P > P_0(\delta, m)$. Построим множество исключительных шаров B^k , дословно повторяя рассуждение из доказательства теоремы 4.4 с той лишь разницей, что вместо G_P возьмем G'_P . Поскольку $G'_P \subset G_P$, то проходят все имеющиеся там оценки, и мы получаем неравенства (4.8)–(4.10), в которых вместо G_P будет G'_P . Положим $A' = 4A$, $P' = P/4$ при $m = 2$; $A' = 6^{m-2}A$, $P' = 6^{2-m}P$ при $m > 2$. Тогда $x \in G'_P \Leftrightarrow |x| < 1 - (\delta P')^{-1/(m-1)}$. Из (4.8) и (4.40) получается (4.12), а из (4.8) и (4.41) следует (4.13) с P' вместо P . Неравенство (4.14) (с P' вместо P) вытекает из (4.9) и (4.11), а (4.15) – из (4.10). Тем самым теорема 4.5 доказана (с иной константой A , чем в теореме 4.4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 4.1. Возьмем

$$h(t) = \begin{cases} \ln^{-(1+\varepsilon)} \frac{1}{t}, & m = 2, \\ t^{m-2+\varepsilon}, & m > 2. \end{cases} \quad (4.47)$$

Нетрудно убедиться, что в (4.11) будет иметь место равенство с $\delta = \varepsilon/(1 + \varepsilon)$ при $m = 2$ и с $\delta = \varepsilon/(m - 2 + \varepsilon)$ при $m > 2$. Положим $P' = P/(1 + \varepsilon)$, $m = 2$, и $P' = P/(m - 2 + \varepsilon)$, $m > 2$. Тогда нужное утверждение сразу следует из теоремы 4.5, если в качестве новой константы A' в (4.5) взять величину mA .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 4.2. Пусть заданы числа $\varepsilon \in (0, 1]$ и $P > P_0(\varepsilon, m)$, где $P_0(\varepsilon, m)$ – число из следствия 4.1. Положим $P' = 2^{m-1}P$. Для чисел P и P' возьмем две системы, C_P и $C_{P'}$, шаров, существование которых утверждается в следствии 4.1. Из $C_{P'}$ выберем такие шары $B^k(x_k, r_k)$, что $B^k \cap B_{r_P} \neq \emptyset$, а из C_P – шары B^k , для которых $B^k \cap B_{r_P} = \emptyset$. Покажем, что объединение C выбранных шаров образует искомую систему. Прежде всего отметим, что вне C имеет место оценка (4.5) с постоянной $2^{m-1}A$ вместо A . Оценим радиусы выбранных шаров. С этой целью покажем, что с шаром B_r , $0 < r \leq r_P$, пересекаются

лишь те шары $B^k(x_k, r_k)$ из $C_{P'}$, для которых $|x_k| < \sqrt{r}$. Заметим вначале, что $\sqrt{r} < r_{P'} := 1 - (\varepsilon P')^{-1/(m-1)}$. Действительно,

$$\sqrt{r} = 1 - \frac{1-r}{1+\sqrt{r}} < 1 - \frac{1-r_P}{2} = 1 - \frac{1}{2}(\varepsilon P)^{-1/(m-1)} = r_{P'}.$$

Возьмем некоторый шар B^k , для которого $\sqrt{r} \leq |x_k| < r_{P'}$. Оставляя в сумме из (4.16) лишь одно слагаемое, получим $r_k/(1 - |x_k|) < |x_k|^{\varepsilon P'}$. Отсюда при $\varepsilon P' > 1$ имеем

$$|x_k| - r_k > |x_k| - |x_k|^{\varepsilon P'}(1 - |x_k|) > |x_k|^2 \geq r.$$

В случае $m > 2$, $\sqrt{r} \leq |x_k| < r_{P'}$ аналогичным образом воспользуемся оценкой (4.17): $r_k/|x_k| < [\varepsilon P'(1 - |x_k|)]^{-1/(m-2)}$. Так как $\varepsilon P' > (1 - |x_k|)^{1-m}$, то

$$|x_k| - r_k > |x_k| \left\{ 1 - [\varepsilon P'(1 - |x_k|)]^{-1/(m-2)} \right\} > |x_k| \{1 - (1 - |x_k|)\} = |x_k|^2 \geq r.$$

Рассмотрим случай $m \geq 2$, $r_{P'} \leq |x_k|$. Из (4.18) выводим $r_k < (P')^{-1/(m-1)}$. Поэтому

$$\begin{aligned} |x_k| - r_k &> r_{P'} - (P')^{-1/(m-1)} = 1 - (\varepsilon P')^{-1/(m-1)} - (P')^{-1/(m-1)} \\ &\geq 1 - 2(\varepsilon P')^{-1/(m-1)} = 1 - (\varepsilon P)^{-1/(m-1)} = r_P \geq r. \end{aligned}$$

Таким образом, $B^k(x_k, r_k) \cap B_r = \emptyset$ при $m \geq 2$, $\sqrt{r} \leq |x_k|$, $0 < r \leq r_P$. Отсюда и из (4.16), (4.17) получаем

$$\begin{aligned} \sum_{B^k \cap B_r \neq \emptyset} \ln^{-(1+\varepsilon)} \frac{1 - |x_k|}{r_k} &\leq \sum_{|x_k| < \sqrt{r}} \ln^{-(1+\varepsilon)} \frac{1 - |x_k|}{r_k} < \left(\frac{1}{\varepsilon P'} \right)^{1+\varepsilon} \ln^{-(1+\varepsilon)} \frac{1}{\sqrt{r}} \\ &= \left(\frac{1}{\varepsilon P} \right)^{1+\varepsilon} \ln^{-(1+\varepsilon)} \frac{1}{r}, \quad 0 < r \leq r_P, \quad m = 2; \\ \sum_{B^k \cap B_r \neq \emptyset} \left(\frac{r_k}{|x_k|} \right)^{m-2+\varepsilon} &\leq \sum_{|x_k| < \sqrt{r}} \left(\frac{r_k}{|x_k|} \right)^{m-2+\varepsilon} < \left(\frac{1}{\varepsilon P'(1 - \sqrt{r})} \right)^{\frac{m-2+\varepsilon}{m-2}} \\ &< \left(\frac{1}{\varepsilon P(1 - r)} \right)^{\frac{m-2+\varepsilon}{m-2}}, \quad 0 < r \leq r_P, \quad m > 2. \end{aligned}$$

Итак, оценки (4.19) и (4.20) установлены. Применяя неравенство (4.18) для шаров B^k из C_P , получим

$$\sum_{B^k \cap B_{r_P} = \emptyset} r_k^{m-1} \leq \sum_{|x_k| \geq r_P} r_k^{m-1} < \frac{1}{P}, \quad m \geq 2,$$

и следствие 4.2 доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.6. Из (4.7) следует, что при достаточно больших P

$$d_5 \leq Ph(t(x, P)) \Big/ \int_0^{t(x, P)} \varphi_m(r) dh(r) \leq d_6, \quad \frac{1}{3} \leq |x| \leq \frac{2}{3}, \quad m \geq 2,$$

где d_5, d_6 зависят только от m . Выберем число $t_P > 0$ таким, что

$$Ph(t_P) \Big/ \int_0^{t_P} \varphi_m(r) dh(r) = d_6 Q^{-1},$$

где $Q \leq c_2$ при $m > 2$, $Q \leq Q_1$ при $m = 2$ (см. (2.2), (2.7)) и $0 < Q < 1$. Легко видеть, что $t_P > t(x, P)$ при $1/3 \leq |x| \leq 2/3$. Зафиксируем некоторое число $\mathcal{N} > 0$ и введем функцию

$$h_P(t) = d_6^{-1} Q \mathcal{N} Ph(t) \Big/ \int_0^{t_P} \varphi_m(r) dh(r).$$

Поскольку функция $h(t)$ удовлетворяет условиям (1.1) ($m > 2$) и (4.24) ($m = 2$), то тем же свойством обладает и $h_P(t)$. Кроме того, $h_P(t_P) = \mathcal{N}$. Поэтому можно применить теорему 2.1 в случае $m > 2$, и теорему 2.2 в случае $m = 2$ (см. пример 2.1). При этом вместо $h(t)$ в теоремах 2.1, 2.2 мы возьмем функцию $h_P(t)$, вместо r_0 — число t_P , вместо $K(t)$ — ядро $\varphi_m(t)$. Канторово множество G , существование которого утверждается в теоремах 2.1, 2.2, мы разместим в шаре B_1 так, чтобы центр множества G был в точке $(1/2, 0, \dots, 0)$, и обозначим это множество через E_1^P ; меру μ из теорем 2.1, 2.2 обозначим через μ^P . Положим $\mathbf{e} = (1, 0, \dots, 0)$,

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi_m(|x - y|) d\mu^P(y) + \mathcal{N} (1 - |x|^2) |x - \mathbf{e}|^{-m}, \quad m \geq 2 \quad (4.48)$$

(последнее слагаемое означает, что мера η из (4.31) имеет атом с зарядом $\mathcal{N}$ в точке $\mathbf{e}$). Определим теперь множество E . Пусть

$$E_2^P = \left\{ x \in B_1 : |x - \mathbf{e}| < 2(1 - |x|) \right\} \cap B(\mathbf{e}, d_7 P^{-1/(m-1)}),$$

где постоянная $d_7 = d_7(m) > 1$ подобрана так, что

$$M_{r^{m-1}}(E_2^P) \geq 1/P \quad (4.49)$$

(при достаточно больших P такая константа d_7 существует). Положим $E = E_1^P \cup E_2^P$. Покажем, что функция $u(x)$ и множество E — искомые. Учитывая, что последнее слагаемое в (4.48) является гармонической функцией в B_1 , выводим неравенство

$$T_u(1) = \lim_{r \rightarrow 1-} \frac{1}{\sigma_1 r^{m-1}} \int_{S_r} u(x) d\sigma_r(x) \leq d_8 \mathcal{N}, \quad d_8 = d_8(m), \quad m \geq 2.$$

Применяя (2.1) в случае $m > 2$ и (2.6) в случае $m = 2$, имеем

$$u(x) > d' \int_0^{t_P} \varphi_m(t) dh_P(t) = d'' P \mathcal{N} \geq a P T_u(1), \quad x \in E_1^P.$$

Из (4.48) сразу следует, что

$$u(x) > \mathcal{N}|x - \mathbf{e}|^{1-m}/2 \geq d_9 P \mathcal{N} \geq a P T_u(1), \quad x \in E_2^P, \quad d_9 = d_9(m),$$

если константа a достаточно мала. Таким образом, неравенство (4.25) проверено.

Оценим теперь размер множества E . Пусть задано некоторое покрытие множества E шарами $B^k(x_k, r_k)$. Заметим, что $\text{diam } E_1^P \rightarrow 0$ при $P \rightarrow \infty$. Будем считать число P_0 настолько большим, что $\text{diam } E_1^P < 2/15$ и $B_{2/3} \subset G_P$ при $P > P_0$. Поскольку $r_k < 1/10$, то при $B^k(x_k, r_k) \cap E_1^P \neq \emptyset$ будет $1/3 < |x_k| < 2/3$. Применяя (2.2) и (2.7) (при $m > 2$ и $m = 2$ соответственно), имеем

$$\begin{aligned} 1 &\leq (Q\mathcal{N})^{-1} M_{h_P}(E_1^P) = [Qh_P(t_P)]^{-1} M_{h_P}(E_1^P) = [Qh(t_P)]^{-1} M_h(E_1^P) \\ &\leq P \left(d_6 \int_0^{t_P} \varphi_m(r) dh(r) \right)^{-1} \sum_{1/3 < |x_k| < 2/3} h(r_k) \\ &< P \sum_{1/3 < |x_k| < 2/3} \left(d_6 \int_0^{t(x_k, P)} \varphi_m(r) dh(r) \right)^{-1} h(r_k) \\ &< \sum_{x_k \in G_P} h \left(\frac{r_k}{1 - |x_k|} \right) / h(t(x_k, P)), \end{aligned}$$

и неравенство (4.26) установлено. Справедливость оценки (4.27) сразу следует из (4.49). Теорема 4.6 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 4.3. Возьмем в качестве $h(t)$ функцию, определенную в (4.47). Нетрудно убедиться, что условие (4.24) выполняется с $\beta = 2$, а условие (1.1) с $b = 1$. Покажем, что функция u и множество E из теоремы 4.6 обладают нужными свойствами. Используя (4.42) с $\delta_1 = \varepsilon$, из (4.7) выводим

$$v_x(t, P) < \begin{cases} \varepsilon P \ln \frac{1}{|x|} / \ln \frac{1}{t}, & m = 2, \\ \varepsilon P (1 - |x|)^{m-1} (t/|x|)^{m-2}, & m > 2. \end{cases}$$

Учитывая, что $v_x(t(x, P), P) = 1$, имеем

$$h \left(\frac{r_k}{1 - |x_k|} \right) / h(t(x_k, P)) < \begin{cases} \left[\varepsilon P \ln \frac{1}{|x_k|} / \ln \frac{1 - |x_k|}{r_k} \right]^{1+\varepsilon}, & m = 2, \\ \left(\frac{r_k}{|x_k|} \right)^{m-2+\varepsilon} [\varepsilon P (1 - |x_k|)]^{\frac{m-2+\varepsilon}{m-2}}, & m > 2. \end{cases}$$

Суммируя по k : $x_k \in G_P$ и применяя (4.26), получим (4.28), (4.29), что нам и требовалось.

Результаты и методы данной работы могут применяться и для получения оценок δ -субгармонических функций с неограниченной характеристикой в шаре, а также для оценивания функций в $\mathbb{R}^m$. В частности, с помощью полученных здесь результатов можно улучшить некоторые теоремы из [16], [17].

Автор искренне благодарен профессорам П. Л. Ульянову, С. Я. Хавинсону и М. И. Дьяченко за полезное обсуждение работы, способствовавшее ее улучшению.

Список литературы

1. Ландкоф Н. С. Емкости и меры Хаусдорфа. Оценки потенциалов // УМН. 1965. Т. 20. № 2. С. 189–195.
2. Ландкоф Н. С. Основы современной теории потенциала. М.: Наука, 1966.
3. Гришин А. Ф. О регулярности роста субгармонических функций // Теория функций, функц. анализ и их прилож. (Харьков) 1968. № 6. С. 3–29; 1968. № 7. С. 59–84; 1969. № 8. С. 126–135.
4. Говоров Н. В. Об оценке снизу функции, субгармонической в круге // Теория функций, функц. анализ и их прилож. (Харьков) 1968. № 6. С. 130–150.
5. Кудина Л. С. Оценки для функций, представимых в виде разности субгармонических в шаре // Теория функций, функц. анализ и их прилож. (Харьков) 1971. № 14. С. 59–67.
6. Hayman W. K. Questions of regularity connected with the Phragmén–Lindelöf principle // J. math. pures et appl. 1956. V. 32. № 2. P. 115–126.
7. Карлесон Л. Избранные проблемы теории исключительных множеств. М.: Мир, 1971.
8. Эйдерман В. Я. О сравнении меры Хаусдорфа и емкости // Алгебра и анализ. 1991. Т. 3. № 6. С. 173–188.
9. de Guzmán M. Differentiation of integrals in $\mathbb{R}^n$ // Lect. Notes in Math. V. 481. Berlin–Heidelberg–N. Y.: Springer-Verlag, 1975.
10. Ерохин В. Связь между метрической размерностью и гармонической емкостью // УМН. 1958. Т. 13. № 6. С. 81–88.
11. Нетрусов Ю. В. Оценки емкостей, связанных с пространствами Бесова // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1992. Т. 201. С. 124–156.
12. Хейман У., Кеннеди П. Субгармонические функции. Т. 1. М.: Мир, 1980.
13. Чеботарев Н. Г., Мейман Н. Н. Проблема Рауса–Гурвица для полиномов и целых функций // Тр. матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1949. Т. 26. С. 1–331.
14. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М.: ГИТТЛ, 1956.
15. Мейман Н. Н. Об оценке сверху потенциала плоского электростатического поля // ДАН СССР. 1972. Т. 202. № 6. С. 1268–1270.
16. Эйдерман В. Я. Об исключительном множестве в асимптотических оценках субгармонических функций // Сиб. матем. журн. 1988. Т. 29. № 6. С. 185–196.
17. Эйдерман В. Я. Метрические характеристики исключительных множеств, возникающих в оценках субгармонических функций // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 10. С. 145–160.

Московский государственный
строительный университет
129337 Москва, Ярославское шоссе, 26.
E-mail: eiderman@orc.ru

Поступило в редакцию
4.XII.1995