Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Губа, О связи проблем равенства и делимости слов для полугрупп с одним определяющим соотношением, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1997, том 61, выпуск 6, 27–58

DOI: <https://doi.org/10.4213/im167>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 10:32:45

УДК 519.4

В. С. Губа

**О связи проблем равенства и делимости слов
для полугрупп с одним определяющим соотношением**

В статье получен ряд результатов, касающихся связи проблем равенства и делимости слов для полугрупп с одним определяющим соотношением. В частности, одним из основных результатов работы является теорема о равносильности трех алгоритмических проблем: равенства, левой делимости и правой делимости для полугрупп, заданных соотношением вида $a = bQa$, где Q есть слово от a, b .

Библиография: 25 наименований.

Проблема равенства слов для полугрупп с одним определяющим соотношением остается пока открытой. Усилиями С. И. Адяна и его учеников она сведена к случаю полугрупп, задаваемых с помощью двух порождающих, a и b , и соотношения, имеющего либо вид $a = bQa$, либо вид $aPa = bQa$, где P, Q – некоторые слова от a, b , возможно, пустые. (См. по этому поводу работы [3], [6], [7], [11], [12] и уточнение в [5]. Несколько более слабый результат содержится в [21].)

Из [4] известно, что проблема равенства для полугрупп, заданных соотношениями без левых (правых) циклов, сводится к проблеме левой (правой) делимости слов для данной полугруппы. В частности, этот результат применим к обоим случаям, отмеченным выше.

В настоящей работе анализируется прежде всего случай полугрупп, заданных соотношением вида $a = bQa$. Отметим, что проблемы равенства и левой делимости слов для таких полугрупп некоторое время считались решенными. Однако в [5] отмечено, что доказательство опирается на основной результат статьи [17], которая является ошибочной. Заметим, что в [11] доказана разрешимость обеих проблем для случая, когда bQ есть истинная степень некоторого слова в свободной полугруппе.

Обрисуем вкратце основные результаты настоящей работы. В § 1 мы доказываем лемму о моноидах, удовлетворяющих закону левостороннего сокращения. (Таковы, в частности, все полугруппы с единицей, задаваемые копредставлением без левых циклов, в том числе полугруппы с одним соотношением любого из видов $a = bQa$ или $aPa = bQa$.) Мы сводим проблему равенства слов для таких полугрупп к проблеме вхождения слов в так называемое полунормальное замыкание множества слов в свободной группе. Этот результат будет использован в дальнейшем. Думается, что он представляет и самостоятельный интерес.

В § 2 мы сводим проблему левой делимости для полугрупп с одним соотношением вида $a = bQa$ к проблеме вхождения в конечно порожденную подполугруппу в группе с одним определяющим соотношением. Заметим, что эта группа не всегда

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 1541, а также ISF, грант MID 000.

задается соотношением $bQ = 1$. Результат по своей форме (но не по методу доказательства) напоминает результаты Микина и Марголиса (устное сообщение), относящиеся к инверсным полугруппам.

В качестве применения нашего результата мы анализируем случай полугрупп $\langle a, b \mid a = bQa \rangle$, для которых соответствующая группа с одним определяющим соотношением оказывается свободной. Поскольку проблема вхождения в конечно порожденную полугруппу разрешима для свободной группы [19], мы получаем разрешимость проблемы левой делимости (а потому и проблемы слов) для ряда случаев, охватывающих, в частности, ситуацию, когда bQ есть истинная степень.

В § 3 доказывается, что для полугрупп с соотношением вида $a = bQa$ проблема равенства слов на самом деле эквивалентна проблеме левой делимости. Это, по всей видимости, позволяет сделать вывод, что решение проблемы слов для данных полугрупп неизбежно влечет исследование некоторых вопросов типа проблемы вхождения в конечно порожденную подполугруппу в группах с одним определяющим соотношением. Кроме того, мы доказываем, что проблема равенства слов может быть сведена к проблеме равенства данного слова порождающему a .

§ 4 посвящен проблеме правой делимости для рассматриваемых полугрупп. Надо отметить, что этот вопрос не исследовался в цитированных выше работах. Мы доказываем, что данная проблема также эквивалентна проблеме левой делимости (и проблеме равенства слов). Особую роль играет проблема делимости справа порождающего a на заданное слово.

Наконец, в § 5 мы исследуем вопросы, относящиеся к полугруппам, заданным соотношениями без левых (правых) циклов. Эти вопросы идейно связаны с тематикой работы, хотя и не имеют непосредственного отношения к ее заглавию. Тем не менее мы считаем уместным дать здесь некоторые (структурно-алгебраические) условия для полугрупп, необходимо выполняющиеся для полугрупп без односторонних циклов. Это, в частности, продолжает результаты из [12] – статьи с той же тематикой, что и наша.

Автор благодарит за ценные обсуждения результатов данной статьи С. И. Адяна, С. Марголиса, Дж. Микина, Г. У. Оганесяна, М. Сапира, А. Ю. Ольшанского, С. Прайда.

§ 1. Моноиды с левосторонним сокращением

Символ $\equiv$ будет обозначать графическое равенство слов. Длину слова X мы обозначаем через $|X|$.

Напомним, что полугруппа S удовлетворяет *закону левостороннего сокращения*, если для любых $x, y, z \in S$ из условия $xy = xz$ следует, что $y = z$.

Мы будем рассматривать моноиды (полугруппы с единицей), заданные своим копредставлением вида

$$\langle x_1, \dots, x_n \mid A_i = B_i, i \in I \rangle, \quad (1)$$

где A_i, B_i – произвольные слова, возможно, пустые. (Множество порождающих для простоты предполагается конечным.)

Хорошо известен факт, что если полугруппа с единицей S задана копредставлением (1) без левых циклов, то она удовлетворяет закону левостороннего сокращения.

Пусть F_n – свободная группа с множеством свободных порождающих $x_1, \dots, x_n$. Рассмотрим произвольное множество $P \subseteq F_n$. Назовем *полунормальным замыканием* множества P множество элементов, равных в F_n какому-либо из слов вида

$$Z_1^{-1} P_1^{\pm 1} Z_1 \dots Z_k^{-1} P_k^{\pm 1} Z_k,$$

где $P_1, \dots, P_k \in P$, а $Z_1, \dots, Z_k$ – положительные слова (т.е. слова без отрицательных степеней букв) над алфавитом $X = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Ясно, что полунормальное замыкание множества P будет подгруппой в F_n .

Отметим, что идея полунормального замыкания встречалась в работе [23], но там речь шла не о свободной группе, а о полициклическом моноиде.

ЛЕММА 1.1. *Пусть S – полугруппа с единицей, заданная копредставлением вида*

$$\langle X \mid A_i = B_i, i \in I \rangle. \quad (2)$$

Предположим, что в S выполнен закон левостороннего сокращения. Обозначим через F свободную группу с базой X , и пусть P – множество слов вида $A_i^{-1} B_i$ ($i \in I$), а $\bar{P}$ – полунормальное замыкание P в F .

Утверждается, что два положительных слова, U и V , над алфавитом X равны в S тогда и только тогда, когда элемент $U^{-1}V$ принадлежит $\bar{P}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что U и V равны в S . Это означает по определению, что существуют слова $W_0, \dots, W_m$ такие, что $U \equiv W_0$, $W_m \equiv V$, и для любого j от 1 до m можно записать $W_{j-1} \equiv CDE$, $W_j \equiv CFE$, где либо $D \equiv A_i$, $F \equiv B_i$, либо $D \equiv B_i$, $F \equiv A_i$. Тогда $U^{-1}V \equiv W_0^{-1}W_m = (W_0^{-1}W_1) \dots (W_{m-1}^{-1}W_m)$, однако $W_{j-1}^{-1}W_j = E^{-1}(D^{-1}F)E$, что равно $E^{-1}R_i^{\pm 1}E$, где R_i есть $A_i^{-1}B_i$. Таким образом, $U^{-1}V \in \bar{P}$.

Установим обратное. Пусть $U^{-1}V \in \bar{P}$, где U, V – положительные слова. Тогда в свободной группе имеет место равенство $U^{-1}V = Z_1^{-1}P_1^{\pm 1}Z_1 \dots Z_k^{-1}P_k^{\pm 1}Z_k$, где слова $Z_1, \dots, Z_k$ положительные, а $P_1, \dots, P_k \in \{A_i^{-1}B_i \mid i \in I\}$.

Всякое слово вида $Z^{-1}(A_i^{-1}B_i)^{\pm 1}Z$ имеет вид $C^{-1}D$, где C, D – положительные слова, причем C равно D в S , так как слова A_iZ и B_iZ равны в S . Поэтому $U^{-1}V$ равно в F слову вида $C_1^{-1}D_1 \dots C_l^{-1}D_l$, где C_j равно D_j в S ($1 \leq j \leq l$), причем l выберем минимально возможным. При данном l потребуем, чтобы сумма длин всех слов C_j, D_j была минимальной.

Наша цель – доказать, что $l = 1$. Отсюда следует то, что нам необходимо, поскольку тогда $U^{-1}V = C_1^{-1}D_1$ в группе F , где в правой части отсутствуют сокращения, а потому $U \equiv WC_1$, $V \equiv WD_1$ для некоторого слова W . Поскольку C_1 и D_1 равны в S , то U и V также равны, что и требовалось доказать.

Итак, предположим, что $l > 1$.

Допустим, что одно из слов $C_2, \dots, C_l, D_1, \dots, D_{l-1}$ пусто. Если это C_j , то $C_{j-1}^{-1}D_{j-1}C_j^{-1}D_j \equiv C_{j-1}^{-1}(D_{j-1}D_j)$, и можно удалить C_j, D_j , заменяя D_{j-1} на $D_{j-1}D_j$ и уменьшая при этом l . Ясно, что C_{j-1} равно $D_{j-1}D_j$ в S , так что все условия выполнены. Аналогично, если пусто D_j , то

$$C_j^{-1}D_jC_{j+1}^{-1}D_{j+1} \equiv (C_{j+1}C_j)^{-1}D_{j+1},$$

и нужно удалить C_j, D_j , заменяя C_{j+1} на $C_{j+1}C_j$. Заметим, что $C_{j+1}C_j$ равно D_{j+1} в S , и l вновь можно уменьшить.

Итак, все слова (кроме, возможно, C_1 и D_l) непустые. Допустим, что при некотором j слово $C_j^{-1}D_j$ сократимо в свободной группе. Тогда $C_j \equiv xC', D_j \equiv xD'$, где x – буква. Заменяем C_j на C' , а D_j на D' . Так как в S выполнен закон левостороннего сокращения, то C' и D' равны в S . При этом уменьшается сумма длин всех слов.

Если ни одно из слов $C_2, \dots, C_l, D_1, \dots, D_{l-1}$ не сократится полностью в произведении, то приведенная форма в левой части не будет равна в свободной группе слову вида $U^{-1}V$. Стало быть, при некотором j в произведении $D_{j-1}C_j^{-1}$ одно из слов должно полностью сократиться. Рассмотрим два случая.

Если D_{j-1} сократится полностью, то $C_j \equiv WD_{j-1}$ при некотором W . В этом случае $C_{j-1}^{-1}D_{j-1}C_j^{-1}D_j$ равно в F слову $C_{j-1}^{-1}W^{-1}D_j \equiv (WC_{j-1})^{-1}D_j$. Удалим C_{j-1}, D_{j-1} , заменяя C_j на WC_{j-1} . Ясно, что WC_{j-1} равно в S слову $WD_{j-1} \equiv C_j$, что равно D_j в S , т.е. получится, что l можно уменьшить на единицу.

Во втором случае, если C_j полностью сократилось, т.е. $D_{j-1} \equiv WC_j$, имеем, что $C_{j-1}^{-1}D_{j-1}C_j^{-1}D_j$ равно в F слову $C_{j-1}^{-1}WD_j$, и можно удалить C_j, D_j , заменяя D_{j-1} на WD_j . Очевидно, что C_{j-1} равно в S слову $D_{j-1} \equiv WC_j$, что равно WD_j в S , т.е. вновь можно уменьшить l на единицу. Получено противоречие. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1.1. *Проблема равенства слов для полугрупп с одним определяющим соотношением сводится к проблеме вхождения в полунормальное замыкание одного слова в свободной группе с двумя порождающими.*

Для доказательства заметим, что моноиды $\langle a, b \mid a = bQa \rangle, \langle a, b \mid aPa = bQa \rangle$ заданы копредставлениями без левых циклов, а потому для этих моноидов выполнен закон левостороннего сокращения. К случаям таких полугрупп сводится проблема равенства для полугрупп с одним соотношением (см. [7] и уточнение в [5] по поводу полугрупп первого вида).

Таким образом, мы имеем проблему вхождения в полунормальное замыкание либо слова $a^{-1}bQa$, либо слова $a^{-1}P^{-1}a^{-1}bQa$.

Отметим еще одно важное следствие леммы 1.1. Для начала укажем некоторое очевидное свойство диаграмм над любым полугрупповым копредставлением. Необходимые сведения о полугрупповых диаграммах могут быть найдены в [8], [24], [20].

Пусть имеется диаграмма Δ над некоторым полугрупповым копредставлением вида (1), задающим моноид S , и пусть α, ω – начальная и конечная вершины диаграммы Δ соответственно. Для любой вершины v диаграммы рассмотрим какие-либо пути p_1, p_2 из α в v . Ясно, что метки этих путей равны друг другу в S , и тем самым определен элемент $l(v) \in S$, заданный этими метками. Аналогичное утверждение верно для любых путей q_1, q_2 из v в ω , что позволяет определить элемент $r(v) \in S$.

СЛЕДСТВИЕ 1.2. *Пусть дано произвольное полугрупповое копредставление, и пусть S – заданная с его помощью полугруппа с единицей. Допустим, что в S выполнен закон левостороннего сокращения. Пусть Δ – некоторая диаграмма над данным копредставлением. Предположим, что для некоторых двух вершин, v и w , диаграммы Δ имеется путь p , соединяющий эти*

вершины (в p могут входить как положительные, так и отрицательные ребра), причем метка пути p равна единице в свободной группе.

Тогда элементы $r(v)$ и $r(w)$ равны.

(Легко понять, что закон левостороннего сокращения является необходимым условием.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим p в виде $p_1 q_1^{-1} p_2 q_2^{-1} \dots p_k q_k^{-1}$, где пути $p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_k$ состоят только из положительных ребер. Обозначим через u_i конец пути p_i , являющийся также концом пути q_i ($1 \leq i \leq k$). Пусть $P_1, \dots, P_k, Q_1, \dots, Q_k$ – метки путей $p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_k$ соответственно, а U_i ($1 \leq i \leq k$) – метка какого-либо пути из u_i в заключительную вершину диаграммы Δ . Также пусть V, W – метки каких-либо путей, идущих из v, w соответственно в заключительную вершину (можно считать, что $V \equiv P_1 U_1, W \equiv Q_k U_k$).

Мы имеем следующие равенства в S :

$$\begin{aligned} V &= P_1 U_1, & Q_1 U_1 &= P_2 U_2, \\ Q_2 U_2 &= P_3 U_3, & \dots, & & Q_{k-1} U_{k-1} &= P_k U_k, \\ & & & & Q_k U_k &= W. \end{aligned}$$

Применим лемму 1.1. Обозначая через $\mathcal{M}$ полунормальное замыкание множества определяющих соотношений в свободной группе, мы имеем

$$V^{-1} P_1 U_1, \quad U_1^{-1} Q_1^{-1} P_2 U_2, \quad \dots, \quad U_{k-1}^{-1} Q_{k-1}^{-1} P_k U_k, \quad U_k^{-1} Q_k^{-1} W \in \mathcal{M}.$$

Так как $\mathcal{M}$ – подгруппа, то произведение всех этих элементов также принадлежит $\mathcal{M}$. Но оно равно в свободной группе слову $V^{-1} (P_1 Q_1^{-1} P_2 Q_2^{-1} \dots P_k Q_k^{-1}) W$, т.е. также и слову $V^{-1} W$, поскольку слово в скобках равно 1. Следовательно, $V^{-1} W \in \mathcal{M}$, и, вновь применяя лемму 1.1, получаем, что V и W равны в S , что и требовалось доказать.

(Г. У. Оганесян обратил внимание автора на возможность прямого доказательства следствия 1.2 без использования леммы 1.1.)

Нам будет нужно еще одно утверждение (следствие 1.3), которое можно считать известным (ср. [17, лемма 9]).

Рассмотрим полугруппы с единицей, заданные следующим образом. Их порождающие – это буквы $x_1, \dots, x_n$, а определяющие соотношения имеют вид

$$x_i = W_i(x_1, \dots, x_n), \quad 1 \leq i \leq m, \quad (3)$$

при некотором $m \leq n$, где W_i – произвольные слова от $x_1, \dots, x_n$. Положим $P \rightarrow Q$, если при некоторых C, D и некотором i от 1 до m имеем $P \equiv C x_i D$, $Q \equiv C W_i D$. Обозначим через $\xrightarrow{*}$ рефлексивное транзитивное замыкание отношения $\rightarrow$.

Пусть S – полугруппа с единицей, заданная при помощи (3). Нетрудно доказать, что два произвольных слова, U и V , равны в S тогда и только тогда, когда существует такое слово W , что $U \xrightarrow{*} W, V \xrightarrow{*} W$. (Это легко установить с помощью индукции по длине вывода, связывающего U и V .)

Пусть M – произвольный моноид, заданный с помощью (1). Скажем, что слова U, V *сравнимы слева* в M , если существуют слова U', V' такие, что UU' равно VV' в S .

Имея полугруппу с единицей S , заданную соотношениями вида (3), легко понять, в каких случаях слова U, V в ней будут сравнимы (слева или справа). Допустим, что UU' равно VV' в S , и пусть W – такое слово, что $UU' \xrightarrow{*} W, VV' \xrightarrow{*} W$. Ясно, что $U \xrightarrow{*} X, V \xrightarrow{*} Y$, где X, Y – некоторые начала W . Отсюда очевидно, что если слова U и V сравнимы в S слева, то одно из них делится слева на другое. (Аналогичное утверждение имеет место и для сравнимости справа.)

Для удобства ссылок сформулируем

СЛЕДСТВИЕ 1.3. *Пусть полугруппа с единицей S задана при помощи (3). Если слова U, V сравнимы в S слева, то либо U делится слева на V , либо V делится слева на U .*

Данное следствие в дальнейшем будет неоднократно использоваться при анализе полугрупп вида $\langle a, b \mid a = bQa \rangle$, которые, очевидно, удовлетворяют этим условиям.

§ 2. Сведение проблемы делимости к проблеме вхождения

Пусть $\Pi = \langle a, b \mid a = bQa \rangle$. Обозначим через S полугруппу, порожденную в Π всеми (непустыми) концами слова bQa . По существу такая полугруппа рассматривается в [12]. Там же указан алгоритм, позволяющий эффективно задать копредставление для S . Более того, в [12] получен весьма нетривиальный результат о том, что S может быть задана соотношениями как без левых, так и без правых циклов. Проблема левой делимости для Π сведена в [12] к проблеме левой делимости для S .

(Напомним, что в статье [17], как отмечалось в [5], предпринята неудачная попытка доказать разрешимость проблем равенства и делимости для полугрупп без циклов. Отметим, что, на наш взгляд, эта проблема, по всей видимости, еще сложнее, чем проблема слов для полугрупп с одним определяющим соотношением.)

Итак, полугруппа S задается соотношениями без циклов. Следовательно, ввиду результата работы [3] S может быть изоморфно вложена в группу. Это означает, что S вложима изоморфно в группу G , заданную тем же копредставлением, что и S . Наша цель – описать эту группу.

Сделаем предварительно несколько замечаний.

Пользуясь алгоритмом из [12], можно, взяв в качестве примера какую-либо полугруппу $\langle a, b \mid a = bQa \rangle$, построить копредставления для S и для G . При “малой” длине слова bQ в результате упрощений часто оказывается, что S может быть задана одним определяющим соотношением. Однако этот факт не справедлив в общем случае. Например, если Π задана соотношением $a = ba^2bab^2a^2$, то S имеет задание с помощью трех порождающих x, y, z и двух соотношений: $x = yzxz, y = zyz$. Можно доказать, что S не может быть задана в этом случае одним определяющим соотношением (ни для какого множества порождающих).

Однако оказывается, что группа G в любом случае задается одним определяющим соотношением, что мы и докажем ниже. Поскольку в G проблема слов разрешима в силу классического результата Магнуса [22] (см. также [9]), то она бу-

дет разрешима и в S . Значит, мы умеем решать проблему слов в подполугруппе S полугруппы Π . Чтобы распространить это на всю полугруппу Π , было бы достаточно решить проблему левой делимости для S (ввиду весьма общего результата статьи [12]).

Отметим без доказательства, что достаточно решить также проблему вхождения в S внутри Π (т.е. представить алгоритм, который по данному слову от a, b определял бы, будет ли оно равно в Π какому-либо слову из S).

Далее мы будем существенно опираться на результаты, полученные в [11], [12]. Для этого нам потребуется напомнить наиболее важные из них, а также кое-какие определения.

В [12] рассматриваются полугруппы, заданные определяющими соотношениями без левых циклов. Для таких полугрупп разрешимость проблемы равенства вытекает из разрешимости проблемы левой делимости (см., например, [4]). Пусть Π – полугруппа без левых циклов. В [12] ей сопоставляется полугруппа, обозначаемая $S(\Pi)$. Там же доказывается (теорема 1), что проблема левой делимости в Π сводится к проблеме левой делимости в $S(\Pi)$. Полугруппа $S(\Pi)$ описывается с помощью некоторой специальной конструкции, приведенной в [4]. Вообще говоря, не известен алгоритм, который по копредставлению для Π позволял бы строить копредставление для $S(\Pi)$. Однако для полугрупп $\langle a, b \mid a = bQa \rangle$ такое эффективное построение возможно, и оно описано в [12]. Нам понадобится это построение, и мы воспроизведем его в настоящей работе, но для начала сделаем одно замечание.

Из [12] нетрудно извлечь, что на самом деле $S(\Pi)$ есть (с точностью до изоморфизма) подполугруппа в Π , порожденная всеми собственными непустыми концами определяющих слов для полугруппы Π . Мы будем называть ее *подполугруппой концов*. Отсюда, в частности, следует, что утверждение, обратное упоминавшейся теореме 1, также верно (при этом нужно учесть [12, лемма 5]). Таким образом, проблемы левой делимости для Π и $S(\Pi)$ равносильны.

Напомним описание определяющих соотношений для $S(\Pi)$. Пусть x, y – какие-либо собственные непустые концы определяющих слов, задающих Π . Допустим, что x, y сравнимы в Π слева. Тогда можно некоторым определенным образом указать слова $f(x, y)$ и $f(y, x)$, каждое из которых есть произведение непустых собственных концов определяющих полугруппу Π слов (в дальнейшем мы просто будем говорить о *концах*), так что $xf(x, y) = yf(y, x)$ в Π .

Напомним определение функции $f(x, y)$ из [12], давая описание в несколько видоизмененной форме. Имея полугруппу Π с единицей, заданную копредставлением без левых циклов, определим для каждой пары слов X, Y , сравнимых в Π слева, слова, обозначаемые $f(X, Y)$ и $f(Y, X)$. Именно, существуют слова Z, T такие, что в Π выполнено равенство $XZ = YT$. При этом имеется диаграмма над исходным копредставлением, осуществляющая равенство слов XZ и YT . Выберем при фиксированных X и Y такую диаграмму, которая имеет как можно меньше клеток, а при фиксированном числе клеток – как можно меньше ребер. В [12] показано (с использованием выводов вместо диаграмм), что при этих условиях слова Z и T , соответствующие такой диаграмме, находятся однозначно. По определению $f(X, Y) \equiv Z$ и $f(Y, X) \equiv T$. Очевидно, в Π выполнено равенство $Xf(X, Y) = Yf(Y, X)$.

Для получения копредставления полугруппы $S(\Pi)$ нужно сопоставить различным концам различные буквы нового алфавита (это будут порождающие $S(\Pi)$) и для каждой пары сравнимых слева в Π концов записать соотношение вида $xf(x, y) = yf(y, x)$, заменяя концы на соответствующие буквы. (Неэффективность этого задания связана с тем, что мы априори не знаем, какие концы сравнимы слева в Π , а какие нет.)

Для случая полугрупп вида $\Pi = \langle a, b \mid a = bQa \rangle$, как уже говорилось, эффективное построение $S(\Pi)$ возможно. Прежде чем изложить соответствующий алгоритм (который содержится в [12]), мы напомним один весьма нетривиальный результат статьи [11]:

если $\Pi = \langle a, b \mid a = bQa \rangle$, то никакой (собственный) конец слова bQa , начинающийся буквой b , не делится на a слева в полугруппе Π .

Этот факт мы в дальнейшем будем называть *леммой Оганесяна*.

Обозначим $bQa \equiv be_n \dots e_1$, где $e_1, \dots, e_n$ — буквы. Пусть $Y_i \equiv e_i \dots e_1$ ($1 \leq i \leq n$); буквы $y_1, \dots, y_n$ нового алфавита соответствуют словам Y_i . Ниже будет реализован индуктивный алгоритм, выясняющий сравнимость слева слов вида Y_i, Y_j . Следствие 1.3 позволяет заключить, что сравнимость этих слов слева означает, что одно из них делится слева на другое. Пусть Y_i делится слева на Y_j . При этом оказывается, что Y_i равно в S слову вида $Y_j Y_{k_1} \dots Y_{k_r}$ для некоторых $k_1, \dots, k_r$. В качестве определяющих соотношений для $S(\Pi)$ будут взяты все выражения вида $y_i = y_j y_{k_1} \dots y_{k_r}$.

Проводя индукцию по i и используя вышеизложенное, мы будем выяснять, какие из слов Y_j делятся на Y_i . Далее будет найдено слово $W_{ij}(Y_1, \dots, Y_n)$ такое, что $Y_j = Y_i W_{ij}(Y_1, \dots, Y_n)$ в S . Тогда $y_j = y_i W_{ij}(y_1, \dots, y_n)$ будет одним из определяющих соотношений для $S(\Pi)$. По сути мы повторяем здесь в несколько видоизмененной форме доказательство леммы 8 из [12]. Это необходимо сделать, так как описываемый процесс (алгоритм Оганесяна) существенно используется далее.

1) $i = 1$. Нужно выяснить, какие из слов Y_j делятся в Π слева на a . Ответ дается леммой Оганесяна: те и только те слова, которые начинаются буквой a . Имеем $Y_j \equiv Y_1 Y_{j-1}$, где $j > 1$, $e_j = a$. Полагаем $W_{1j}(y_1, \dots, y_n) = y_{j-1}$ при $j > 1$, $e_j = a$.

2) Пусть $i > 1$, и пусть мы знаем, какие из концов делятся на Y_{i-1} . Выясним, какие из концов делятся на Y_i . При этом определяющие соотношения, наложенные на шагах с номерами, меньшими i , уже получены.

Имеем $Y_j \equiv e_j Y_{j-1}$, $Y_i \equiv e_i Y_{i-1}$. Если $e_j = e_i$, то Y_j делится на Y_i слева тогда и только тогда, когда Y_{j-1} делится на Y_{i-1} слева (ввиду того, что в Π , рассматриваемой вместе с единицей, выполнен закон левостороннего сокращения). Если делимость имеет место (при $j \neq i$), то слово Y_{j-1} непусто, откуда $j > 1$. Мы имеем в Π равенство $Y_{j-1} = Y_{i-1} W_{i-1, j-1}$. Следовательно, равенство $Y_j = Y_i W_{i-1, j-1}$ также имеет место в Π , и можно положить $W_{ij} = W_{i-1, j-1}$, добавляя соотношение $y_j = y_i W_{ij}(y_1, \dots, y_n)$.

Пусть $e_i \neq e_j$. Если $e_i = a$, $e_j = b$, то Y_j не делится на Y_i слева, так как оно не делится слева на a ввиду леммы Оганесяна. Рассмотрим случай $e_i = b$, $e_j = a$. Предположим, что $Y_j \equiv a Y_{j-1}$ делится слева на $Y_i \equiv b Y_{i-1}$. Но тогда слова a и $b Y_{i-1}$ сравнимы слева в Π . Ввиду следствия 1.3 одно из них делится слева на другое. Поэтому мы имеем, что a делится слева на $b Y_{i-1}$ ввиду леммы Оганесяна.

Поэтому Y_j делится на Y_i слева тогда и только тогда, когда a делится на Y_i слева, так как Y_j начинается буквой a . Так как $a = bQa = bY_n$ и в Π выполнен закон левостороннего сокращения, то данный факт означает, что Y_n делится слева на Y_{i-1} в Π . Последний факт мы умеем распознавать. Если это имеет место, то определено слово $W_{i-1,n}(Y_1, \dots, Y_n)$, и в Π верно равенство $Y_n = Y_{i-1}W_{i-1,n}$. Тогда $Y_j = aY_{j-1} = bY_nY_{j-1} = bY_{i-1}W_{i-1,n}Y_{j-1} = Y_iW_{i-1,n}Y_{j-1}$, и можно взять в качестве $W_{i,j}$ слово $W_{i-1,n}Y_{j-1}$, добавляя соотношение $y_j = y_iW_{i,j}(y_1, \dots, y_n)$.

На этом построение $S(\Pi)$ закончено; этот процесс эффективен. Таким образом,

$$S(\Pi) = \langle y_1, \dots, y_n \mid y_j = y_iW_{i,j} \ (i \neq j, Y_j \text{ делится на } Y_i \text{ слева}) \rangle. \quad (4)$$

Одним из основных (и весьма глубоких) результатов работы [12] является теорема 2, утверждающая, что $S(\Pi)$ можно задать системой определяющих соотношений как без левых, так и без правых циклов. (Копредставление (4), вообще говоря, может иметь циклы, однако оно может быть упрощено и приведено к нужному виду.)

Любая полугруппа, заданная соотношениями без циклов, может быть изоморфно вложена в группу [3].

Из вполне элементарных соображений следует, что если полугруппа S задана некоторым копредставлением и при этом вложима в некоторую группу, то она вложима в группу G , заданную этим же копредставлением.

Возникает вполне резонный вопрос: какова эта группа для случая полугруппы $S(\Pi)$? Ответом на него является

ТЕОРЕМА 2.1. *Полугруппа $S(\Pi)$, порожденная в полугруппе Π вида $\langle a, b \mid a = bQa \rangle$ всеми непустыми концами определяющего слова bQa , изоморфно вложима в некоторую группу $G(\Pi)$ с одним определяющим соотношением. При этом соотношение, задающее группу $G(\Pi)$, а также вложение $S(\Pi)$ в $G(\Pi)$ находятся эффективно по данному слову bQa .*

(В процессе доказательства будет уточнено, как именно выглядит соотношение, определяющее $G(\Pi)$. Заметим сразу, что оно не всегда имеет вид $bQ = 1$.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $S(\Pi)$ вкладывается в группу, она вкладывается в группу

$$G(\Pi) = \langle y_1, \dots, y_n \mid y_j = y_iW_{i,j}(y_1, \dots, y_n) \rangle,$$

заданную групповым копредставлением (соотношения взяты для тех случаев, когда слова $W_{i,j}$ определены, т.е. при $i \neq j$ и при условии, что Y_j делится на Y_i слева в Π).

Мы докажем, что $G(\Pi)$ изоморфна группе, заданной одним определяющим соотношением, которая будет обозначена $\bar{G}(\Pi)$. Перейдем к описанию последней.

Построим неориентированный граф с вершинами $y_1, \dots, y_n$. Если Y_i делится слева на Y_j в Π (при $i \neq j$), то соединим y_i с y_j при помощи ребра. Данный граф строится эффективно ввиду наличия алгоритма, выясняющего сравнимость (делимость) слева для концов. Полученный граф разбивается на связные компоненты. Компонента, которой принадлежит вершина y_1 (назовем ее *главной*), содержит все такие вершины y_i , для которых Y_i начинается буквой a , а также такие вершины

y_j , для которых Y_j начинается буквой b , но при этом a делится слева на Y_j . Множество всех остальных связных компонент графа обозначим через Ω (оно может быть пустым). Введем новые буквы b_ω для всех $\omega \in \Omega$. Положим $\bar{e}_i = e_i$, если y_i принадлежит главной связной компоненте графа. Пусть y_i принадлежит компоненте ω . Тогда $e_i = b$. В этом случае положим $\bar{e}_i = b_\omega$. Рассмотрим равенство вида $b\bar{e}_n \dots \bar{e}_1 = a$ (каждое $\bar{e}_i$ есть либо a , либо b , либо одно из b_ω). Оно и будет взято в качестве соотношения, определяющего $\bar{G}(\Pi)$. Ясно, что $\bar{e}_1 = a$, и это равенство можно сразу сократить справа на a . Таким образом,

$$\bar{G}(\Pi) = \langle a, b, b_\omega (\omega \in \Omega) \mid b\bar{e}_n \dots \bar{e}_2 = 1 \rangle.$$

Эта группа строится эффективно по копредставлению Π . Нам осталось доказать, что она изоморфна $G(\Pi)$.

Сейчас мы прервем доказательство, чтобы проиллюстрировать построение $\bar{G}(\Pi)$ на двух примерах.

ПРИМЕР 2.1. $\Pi = \langle a, b \mid a = bbaba \rangle$.

Впишем соотношения, определяющие $S(\Pi)$, пользуясь изложенным выше алгоритмом Оганесяна. Для краткости будем временно обозначать делимость слева слова X на слово Y в Π при помощи записи $X \succeq Y$.

При $i = 1$ мы имеем, что лишь $Y_j = Y_3$ делится на $Y_1 = a$; полагаем $y_3 = y_1 y_2$. При $i = 2$ мы видим, что $a = Y_1$ не делится слева на Y_2 , так как $a \succeq Y_2 \iff bY_4 \succeq bY_1 \iff Y_4 \succeq Y_1 = a$, но последнее не имеет места. Отсюда следует, что Y_3 не делится слева на Y_2 , так как начинается с a , и это равносильно условию делимости a на Y_2 . Далее, $Y_4 \succeq Y_2 \iff bY_3 \succeq bY_1 \iff Y_3 \succeq Y_1$; мы получаем, что $y_4 = y_2^2$. При $i = 3$ очевидно, что никакой другой из концов не делится на Y_3 . Аналогичный факт верен и для $i = 4$. (Вообще, если для некоторого i условие $Y_j \succeq Y_i$ влечет $j = i$, то и для всех $i < k \leq n$ верно, что $Y_j \succeq Y_k$ влечет $j = k$, что нетрудно вывести из описанного алгоритма.)

Таким образом, $S(\Pi) = \langle y_1, y_2, y_3, y_4 \mid y_3 = y_1 y_2, y_4 = y_2^2 \rangle$, т.е. $S(\Pi)$ – свободная полугруппа с двумя порождающими. При этом, конечно же, группа $G(\Pi)$, заданная тем же копредставлением, есть свободная группа с двумя порождающими y_1, y_2 . Нас интересует группа $\bar{G}(\Pi)$. Рассмотрим граф, изображенный на рис. 1. Он имеет одну не главную компоненту. Свяжем с ней новую букву c . Тогда определяющее соотношение для $\bar{G}(\Pi)$ получится заменой букв e_2, e_4 , соответствующих этой компоненте, на букву c . Имеем для $\bar{G}(\Pi)$ копредставление $\langle a, b, c \mid bcac = 1 \rangle$. Ясно, что получилась свободная группа $\langle a, c \rangle$ ранга 2.

Рис. 1

ПРИМЕР 2.2. $\Pi = \langle a, b \mid a = baaba \rangle$.

Не будем прослеживать ход алгоритма Оганесяна в деталях; выпишем последовательно получающиеся при этом соотношения для $S(\Pi)$. Имеем $y_3 = y_1y_2$, $y_4 = y_1y_3$, $y_1 = y_2y_3$, $y_3 = y_2y_3y_2$, $y_4 = y_2y_3^2$, $y_4 = y_3^2y_2$. Занумеруем эти соотношения так: (1), (2), ..., (6). Понятно, что (5) следует из (2) и (3), а (6) – из (1), (4) и (2). Удаляя (5) и (6), видим, что можно удалить y_4 вместе с (2). Так как (1) следует из (3) и (4), можно удалить (1), а затем удалить y_1 вместе с (3). Получаем, что $S(\Pi) = \langle y_2, y_3 \mid y_3 = y_2y_3y_2 \rangle$.

Очевидно, что граф будет иметь только главную компоненту, поэтому соотношение для $\bar{G}(\Pi)$ получается просто сокращением на a .

Имеем: $\bar{G}(\Pi) = \langle a, b \mid baab = 1 \rangle \cong \langle a, b \mid b^2a^2 = 1 \rangle$ – свободное произведение с объединенной подгруппой. (Можно непосредственно видеть, что группа $G(\Pi) = \langle y_2, y_3 \mid y_3 = y_2y_3y_2 \rangle$ изоморфна данной.)

Продолжим доказательство теоремы. Наша цель – построить взаимно обратные гомоморфизмы $G(\Pi)$ и $\bar{G}(\Pi)$ друг на друга.

Сопоставим букве y_i слово $\bar{e}_i \dots \bar{e}_1$. Таким образом, мы имеем гомоморфизм φ свободной группы $\langle y_1, \dots, y_n \rangle$ в $\bar{G}(\Pi)$, заданный с помощью правила $\varphi(y_i) = \bar{e}_i \dots \bar{e}_1$. Проверим, что под действием этого правила все определяющие соотношения группы $G(\Pi)$ переходят в равенства, выполненные в $\bar{G}(\Pi)$; тогда будет определен индуцированный гомоморфизм $G(\Pi)$ в $\bar{G}(\Pi)$, который далее также будет обозначаться через φ . Будем проверять этот факт, проводя индукцию по i , в процессе появления соотношений вида $y_j = y_iW_{ij}$.

При $i = 1$ равенства вида $y_i = y_1y_{i-1}$, где $e_i = a$, перейдут в равенства $\bar{e}_i \dots \bar{e}_1 = \bar{e}_1\bar{e}_{i-1} \dots \bar{e}_1$, которые справедливы, так как $\bar{e}_i = \bar{e}_1 = a$.

Пусть $i > 1$ и данное свойство выполняется для $i - 1$. Допустим, что мы имеем соотношение $y_j = y_iW_{ij}$, где $e_j = e_i$. Заметим, что $W_{i-1,j-1} = W_{ij}$, и мы имеем соотношение $y_{j-1} = y_{j-1}W_{i-1,j-1}$, которое переходит в верное равенство под действием φ . Так как $\bar{e}_j = \bar{e}_i$, образ нужного нам равенства в $\bar{G}(\Pi)$ отличается от предыдущего домножением слева на одну и ту же букву, т.е. оно также верно.

Пусть $e_j = a$, $e_i = b$ и имеется соотношение $y_j = y_iW_{ij}$. Это значит, что на предыдущем шаге мы имели $y_n = y_{i-1}W_{i-1,n}$, а $W_{ij} = W_{i-1,n}y_{j-1}$. Отсюда получаем, что $\varphi(y_n) = \varphi(y_{i-1}W_{i-1,n})$ в $\bar{G}(\Pi)$. Нужно убедиться, что $\varphi(y_j) = \varphi(y_iW_{ij})$ в $\bar{G}(\Pi)$. Заметим, что Y_j делится на Y_i , а потому y_i принадлежит главной компоненте графа. Следовательно, $\bar{e}_i = b$. Тогда в $\bar{G}(\Pi)$ имеем (поскольку $b\bar{e}_n \dots \bar{e}_1 = a$ есть соотношение в $\bar{G}(\Pi)$)

$$\begin{aligned} \varphi(y_j) &= \bar{e}_j\bar{e}_{j-1} \dots \bar{e}_1 = a\varphi(y_{j-1}) = b\bar{e}_n \dots \bar{e}_1\varphi(y_{j-1}) = b\varphi(y_n)\varphi(y_{j-1}) \\ &= b\varphi(y_{i-1})\varphi(W_{i-1,n})\varphi(y_{j-1}) = \bar{e}_i \dots \bar{e}_1\varphi(W_{i-1,n}y_{j-1}) \\ &= \varphi(y_i)\varphi(W_{ij}) = \varphi(y_iW_{ij}), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Мы определили гомоморфизм $\varphi: G(\Pi) \rightarrow \bar{G}(\Pi)$. Для того чтобы определить гомоморфизм $\psi: \bar{G}(\Pi) \rightarrow G(\Pi)$, нам потребуется один вспомогательный факт.

Пусть $\bar{e}_i = \bar{e}_j$. Докажем, что $y_iy_{i-1}^{-1} = y_jy_{j-1}^{-1}$ в $G(\Pi)$. (При этом считаем по определению, что $y_0 = 1$.) Ясно, что y_i, y_j принадлежат одной и той же компоненте графа. Очевидно также, что $e_i = e_j$. Достаточно рассмотреть случай, когда,

скажем, Y_j делится в Π слева на Y_i . К этому сводится общий случай, так как компонента связна, а равенство $y_i y_{i-1}^{-1} = y_j y_{j-1}^{-1}$ будет установлено для случая, когда y_i, y_j соединены ребром. Но тогда оно будет верно для любых вершин компоненты. Итак, считаем, что Y_j делится слева на Y_i , $j \neq i$. Если $i = 1$, то $y_j = y_1 y_{j-1}$ в Π , т.е. равенство верно. Пусть $i > 1$. Тогда на i -м шаге возникает соотношение вида $y_j = y_i W_{ij}(y_1, \dots, y_n)$. Поскольку $e_j = e_i$, это соотношение могло возникнуть только как следствие соотношения $y_{j-1} = y_{i-1} W_{i-1,j-1}(y_1, \dots, y_n)$, причем $W_{ij} = W_{i-1,j-1} = W$. Отсюда вытекает то, что нам нужно:

$$y_j y_{j-1}^{-1} = y_i W(y_{i-1} W)^{-1} = y_i y_{i-1}^{-1}.$$

Теперь зададим гомоморфизм $\langle a, b, b_\omega (\omega \in \Omega) \rangle \rightarrow G(\Pi)$, определяя образы букв. Положим $a \mapsto y_1$, $b \mapsto y_1 y_n^{-1}$, $b_\omega \mapsto y_i y_{i-1}^{-1}$, где $y_i \in \omega$ (ввиду доказанного выше образ b_ω не зависит от представителя y_i компоненты ω). Мы утверждаем, что $\bar{e}_i \mapsto y_i y_{i-1}^{-1}$.

Этот факт нуждается в доказательстве лишь для случая $\bar{e}_i = b$. Если это так, то $e_i = b$, и y_i принадлежит главной компоненте. Допустим вначале, что a делится слева на Y_i . Тогда на i -м шаге (заметим, что $i > 1$ ввиду $e_i = b$) появляется соотношение $y_1 = y_i W_{i1}$, которое получается из соотношения $y_n = y_{i-1} W_{i-1,n}$, имевшего место на $(i-1)$ -м шаге, причем $W_{i1} = W_{i-1,n} = W$ (вспомним, что W_{ij} в этом случае есть $W_{i-1,n} Y_{j-1} = W_{i-1,n} Y_0 = W_{i-1,n}$). Но теперь $y_1 y_n^{-1} = y_i W(y_{i-1} W)^{-1} = y_i y_{i-1}^{-1}$, что мы и хотели получить. Таким образом, $y_i y_{i-1}^{-1} = y_1 y_n^{-1}$ для вершин y_i из главной компоненты с условием $e_i = b$, если a делится слева на Y_i (т.е. если $y_1 = a$ соединено с y_i ребром).

Возьмем теперь любую вершину y_i такую, что $\bar{e}_i = b$. Поскольку главная компонента связна и состоит не только из a , должно найтись такое j , что y_j соединено ребром с a . Только что было установлено, что $y_j y_{j-1}^{-1} = y_1 y_n^{-1}$. Учитывая, что $\bar{e}_i = \bar{e}_j$, согласно доказанному выше вспомогательному факту имеем равенство $y_i y_{i-1}^{-1} = y_j y_{j-1}^{-1}$ в $G(\Pi)$. В итоге имеем $y_i y_{i-1}^{-1} = y_1 y_n^{-1}$, что и требовалось проверить.

Теперь, зная, что $\bar{e}_i \mapsto y_i y_{i-1}^{-1}$, мы получаем

$$b \bar{e}_n \dots \bar{e}_2 \mapsto y_1 y_n^{-1} y_n y_{n-1}^{-1} \dots y_2 y_1^{-1} = 1$$

в $G(\Pi)$, а это и означает наличие гомоморфизма $\psi: \bar{G}(\Pi) \rightarrow G(\Pi)$ такого, что $\psi(a) = y_1$, $\psi(b) = y_1 y_n^{-1}$, $\psi(b_\omega) = y_i y_{i-1}^{-1}$ (y_i — представитель компоненты $\omega \in \Omega$).

Осталось проверить равенства $\psi\varphi(y_i) = y_i$ в $G(\Pi)$, $\varphi\psi(a) = a$, $\varphi\psi(b) = b$, $\varphi\psi(b_\omega) = b_\omega$ ($\omega \in \Omega$) в $\bar{G}(\Pi)$. Имеем

$$\psi\varphi(y_i) = \psi(\bar{e}_i \dots \bar{e}_1) = \psi(\bar{e}_i) \dots \psi(\bar{e}_1) = y_i y_{i-1}^{-1} y_{i-1} y_{i-2}^{-1} \dots y_2 y_1^{-1} y_1 = y_i,$$

$$\varphi\psi(a) = \varphi(y_1) = \bar{e}_1 = a,$$

$$\varphi\psi(b) = \varphi(y_1 y_n^{-1}) = a(\bar{e}_n \dots \bar{e}_2 \bar{e}_1)^{-1} = (\bar{e}_n \dots \bar{e}_2)^{-1} = b$$

(так как $b \bar{e}_n \dots \bar{e}_2 = 1$ есть определяющее соотношение для $\bar{G}(\Pi)$); если y_i — представитель компоненты ω , то

$$\varphi\psi(b_\omega) = \varphi(y_i y_{i-1}^{-1}) = \bar{e}_i \dots \bar{e}_1 \bar{e}_1^{-1} \dots \bar{e}_{i-1}^{-1} = \bar{e}_i = b_\omega.$$

Теорема полностью доказана. (Вложение $S(\Pi)$ в $\bar{G}(\Pi)$ эффективно, так как мы умеем вычислять образ y_i в $\bar{G}(\Pi)$.)

Теперь можно сформулировать основные следствия данного результата.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. *Проблема левой делимости для полугруппы Π вида $\langle a, b \mid a = bQa \rangle$ сводится к проблеме вхождения элементов группы $\overline{G}(\Pi)$ с одним определяющим соотношением в конечно порожденную подполугруппу (последняя порождается элементами $\bar{e}_i \dots \bar{e}_1 \in G(\Pi)$, где $1 \leq i \leq n$).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу [12, теорема 1] проблема левой делимости для Π сводится к аналогичной проблеме для $S(\Pi)$. Пусть u, v – слова от $y_1, \dots, y_n$, представляющие элементы $S(\Pi)$. Ясно, что u делится на v слева тогда и только тогда, когда существует слово $w(y_1, \dots, y_n)$ (возможно, пустое), для которого $u = vw$ в $S(\Pi)$. Это равносильно существованию (положительного) слова w от $y_1, \dots, y_n$, для которого $u = vw$ в $G(\Pi)$ в силу вложимости $S(\Pi)$ в $G(\Pi)$. Но последнее означает, что $v^{-1}u$ принадлежит в $G(\Pi)$ подполугруппе с единицей, порожденной элементами $y_1, \dots, y_n$. Однако свойство слова быть равным единице в группе с одним соотношением можно распознать эффективно по теореме Магнуса [22], поэтому речь может идти просто о подполугруппе. Осталось вспомнить, что $G(\Pi)$ изоморфна $\overline{G}(\Pi)$, и y_i переходит в $\bar{e}_i \dots \bar{e}_1$ при этом изоморфизме. Следствие доказано.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. *В подполугруппе концов для полугруппы вида $\langle a, b \mid a = bQa \rangle$ разрешима проблема равенства слов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подполугруппа концов $S(\Pi)$ для полугруппы $\Pi = \langle a, b \mid a = bQa \rangle$ вкладывается в группу с одним определяющим соотношением по теореме 2.1. Согласно теореме Магнуса [22] в такой группе разрешима проблема слов, что влечет ее разрешимость для $S(\Pi)$. Следствие доказано.

Нетрудно понять, что проблема вхождения в конечно порожденную подполугруппу в группе с одним соотношением выглядит намного сложнее, чем проблема равенства слов. К тому же, если мы даже имеем проблему вхождения в подполугруппу, заданную самими порождающими группы, то и этот вопрос остается открытым. Он представляет интерес для решения проблем делимости в полугруппах, заданных одним несократимым слева и справа определяющим соотношением. Последняя проблема открыта (с учетом ошибочности работы [17]), хотя проблема равенства слов для этого случая решена сравнительно давно [2], [3].

Помимо этого можно показать, что в качестве соотношения для группы $\overline{G}(\Pi)$ может появиться любое положительное слово от a, b . Хотя такие группы и не составляют класс всех групп с одним определяющим соотношением (скажем, известно, что все такие группы аппроксимируются разрешимыми группами [18], что неверно для групп с одним соотношением в целом), но все же думается, что это не очень сильное ограничение.

Поэтому, на наш взгляд, проблема левой делимости для полугрупп вида $\Pi = \langle a, b \mid a = bQa \rangle$ по существу равносильна проблеме вхождения, о которой шла речь. По-видимому, это весьма сложная проблема. Следует заметить, что метод Магнуса, позволяющий решить проблему равенства слов в группах с одним соотношением, вряд ли применим к проблеме вхождения. Он связан с техникой HNN-расширений, однако группа $F_2 \times F_2$, имеющая неразрешимую проблему вхождения в некоторые свои конечно порожденные подгруппы [10], легко представима в виде последовательных HNN-расширений группы $\mathbf{Z}$.

Априори можно было бы ожидать, что проблема равенства слов для Π все-таки проще, чем проблема левой делимости. Вполне естественно выглядела бы гипоте-

за, что проблема слов для Π могла бы быть каким-то образом сведена к проблемам типа проблемы равенства слов в группах с одним соотношением. Однако такие попытки, как нам представляется, вряд ли могут привести к успеху.

Дело в том, что ниже будет доказано, что проблема равенства слов для Π равносильна проблеме левой делимости для Π , хотя на первый взгляд она и выглядит проще.

Однако прежде чем сделать это, мы установим ряд положительных результатов для некоторых частных случаев. Известно, что проблема вхождения в конечно порожденную подполугруппу разрешима в свободной группе [19]. Отсюда выводим

Следствие 2.3. *Если $\Pi = \langle a, b \mid a = bQa \rangle$ и группа $G(\Pi)$ свободна, то в Π разрешимы проблема равенства слов и проблема левой делимости.*

Заметим, что по данной группе с одним определяющим соотношением можно эффективно определить, будет ли она свободной [9, предложения 5.10 и 2.26]. Тем самым проверка посылки следствия 2.3 может быть осуществлена эффективно. Мы можем попытаться найти более слабые, но зато легче проверяемые достаточные условия для того, чтобы группа $G(\Pi)$ была свободной.

Г. У. Оганесян доказал в [11], что если bQ есть истинная степень, то проблема левой делимости (а значит, и проблема равенства) разрешима в Π . Мы к тому же проверим, что $G(\Pi)$ свободна в этом случае, и получим обобщение этого результата. Дадим вначале несколько определений.

Пусть задана полугруппа $\Pi = \langle a, b \mid a = bQa \rangle$. Назовем конец Y_i слова bQa *тупиковым*, если на него не делится слева никакой другой конец (напомним, что $n = |bQ|$, а Y_i есть конец слова bQa длины i , где $1 \leq i \leq n$). Конец Y_i назовем *изолированным*, если он не сравним слева ни с каким другим концом. В силу следствия 1.3 это значит, что он является тупиковым и при этом не делится слева ни на какой другой конец.

Следуя [11], введем лексикографический порядок $\prec$ на множестве всех слов от a, b , при котором $b \prec a$. Это значит, что для любых слов X, Y мы имеем $X \prec Y$ тогда и только тогда, когда либо X есть собственное начало Y , либо $X \equiv ZbX'$, $Y \equiv ZaY'$ для некоторых Z, X', Y' . Среди всех концов (т.е. собственных непустых концов слова bQa) выделим самый младший конец L и самый старший конец M .

В работе [11] рассматривается условие (β) , достаточное для разрешимости в Π проблем равенства и левой делимости. Будучи сформулированным несколько иначе, оно означает, что никакой конец слова bQa , более длинный, чем L , не делится слева на L (сюда включается случай самого слова bQa , т.е. a не делится на L слева). Мы покажем, что из выполнения этого условия также следует, что группа $G(\Pi)$ свободна, усиливая тем самым результат из [11]. Рассмотрим следующие условия:

- (1) слово bQ есть истинная степень, т.е. $bQ \equiv (bP)^m$ при $m > 1$;
- (2) самый младший в смысле порядка $\prec$ конец L имеет большую длину, чем самый старший M ;
- (3) выполнено условие (β) работы [11], т.е. на L не делится слева никакой более длинный из концов, включая bQa ;
- (4) имеется хотя бы один изолированный конец;
- (5) группа $G(\Pi)$ свободна;
- (6) проблемы равенства и левой делимости слов в Π разрешимы.

ТЕОРЕМА 2.2. *Имеют место импликации $(1) \implies (2) \implies (3) \implies (4) \implies (5) \implies (6)$.*

Для сравнения заметим, что в [11] доказано $(1) \implies (3) \implies (6)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $(1) \implies (2)$. Пусть Π задана соотношением $a = (bP)^m a$, $m > 1$. Проверим, что M есть конец слова Pa . Если это не так, то $M = M'bPa$ для некоторого слова M' . Так как $M'bP$ есть конец слова $(bP)^m$, то M' есть конец слова $(bP)^{m-1}$. Поэтому $M'a$ есть собственный непустой конец определяющего слова. Очевидно, однако, что $M = M'bPa \prec M'a$ вопреки определению M . Далее, проверим, что L оканчивается словом $(bP)^{m-1}a$. Если это не так, то $L = L'a$, где L' – собственный конец слова $(bP)^{m-1}$. В этом случае $L'bP$ – собственный конец слова $(bP)^m$, и потому $L'bPa$ – собственный конец определяющего слова. Однако $L'bPa \prec L'a = L$ вопреки тому, что L самый младший. Так как $m - 1 \geq 1$, то L должно оканчиваться словом bPa , а потому M есть собственный конец L , т.е. L длиннее M . Это доказывает (2).

$(2) \implies (3)$. Докажем вначале одну лемму.

ЛЕММА 2.1. *Если Y_i – тупиковый конец, то все концы Y_j при $i < j \leq n$ также являются тупиковыми.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Y_i – тупиковый конец. Достаточно показать, что при $i < n$ конец Y_{i+1} также тупиковый. Предположим, что это не так, и пусть Y_k делится слева на Y_{i+1} при $k \neq i + 1$. Если $e_k = e_{i+1}$, то $k > 1$ и Y_{k-1} делится на Y_i слева вопреки условию. Поэтому $e_k = a$, $e_{i+1} = b$ по лемме Оганесяна. Поскольку тем самым a сравнимо слева с Y_{i+1} , то одно из слов делится на другое по следствию 1.3. Вновь применяя лемму Оганесяна, делаем вывод, что a делится слева на $Y_{i+1} \equiv bY_i$. Сокращая на b слева, получаем, что $Y_n \equiv Qa$ делится слева на Y_i , что опять противоречит условию. Лемма доказана.

Пусть теперь выполнено (2). Если Y_i делится на Y_j слева при $i \neq j$, то из леммы Оганесяна имеем $Y_j \prec Y_i$. В частности, M – тупиковый конец. Так как $|L| > |M|$, то по лемме 2.1 конец L также тупиковый. Так как $L \neq a$, то $a = bQa$ не делится на L слева. Никакой другой конец на L также не делится. Это доказывает (3).

$(3) \implies (4)$. Пусть выполнено (3). Проверим, что L изолирован. Поскольку L – самый младший конец, он не делится слева ни на какой другой конец в силу леммы Оганесяна. Покажем, что L является тупиковым. Предположим противное. Рассмотрим среди концов, отличных от L , такой, который делится на L слева. При этом будем считать, что выбранный конец Y_i с этим свойством максимален по отношению к $\prec$. По условию (3) имеем $|L| > |Y_i|$. Конец Y_i не может быть тупиковым, так как иначе тупиковым оказался бы и L ввиду леммы 2.1. Следовательно, при некотором $j \neq i$ конец Y_j делится слева на Y_i . Но тогда $L \prec Y_i \prec Y_j$ и Y_j делится на L . Получено противоречие с выбором Y_i . Таким образом, L – изолированный конец.

$(4) \implies (5)$. Пусть имеется изолированный конец Y_i . Если bQ не есть степень b , то он начинается с b . Если же $bQ \equiv b^m$, то при $m > 1$ изолированным будет конец $L \equiv b^{m-1}a$, а случай $a = ba$ тривиален (группа $G(\Pi)$ будет бесконечной циклической). Таким образом, можно считать, что Y_i начинается с b . Компонента графа, построенного в доказательстве теоремы 2.1, содержащая y_i , одноэлементна. Обозначим ее ω . Тогда соотношение $b\bar{e}_n \dots \bar{e}_2 = 1$, задающее $G(\Pi)$, содержит

в точности одно вхождение буквы b_ω , и эту букву можно выразить через остальные порождающие, удаляя вместе с соотношением. Тем самым имеем в качестве свободного базиса группы $G(\Pi)$ набор всех порождающих, кроме b_ω .

(5) $\implies$ (6). Это в точности следствие 2.3.

Теорема доказана.

Отметим, что промежуточное условие (2) мы ввели в рассмотрение ввиду его наглядности. Есть еще одно условие, которое очень просто поддается проверке и для которого разрешимость проблем равенства и левой делимости хорошо известна, — это условие гиперпростоты¹⁾ слова bQa . Легко показать, что для гиперпростого слова bQa выполнено и условие (5).

Нетрудно привести примеры, показывающие, что все рассмотренные выше условия не эквивалентны друг другу.

В заключение этого параграфа отметим, что естественна попытка расширить класс свободных групп на более широкий так, чтобы в этом классе проблема вхождения в конечно порожденную подполугруппу была разрешима. Однако даже во многом близкие по своим свойствам к свободным группам группы с так называемым условием малого сокращения этим свойством не обладают в силу результата Рипса [25].

§ 3. Проблема левой делимости и проблема равенства слов

Пусть моноид имеет конечное копредставление с непустыми определяющими словами, и пусть в нем выполнен закон левостороннего сокращения. Хорошо известно, что из разрешимости в нем проблемы левой делимости следует разрешимость проблемы равенства. Этот факт часто использовался в применении к полугруппам без левых циклов (см., например, [4]). Для удобства ссылок сформулируем его в виде леммы.

ЛЕММА 3.1. Пусть $\langle x_1, \dots, x_m \mid A_i = B_i (1 \leq i \leq k) \rangle$ — копредставление моноида S , удовлетворяющего закону левостороннего сокращения, где все определяющие слова непусты. Если в S разрешима проблема левой делимости, то разрешима и проблема равенства слов.

(Для проверки равенства слов U и V достаточно проверить факт делимости слева U на V . Затем, найдя некоторое слово Z такое, что U равно в S слову VZ , что можно сделать рекурсивным перечислением всех выводов, нужно убедиться в том, что Z пусто.)

Мы хотим показать, что для полугрупп вида $\langle a, b \mid a = bQa \rangle$ проблема равенства и проблема левой делимости оказываются эквивалентными. (Отметим, что в [14] сформулирован результат о том, что если во всех полугруппах, заданных несократимым слева определяющим соотношением, разрешима проблема слов, то во всех этих полугруппах разрешима также проблема левой делимости.) Следующая лемма является основной в нашем рассуждении.

¹⁾Слово называется *гиперпростым*, если никакое его собственное непустое начало не является его концом.

ЛЕММА 3.2. Пусть S – полугруппа вида $\langle a, b \mid a = bQa \rangle$, где bQ – слово, не являющееся истинной степенью. Тогда для любого слова X условие, что X делится слева на a в S , выполнено тогда и только тогда, когда $bQX = X$ в S .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Часть “только тогда” очевидна: если X делится слева на a в S , то $X = aY$ для некоторого Y , и в S выполнены равенства $bQX = bQaY = aY = X$.

Предположим теперь, что $bQX = X$ в S . Рассмотрим произвольную диаграмму Δ над копредставлением полугруппы S , осуществляющую равенство слов bQX и X в S . Пусть $G = \langle a, b \mid bQ = 1 \rangle$. Превратим Δ в диаграмму Δ^G следующим образом: для каждой клетки диаграммы вида $bQa = a$ рассмотрим ребро с “пустой” меткой (рис. 2).

Рис. 2

Говоря точнее, присоединим символ 1 к нашему алфавиту и рассмотрим “тривиальные” соотношения вида $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ ($x \in \{a, b\}$); $1 \cdot 1 = 1$. Как известно, теория диаграмм над групповыми копредставлениями может сталкиваться с рядом топологических трудностей, касающихся таких операций, как склейка диаграмм и т.п. В монографии [15] подробно развивается теория, позволяющая избежать этих и других трудностей с помощью использования так называемых 0-клеток (см. [15, § 11]). Следуя этой монографии, мы будем использовать 0-клетки в групповых диаграммах.

Итак, добавляя соответствующие 0-клетки, мы получаем диаграмму Δ^G над копредставлением группы $G = \langle a, b \mid bQ = 1 \rangle$ с одним определяющим соотношением.

Теперь рассмотрим диаграмму Δ_0^G , которая получается из Δ^G следующим образом: к верхней границе диаграммы Δ_0^G , имеющей метку bQX , мы приклеиваем клетку вида $1 = bQ$ (рис. 3). Теперь можно склеить верхнюю и нижнюю границы этой диаграммы с использованием 0-клеток, получая сферическую диаграмму.

Однако хорошо известно, что копредставления групп с одним соотношением асферичны²⁾. Это означает, что полученная сферическая диаграмма должна быть три-

²⁾ Имеется целый ряд определений асферичности, которые между собой, вообще говоря, не эквивалентны. Мы используем здесь понятие, которое иногда называют *диаграммной асферичностью*.

Рис. 3

виальной в некотором смысле. Скажем, что клетки π_1 и π_2 (сферической) диаграммы образуют *сократимую пару*, если для любой вершины v_1 , принадлежащей контуру $\partial\pi_1$ клетки π_1 , имеются вершина v_2 , принадлежащая контуру $\partial\pi_2$ клетки π_2 , и некоторый³⁾ путь t из v_1 в v_2 в сферической диаграмме, метка которого равна 1 в свободной группе (рис. 4), причем $\partial\pi_1$ и $\partial\pi_2$ имеют взаимно обратные метки. Согласно [9, предложение 9.7] над копредставлением группы с одним определяющим соотношением не существует приведенных сферических диаграмм. По определению это значит, что можно выделить поддиаграмму из двух клеток, метка граничного контура которой равна единице в свободной группе. Легко показать, что эти клетки образуют сократимую пару.

Рис. 4

В самом деле, метка контура выделенной поддиаграммы имеет вид $R_1 T R_2 T^{-1}$, где R_1, R_2 – циклические сдвиги определяющего слова или обратные к ним слова. Можно считать, что для некоторых слов X, Y выполнены равенства $R_1 \equiv XY$, $R_2 \equiv (YX)\varepsilon$, где $\varepsilon = \pm 1$. Если $\varepsilon = 1$, то имеем равенство $XYTYXT^{-1} = 1$ в свободной группе, из которого следует $XYTYXY = TY$, т.е. $(XYTY)^2 = (TY)^2$. Это влечет равенство слова XY единице в свободной группе, что невозможно. Поэтому $\varepsilon = -1$. При этом XY и TY коммутируют. Но тогда при некотором m слово TY равно $(XY)^m$ в свободной группе. В качестве вершин v_1 и v_2 возьмем такие точки, чтобы $\partial\pi_1$ и $\partial\pi_2$ имели метки XY и $(XY)^{-1}$ соответственно. Путь t выберем имеющим метку $TY(XY)^{-m}$.

Индукцией по числу клеток докажем, что все клетки нашей сферической диаграммы можно разбить на сократимые пары. Действительно, у нас есть поддиа-

³⁾Мы не предполагаем, что путь t является несамопересекающимся.

грамма с меткой контура, равной единице в свободной группе, имеющая две клетки. Удаляя эту поддиаграмму и заклеивая ее 0-клетками, мы получаем сферическую диаграмму с меньшим числом клеток. Применим к ней предположение индукции, разбивая все ее клетки на сократимые пары (если клетки в ней имеются). Прообразы этих клеток в исходной диаграмме также образуют сократимые пары, так как вместо прохождения нового ребра с пустой меткой мы можем проходить по ребрам прежней диаграммы, не меняя значения метки пути в свободной группе. Добавляя к разбиению пару клеток из поддиаграммы, мы имеем искомое разбиение клеток на сократимые пары.

Теперь расклеим сферическую диаграмму, вновь возвращаясь к Δ_0^G . Клетка π имеет парную ей клетку π' . Именно, если v – вершина π , являющаяся концом пути с меткой bQ , то имеется некоторая клетка в диаграмме Δ_0^G (и, конечно, в Δ^G) такая, что для некоторой вершины v' метка контура $\partial\pi'$, читаемого по часовой стрелке с началом и концом в v' , равна bQ , и к тому же имеется путь t в сферической диаграмме из v в v' , метка которого равна единице в свободной группе.

Для начала покажем следующее: в Δ_0^G (т.е. после расклейки) имеется путь $\bar{t}$, соединяющий v и v' , метка которого равна единице в свободной группе. Действительно, после расклейки путь t может быть разбит на несколько путей $t_1, \dots, t_r$, где конец каждого пути совпадает с началом следующего после склейки. Последнее означает, что эти концы и начало принадлежат соответственно верхнему и нижнему (или наоборот) участку контура диаграммы Δ^G , метка каждого из которых равна X . Совпадение точек при склейке влечет существование между ними пути (а именно из первой точки в заключительную вершину и далее во вторую точку), метка которого имеет вид $Y Y^{-1}$, а потому равна единице в свободной группе. Следовательно, путь $\bar{t}$ имеется. Но такой путь имеется и в Δ^G , так как если мы пройдем ребро с меткой 1 , отличающее Δ_0^G от Δ^G , то мы можем заменить его на путь с меткой $X X^{-1}$. Итак, считаем, что $\bar{t}$ – путь в Δ^G .

Рис. 5

Ясно, что клетка π' , принадлежащая Δ_0^G , ориентирована противоположно π (рис. 5). Пусть w – вершина на верхней границе контура клетки π' , разбивающая ее на отрезки с метками bQ и a соответственно. Мы утверждаем, что $\bar{t}$ соединяет v и w .

Действительно, если w не совпадает с v' , то слово, читаемое вдоль контура клетки π' по часовой стрелке, начиная как с w , так и с v' , есть bQ . Но тогда bQ графически равно слову, которое есть его нетривиальный циклический сдвиг. Элементарные факты показывают, что в этом случае bQ есть истинная степень. Поскольку это по условию не так, то $\bar{t}$ соединяет v и w .

Теперь воспользуемся следствием 1.2, очевидно, применимым к нашему случаю. В обозначениях следствия 1.2, имея путь с меткой, равной 1 в свободной группе, мы получаем, что $r(v) = r(w)$. Это означает, что метка любого позитивного пути в Δ из v в заключительную вершину ω равна в S метке любого пути из w в заключительную вершину. Однако w есть вершина, выбранная в Δ как конец некоторого пути с меткой bQ и начало пути с меткой a . Следовательно, слово X (идущее из v в ω) равно в S слову вида aY (идущему из w в ω), т.е. X делится на a слева.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $bQ = (bP)^m$, где $m > 1$, и bP не является истинной степенью, то возможно следующее обобщение леммы: $bQX = X$ в S тогда и только тогда, когда X делится слева на $(bP)^r a$ для некоторого $0 \leq r < m$.

ТЕОРЕМА 3.1. Для полугрупп вида $\langle a, b \mid a = bQa \rangle$ проблема равенства слов равносильна проблеме левой делимости.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если bQ есть истинная степень, то обе проблемы разрешимы [11]. (Мы дали второе доказательство этого факта в § 2.) Пусть bQ не есть истинная степень. Тогда в случае разрешимости проблемы слов мы можем выяснить, верно ли, что для данного слова X имеет место равенство $bQX = X$ в Π , что равносильно делимости X на a слева (по лемме 3.2). Легко понять, что проблема делимости слева на a равносильна проблеме левой делимости в Π .

Тот факт, что из разрешимости проблемы левой делимости вытекает разрешимость проблемы равенства, хорошо известен (см. лемму 3.1). Теорема доказана.

Сейчас мы хотим установить факт, что проблема равенства слов в Π равносильна проблеме равенства в Π данного слова букве a .

ЛЕММА 3.3. Пусть $\Pi = \langle a, b \mid a = bQa \rangle$, и пусть a делится слева на непустое слово X , причем a не равно X в Π . Тогда X равно в Π слову вида $bC_1 \dots bC_{r-1}bC_r$, где $bC_i a$ — начало bQa при $1 \leq i < r$, bC_r — собственное начало bQa .

Рис. 6

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если a делится слева на X и при этом a не равно X в Π , то $a = XY$ в Π для некоторого непустого Y . Рассмотрим диаграмму Δ , имеющую минимально возможное число клеток, граничные метки которой суть a и $X'Z$, где $X = X'$ в Π . Пусть q_1q_2 – нижняя граница Δ , где метка q_1 есть X' , а метка q_2 есть Z . Очевидно, что никакая клетка не может полностью примыкать к q_1 одним из своих граничных участков. Следовательно, если клетка π примыкает к q_1 , то общая часть π и q_1 есть собственное подслово в bQa . Оно должно быть началом слова bQa , так как иначе в Δ можно выделить поддиаграмму Γ , отмеченную на рис. 6, которая содержит клетки, полностью примыкающие к q_1 одним из своих граничных участков. Итак, слово X' есть произведение вида $bC_1 \dots bC_{r-1}C_r$, где bC_i – начала слова bQ .

Пусть $1 \leq i < r$, и рассмотрим i -ю клетку, примыкающую к q_1 по слову bC_i (рис. 7). Рассмотрим следующую, $(i+1)$ -ю клетку. Она должна примыкать к пути q_1 своей стороной с меткой bQa , и потому другая ее сторона примыкает к i -й клетке. Следовательно, $bC_i a$ – начало bQa при $1 \leq i < r$. Лемма доказана.

Рис. 7

ЛЕММА 3.4. *Предположим, что в $\Pi = \langle a, b \mid a = bQa \rangle$ разрешима проблема делимости слева буквы a на заданное слово X . Тогда в Π разрешима проблема левой делимости.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно, располагая алгоритмом, который распознает делимость слева буквы a на данное слово, научиться распознавать делимость заданного непустого слова X на букву a слева. Пусть дано слово X . Можно считать, что оно не содержит подслов вида bQa . Если оно начинается с a , то оно делится слева на a . В противном случае оно начинается с b и потому имеет непустое начало, на которое a делится слева. Располагая соответствующим алгоритмом, выделим такое начало V максимальной длины, на которое a делится слева, и пусть $X \equiv VW$.

Мы можем эффективно найти, перечисляя все выводы, “частное” Z от деления a на V ; если Z пусто, то X делится слева на a . Пусть Z непусто; тогда ввиду леммы 3.3 существует слово вида $bC_1 \dots bC_{r-1}C_r$, описанное в условии этой леммы, равное V в Π . Это слово может быть найдено эффективно перечислением всех выводов. Таким образом, $X = bC_1 \dots bC_{r-1}bC_rW$ в Π . Если W пусто, то X не делится на a . Пусть W непусто. Допустим, что W начинается с b . Тогда a делится слева на Vb вопреки выбору V . Действительно, $a = VZ$ в Π , где Z – некоторое непустое слово; ясно, что Z всегда делится слева на b .

Итак, W начинается с a . При этом a не делится на Va слева. Если X делится слева на a , то Va сравнимо слева с a в Π , и по следствию 1.3 остается единственная возможность, когда Va делится слева на a . Если это имеет место, то X делится слева на Va , а потому и на a . Поэтому вопрос сводится к тому, верно ли, что $bC_1 \dots bC_{r-1}bC_r a$ делится слева на a .

По условию $bQa \equiv bC_i D_i$ ($1 \leq i \leq r$), $bQa \equiv bC_r D_r$ для некоторых слов $D_1, \dots, D_r$. Тогда в Π имеют место равенства

$$\begin{aligned} a &= bQa = bC_1 a D_1 = bC_1 bQa D_1 = bC_1 bC_2 a D_2 D_1 = \dots \\ &\dots = bC_1 bC_2 \dots bC_{r-1} a D_{r-1} \dots D_2 D_1 = bC_1 \dots bC_{r-1} bQa D_{r-1} \dots D_1 \\ &= bC_1 \dots bC_{r-1} bC_r D_r D_{r-1} \dots D_1. \end{aligned}$$

Следовательно, делимость $bC_1 \dots bC_r a$ на a слева равносильна делимости в Π слева слова $bC_1 \dots bC_r a$ на слово $bC_1 \dots bC_r D_r \dots D_1$, т.е. делимости слева a на слово $D_r \dots D_1$, а последнее свойство мы умеем эффективно распознавать. Лемма доказана.

(Мы использовали при доказательстве идеи, сходные с теми, которые применены в [11] для доказательства леммы 1.)

ТЕОРЕМА 3.2. *Проблема равенства слов и проблема левой делимости слов в полугруппе $\Pi = \langle a, b \mid a = bQa \rangle$ равносильна проблеме равенства в Π заданного слова букве a .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть последняя проблема разрешима. Допустим, что мы хотим узнать, делится ли a слева на слово вида $bC_1 \dots bC_{r-1}bC_r$, где $bC_i a$ – начало bQa при $1 \leq i < r$, bC_r – начало bQ . Положим $bQa \equiv bC_i D_i$ ($1 \leq i \leq r$), $bQa \equiv bC_r D_r$. Как мы видели в доказательстве леммы 3.4, a равно в Π слову $bC_1 \dots bC_r D_r \dots D_1$. Поэтому a делится слева на $bC_1 \dots bC_r a$ в Π тогда и только тогда, когда $D_r \dots D_1$ делится слева на a .

Мы можем считать, что bQ не является истинной степенью, так как в противном случае рассматриваемые проблемы разрешимы. Применим лемму 3.2. Нас интересует справедливость в Π равенства $bQ D_r \dots D_1 = D_r \dots D_1$. Домножая его слева на $bC_1 \dots bC_r$, мы получим равенство $W = bC_1 \dots bC_r bQ D_r \dots D_1 = bC_1 \dots bC_r D_r \dots D_1 = a$, равносильное исходному, т.е. нам достаточно проверить, равно ли W в Π букве a .

Теперь несложно построить алгоритм, проверяющий делимость буквы a на заданное слово X . Проводим индукцию по длине X . Пусть для всех слов, имеющих меньшую длину, чем X , мы умеем распознавать это свойство. Рассмотрим два случая.

1) $X \equiv Yb$. Проверим делимость a на Y слева. Если a на Y слева не делится, то тем более не делится и на X . Если же a на Y делится слева, то мы можем узнать, будет ли “частное” Z (находимое эффективно) непустым. Если Z пусто, то Y равно a , и a не делится на X слева. Если же Z непусто, то оно заведомо делится на b слева, и потому a делится слева на $Yb = X$.

2) $X \equiv Ya$. Проверим, делится ли a на Y слева. Если нет, то a не делится слева на X . Если да, то можно эффективно найти слово $bC_1 \dots bC_r$, равное в Π слову

Y из леммы 3.3. Осталось узнать, делится ли a слева на $bC_1 \dots bC_r a$, что мы уже умеем делать. Теорема доказана (ввиду леммы 3.4).

Мы можем отметить здесь еще одно следствие теоремы 3.1, касающееся моноидов, заданных соотношением вида $a = bPb$, где P – слово от a и b . Разрешимость проблемы слов для таких полугрупп известна [3], а проблема (левой или правой) делимости открыта.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *Разрешимость проблемы слов для всех полугрупп вида $\langle a, b \mid a = bQa \rangle$ влечет разрешимость проблем левой и правой делимости для полугрупп вида $\langle a, b \mid a = bPb \rangle$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что достаточно говорить о левой делимости. Пусть полугруппа задана в виде $\langle a, x \mid a = xPx \rangle$, где $P = P(a, x)$ – слово от a, x . Заменяем в слове bPb каждое из вхождений буквы x на ba . Получится слово вида bQa . Пусть в $\Pi = \langle a, b \mid a = bQa \rangle$ разрешима проблема слов. Тогда проблема левой делимости в Π также разрешима по теореме 3.1. Поэтому она разрешима и в подполугруппе $S(\Pi)$ с учетом [12, лемма 5]. Вычисляя $S(\Pi)$ для данного случая, легко видеть, применяя алгоритм Оганесяна, что она изоморфна $\langle y_1, y_2 \mid y_1 = y_2 P(y_1, y_2) y_2 \rangle$, т.е. исходной полугруппе. Следствие доказано.

По-видимому, проблема равенства слов для полугрупп вида $\Pi = \langle a, b \mid a = bQa \rangle$ еще сложнее, чем проблема (левой) делимости для полугрупп, заданных при помощи $a = bPb$. Дело в том, что, как отмечалось в § 2, полугруппа концов $S(\Pi)$ не обязательно задается одним соотношением.

§ 4. Проблема правой делимости

Проблема левой делимости для полугрупп вида $\langle a, b \mid a = bQa \rangle$ рассматривалась в ряде уже упоминавшихся работ. Однако в этих работах нет исследования проблемы правой делимости.

Как мы покажем в этом параграфе, данная проблема равносильна проблеме левой делимости и проблеме равенства слов для полугрупп, заданных при помощи соотношения $a = bQa$.

ЛЕММА 4.1. *Если непустое слово X является правым делителем буквы a в $\Pi = \langle a, b \mid a = bQa \rangle$, то X равно в Π произведению (собственных) концов слова bQa .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оговорка “собственных” несущественна, так как само слово bQa равно в Π своему собственному концу a .

Рассмотрим диаграмму Δ , имеющую минимальное число клеток и такую, что ее граничные метки суть a и ZX' , где X' равно X в Π (ясно, что такие диаграммы имеются, если a делится на X справа). Если в ней нет клеток, то $X' = a$, что является произведением концов. Допустим, что клетки есть. Ясно, что никакая клетка не примыкает к слову X' полностью одним из своих граничных участков. Если есть клетка, примыкающая к X' частью слова bQa , которое не есть конец этого слова, то можно применить тот же аргумент, что и в доказательстве леммы 3.3. А именно, в диаграмме Γ , отмеченной на рис. 8, заведомо есть клетки, и одна из них полностью примыкает к слову X' одним из своих граничных контуров. Таким образом, X' есть произведение концов. Лемма доказана.

Рис. 8

ЛЕММА 4.2. *Предположим, что в $\Pi = \langle a, b \mid a = bQa \rangle$ разрешима проблема правой делимости буквы a на заданное слово. Тогда в Π разрешима проблема равенства слов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что проблема правой делимости буквы a на заданное слово разрешима. Возьмем слова X, Y . Нас интересует, верно ли, что $X = Y$ в Π . При этом X, Y должны оканчиваться на одну и ту же букву, если это условие выполнено. Так как, очевидно, можно сокращать на b справа, мы можем ограничиться случаем, когда X и Y оканчиваются буквой a .

Мы можем эффективно найти разложения вида $X \equiv X_1X_2$, $Y \equiv Y_1Y_2$, где $X_2(Y_2)$ – конец слова $X(Y)$ максимальной длины такой, что a делится на него справа в Π . Проверим, что равенство X и Y в Π влечет равенство $X_1 = Y_1$ в Π (а потому и равенство $X_2 = Y_2$, так как равенства можно сокращать слева). Заметим, что X_2 и Y_2 непустые.

Предположим, что $X_1 \neq Y_1$ в Π . Тогда, поскольку X_1 и Y_1 в Π сравнимы слева, мы имеем ввиду следствия 1.3, что либо X_1 делится слева на Y_1 , либо наоборот.

Допустим, что X_1 делится на Y_1 слева. Тогда $X_1 = Y_1W$ для некоторого слова W , причем W непусто. Ясно, что X_1 и W оканчиваются одной и той же буквой $c \in \{a, b\}$. Так как $X_1X_2 = Y_1Y_2$ в Π , то $Y_1WX_2 = Y_1Y_2$, т.е. $WX_2 = Y_2$ в Π . Однако тогда a делится справа на WX_2 , а потому и на cX_2 . Но cX_2 – конец слова X_1X_2 , так как c – последняя буква слова X_1 . Это противоречит выбору слова X_2 .

Слова X_1 и Y_1 в сумме имеют меньшую длину, чем слова X и Y . Из индуктивных соображений можно считать, что мы умеем выяснять, верно ли что X_1 и Y_1 равны в Π . Осталось выяснить, верно ли, что X_2 и Y_2 равны в Π (заметим, что наиболее интересен случай, когда $X = X_2$, $Y = Y_2$, т.е. оба слова – правые делители a). Однако ввиду леммы 4.1 слова X_2, Y_2 принадлежат полугруппе $S(\Pi)$, порожденной в Π непустыми концами слова bQa . Согласно следствию 2.2 проблема слов в $S(\Pi)$ разрешима. Остается проверить, равны ли слова X_2, Y_2 в $S(\Pi)$, что и дает ответ на наш вопрос. Лемма доказана.

ЛЕММА 4.3. *Пусть в $\Pi = \langle a, b \mid a = bQa \rangle$ разрешима проблема правой делимости буквы a на заданное слово. Тогда в Π разрешима проблема правой делимости.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть даны слова X, Y . Мы хотим узнать, делится ли X на Y справа. Очевидным образом можно считать, что X и Y оканчиваются на a .

Пусть $X \equiv X_1X_2$, $Y \equiv Y_1Y_2$, где $X_2(Y_2)$ – максимальный конец слова $X(Y)$ такой, что a делится на него справа в Π . Эти разложения могут быть найдены эффективно.

Если Y_1 пусто, то a делится справа на Y , и потому X делится справа на Y . Считаем Y_1 непустым. Если X делится на Y справа, то $X = ZY$ в Π для некоторого слова Z . Поскольку $X_1X_2 = ZY_1Y_2$ в Π и X_2, Y_2 – максимальные концы слов, которые являются правыми делителями a , то согласно доказательству леммы 4.2 должны быть справедливы равенства $X_1 = ZY_1$, $X_2 = Y_2$ в Π . Последнее условие мы можем проверить эффективно. Если оно не выполнено, то X не делится на Y справа. Если оно выполнено, то X делится справа на Y в том и только том случае, когда X_1 делится справа на Y_1 . Действительно, мы установили, что делимость X на Y справа влечет делимость X_1 на Y_1 справа. Обратно, пусть $X_1 = WY_1$ в Π . Тогда $X = X_1X_2 = WY_1X_2 = WY_1Y_2 = WY$ в Π , так как X_2 и Y_2 равны в Π .

Теперь нам осталось выяснить вопрос о делимости справа X_1 на Y_1 , но эти слова по сумме длин меньше, чем X и Y , и доказательство завершается при помощи индукции по сумме длин слов X и Y . Лемма доказана.

ЛЕММА 4.4. Пусть в $\Pi = \langle a, b \mid a = bQa \rangle$ разрешима проблема левой делимости. Тогда в Π разрешима проблема правой делимости буквы a на заданное слово.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть требуется выяснить, делится ли a справа на заданное слово X . Проводим индукцию по длине слова X . Пусть $c \in \{a, b\}$ – первая буква слова X и $X \equiv cY$. Ясно, что Y можно считать непустым. Мы вначале проверим, делится ли a на Y справа. Допустим, что да, так как в противном случае a не делится справа на X . Будем считать, что $a = VY$ в Π . Нам достаточно теперь установить следующий вспомогательный факт: *буква a делится на cY справа тогда и только тогда, когда существует конец cDa слова bQa такой, что Y делится на Da слева.*

Поскольку мы имеем конечное число таких концов и для каждого из них проверка этого условия возможна ввиду разрешимости проблемы левой делимости, то нам достаточно доказать указанный факт.

Предположим, что Y делится на Da слева; положим $Y = DaZ$ в Π . Так как cDa – конец слова bQa , можно положить $bQa \equiv WcDa$. Имеем равенства в Π

$$a = VY = VDaZ = VDbQaZ = VDWcDaZ = VDWcY = VDWX,$$

т.е. a делится на X справа.

Докажем обратное. Пусть a делится справа на cY . Рассмотрим диаграмму Δ , имеющую минимально возможное число клеток, такую, что ее граничные метки имеют вид a и UcY для некоторого U . Так как Y непусто, ребро нижней границы, имеющее метку c , не принадлежит верхней границе. Следовательно, к нему примыкает некоторая клетка. Если это клетка с верхней граничной меткой bQa и нижней граничной меткой a , примыкающей к c , то ее можно удалить, получая диаграмму с меньшим числом клеток; при этом нижняя граничная метка полученной диаграммы имеет вид $UbQ \cdot cY$.

Следовательно, клетка, примыкающая к c , примыкает своей нижней границей, имеющей метку bQa . Если ее последнее ребро с меткой a примыкает к c (рис. 9), то

Рис. 9

Рис. 10

можно удалить эту клетку вместе с отмеченной поддиаграммой Γ , уменьшая число клеток.

Наконец, пусть клетка примыкает к c так, что не последнее ее ребро примыкает к c (рис. 10). В этом случае $bQa \equiv WcDa$ при некоторых D, W , и из рассмотрения поддиаграммы Γ видно, что Y делится на Da слева, что и требовалось установить. Лемма доказана.

Рис. 11

ТЕОРЕМА 4.1. Для полугруппы $\Pi = \langle a, b \mid a = bQa \rangle$ равносильны следующие алгоритмические проблемы: проблема равенства слов, проблема левой

делимости, проблема правой делимости. Все эти проблемы равносильны проблеме равенства данного слова букве a .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эта теорема следует из теоремы 3.1, лемм 4.2–4.4 и теоремы 3.2.

Для удобства изобразим (рис. 11) схему (где $\mathbf{W}, \mathbf{L}, \mathbf{R}$ – проблемы слов, левой и правой делимости; $\mathbf{W}^a$ – проблема равенства заданного слова букве a ; $\mathbf{L}_a(\mathbf{R}_a)$ – проблема левой (правой) делимости данного слова на a ; $\mathbf{L}^a(\mathbf{R}^a)$ – проблема левой (правой) делимости буквы a на заданное слово). Отметим, что проблема $\mathbf{R}_a$ тривиальна, и мы ее не включаем в схему. Очевидные связи изображены стрелкой $\implies$. Мы не включаем также $\mathbf{L}_a$, поскольку она очевидным образом равносильна $\mathbf{L}$.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. *Для полугрупп вида $\Pi = \langle a, b \mid a = bQa \rangle$, удовлетворяющих одному из условий (1)–(5) (см. теорему 2.2), разрешима проблема правой делимости.*

Это сразу вытекает из теорем 2.2 и 4.1.

В заключение данного параграфа хотелось бы задать следующий интересный

ВОПРОС. *Существует ли такая полугруппа Π вида $\langle a, b \mid a = bQa \rangle$ и такое слово X , что для любого натурального k слово X делится в Π слева на a^k ?*

Нам представляется, что ответ на него поможет прояснить вопрос о разрешимости рассматриваемых алгоритмических проблем в полугруппах вида $\langle a, b \mid a = bQa \rangle$.

§ 5. О свойствах полугрупп, заданных соотношениями без односторонних циклов

Данный параграф тесно связан с изложенным выше, так как проблемы равенства и делимости для полугрупп с одним определяющим соотношением сведены к случаю двухбуквенного алфавита и несократимого с одной стороны соотношения [7].

Мы будем изучать свойства полугрупп без левых циклов. (Очевидные аналоги установленных фактов имеют место и для полугрупп без правых циклов.) Нас будут интересовать алгебраические свойства таких полугрупп.

Пусть $\langle x_1, \dots, x_m \mid A_i = B_i (1 \leq i \leq k) \rangle$ – копредставление без левых циклов (очевидно, $k < m$). Пусть S – полугруппа с единицей, задаваемая им. Для удобства мы присоединим к S нулевой элемент 0. Получившуюся полугруппу с присоединенным нулем обозначим через S_0 .

Следующую лемму можно извлечь из работы [12].

ЛЕММА 5.1. *Пусть Π – полугруппа с единицей, заданная копредставлением без левых циклов. Тогда для любых слов x, y пересечение $x\Pi \cap y\Pi$ либо пусто, либо равно $z\Pi$, где z – некоторое слово.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если x, y не сравнимы в Π слева, то $x\Pi \cap y\Pi = \emptyset$. Допустим, что x, y сравнимы в Π слева. По лемме 3 [12] $z = xf(x, y) = yf(y, x)$ в Π (см. там же необходимые обозначения). Если $w \in x\Pi \cap y\Pi$, то $w = xi = yv$ в Π для некоторых u, v , и ввиду [12, лемма 2] $w \in xf(x, y)\Pi = z\Pi$. Отсюда очевидно, что $x\Pi \cap y\Pi = z\Pi$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 5.1. *Если Π – полугруппа с единицей, заданная копредставлением без левых циклов, то в полугруппе Π_0 (с присоединенным нулем) пересечение главных правых идеалов – главный правый идеал.*

Отметим очевидный факт, что для любых элементов $x, y \in \Pi_0$ условие $x\Pi_0 = y\Pi_0$ равносильно $x = y$. Таким образом, Π_0 находится во взаимно однозначном соответствии с множеством своих главных правых идеалов.

Можно определить операцию $+$ на Π_0 , полагая по определению $(x + y)\Pi_0 = x\Pi_0 \cap y\Pi_0$ (для любых $x, y \in \Pi_0$ такой элемент определен однозначно). Ясно, что $x + y = y + x$, $x + x = x$ для любых $x, y \in \Pi_0$, т.е. данная операция превращает Π_0 в (верхнюю) полурешетку (т.е. коммутативную полугруппу идемпотентов). С этой операцией естественно связано отношение частичного порядка $\succeq$, где $x \succeq y$ по определению означает $x = x + y$, что равносильно условию $x\Pi_0 \subseteq y\Pi_0$. Это означает, что либо $x = 0$, либо x делится на y слева.

Каковы свойства данной полурешетки?

ТЕОРЕМА 5.1. *Пусть Π – полугруппа с единицей, заданная копредставлением без левых циклов. Тогда определенная выше полурешетка $\langle \Pi_0, + \rangle$ удовлетворяет следующему условию: для любых $a_1, \dots, a_r \in \Pi_0$, где $r \geq 2$, найдутся a_i, a_j ($i \neq j$) такие, что $a_1 + \dots + a_r = a_i + a_j$.*

Заметим, что далеко не каждая полугруппа удовлетворяет заключению следствия 5.1 и, тем более, теоремы 5.1. Эта теорема накладывает весьма сильные алгебраические ограничения на полугруппу. Говоря теперь уже об идеалах полурешетки, мы можем так переформулировать теорему: любой конечно порожденный идеал полурешетки порождается двумя элементами. Интересно либо найти какие-то еще алгебраические условия такого сорта, необходимо выполняющиеся в полугруппах без левых циклов, либо доказать, что полугруппа с некоторым набором чисто алгебраических свойств обладает копредставлением без левых циклов (хотя бы в данном множестве образующих).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно ограничиться рассмотрением случая трех элементов: a_1, a_2, a_3 . Пусть X_1, X_2, X_3 – слова над алфавитом порождающих Π , соответствующим ее копредставлению без левых циклов. Если какие-либо два слова из трех не сравнимы в Π слева, то их сумма, как и сумма всех трех слов, равна нулю. Поэтому далее предположим, что все рассматриваемые слова попарно сравнимы в Π слева.

Пусть слова X, Y сравнимы слева в Π . Тогда определены слова $f(X, Y), f(Y, X)$ и имеется единственная диаграмма, осуществляющая равенство $Xf(X, Y) = Yf(Y, X)$, имеющая минимально возможное число клеток. Назовем ее *диаграммой сравнимости слева слов X, Y* или просто *диаграммой сравнимости*.

Выберем теперь диаграммы сравнимости слева любой из трех пар вида X_i, X_j ($i \neq j$). Именно, пусть Δ_i – диаграмма, осуществляющая равенство в Π слов $X_{i+1}f(X_{i+1}, X_{i+2})$ и $X_{i+2}f(X_{i+2}, X_{i+1})$ (здесь и далее действия над нижними индексами производятся по модулю 3, а сами индексы принимают значения от 1 до 3). Наша задача – установить следующий факт: при некотором i одно из слов $f(X_i, X_{i-1}), f(X_i, X_{i+1})$ является началом другого; проверим, что из этого будет следовать утверждение теоремы.

Без ограничения общности пусть $f(X_i, X_{i-1}) \equiv f(X_i, X_{i+1})W$. Тогда в Π имеем равенства

$$X_{i-1}f(X_{i-1}, X_i) = X_i f(X_i, X_{i-1}) = X_i f(X_i, X_{i+1})W = X_{i+1}f(X_{i+1}, X_i)W,$$

т.е. элемент $X_{i-1}f(X_{i-1}, X_i) = X_i f(X_i, X_{i-1})$, порождающий главный правый идеал $X_{i-1}\Pi_0 \cap X_i\Pi_0$, делится в Π слева на X_{i+1} . Это дает включение $X_{i-1}\Pi_0 \cap X_i\Pi_0 \subseteq X_{i+1}\Pi_0$, приводящее к равенству $X_1 + X_2 + X_3 = X_{i-1} + X_i$.

Осталось доказать требуемый факт, что будет сделано от противного. Рассмотрим “минимальный” контрпример, имея в виду минимальное суммарное число клеток в диаграммах $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, при фиксированном числе клеток – минимальную сумму длин шести слов вида $f(X_i, X_j)$ ($i \neq j$) и при фиксированных значениях предыдущих параметров – минимальную сумму длин трех слов X_i . Ввиду очевидного равенства $1 + x = x$ все слова X_i можно считать непустыми.

Поскольку мы рассматриваем контрпример, все шесть слов вида $f(X_i, X_j)$ непусты. Проверим, что для любого i слова $f(X_i, X_{i-1})$ и $f(X_i, X_{i+1})$ начинаются с разных букв. Если они начинались бы с одной и той же буквы x , то слово X_i можно было бы заменить на $X_i x$. При этом $f(X_i, X_{i-1}) \equiv x f(X_i x, X_{i-1})$, $f(X_i, X_{i+1}) \equiv x f(X_i x, X_{i+1})$. Отсюда следует, что контрпример можно уменьшить, так как диаграммы не изменяются, а два из шести слов вида $f(X_i, X_j)$ уменьшают длину на единицу.

Каждой диаграмме естественным образом можно сопоставить путь в левом графе. Именно, делая обход начальной вершины диаграммы по часовой стрелке на малом расстоянии, будем отмечать, в какие из клеток мы попадаем. Каждой клетке соответствует определяющее соотношение, а потому и ребро левого графа. Такие ребра образуют требуемый путь.

Теперь рассмотрим пути p_1, p_2, p_3 в левом графе, соответствующие диаграммам $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$. Их произведение – путь p с одной и той же начальной и конечной вершиной. Допустим вначале, что этот путь состоит из одной вершины. Это в точности значит, что все слова X_i начинаются с одной и той же буквы (напомним, что все слова X_i непусты). Легко понять, что при замене каждого из слов X_i на слово без начальной буквы, мы вновь имеем контрпример, что противоречит минимальности выбранного контрпримера. Следовательно, путь p непуст, и ввиду отсутствия циклов в левом графе находим, что p содержит пару подряд проходимых взаимно обратных ребер e и e^{-1} .

Легко понять, что клетки, соответствующие этим ребрам левого графа, находятся в разных диаграммах. Действительно, если они содержатся в одной и той же диаграмме Δ_i , то они не могут образовывать зеркальную пару ввиду минимальности числа клеток в Δ_i . Если они расположены, как на рис. 12, то в Δ_i имеется поддиаграмма, метки контуров которой начинаются с одной буквы, но соответствуют различным ребрам диаграммы. Из условия минимальности диаграммы и отсутствия циклов в левом графе сразу следует, что начальные ребра контуров диаграммы равны, что приводит к противоречию.

Итак, будем считать, что ребру e соответствует клетка π в Δ_1 , а ребру e^{-1} – клетка π' в Δ_2 . Для удобства склеим начало нижнего контура диаграммы Δ_1 , имеющее метку X_3 , с началом верхнего контура диаграммы Δ_2 , имеющим ту же метку (рис. 13).

Рис. 12

Пусть t – путь, по которому произведена склейка. Нижний контур клетки π обозначим через q_1 , а верхний контур π' – через q_2 . Их максимальное общее начало q непусто и является началом пути t .

Рис. 13

Рассмотрим пары клеток π_1, π_2 со следующими свойствами:

- π_j лежит в Δ_j ($j = 1, 2$);
- метка $U(V)$ верхнего контура π_1 (π_2) графически равна метке нижнего контура π_2 (π_1);
- нижний контур клетки π_1 имеет вид ss_1 , а верхний контур π_2 – вид ss_2 , где s – непустое максимальное начало этих контуров;
- путь s – подпуть в t .

Ясно, что такие пары имеются. Рассмотрим, сохраняя обозначения, такую из них, для которой подпуть s в t расположен как можно правее.

Рассмотрим случай, когда пути s_1, s_2 пусты. Покажем, как уменьшить контрпример. Исключим клетки π_1, π_2 из диаграмм Δ_1, Δ_2 соответственно, получая диаграммы Δ'_1, Δ'_2 , а вместо слова X_3 рассмотрим слово X'_3 , получаемое из X_3 заменой подслова V на слово U таким образом, что вхождение слова V в X_3 получается из вхождения пути s с меткой V в путь t с меткой X_3 . Слова X_1, X_2, X'_3 приводят к трем диаграммам сравнимости, которые суть в точности $\Delta'_1, \Delta'_2, \Delta_3$. После описанных действий мы вновь имеем контрпример, но три новых диаграммы имеют на две клетки меньше, чем старые. Это дает противоречие.

Теперь рассмотрим случай, когда пути s_1, s_2 непусты (напомним, что их метки одинаковы). Пусть v – конец пути s , и пусть e_j – первое ребро пути s_j ($j = 1, 2$). Для начала допустим, что v – конец пути t . Мы утверждаем, что e_1 (e_2) принадлежит нижней (верхней) границе диаграммы Δ_1 (Δ_2). Предполагая, что e_1 не обладает этим свойством, мы можем выделить поддиаграмму в Δ_1 с той же верхней границей, взяв в качестве нижней границы некоторый путь, начинающийся с se_1 . Легко понять, что эта поддиаграмма имеет меньше клеток, чем Δ_1 , но метки ее контуров по-прежнему начинаются словами X_2, X_3 . Тем самым мы получаем противоречие со свойством диаграмм сравнимости (см. их определение выше). Рассуждения для e_2 аналогичны. В результате оказывается, что $f(X_3, X_2)$ и $f(X_3, X_1)$ начинаются одной и той же буквой, которая есть метка ребер e_1 и e_2 . Это противоречит тому, что для любого i слова $f(X_i, X_{i-1})$ и $f(X_i, X_{i+1})$ начинаются с разных букв.

Осталось рассмотреть последний случай, когда конец пути s не совпадает с концом пути t . Ребра e_1, e_2 различны по определению пути s . Они имеют одну и ту же метку x . Пусть e – ребро пути t с меткой y , выходящее из вершины v . Двигаясь вблизи v от ребра e_1 к ребру e по часовой стрелке, мы можем рассмотреть соответствующий путь в левом графе из x в y подобно тому, как это делалось ранее. Аналогично, двигаясь вблизи v в том же направлении от e к e_2 , мы получим путь в левом графе из y в x . Произведение p этих путей непусто. Оно является петлей из x в x , и потому путь p имеет два взаимно обратных ребра, проходимых подряд. Этим ребрам соответствуют клетки, одна из которых лежит в Δ_1 , а другая – в Δ_2 , что доказывается так же, как это уже делалось. Полученные клетки образуют пару, обладающую всеми свойствами, которые отмечались при выборе клеток π_1, π_2 , однако расположены они правее, что противоречит правилу выбора клеток π_1, π_2 . Опять пришли к противоречию. Теорема доказана.

Список литературы

1. Адян С. И. О вложимости полугрупп в группы // ДАН СССР. 1960. Т. 133. № 2. С. 255–257.
2. Адян С. И. К проблеме тождества в ассоциативных системах специального вида // ДАН СССР. 1960. Т. 135. № 6.
3. Адян С. И. Определяющие соотношения и алгоритмические проблемы для групп и полугрупп // Тр. МИАН. 1966. Т. 85. С. 1–124.
4. Адян С. И. О преобразованиях слов в полугруппе, заданной системой определяющих соотношений // Алгебра и логика. 1976. Т. 15. № 6. С. 611–621.
5. Адян С. И. К проблеме делимости для моноидов, заданных одним соотношением // Матем. заметки. 1994. Т. 55. № 1. С. 3–9.

6. Адян С. И., Оганесян Г. У. К проблемам равенства и делимости в полугруппах с одним определяющим соотношением // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1978. Т. 42. № 2. С. 219–225.
7. Адян С. И., Оганесян Г. У. О проблемах равенства и делимости для полугрупп с одним соотношением // Матем. заметки. 1987. Т. 41. № 3. С. 412–421.
8. Кашилицев Е. В. Графы и проблема слов для конечно-представленных полугрупп // Уч. зап. Тульского пед. ин-та. 1970. № 2. С. 290–302.
9. Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.
10. Михайлова К. А. Проблема вхождения для прямых произведений групп // ДАН СССР. 1958. Т. 119. С. 1103–1105.
11. Оганесян Г. У. О проблемах равенства и делимости в полугруппах с определяющим соотношением вида $a = bA$ // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1978. Т. 42. № 3. С. 602–612.
12. Оганесян Г. У. О полугруппах с одним соотношением и полугруппах без циклов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1982. Т. 46. № 1. С. 88–94.
13. Оганесян Г. У. О проблеме изоморфизма для полугрупп с одним определяющим соотношением // Матем. заметки. 1984. Т. 35. № 5. С. 685–691.
14. Оганесян Г. У. Делимость и равенство слов в полугруппах с одним соотношением // III Всесоюзный симпозиум по теории полугрупп. Свердловск, 1988.
15. Ольшанский А. Ю. Геометрия определяющих соотношений в группах. М.: Наука, 1989.
16. Саркисян О. А. Некоторые соотношения между проблемами тождества и делимости в группах и полугруппах // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 43. № 4. С. 909–921.
17. Саркисян О. А. О проблемах тождества и делимости в полугруппах и группах без циклов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1981. Т. 45. № 6. С. 1424–1441.
18. Baumslag G. Positive one-relator groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1971. V. 156. P. 165–183.
19. Benoist M. Parties rationnelles du groupe libre // C.R. Acad. Sci. Paris. Sér. A. 1969. V. 269. P. 1188–1190.
20. Higgins P. M. Techniques of Semigroup Theory. New York: Oxford University Press, 1992.
21. Howie J., Pride S. J. The word problem for one-relator semigroups // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1986. V. 99. P. 33–44.
22. Magnus W. Das Identitäts – Problem für Gruppen mit einer definierenden Relation // Math. Ann. 1932. V. 106. P. 295–307.
23. Meakin J., Sapir M. Congruences of free monoids and submonoids of polycyclic monoids // J. Austral. Math. Soc. Series A. 1993. V. 54. P. 236–253.
24. Remmers J. H. On the geometry of semigroup presentations // Advances in Math. 1980. V. 36. № 3. P. 283–296.
25. Rips E. Subgroups of small cancellation groups // Bull. London Math. Soc. 1982. V. 14. № 1. P. 45–47.

Поступило в редакцию
14.XI.1995