Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. О. Иванов, А. А. Тужилин, Геометрия множества минимальных сетей данной топологии с фиксированной границей, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1997, том 61, выпуск 6, 119–152

DOI: <https://doi.org/10.4213/im168>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 05:21:26

УДК 514.77+512.816.4+517.924.8

А. О. Иванов, А. А. Тужилин

Геометрия множества минимальных сетей данной топологии с фиксированной границей

В настоящей работе изучается структура множества $\mathcal{M}_G(\varphi)$ всех плоских локально минимальных сетей с фиксированными топологией G и границей φ . Показано, что если это множество непусто, то оно представляет собой выпуклое тело размерности k в конфигурационном пространстве $\mathbb{R}^N$ подвижных вершин сети, где k – цикломатическое число подвижного подграфа в G .

В частности, все сети из $\mathcal{M}_G(\varphi)$ взаимно параллельны, имеют одинаковую длину и могут быть продеформированы друг в друга в классе локально минимальных сетей того же типа и с той же границей. Более того, в работе описано, чем две сети из $\mathcal{M}_G(\varphi)$ могут отличаться друг от друга.

Библиография: 51 наименование.

Введение

Круг вопросов, связанных с изучением минимальных сетей, затягивающих данное граничное множество точек плоскости, традиционно объединяется под общим названием *проблема Штейнера*. Задачи этого типа продолжают привлекать внимание математиков со времен Ферма до наших дней (см. исторические обзоры в [16], [43], [50], [51]). Этот неослабевающий интерес связан, прежде всего, с тем, что сети минимальной длины постоянно возникают в приложениях (см. [1], [11], [13], [16], [20], [22], [30]–[33], [43]). При этом на практике, как правило, требуется уметь строить минимальные сети с конкретной границей, состоящей из достаточно большого числа граничных точек. Поэтому особую важность приобретают результаты, позволяющие ускорить работу алгоритмов, строящих минимальные сети с фиксированной границей.

Следует отметить, что задача построения абсолютно минимальной сети с данной границей, как известно (см. [11]), является NP-трудной, т.е., говоря неформально, “скорее всего” не существует полиномиального алгоритма построения такой сети. Одним из основных факторов, объясняющих неполиномиальный рост сложности поиска абсолютно минимального дерева, является обилие возможных топологий сетей, претендующих на то, чтобы быть решением, где под топологией сети понимается соответствующий класс эквивалентности абстрактных графов

При работе над данной статьей авторы пользовались частичной поддержкой Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ), Международной Ассоциации по содействию сотрудничеству с учеными Независимых Государств бывшего Советского Союза (INTAS) и грантом Международного Центра Теоретической Физики (ICTP), Италия. Авторы очень признательны этим организациям.

(см. точные определения ниже). Поэтому много исследований в последнее время направлено на получение априорных ограничений на возможные топологии минимальных сетей в терминах геометрии граничного множества (см. [6]–[8], [36]–[39], [42]–[44], [34], [35], [48], [49], [24]–[26]). Ясно, что такие оценки позволяют сократить перебор. С другой стороны, важно, чтобы алгоритм, обрабатывающий каждую конкретную топологию, работал достаточно быстро.

Первый алгоритм построения на плоскости локально минимальной сети данного топологического типа с данной границей был предложен Мелзаком в [19] для случая деревьев, т.е. связных графов без циклов. Этот алгоритм (см. описание ниже) за время, экспоненциально зависящее от числа граничных точек, или строил требуемое минимальное дерево, или получал ответ, что такого дерева не существует. Серия исследований, посвященных ускорению алгоритма Мелзака, была завершена блестящей работой Хванга [14], в которой был предложен улучшенный алгоритм Мелзака (см. описание ниже), выполняющий свою работу за линейное время.

Одним из центральных результатов, полученным в [14] и позволившим существенно ускорить работу алгоритма Мелзака, была доказанная Хвангом теорема единственности, утверждающая, что для каждой топологии G , где G – дерево, и для произвольной фиксированной границы существует не более одной минимальной сети топологии G с данной границей. Другими словами, Хванг показал, что если G – дерево, то множество $\mathcal{M}_G(\varphi)$ всех локально минимальных сетей топологии G с границей φ состоит не более чем из одной точки.

Настоящая статья посвящена исследованию геометрии множества $\mathcal{M}_G(\varphi)$ всех локально минимальных сетей с данной топологией и фиксированной границей как подмножества конфигурационного пространства $[G, \varphi] = \mathbb{R}^{2s}$ всех подвижных вершин плоских линейных сетей топологии G с границей φ . Легко показать, что $\mathcal{M}_G(\varphi)$ содержится во множестве $[G, \varphi]_{\min}$ всех минимумов функционала длины, определенного на пространстве $[G, \varphi]$. Более того, если $\mathcal{M}_G(\varphi)$ непусто, то степени вершин графа G не превосходят трех, т.е. G является так называемым *графом Штейнера*, и при этом всегда можно считать, что в граничное множество входят все вершины степени 1 и 2. Поэтому в дальнейшем мы ограничимся рассмотрением лишь таких графов G .

Наша цель – обобщить результаты Хванга на случай локально минимальных сетей общего вида (не обязательно деревьев). Такие сети также возникают в приложениях, скажем, при моделировании цилиндрических мембран, в теории пены и пр. Мы сформулируем здесь основной результат работы неформально (см. точные утверждения ниже: теорема 8.2, теорема 9.1 и следствие 9.2).

Нам понадобятся следующие определения. Пусть G – некоторый граф Штейнера и M – некоторая фиксированная граница (т.е. некоторое подмножество множества вершин графа G , содержащее все вершины степени 1 и 2). Обозначим через $\hat{G}_M$ подграф в G , порожденный всеми неграничными вершинами из G , т.е. вершинами, не лежащими в M . Подграф $\hat{G}_M$ назовем *подвижным подграфом графа G по отношению к границе M* . Далее, ребро сети отнесем к *нулевому уровню*, если оно принадлежит какому-нибудь циклу подвижного подграфа $\hat{G}_M$ этой сети. Ребро, не принадлежащее нулевому уровню, но инцидентное некоторому ребру этого

уровня, назовем *ребром первого уровня*, а все остальные ребра (т.е. ребра, не лежащие ни на нулевом, ни на первом уровнях) назовем *ребрами второго уровня*. Итак, имеет место следующий результат.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. Пусть G – некоторый граф Штейнера, M – произвольное подмножество множества вершин графа G , содержащее все вершины степени 1 и 2 (т.е. граница графа G), $\varphi: M \rightarrow \mathbb{R}^2$ – некоторое фиксированное граничное отображение, $\hat{G}_M$ – подвижный подграф графа G по отношению к границе M и $k(\hat{G}_M)$ – цикломатическое число подвижного подграфа $\hat{G}_M$ графа Штейнера G .

Тогда если множество $\mathcal{M}_G(\varphi)$ непусто, то оно совпадает с внутренностью множества $[G, \varphi]_{\min}$, которое, в свою очередь, является выпуклым телом в $k(\hat{G}_M)$ -мерном подпространстве из $[G, \varphi]$.

В частности, все сети из $\mathcal{M}_G(\varphi)$ параллельны, имеют одинаковую длину и могут быть продеформированы друг в друга в классе локально минимальных сетей того же типа и с той же границей. Более того, при каждой такой деформации остаются неподвижными все ребра второго уровня и все прямые, содержащие ребра первого уровня.

Авторы надеются, что данная теорема позволит в ближайшее время создать алгоритм, который для произвольного графа Штейнера G и произвольного граничного отображения φ или строит локально минимальную сеть из $\mathcal{M}_G(\varphi)$ (какую-нибудь), или определяет, что множество $\mathcal{M}_G(\varphi)$ пусто.

ЗАМЕЧАНИЕ. В формулировке основной теоремы предполагается, что граница M графа G содержит все вершины графа G степени 1 и 2. Естественность этого требования вытекает из теоремы о локальной структуре минимальных сетей (см. предложение 4.1) и обсуждается ниже (см. замечания к предложению 4.1). Однако легко переформулировать основную теорему применительно к ситуации, когда граница M графа G не содержит несколько, скажем N , вершин степени 2 из G . В этом случае, очевидно, размерность подпространства из $[G, \varphi]$, в котором содержится выпуклое тело $[G, \varphi]_{\min}$, увеличится на N , а все остальное останется без изменения.

Авторы, пользуясь случаем, выражают свою глубокую и искреннюю признательность академику А. Т. Фоменко за его постоянное внимание к работе.

§ 1. Топологические графы

Пусть G – произвольное топологическое пространство, склеенное из конечного числа отрезков прямой $[a_i, b_i]$ по некоторой эквивалентности, отождествляющей концевые точки этих отрезков. Такое пространство G называется *топологическим графом*. Если $\pi: \sqcup [a_i, b_i] \rightarrow G$ – естественная проекция, задаваемая этой склейкой, то образ каждого отрезка $[a_i, b_i]$ называется *ребром топологического графа G* , а образы точек a_i и b_i – *вершинами из G* . Сами отрезки $[a_i, b_i]$ назовем *отрезками, параметризующими ребра топологического графа G* .

Ясно, что мы получили топологическое представление абстрактных графов самого общего вида, т.е. графов с петлями и кратными ребрами, поэтому на топологические графы непосредственно переносится вся терминология как теории абст-

рактных графов, так и теории топологических пространств, чем мы и будем пользоваться в дальнейшем. Кроме того, в силу отмеченного соответствия между топологическими и абстрактными графами мы часто для краткости будем называть топологические графы просто *графами*, опуская слово “топологический”.

Предположим, что в графе G выделено некоторое подмножество M множества его вершин. Пару (G, M) мы будем называть *графом с границей M* . Иногда, неформально, мы будем говорить, что *граф G имеет границу M* , и обозначать ее через ∂G . Вершины из ∂G будем называть *граничными* или *неподвижными*, а все остальные вершины – *внутренними* или *подвижными*. Ребра графа, инцидентные граничным вершинам, также назовем *граничными*, а ребро, не инцидентное никакой граничной вершине, назовем *внутренним*.

Пусть (G, M) – некоторый граф с границей M . Обозначим через $\hat{G}_M$ подграф в G , порожденный всеми внутренними вершинами графа (G, M) . Подграф $\hat{G}_M$ называется *подвижным подграфом графа G по отношению к границе M* . Отметим, что подвижный подграф состоит в точности из всех внутренних ребер графа (G, M) .

Два топологических графа G_1 и G_2 называются *эквивалентными*, если между ними существует гомеоморфизм φ , устанавливающий взаимно однозначное соответствие между множествами вершин этих графов. Каждый такой гомеоморфизм называется *эквивалентностью*. Если, кроме того, у графов G_i имеются границы M_i , состоящие из одинакового числа вершин, и задано некоторое взаимно однозначное соответствие $\nu: M_1 \rightarrow M_2$, то графы G_i называются *ν -эквивалентными*, если существует эквивалентность $\varphi: G_1 \rightarrow G_2$, ограничение которой на M_1 совпадает с ν .

Пусть G – произвольный граф с границей ∂G (возможно, пустой) и $P \in G$ – некоторая его точка. *Допустимой окрестностью $U \subset G$ точки P графа G* называется замыкание связной окрестности этой точки, не содержащее вершин графа G , отличных от P , если P – вершина, и не содержащее петель из G . Наделим окрестность U структурой графа, объявив вершинами все точки из $\partial U \cup \{P\}$, а ребрами – отрезки в U , соединяющие эти точки. Полученное дерево обозначим через G_U и будем называть *локальным графом с центром в точке P* . Определим *каноническую границу ∂G_U локального графа G_U* , включив в нее все вершины из ∂U , а также вершину P , если P – граничная вершина графа G .

Ниже мы используем локальные графы для определения локально минимальных сетей. Здесь же проиллюстрируем, как работает это понятие, напомним определение степени вершины. А именно, *степенью вершины v графа G* называется количество ребер произвольного локального графа с центром в v .

§ 2. Операции над топологическими графами

Пусть G – топологический граф и e – произвольное его ребро. Рассмотрим подпространство G' в G , полученное выкидыванием из G внутренности ребра e . Наделим G' структурой топологического графа, объявив вершинами все вершины графа G , а ребрами – все ребра графа G , за исключением ребра e . Описанная только что перестройка графа G называется *выкидыванием из G ребра e* и обозначается $G \setminus e$.

Пусть G – топологический граф и v – произвольная его вершина. Пару (G, v) назовем *отмеченным топологическим графом*.

Пусть (G, v) и (G', v') – два отмеченных топологических графа. Пусть $I = [a, b]$ – отрезок. Склеим G, I и G' (как топологические пространства) следующим образом. Точку $a \in I$ отождествим с v , а точку $b \in I$ с v' . Полученное топологическое пространство $\bar{G}$ наделим структурой графа, выбрав в качестве вершин все вершины из G и G' , а в качестве ребер – все ребра из G и G' , а также отрезок I (точнее, его образ при склейке). Эта операция называется *склейкой отмеченных графов* (G, v) и (G', v') , а ребро, полученное из отрезка I , – *ребром склейки*.

Пусть G – топологический граф, e – произвольное его ребро и $I = [a, b]$ – отрезок, параметризующий ребро e . Пусть v и v' – вершины графа G , инцидентные ребру e (эти вершины могут совпадать, если e – циклическое ребро). Для определенности предположим, что точка $a \in I$ отождествляется с v , а точка $b \in I$ с v' . Выберем на e (фактически на $[a, b]$) некоторую внутреннюю точку A и рассмотрим два отрезка: $I_1 = [a, A]$ и $I_2 = [A, b]$. Выбросим из графа G ребро e и к полученному графу $G \setminus e$ приклеим отрезки I_1 и I_2 , отождествив вершину v с точкой $a \in I_1$, а вершину v' с точкой $b \in I_2$. Полученное топологическое пространство наделим структурой графа, объявив вершинами все вершины из $G \setminus e$, а также две разные точки $A_1 = A \in I_1$ и $A_2 = A \in I_2$; в качестве ребер возьмем все ребра из $G \setminus e$ плюс отрезки I_1 и I_2 . Описанная операция называется *разрезанием графа G по точке A* и обозначается $G \setminus A$. Естественные вложения отрезков I_1 и I_2 в отрезок I порождают очевидным образом погружение графа $G \setminus A$ в граф G ; при этом точки A_1 и A_2 переходят в одну точку $A \in e$. Ребро e будем называть *ребром разреза*, а точку A – *точкой разреза*. Также скажем, что ребро e при разрезании по точке A распадается на два ребра e_1 и e_2 , параметризованных соответственно отрезками I_1 и I_2 , а точка A распадается на две вершины A_1 и A_2 графа $G \setminus A$.

Определим теперь операцию на топологическом графе G , обратную к разрезанию. Для этого выберем в G две вершины v и v' степени 1. Пусть e и e' – ребра, инцидентные соответственно v и v' . Отождествим вершины v и v' . Полученное топологическое пространство обозначим через G' . Параметризуем очевидным образом объединение $e \cup e'$ некоторым отрезком, и после этого введем на G' структуру графа, выбрав в качестве вершин все вершины из G , за исключением v и v' , а в качестве множества ребер графа G' – множество всех ребер из G , из которого выброшены e и e' и в которое добавлено $e \cup e'$. Так полученный граф обозначим через $G/v \sim v'$, а описанную операцию назовем *склейкой графа G по вершинам v и v'* . Вершины v и v' называются *вершинами склейки*.

§ 3. Минимальные сети

Пусть G – связный граф. Непрерывное отображение Γ графа G в плоскость $\mathbb{R}^2$ называется *обобщенной топологической сетью*. При этом граф G называется *параметризующим графом* сети Γ , или ее *топологией*. Ограничение отображения Γ на вершины и ребра графа G будем называть соответственно *вершинами* и *ребрами* сети Γ . Ясно, что ребра сети – это непрерывные кривые на плоскости. Отметим, что образы различных вершин графа G при отображении Γ могут, вообще говоря, совпадать.

Выше мы определили различные операции над топологическими графами. Во многих случаях они очевидным образом переносятся и на сети. Полученные в результате сети будем называть и обозначать так же, как и соответствующие топологические графы. Разберем теперь нетривиальные ситуации. К ним относятся склейка отмеченных графов и склейка графа по паре его вершин степени 1. В первом случае надо дополнительно определить сеть на ребре склейки, в чем заключается некоторый произвол. Ниже мы иногда будем накладывать дополнительные ограничения на ребра склейки таких сетей, что будет обговариваться особо. Во втором случае сеть может быть корректно определена, если и только если образы вершин склейки совпадают.

Пусть $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^2$ – обобщенная сеть и ∂G – граница графа G . Ограничение отображения Γ на ∂G называется *границей сети* Γ и обозначается через $\partial\Gamma$. При этом если M – произвольное конечное подмножество плоскости $\mathbb{R}^2$ и Γ – сеть с границей $\partial\Gamma$, образ которой совпадает с M , то будем говорить, что сеть Γ *затягивает множество M по граничному отображению $\partial\Gamma$* . Вершины сети Γ , принадлежащие границе $\partial\Gamma$, называются *граничными* или *неподвижными*, а все остальные вершины из Γ – *внутренними* или *подвижными*. Ребра сети, инцидентные граничным вершинам, будем также называть *граничными*, а ребро, не инцидентное никакой граничной вершине, назовем *внутренним*.

Пусть $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^2$ – обобщенная сеть с границей $\partial\Gamma: \partial G \rightarrow \mathbb{R}^2$. Рассмотрим подвижный подграф $\hat{G}_{\partial G}$ графа G . Ограничение отображения Γ на $\hat{G}_{\partial G}$ называется *подвижной подсетью сети* Γ и обозначается через $\hat{\Gamma}_{\partial G}$.

Пусть $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^2$ – обобщенная сеть и $\bar{\Gamma}: G \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ – непрерывное отображение. Обозначим через Γ_t отображение $\bar{\Gamma}(\cdot, t)$. Тогда если $\Gamma_a = \Gamma$, то отображение $\bar{\Gamma}$ и семейство отображений Γ_t называются *деформацией сети* Γ .

Пусть теперь обобщенная сеть $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^2$ имеет некоторую границу и Γ_t – деформация сети Γ . Мы говорим, что эта деформация *неподвижна на границе*, если каждая граничная вершина сети Γ неподвижна при деформации Γ_t .

Обобщенная топологическая сеть Γ называется *погруженной сетью*, если каждое ее ребро – вложенная кривая. Так как в дальнейшем нас будут интересовать преимущественно погруженные сети, то такие сети для краткости будем называть просто *сетями*, опуская слово “погруженный”.

Если обобщенная сеть Γ погруженная, то, определяя ее деформацию Γ_t , будем, как правило, предполагать, что все сети Γ_t также являются погруженными и, кроме того, траектория каждой вершины $\Gamma: v \rightarrow \mathbb{R}^2$ сети Γ при деформации Γ_t , т.е. кривая $\Gamma_t(v)$, является кусочно гладкой кривой.

Сеть Γ (погруженная) называется *измеримой*, если все ее ребра – спрямляемые кривые, т.е. для каждого ребра определена длина как предел длин вписанных в это ребро ломаных. *Длиной сети* называется сумма длин входящих в нее ребер.

Пусть опять $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^2$ – произвольная сеть, P – любая точка графа G и G_U – локальный граф с центром в P . Сеть с границей, равная ограничению отображения Γ на G_U , называется *локальной сетью с центром в точке P* и обозначается через Γ_U . При этом ограничение отображения Γ на каноническую границу ∂G_U локального графа G_U называется *канонической границей локальной сети Γ_U* и обозначается через $\partial\Gamma_U$. Отметим, что любая локальная сеть произвольной изме-

римой сети также измерима.

Измеримая сеть Γ , затягивающая конечное множество $M \subset \mathbb{R}^2$ точек плоскости $\mathbb{R}^2$, называется *абсолютно минимальной сетью с границей M* , если ее длина наименьшая среди длин всех измеримых сетей, затягивающих M .

Определим теперь локально минимальные сети. Неформально говоря, это такие сети, каждый достаточно малый фрагмент которых абсолютно минимален. Чтобы дать строгое определение, воспользуемся введенным выше понятием локальной сети.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Измеримая сеть Γ , затягивающая множество $M \subset \mathbb{R}^2$, называется *локально минимальной*, если для любой ее точки P некоторая локальная сеть с центром в P является абсолютно минимальной сетью по отношению к своей канонической границе.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Поясним, что значит “локальная сеть с центром в P является абсолютно минимальной”. Выше мы определили каноническую границу локальной сети. Рассмотрим образ этой канонической границы. Получим некоторое подмножество M плоскости $\mathbb{R}^2$. Так вот, абсолютная минимальность рассматриваемой локальной сети означает, что эта сеть абсолютно минимальна среди сетей, затягивающих M .

В дальнейшем, в основном, мы будем изучать лишь локально минимальные сети, поэтому, для краткости, будем называть их просто *минимальными*, опуская слово “локальный”.

§ 4. Локальное устройство минимальных сетей

В силу определения локальное устройство абсолютно минимальных и локально минимальных сетей одинаково. Следующая теорема полностью описывает локальное устройство минимальных сетей и может, с небольшими изменениями формулировки, быть обобщена на случай сетей в произвольном римановом многообразии (см. [41]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1 (о локальной структуре). *Сеть Γ с границей M минимальна, если и только если имеют место следующие свойства :*

- 1) *все ребра сети – прямолинейные отрезки;*
- 2) *угол между любыми двумя смежными ребрами не меньше 120° ;*
- 3) *все вершины степени 1 являются граничными;*
- 4) *если вершина степени 2 не граничная, то угол между выходящими из нее невырожденными ребрами равен 180° .*

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Из предложения 4.1 вытекает, что степень каждой вершины минимальной сети не превосходит 3. Именно такие сети являются предметом нашего рассмотрения. Связный топологический граф, степени вершин которого не превосходят трех, называется *графом Штейнера*, а соответствующая сеть – *сетью Штейнера*. Графы (сети) Штейнера без вершин степени 2 называются *невырожденными*. Итак, каждая минимальная сеть является сетью Штейнера.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Легко видеть, что из любой сети Γ , не меняя ее как подмножество плоскости, можно получить другую сеть, выбрав на ребрах параметризующего графа G произвольные внутренние точки и добавив их к множеству подвижных вершин (при этом надо сделать очевидную перестройку ребер). Более того, по предложению 4.1 при такой перестройке сети каждая минимальная сеть остается минимальной.

Обратно, выбрасывая из множества вершин параметризующего графа G подвижные вершины степени 2 и “укрупняя” при этом ребра, склеивая каждую пару ребер из G , инцидентных такой вершине, в одно ребро, получим, очевидно, новую сеть, совпадающую, как подмножество, с Γ . Опять, если Γ минимальна, то результат описанной только что перестройки – также минимальная сеть.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Каждую подвижную вершину степени 2 произвольной сети Γ будем называть *фиктивной*.

В дальнейшем, не ограничивая общности, *будем всегда считать, что рассматриваемые сети не имеют фиктивных вершин*.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. Пусть Γ – произвольная минимальная сеть с границей $\partial\Gamma$. По предложению 4.1 степени вершин сети Γ не превосходят 3. В соответствии со сделанным выше соглашением, граница сети Γ включает все вершины степени 1 и 2 (напомним, что мы договорились запретить все фиктивные вершины), однако может также содержать и вершины степени 3.

Выкинем из $\partial\Gamma$ все вершины сети Γ степени 3. По тому же предложению 4.1 сеть Γ с так перестроенной границей по-прежнему является минимальной сетью. Однако теперь граница сети Γ состоит в точности из всех вершин степени 1 и 2.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Пусть G – произвольный граф Штейнера. Множество всех вершин из G степени 1 и 2 мы назовем *эффективной границей* и будем обозначать через $\partial_e G$. Вершины из G степени 3 называются *точками Штейнера*. Все эти определения дословно переносятся и на сети Штейнера.

Итак, имеет место следующий очевидный результат.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.1. *Сеть Штейнера Γ с границей $\partial\Gamma \supset \partial_e \Gamma$ минимальна тогда и только тогда, когда минимальна сеть Γ с эффективной границей $\partial_e \Gamma$.*

Из предложения 4.1 вытекает, что граница минимальной сети всегда содержит эффективную границу. Для дальнейшего удобно ввести следующее соглашение. *Границей графа Штейнера* будем называть произвольное подмножество множества вершин этого графа, содержащее эффективную границу. Отметим, что тем самым мы также уточнили и определение границы сети Штейнера.

В заключении данного параграфа приведем еще одно следствие из предложения 4.1 (см., например, [41]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2 (свойство выпуклой оболочки). *Каждая минимальная сеть Γ , затягивающая множество $M \subset \mathbb{R}^2$, содержится в выпуклой оболочке $\text{conv}(M)$ множества M . Каждая вершина степени 3 сети Γ (точнее, образ вершины) является внутренней точкой в $\text{conv}(M)$.*

§ 5. Минимальная реализация

Пусть G – произвольный граф Штейнера, $\partial G \supset \partial_e G$ – некоторая его граница, и пусть $\varphi: \partial G \rightarrow \mathbb{R}^2$ – произвольное отображение. Такие отображения φ будем называть *граничными*. В отличие от данного выше определения границы сети, мы не предполагаем, что граничное отображение φ индуцировано некоторой сетью $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^2$. Мы говорим, что G имеет *минимальную реализацию с границей* φ , если существует минимальная сеть $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^2$ с границей $\partial \Gamma$, равной φ .

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Пусть задано некоторое граничное отображение $\varphi: \partial G \rightarrow \mathbb{R}^2$ границы ∂G графа Штейнера G . В дальнейшем мы для удобства будем обозначать подвижный подграф $\hat{G}_{\partial G}$ графа $(G, \partial G)$ по отношению к границе ∂G через $\hat{G}_\varphi$ и называть его *подвижным подграфом графа G по отношению к граничному отображению φ* .

Если G – дерево, то имеется придуманный Мелзаком [19] алгоритм, позволяющий понять, имеет ли данный граф Штейнера минимальную реализацию с заданной границей φ , и если да, то построить соответствующую минимальную сеть.

Напомним этот алгоритм.

5.1. Алгоритм Мелзака. Пусть G – дерево Штейнера с границей ∂G и $\varphi: \partial G \rightarrow \mathbb{R}^2$ – некоторое граничное отображение. Мы ограничимся рассмотрением случая, когда $\partial G = \partial_e G$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. Ниже мы увидим, что если дерево G имеет минимальную реализацию с границей φ , то эта реализация единственна. Таким образом, для случая общих границ ∂G надо сначала проверить, имеет ли минимальную реализацию Γ дерево G с границей $\varphi|_{\partial_e G}$, и если да, то в качестве следующего шага выяснить, совпадают ли отображения Γ и φ на вершинах из $\partial G \setminus \partial_e G$. Если да, то минимальная реализация построена. В противном случае минимальной реализации с границей φ не существует.

Разобьем G на невырожденные компоненты, т.е. на 2-деревья, разрезав G по всем вершинам степени 2. Мы проверим, имеет ли минимальную реализацию каждая невырожденная компонента (с соответствующей границей, равной ограничению граничного отображения φ на эффективную границу этой компоненты), и если да, то, построив каждую из них, проверим, под какими углами стыкуются ребра этих компонент в вершинах степени 2 дерева Γ . Если все эти углы не меньше 120° , то объединение построенных компонент и есть искомая минимальная реализация дерева G . Если же хотя бы один из этих углов меньше 120° , то из единственности минимальной реализации бинарного дерева с данной границей вытекает, что G не имеет минимальной реализации. Итак, единственным нетривиальным шагом является построение минимальной реализации невырожденного дерева Штейнера. Поэтому предположим сразу, что G – некоторое 2-дерево. Отметим, что по предположению граница 2-дерева G состоит в точности из всех вершин степени 1.

Если G имеет ровно одно ребро, то, очевидно, минимальная реализация существует тогда и только тогда, когда образы граничных вершин этого дерева различны (напомним, что в соответствие с нашим соглашением все ребра сети – вложенные кривые). Пусть теперь G состоит более чем из одного ребра.

ОРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Два смежных ребра произвольного 2-дерева G образуют *усы*, если каждое из них инцидентно вершине степени 1.

ЛЕММА 5.1. *Если 2-дерево G состоит из трех ребер, то каждая пара ребер образует усы. Если же G имеет более трех ребер, то оно содержит по крайней мере два непересекающихся уса.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение леммы 5.1 очевидно. Доказательство второго утверждения проведем по индукции. Отметим сначала, что количество ребер в произвольном 2-дереве нечетно. Предположим, что для всех 2-деревьев с числом ребер, меньшим $2n + 1$ и большим 3, утверждение имеет место. Рассмотрим произвольное дерево G , состоящее из $2n + 1$ ребер. Пусть e – произвольное ребро из G , не инцидентное вершинам степени 1. Разрезав G по ребру e , мы получим два 2-дерева, G' и G'' , каждое из которых состоит более чем из одного ребра. По предположению индукции и по первому утверждению настоящей леммы каждое из G' и G'' имеет усы, не содержащие ребра e . Доказательство закончено.

Итак, по лемме 5.1 дерево G имеет некоторые усы (e, e') . Пусть v и v' – вершины степени 1, инцидентные ребрам e и e' соответственно, а s – вершина степени 3, инцидентная одновременно ребрам e и e' . Обозначим через e'' третье ребро, инцидентное вершине s , а через w – отличную от s вершину, инцидентную ребру e'' .

Если образы $A = \varphi(v)$ и $A' = \varphi(v')$ вершин v и v' при отображении φ совпадают, то минимальной реализации не существует. В противном случае построим правильный треугольник $AA'B$ одним из двух возможных способов.

Перестроим дерево G в дерево G' , отрезав от G усы. Определим граничное отображение φ' на $\partial_e G'$, положив его равным φ везде, кроме s , и определив $\varphi'(s)$ равным B .

Следующая лемма вытекает из элементарных планиметрических построений (см. рис. 1).

Рис. 1. Иллюстрация идеи алгоритма Мелзака

ЛЕММА 5.2. *Если 2-дерево G имеет минимальную реализацию Γ с границей φ , то для одного из двух правильных треугольников $AA'B$ дерево G' имеет минимальную реализацию Γ' с границей φ' . Минимальные сети Γ и Γ' совпадают на $G' \setminus e''$. При этом луч с вершиной B в направлении точки $\Gamma'(w) = \Gamma(w)$ содержится внутри угла ABA' и содержит точку $\Gamma(s)$, которая, в свою очередь, лежит на окружности S^1 , описанной вокруг треугольника ABA' . В частности, точка $\Gamma'(w) = \Gamma(w)$ лежит вне круга, ограниченного окружностью S^1 .*

Обратно, если существует минимальная реализация Γ' дерева G' с границей φ' и выполняются следующие условия:

1) луч с вершиной B в направлении точки $\Gamma'(w)$ содержится внутри угла ABA' ,

2) точка $\Gamma'(w)$ лежит вне круга, ограниченного окружностью S^1 , которая описана вокруг правильного треугольника ABA' ,

то существует минимальная реализация Γ дерева G с границей φ , которая получается из Γ' так. Обозначим через C точку пересечения интервала $(\Gamma'(s), \Gamma'(w))$ с окружностью S^1 . На всех ребрах из G , отличных от e , e' и e'' , отображение Γ определим равным отображению Γ' . На ребрах e , e' и e'' определим его так, чтобы эти ребра переходили в отрезки $[C, A]$, $[C, A']$ и $[C, \Gamma'(w)]$ соответственно. При этом, конечно же, $\Gamma(s) = C$.

Итерируя описанный только что процесс перестройки дерева G и граничного отображения φ в дерево G' и граничное отображение φ' до тех пор, пока в результирующем дереве останется ровно одно ребро, мы реализуем *прямой ход алгоритма Мелзака*. Каждая итерация называется *шагом прямого хода алгоритма Мелзака*. Ясно, что если прямой ход состоит из n шагов, то существует 2^n реализаций прямого хода в зависимости от выбора правильного треугольника ABA' .

Для завершения алгоритма Мелзака необходимо выполнить *обратный ход*. На первом шаге обратного хода мы проверяем, не совпали ли образы граничных вершин результирующего дерева, состоящего из одного ребра. Если нет, то строим минимальную реализацию этого дерева, отображая единственное его ребро в отрезок, соединяющий образы граничных вершин при результирующем граничном отображении. После этого начинаем последовательно строить минимальные реализации деревьев, полученных на прямом ходе. Соответствующие построения мы уже описали в лемме 5.2. Если на одном из шагов обратного хода нарушаются условия леммы 5.2, то переходим к испытанию следующей из 2^n реализаций прямого хода. Таким образом, или при проверке очередной реализации прямого хода обратный ход алгоритма Мелзака приведет к построению искомой минимальной реализации, или будут проверены все 2^n вариантов и сделан вывод о том, что данное дерево G не имеет минимальной реализации с граничным отображением φ .

Как будет показано ниже, к успешному завершению прямого хода алгоритма Мелзака может привести не более одной реализации прямого хода. Алгоритм Мелзака, не умея отсеивать “неперспективные” последовательности, тратит много времени на работу с ними. Однако оказывается, можно заранее понять, как устроена та единственная последовательность треугольников ABA' , которая может привести к успешному завершению алгоритма Мелзака. Эту задачу решает алгоритм, предложенный Хвангом в [14].

5.2. Алгоритм Хванга. Пусть G – 2-дерево с границей $\partial G = \partial_e G$ и $\varphi: \partial G \rightarrow \mathbb{R}^2$ – некоторое граничное отображение. Начнем с рассмотрения случаев, когда дерево G содержит мало ребер.

Если G состоит ровно из одного ребра, то все очевидно, так как треугольники ABA' строить не надо.

Если G имеет три ребра, т.е. ∂G состоит из трех вершин, то имеются следующие возможности: или все точки из $\varphi(\partial G)$ лежат на одной прямой (тогда, очевидно, ми-

нимальной реализации не существует), или точки из $\varphi(\partial G)$ образуют невырожденный треугольник. В последнем случае один из двух треугольников ABA' из прямого хода алгоритма Мелзака пересекается с внутренностью выпуклой оболочки $\text{conv } \varphi(\partial G)$ множества $\varphi(\partial G)$, а другой – нет. Легко видеть, что тот ABA' , который пересекает внутренность $\text{conv } \varphi(\partial G)$, никогда не приводит к положительному результату, т.е. к минимальной сети. Поэтому в этом случае однозначно определено “правильное” расположение треугольников ABA' .

Пусть теперь G состоит из пяти ребер, т.е. граница ∂G содержит четыре вершины. Обозначим через (e, e') и (f, f') – имеющиеся две пары усов. Пусть E, E', F и F' – φ -образы граничных вершин, инцидентных соответственно e, e', f и f' . Легко видеть, что если какие-либо из этих четырех точек совпадают, то интересующую нас минимальную сеть построить нельзя. Пусть теперь все эти точки различны. Обозначим через ℓ_e и ℓ_f прямые, проходящие соответственно через E, E' и F, F' . Из элементарной планиметрии вытекает, что если дерево G имеет минимальную реализацию, то точки E и E' должны лежать в одной открытой полуплоскости относительно прямой ℓ_f , а также точки F и F' должны лежать в одной открытой полуплоскости относительно прямой ℓ_e . Более того, если вершина B треугольника ABA' , который строится на вершинах E и E' , лежит в той же полуплоскости относительно ℓ_e , что и точки F и F' , то это не приводит к минимальной реализации дерева G . Аналогичные рассуждения имеют место и для треугольника ABA' на вершинах F и F' . Таким образом, и в этом случае однозначно определено правильное расположение треугольников ABA' .

Предположим теперь, что дерево G состоит более чем из пяти ребер, т.е. его граница состоит более чем из четырех вершин. Напомним, что по лемме 5.1 в дереве G имеются по крайней мере два непересекающихся уса. Нам будут полезны следующие определения.

Пусть (e, e') и (f, f') – пара непересекающихся усов в дереве G . Обозначим через s_e и s_f общие вершины соответственно для первых и для вторых усов. Мы скажем, что эти усы *смежны*, если существует вершина s , смежная одновременно с s_e и s_f . Далее, пусть (e, e') – усы и s_e – вершина, общая для ребер из этих усов. Пусть f – ребро, соединяющее некоторую вершину степени 1 с некоторой вершиной s_f . Мы скажем, что усы (e, e') и ребро f *смежны*, если вершины s_e и s_f соединены ребром. Имеет место следующее утверждение.

ЛЕММА 5.3. *Пусть G – произвольное 2-дерево, содержащее более пяти ребер. Тогда в G или существует пара смежных усов, или имеются усы, смежные ребру, инцидентному вершине степени 1.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отрежем от дерева G все усы. Так как G имеет более четырех граничных вершин, то полученное 2-дерево G' будет, очевидно, содержать более одного ребра. По лемме 5.1 2-дерево G' обладает некоторыми усами, скажем (e, e') . Однако эти усы не могут быть усами дерева G , иначе они должны были быть отрезанными. Поэтому к усам (e, e') крепятся или одни усы дерева G , или двое усов из G . В первом случае мы получаем усы, смежные с граничным ребром, а во втором случае – пару смежных усов. Доказательство закончено.

Итак, рассмотрим два случая. Пусть сначала в дереве G существует пара смежных усов (e, e') и (f, f') . Обозначим через E, E', F и F' φ -образы граничных вер-

шин из G , инцидентных e, e', f и f' соответственно. Пусть ℓ_e и ℓ_f – прямые, проходящие через E, E' и F, F' соответственно.

ЛЕММА 5.4. *Если существует минимальная реализация дерева G , то или точки E и E' лежат в одной открытой полуплоскости относительно прямой ℓ_f , или точки F и F' лежат в одной открытой полуплоскости относительно прямой ℓ_e .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, утверждение леммы равносильно тому, что отрезки $[E, E']$ и $[F, F']$ не пересекаются. Последнее очевидно из элементарных планиметрических соображений (см. рис. 2).

РИС. 2. Алгоритм Хванга

Следующая лемма также элементарна.

ЛЕММА 5.5. *Пусть точки E и E' лежат в одной открытой полуплоскости относительно прямой ℓ_f . Тогда если вершина B треугольника ABA' , построенного на точках F и F' , лежит в той же полуплоскости, что и точки E и E' , то эта реализация прямого хода алгоритма Мелзака не приводит к построению минимальной сети.*

Перейдем теперь ко второму случаю, а именно, когда в дереве G имеются некоторые усы (e, e'), смежные с некоторым ребром f , инцидентным вершине степени 1. Обозначим через E, E' и F φ -образы граничных вершин, инцидентных ребрам e, e' и f соответственно. Обозначим через ℓ_e прямую, проходящую через E и E' . Легко видеть, что имеет место следующий результат.

ЛЕММА 5.6. *Если существует минимальная реализация дерева G , то точка F не лежит на прямой ℓ_e . Более того, при правильном выборе треугольника ABA' , построенного на точках E и E' , вершина B и точка F должны лежать в разных открытых полуплоскостях относительно прямой ℓ_e .*

Итак, правильный выбор треугольников ABA' на i -м шаге прямого хода алгоритма Мелзака в случае, когда текущее дерево G_i состоит более чем из пяти ребер, заключается в следующем.

Если имеются усы (e, e'), смежные с граничным ребром f , то сначала проверяем, различны ли φ -образы граничных вершин, инцидентных e, e' и f (если нет, то

эта реализация прямого хода плохая), и не лежит ли φ -образ F граничной вершины, инцидентной f , на прямой ℓ_e , проведенной через φ -образы граничных вершин, инцидентных усам (e, e') . Если лежит, то эта реализация прямого хода плохая. Иначе располагаем вершину B так, чтобы она была отделена прямой ℓ_e от F .

Если не существует усов, смежных с граничным ребром, то обязана существовать пара смежных усов, скажем (e, e') и (f, f') . Если E, E', F, F' – образы граничных вершин ребер e, e', f, f' соответственно, то проверяем, различны ли точки E, E', F и F' (если нет, то эта реализация прямого хода плохая), и не пересекаются ли отрезки $[E, E']$ и $[F, F']$. Если пересекаются, то эта реализация прямого хода плохая. Иначе выбираем ту пару точек из (E, E') и (F, F') , которая лежит в одной открытой полуплоскости относительно прямой, проведенной через другую из пар этих точек. Пусть, например, точки E, E' лежат с одной стороны относительно прямой ℓ_f , проведенной через F и F' . Построим треугольник ABA' на вершинах F и F' так, чтобы его вершина B была отделена прямой ℓ_f от точек E и E' .

5.3. Следствия из алгоритмов Мелзака и Хванга. Итак, мы выяснили, что, исходя из геометрии множества $\varphi(\partial G)$ и топологии дерева G , можно однозначно определить правильный выбор треугольника ABA' на каждом шаге прямого хода алгоритма Мелзака. В дальнейшем, говоря об алгоритме Мелзака, мы всегда будем предполагать, что все треугольники ABA' выбираются именно так. Конечно, мы не гарантированы, что в результате обратного хода будет построена минимальная реализация дерева G , так как ее, вообще говоря, может и не существовать. Однако если на каждом шаге обратного хода выполняются условия леммы 5.2, то такая реализация существует. Более того, из алгоритма Хванга–Мелзака вытекает следующая теорема единственности [14].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. *Для каждого дерева Штейнера G и граничного отображения $\varphi: \partial G \rightarrow \mathbb{R}^2$ существует не более одной минимальной реализации. Другими словами, для каждого дерева Штейнера G и граничного отображения φ множество всех минимальных сетей типа G с границей φ состоит не более чем из одной точки.*

Приведем еще одно полезное следствие из рассмотренных алгоритмов. Как было отмечено выше, для успешного завершения обратного хода алгоритма Мелзака необходимо и достаточно выполнения на каждом шаге условий леммы 5.2. Легко видеть, что если существует минимальная реализация 2-дерева G с граничным отображением φ , то при малом шевелении границы, т.е. при малом изменении граничного отображения φ , условия леммы 5.2 по-прежнему выполняются. Чтобы сформулировать соответствующий результат, введем следующее определение.

Пусть G – произвольный граф Штейнера с границей ∂G . Введем на множестве всех граничных отображений $\varphi: \partial G \rightarrow \mathbb{R}^2$ метрику ρ следующим образом. Если φ и φ' – два таких отображения, то положим

$$\rho(\varphi, \varphi') = \max_{v \in \partial G} |\varphi(v), \varphi'(v)|.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. *Предположим, что 2-дерево G с границей $\partial G = \partial_e G$ имеет минимальную реализацию Γ для некоторого граничного отображения φ . Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого граничного отображения φ' , $\rho(\partial \Gamma, \varphi') < \varepsilon$, дерево G также имеет минимальную реализацию с*

граничным отображением φ' . Иными словами, минимальные 2-деревья устойчивы при малых вариациях границы.

Более того, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех граничных отображений φ' дерева G таких, что $\rho(\varphi', \partial G) < \delta$, существуют минимальные реализации Γ' дерева G с границами φ' , и расстояние между образами $\Gamma(v)$ и $\Gamma'(v)$ произвольной вершины $v \in G$ при отображениях Γ и Γ' меньше ε . Иными словами, минимальная реализация дерева G непрерывно зависит от граничного отображения этого дерева.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.3. Предложение 5.2 не может быть обобщено на произвольные деревья Штейнера в силу того, что при малом шевелении граничного отображения угол между ребрами невырожденных компонент, стыкующихся в некоторой вершине степени 2, может стать меньше 120° (если, конечно, до этого он был равен 120°).

Напомним, что результатом прямого хода алгоритма Мелзака является пара точек. В качестве первого шага обратного хода мы строим отрезок, соединяющий полученные точки. Этот отрезок называется *линией Симпсона*. Отметим, что в силу произвольности выбора усов на каждом шаге прямого хода мы, вообще говоря, можем построить много разных линий Симпсона. На самом деле существует естественное взаимно однозначное соответствие между линиями Симпсона и ребрами 2-дерева G . Действительно, в процессе прямого хода мы перестраиваем дерево G , отрезая от него выбранные усы. На последнем шаге прямого хода от дерева G остается ровно одно ребро, которое и надо поставить в соответствие полученной линии Симпсона. Несложно показать, что каждому ребру дерева G соответствует некоторая линия Симпсона. Более того, имеет место следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.1. Если 2-дерево G имеет минимальную реализацию с граничным отображением φ , то длина любой линии Симпсона равна длине соответствующей минимальной сети.

В следующем параграфе мы покажем, как можно легко вычислить длину линии Симпсона, исходя только из информации о структуре погружения, задающего минимальное 2-дерево, и о координатах граничных точек. Мы начнем с того, что опишем важную характеристику погружения, а именно, оснащение вращения, индуцированное этим погружением.

§ 6. Оснащение вращения

Пусть G – произвольное 2-дерево и $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^2$ – некоторая сеть. Напомним, что по определению ребра сети – вложенные кривые. Тем не менее, минимальные 2-деревья обладают еще одним важным свойством: никакая пара векторов направлений ребер, выходящих из общей вершины, не сонаправлена. Каждую сеть, обладающую этим дополнительным свойством, будем называть *нормальной*.

Пусть теперь Γ – нормальная сеть и v – ее произвольная точка Штейнера. В силу нормальности сети Γ некоторая локальная сеть Γ_U с центром в v является вложенной сетью, состоящей из трех ребер. Пусть e и e' – произвольные два ребра из Γ_U . Положим по определению *число вращения* $\text{tw}(e, e')$ упорядоченной пары (e, e') равным 1, если при обходе в положительном направлении вершины v , начиная с образа ребра e' , мы сначала встретим образ ребра e , а лишь затем образ третьего ребра сети Γ_U . В противном случае положим $\text{tw}(e, e') = -1$. Если

E и E' – ребра дерева G , содержащие e и e' соответственно, *числом вращения* $\text{tw}(E, E')$ упорядоченной пары (E, E') назовем число $\text{tw}(e, e')$. Итак, каждая нормальная сеть $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^2$ индуцирует на G *оснащение вращения*, представляющее собой совокупность чисел вращения всех упорядоченных пар смежных ребер из G .

Продолжим это оснащение вращения на все упорядоченные пары ребер дерева G по аддитивности вдоль путей. Последнее означает следующее. Если (E, E') – упорядоченная пара произвольных различных ребер из G , а $\gamma = \{E_0 = E, E_1, \dots, E_k = E'\}$ – единственный путь в G , соединяющий E с E' , то положим $\text{tw}(E, E') = \sum_{p=1}^k \text{tw}(E_{p-1}, E_p)$. Если же $E = E'$, то положим $\text{tw}(E, E') = 0$. Число $\text{tw}(E, E')$ называется *числом вращения упорядоченной пары (E, E') ребер дерева G* , или *числом вращения от ребра E к ребру E'* .

Отметим, что если Γ – минимальное 2-дерево, то число вращения имеет естественный геометрический смысл. Чтобы сформулировать соответствующее утверждение, напомним следующие понятия.

Пусть (a, b) – упорядоченная пара ненулевых векторов из $\mathbb{R}^2$. Определим *ориентированный угол $\alpha(a, b)$ пары (a, b)* следующим образом. Если a и b сонаправлены, то положим $\alpha(a, b) = 0$. Если a и b не коллинеарны, то определим $\alpha(a, b)$ равным по модулю наименьшему углу между a и b , а по знаку – знаку репера (a, b) . Если же a и b противоположно направлены, то ориентированный угол $\alpha(a, b)$ не определен.

Далее, *погруженной ломаной L* на плоскости назовем последовательность точек $A_0, \dots, A_k$ таких, что все отрезки a_p вида $[A_{p-1}, A_p]$ невырождены, а последовательные отрезки $a_p = [A_{p-1}, A_p]$ и $a_{p+1} = [A_p, A_{p+1}]$ пересекаются лишь по вершине A_p . Точки A_p называются *вершинами ломаной L* , а отрезки a_p – *ребрами* или *звеньями* ломаной L .

Вершины $A_0, \dots, A_k$ ломаной L можно упорядочить двумя естественными способами: от A_0 к A_k , и от A_k к A_0 . Выбор одного из этих порядков называется *ориентацией ломаной L* , а сама ломаная с фиксированным порядком вершин – *ориентированной ломаной*. При этом если вершины A_p упорядочены от A_0 к A_k , то мы говорим, что ломаная L *ориентирована от A_0 к A_k* или *от a_1 к a_k* . В противном случае ломаная L *ориентирована от A_k к A_0* или *от a_k к a_1* .

Для ориентированной ломаной L каждое ее звено $a_p = [A_p, A_{p+1}]$ можно рассматривать как вектор $A_p A_{p+1}$ с началом в A_p . Такие векторы будем называть *векторами-звеньями*.

Углом поворота между последовательными векторами-звеньями a_p и a_{p+1} ориентированной ломаной L называется угол $\alpha(a_p, a_{p+1})$. Сумма углов поворота между всеми последовательными ребрами a_p и a_{p+1} ориентированной ломаной L называется *полным углом поворота вдоль ломаной L* и обозначается через $\alpha(L)$.

Пусть теперь (a, a') – упорядоченная пара звеньев произвольной (неориентированной) ломаной L . Рассмотрим ломаную L' , составленную из всех звеньев ломаной L , расположенных между a и a' . Ориентируем L' от a к a' . *Углом поворота упорядоченной пары (a, a') ребер ломаной L* или *углом поворота от ребра a к ребру a' ломаной L* называется полный угол поворота ломаной L' .

Пусть теперь G – 2-дерево и Γ – некоторая его минимальная реализация. Как уже было отмечено выше, погружение Γ нормальное, поэтому на G индуцируется некоторое оснащение вращения. Выберем в G два произвольных ребра e и e' , и пусть γ – единственный путь в G , соединяющий e с e' . Образ пути γ при отображе-

нии Γ задает некоторую ломаную L . Ориентируем L от образа ребра e к образу ребра e' . Имеет место следующий очевидный результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. *Число вращения $\text{tw}(e, e')$ упорядоченной пары (e, e') равно полному углу поворота $\alpha(L)$ вдоль ломаной L , деленному на $\pi/3$:*

$$\text{tw}(e, e') = \frac{3}{\pi} \alpha(L).$$

Далее, в терминах чисел вращения легко выписать координаты концов линии Симпсона. Пусть G – произвольное 2-дерево и Γ – некоторая его минимальная реализация, причем $\partial\Gamma = \partial_e\Gamma$. Выберем в G произвольное ребро e , и пусть $L = [X, Y]$ – соответствующая e линия Симпсона. Если G состоит ровно из одного ребра, то линия Симпсона L совпадает с единственным ребром минимальной сети Γ .

Предположим теперь, что G состоит более чем из одного ребра. Пусть, для начала, ребро e граничное, v – единственная граничная вершина, ему инцидентная, и $m = \Gamma(v)$ – ее образ при отображении Γ . Тогда, как легко видеть, одна из концевых точек линии Симпсона L , скажем X , совпадает с m . Далее, пусть $v_1, \dots, v_k$ – остальные граничные вершины из G , а $m_p = \Gamma(v_p)$. Пусть e_p – единственное граничное ребро, инцидентное v_p . Обозначим через t_p число вращения $\text{tw}(e_p, e)$. Тогда имеет место следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.2. *Второй конец Y линии Симпсона L может быть вычислен по следующей формуле:*

$$Y = \sum_{p=1}^k m_p e^{i t_p \pi/3},$$

где через m_p обозначены также комплексные координаты точек m_p .

Доказательство этого предложения получается индукцией с применением следующего простого утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6.1. *Пусть ABC – правильный треугольник на плоскости $\mathbb{R}^2$. Предположим, что пара векторов (AB, AC) образует положительно ориентированный репер. Тогда вершина C может быть вычислена через A и B так:*

$$C = A e^{-i \pi/3} + B e^{i \pi/3}.$$

Далее, пусть теперь e – некоторое неграничное ребро дерева G . Разрезав G по ребру e , мы разобьем дерево G на два бинарных дерева, скажем G' и G'' . Обозначим через $m'_1, \dots, m'_{k'}$ вершины степени 1 из G' , не принадлежащие e , а через $m''_1, \dots, m''_{k''}$ – вершины степени 1 из G'' , также не принадлежащие e . Пусть e'_p – ребро из G , инцидентное m'_p , а e''_p – ребро из G , инцидентное m''_p . Обозначим через t'_p и t''_p числа вращения $\text{tw}(e'_p, e)$ и $\text{tw}(e''_p, e)$ соответственно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.3. *Концы X и Y линии Симпсона L могут быть вычислены по следующим формулам:*

$$X = \sum_{p=1}^{k'} m'_p e^{i t'_p \pi/3}, \quad Y = \sum_{p=1}^{k''} m''_p e^{i t''_p \pi/3}.$$

§ 7. Функция Максвелла

Пусть $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^2$ – произвольная минимальная сеть с эффективной границей. В каждой граничной вершине v_p из Γ степени 1 определим единичный вектор n_p , сонаправленный с инцидентным v_p ребром, ориентированным в сторону вершины v_p . В каждой граничной вершине v_p степени два определим вектор n_p как сумму единичных векторов направлений входящих в v_p ребер.

Каждому вектору n_p соответствует комплексное число $e^{i\varphi_p}$. Далее, пусть, как и выше, t_p – комплексное число, соответствующее точке $\Gamma(v_p)$. Обозначим через $\mu(\Gamma)$ комплексное число $\sum_p t_p e^{-i\varphi_p}$, где сумма берется по всем граничным вершинам v_p сети Γ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.1. Отображение, ставящее в соответствие каждой минимальной сети Γ на плоскости определенное выше комплексное число $\mu(\Gamma)$, называется *функцией Максвелла*. Значение $\mu(\Gamma)$ функции Максвелла на минимальной сети Γ мы, для краткости, будем называть *функцией Максвелла минимальной сети Γ* , допуская тем самым определенную вольность речи.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.1. *Функция Максвелла $\mu(\Gamma)$ минимальной сети Γ – это положительное вещественное число, равное длине сети Γ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если сеть Γ имеет вершины степени 2, то разобьем Γ на невырожденные компоненты Γ_q . Ясно, что $\mu(\Gamma) = \sum_q \mu(\Gamma_q)$. Поэтому ниже будем предполагать, что Γ – невырожденная минимальная сеть.

Вещественная часть числа $\mu(\Gamma)$ – это сумма скалярных произведений радиус-векторов граничных вершин t_i на единичные векторы направлений n_p входящих в эти вершины граничных ребер сети Γ . По формуле Максвелла [12] эта сумма равна длине сети Γ .

Рассмотрим теперь мнимую часть числа $\mu(\Gamma)$. Эта мнимая часть равна сумме векторных произведений (площадей ориентированных параллелограммов) векторов n_p на радиус-векторы точек t_p . Покажем, что эта сумма равна нулю.

Как и при доказательстве формулы Максвелла, для каждой точки Штейнера $v \in G$ рассмотрим три единичных вектора n_v^j направлений входящих в вершину $\Gamma: v \rightarrow \mathbb{R}^2$ ребер. Так как сеть минимальна, то при каждом фиксированном v сумма векторов n_v^j равна нулю. Поэтому, в частности, равна нулю и сумма векторных произведений этих векторов на радиус-вектор точки $\Gamma(v)$.

Прибавим все эти (нулевые) суммы к $\text{Im } \mu(\Gamma)$. В полученной сумме мы изменим порядок суммирования, сгруппировав вместе слагаемые, соответствующие одному и тому же ребру e , а затем уже просуммировав по всем ребрам из G . А именно, пусть e – произвольное ребро из G , A_e и B_e – координаты концевых точек отрезка $\Gamma(e)$, а n_A и n_B – направление отрезка $\Gamma(e)$, ориентированного соответственно в сторону A_e и B_e . Иными словами, $n_A = -n_B = B_e A_e / |B_e A_e|$. Тогда ребру e в нашей сумме соответствует следующее выражение: $n_A \times A_e + n_B \times B_e$, где через $\alpha \times \beta$ обозначено векторное произведение векторов α и β . В силу того, что $n_A = -n_B$ и векторы n_A и $B_e A_e$ коллинеарны, рассматриваемое выражение равно нулю. Поэтому равна нулю и вся сумма, т.е. $\text{Im } \mu(\Gamma)$, что и требовалось. Доказательство предложения закончено.

Пусть Γ и Γ' – две минимальные сети одной и той же топологии G . Ориентируем граф G произвольным образом. Это позволит нам рассматривать образы ребер

этого графа при отображениях Γ и Γ' как векторы на плоскости. Мы говорим, что сети Γ и Γ' *параллельны*, если для каждого ребра e из G векторы $\Gamma(e)$ и $\Gamma'(e)$ сонаправлены.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.2. Пусть Γ и Γ' – две параллельные сети с одной и той же границей φ . Тогда сети Γ и Γ' имеют одинаковую длину.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, эти сети имеют одну и ту же функцию Максвелла, поэтому по предложению 7.1 длины сетей Γ и Γ' совпадают. Доказательство закончено.

§ 8. Линейные сети

В настоящем параграфе мы рассмотрим обобщенные сети специального вида, определяемые тем, что их ребра – отрезки прямых. Эти обобщенные сети будут полезны нам для распространения результата об устройстве множества всех минимальных 2-деревьев одного топологического типа с фиксированной границей (см. предложение 5.1) на случай сетей с циклами. А именно, несмотря на то, что при наличии циклов никакой единственности нет, мы опишем структуру множества всех минимальных сетей данной топологии с данной границей. В частности, из наших результатов будет следовать, что все такие сети отличаются лишь на деформацию в классе невырожденных сетей.

Итак, по предложению 4.1 каждая минимальная сеть составлена из отрезков прямых. Обобщенная топологическая сеть, все ребра которой – отрезки прямых (возможно, вырожденные), называется *линейной сетью*.

Пусть $\mathcal{L}(G)$ – множество всех линейных сетей вида $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^2$, где G – произвольный граф Штейнера. Ясно, что элементы пространства $\mathcal{L}(G)$ могут быть описаны положениями своих вершин. Поэтому если $|G|$ – количество вершин графа G , то $\mathcal{L}(G)$ представимо в виде евклидова пространства $\mathbb{R}^{2|G|}$. Это представление задает естественную гладкую структуру на $\mathcal{L}(G)$, которая и будет иметься в виду в дальнейшем, когда мы будем говорить, например, о дифференцируемости функций, заданных на пространстве линейных сетей. Элементы множества $\mathcal{L}(G)$ назовем *линейными сетями топологии G* .

Пусть Γ – линейная сеть топологии G . Ограничение отображения Γ на $\partial_e G$ называется *эффективной границей линейной сети Γ* и, как и раньше, обозначается через $\partial_e \Gamma$.

Для каждой пары (G, φ) , где G – граф Штейнера с эффективной границей, а φ – некоторое граничное отображение, рассмотрим все линейные сети $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^2$ такие, что $\partial \Gamma = \varphi$. Это множество обозначим через $[G, \varphi]$ и будем называть *пространством линейных сетей топологии G с данной границей φ* . По определению $[G, \varphi] \subset \mathcal{L}(G)$. Каждый элемент из $[G, \varphi]$ однозначно задается положением точек Штейнера, поэтому если s – количество подвижных вершин графа G , то $[G, \varphi]$ естественным образом наделяется структурой пространства $\mathbb{R}^{2s}$. Ясно, что $\mathbb{R}^{2s} = [G, \varphi]$ является аффинным подпространством в $\mathbb{R}^{2|G|} = \mathcal{L}(G)$.

Пусть $\ell(\Gamma)$ – *длина линейной сети Γ* , т.е. сумма длин всех отрезков-ребер сети Γ . Функция ℓ определена на всем пространстве $\mathcal{L}(G)$ всех линейных сетей топологии G .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.1. Функция $\ell: \mathcal{L}(G) \rightarrow \mathbb{R}$ выпукла вниз.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что

$$\mathfrak{L}(G) = \mathbb{R}^{2|G|} = \underbrace{\mathbb{R}^2 \times \cdots \times \mathbb{R}^2}_{|G| \text{ раз}},$$

и для каждого $x \in \mathbb{R}^{2|G|}$ обозначим через x_p проекцию точки x на p -ю компоненту этого декартова произведения. По построению для каждого p точка $x_p \in \mathbb{R}^2$ — это координаты p -й вершины линейной сети x в порядке, задающем отождествление пространств $\mathfrak{L}(G)$ и $\mathbb{R}^{2|G|}$. Таким образом, $\ell(x)$ равно сумме выражений $\ell_{pq}(x) = |x_p - x_q|$ по всем парам (p, q) , соответствующим смежным вершинам графа G . Здесь через $|\cdot|$ обозначена стандартная евклидова норма в $\mathbb{R}^2$.

Пусть y — другая точка из $\mathfrak{L}(G)$ и $0 \leq \lambda \leq 1$ — некоторое число. По свойствам нормы и проекции

$$\begin{aligned} \ell_{pq}((1-\lambda)x + \lambda y) &= |(1-\lambda)(x_p - x_q) + \lambda(y_p - y_q)| \\ &\leq (1-\lambda)|x_p - x_q| + \lambda|y_p - y_q| = (1-\lambda)\ell_{pq}(x) + \lambda\ell_{pq}(y). \end{aligned}$$

Поэтому функции ℓ_{pq} выпуклы, а значит, и функция ℓ также выпукла как сумма выпуклых функций. Доказательство закончено.

СЛЕДСТВИЕ 8.1. *Ограничение функции ℓ на $[G, \varphi]$ выпукло.*

Следующее предложение описывает множество экстремумов функции $\ell: [G, \varphi] \rightarrow \mathbb{R}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.2. *Множество экстремумов функции $\ell: [G, \varphi] \rightarrow \mathbb{R}$ непусто, выпукло (а значит, линейно связано) и состоит из точек абсолютного минимума.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если $x \in [G, \varphi]$, то при $x \rightarrow \infty$ по любому направлению функция ℓ стремится к $+\infty$, поэтому она достигает своей нижней грани в некоторой точке $x_0 \in [G, \varphi]$. Далее, если $\ell(x_1) > \ell(x_0)$, то рассмотрим луч r , идущий из x_0 в направлении вектора $x_1 - x_0$. Очевидно, луч r содержит точку x_1 . Пусть R — луч в пространстве $\mathbb{R}^{2s+1}$, выходящий из $(x_0, \ell(x_0))$ в направлении $(x_1 - x_0, \ell(x_1) - \ell(x_0))$. Ясно, что луч R составляет с гиперплоскостью $\{(x, 0)\}$ ненулевой угол. Из выпуклости функции ℓ вытекает, что на отрезке $[x_0, x_1]$ график функции ℓ лежит не выше луча R , а на всей остальной части луча r — не ниже луча R . Поэтому точка x_1 не является критической для функции ℓ . Итак, мы показали, что все критические точки функции ℓ — это абсолютные минимумы.

Пусть теперь x_1 и x_2 — произвольные точки абсолютного минимума функции ℓ . Рассмотрим ограничение ℓ на отрезок, соединяющий x_1 и x_2 . Опять из выпуклости функции ℓ и тривиального замечания о совпадении значений функции ℓ в ее абсолютных минимумах вытекает, что ограничение функции ℓ на этот отрезок постоянно, т.е. все точки такого отрезка — это абсолютные минимумы функции ℓ . Отсюда немедленно вытекает выпуклость множества абсолютных минимумов для ℓ . Доказательство закончено.

Множество минимумов функции $\ell: [G, \varphi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ обозначим через $[G, \varphi]_{\min}$.

Найдем теперь необходимое и достаточное условия того, что точка $x \in [G, \varphi]$ является точкой минимума. Для этого напомним формулу первой вариации функции ℓ . Начнем с простейшего случая, когда G состоит из одного отрезка.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.3 (первая вариация длины отрезка). . Пусть $[a_t, b_t]$ – произвольное гладкое однопараметрическое семейство отрезков, $t \geq 0$. Тогда, если $|a_0 b_0| \neq 0$, т.е. отрезок $[a_0, b_0]$ невырожден, имеем

$$\left. \frac{d|a_t b_t|}{dt} \right|_{t=0} = \langle a', n_a \rangle + \langle b', n_b \rangle,$$

где a' и b' – скорости кривых a_t и b_t в начальный момент времени $t = 0$, а n_a и n_b – внешние нормали к границе отрезка $[a_0, b_0]$ в точках a_0 и b_0 соответственно: $n_a = a_0 b_0 / |a_0 b_0|$, $n_b = b_0 a_0 / |a_0 b_0|$.

Если же $|a_0 b_0| = 0$, т.е. отрезок $[a_0, b_0]$ вырожден, имеем

$$\left. \frac{d|a_t b_t|}{dt} \right|_{t=0} = |b' - a'|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим первый случай. Имеем

$$\left. \frac{d|a_t b_t|}{dt} \right|_{t=0} = \frac{\langle b_0 - a_0, b' - a' \rangle}{|a_0 b_0|} = \langle a', n_a \rangle + \langle b', n_b \rangle.$$

Во втором случае

$$\begin{aligned} \left. \frac{d|a_t b_t|}{dt} \right|_{t=0} &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{\langle b_t - a_t, b_t - a_t \rangle}}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \sqrt{\left\langle \frac{b_t - a_t}{t}, \frac{b_t - a_t}{t} \right\rangle} = |b' - a'|. \end{aligned}$$

Доказательство закончено.

Из предложения 8.3 немедленно вытекает формула первой вариации длины линейной сети. Пусть Γ – произвольная линейная сеть из $\mathcal{L}(G)$ и v – произвольная ее вершина. Обозначим через N_v сумму единичных векторов направлений входящих в вершину v невырожденных ребер. Далее, пусть $D(v)$ – множество всех вершин, смежных с v , для которых ребра, соединяющие их с вершиной v , вырождены.

Рассмотрим произвольную деформацию Γ_t сети Γ в классе $\mathcal{L}(G)$, и пусть E_v – начальный вектор скорости движения вершины v при этой деформации.

ТЕОРЕМА 8.1 (первая вариация длины линейной сети). *Имеет место следующее соотношение:*

$$\left. \frac{d\ell(\Gamma_t)}{dt} \right|_{t=0} = \sum_v \left(\langle N_v, E_v \rangle + \frac{1}{2} \sum_{v' \in D(v)} |E_v - E_{v'}| \right).$$

Таким образом, сеть Γ является точкой абсолютного минимума функции $\ell: [G, \varphi] \rightarrow \mathbb{R}$, если и только если для любых семейств векторов E_v , равных нулю в некоторых вершинах сети Γ , выражение

$$\sum_v \left(\langle N_v, E_v \rangle + \frac{1}{2} \sum_{v' \in D(v)} |E_v - E_{v'}| \right)$$

неотрицательно.

СЛЕДСТВИЕ 8.2. Пусть G – невырожденный граф Штейнера, а Γ – линейная сеть из $[G, \varphi]$, не содержащая вырожденных ребер и являющаяся точкой абсолютного минимума функции длины ℓ . Тогда Γ – минимальная сеть с границей φ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как Γ не содержит вырожденных ребер, в сделанных выше обозначениях имеем

$$\sum_v \langle N_v, E_v \rangle \geq 0$$

для любых векторов E_v . Это может быть только в том случае, когда $N_v = 0$ в каждой точке Штейнера. Последнее равенство есть условие минимальности сети Γ . Доказательство закончено.

Перейдем теперь к формуле второй вариации длины. Нам не понадобится формула второй вариации в общем случае, поэтому мы выпишем ее лишь в предположении, что все вершины деформируемой сети равномерно движутся по прямым. Деформация, удовлетворяющая указанному свойству, называется *линейной* или *геодезической*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.4 (вторая вариация длины отрезка). Пусть $[a_t, b_t]$ – произвольная линейная деформация отрезка $[a_0, b_0]$, $t \geq 0$ и $|a_0 b_0| \neq 0$, т.е. отрезок $[a_0, b_0]$ невырожден. Тогда

$$\left. \frac{d^2 |a_t b_t|}{dt^2} \right|_{t=0} = \frac{|b_0 - a_0|^2 |b' - a'|^2 - \langle b_0 - a_0, b' - a' \rangle^2}{|b_0 - a_0|^3},$$

где a' и b' – скорости кривых a_t и b_t в начальный момент времени $t = 0$.

Доказательство получается прямым подсчетом.

Предложение 8.4 вместе в неравенством Коши–Буняковского дает следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 8.3. В предположениях предложения 8.4 вторая производная длины отрезка неотрицательна и равна нулю, если и только если разность $b' - a'$ векторов начальных скоростей вариации отрезка коллинеарна направлению отрезка.

Из предложения 8.4 непосредственно вытекает формула второй вариации для линейной сети без вырожденных ребер, если просуммировать формулы из этого предложения по всем ребрам сети.

Применим теперь разработанную технику к доказательству следующего предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.5. Если существует минимальная сеть $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^2$ топологии G с границей $\partial\Gamma = \varphi$, то $\Gamma \in [G, \varphi]_{\min}$. При этом если G – дерево, то $[G, \varphi]_{\min}$ состоит из одной точки Γ . Таким образом, существует не более одного минимального дерева с данными топологией и границей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждая минимальная сеть Γ является погруженной линейной сетью, у которой в каждой подвижной вершине v сумма векторов направленных входящих в v ребер равна нулю. Поэтому начальная скорость любой вариации сети Γ в классе $[G, \varphi]$ равна нулю, т.е. Γ – критическая точка функции ℓ , и поэтому является абсолютным минимумом для ℓ . Тем самым доказана первая часть предложения.

Доказательство второй части предложения получается из следствия 8.3. Действительно, если в $[G, \varphi]_{\min}$ существует еще одна точка Γ' , отличная от Γ , то отрезок $[\Gamma, \Gamma']$ лежит в $[G, \varphi]_{\min}$ и определяет очевидным образом нетождественную вариацию Γ_t сети Γ такую, что $\ell(\Gamma_t)$ постоянна по t .

Так как $[G, \varphi]_{\min}$ по предположению состоит более чем из одной точки, сеть Γ имеет подвижные вершины. Отсюда вытекает, что в Γ имеются два смежных граничных ребра, скажем e и e' , стыкующихся в некоторой подвижной вершине v . По следствию 8.3 в вершине v вектор начальной скорости вариации Γ_t должен или равняться нулю, или быть параллелен как ребру e , так и ребру e' , иначе вторая производная функции $\ell(\Gamma_t)$ будет положительна. Однако вершина v имеет степень 3 и ребра e и e' образуют в v угол величины 120° , поэтому вектор начальной скорости вариации Γ_t в вершине v равен нулю. Итак, мы показали, что все подвижные вершины, смежные с граничными вершинами сети Γ , остаются на месте во время вариации Γ_t .

Аналогичные рассуждения показывают, что и все вершины, смежные с только что рассмотренными, также остаются на месте при вариации Γ_t . Применяя описанный метод до тех пор, пока не будут исчерпаны все подвижные вершины, получаем, что вариация Γ_t оставляет на месте все дерево Γ . Противоречие. Тем самым предложение полностью доказано.

В предложении 8.5 говорится о единственности минимального дерева Γ с данной топологией и границей. Если Γ не является деревом, то уже никакой единственности нет, однако оказывается, такие минимальные сети устроены достаточно жестко, что и дает нам возможность описать устройство множества этих сетей. Прежде чем сформулировать соответствующий результат, мы построим специальную деформацию минимальной невырожденной сети с циклами и исследуем свойства этой деформации.

Пусть G – невырожденный граф Штейнера с эффективной границей $\partial G = \partial_e G$ и φ – некоторое его граничное отображение. Предположим, что существует минимальная сеть $\Gamma \in [G, \varphi]$.

Пусть $e_1, \dots, e_k$ – ребра графа G и $A_1, \dots, A_k$ – внутренние точки этих ребер, $A_p \in e_p$, такие, что топологический граф G' , полученный из G разрезанием ребер e_p по точкам A_p , является 2-деревом. Отметим, что в силу сделанных предположений все ребра e_i – внутренние ребра графа G . Обозначим через Γ' сеть, полученную из сети Γ разрезанием по всем точкам A_p . Пусть $\partial G'$ – эффективная граница дерева G' . Ясно, что она получается из ∂G добавлением вершин A_p^1 и A_p^2 дерева G' , на которые распались точки A_p . Обозначим через $\partial \Gamma'$ эффективную границу сети Γ' .

Рассмотрим граничное отображение φ' дерева G' , полученное из $\partial \Gamma'$ малым смещением точек $\Gamma(A_p)$ в направлениях, перпендикулярных ребрам $\Gamma(e_p)$. При этом если B_p – результат такого смещения для точки $\Gamma(A_p)$, то положим $\varphi'(A_p^1) = \varphi'(A_p^2) = B_p$. Пусть e_p^1 и e_p^2 – граничные ребра из G' , на которые распалось ребро

$e_p \subset G$ после выбрасывания точки A_p . Ориентируем их в сторону граничных вершин A_p^1 и A_p^2 соответственно. По предложению 5.2 для достаточно малых смещений существует минимальная реализация $\bar{\Gamma}'$ дерева G' с границей φ' , и эта реализация непрерывно зависит от граничного отображения φ' . Поэтому, в частности, в силу предложения 4.1 при таких минимальных реализациях образы ориентированных ребер e_p^1 и e_p^2 остаются противоположно направленными. Поэтому, склеив сеть $\bar{\Gamma}'$ по каждой паре вершин $\varphi': A_p^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ и $\varphi': A_p^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, получим новую минимальную реализацию графа G с границей ∂G .

Пусть n_p – единичная нормаль к $\Gamma(e_p)$ в точке $\Gamma(A_p)$. Тогда смещение точки $\Gamma(A_p)$ задается числом t_p таким, что $B_p = \Gamma(A_p) + t_p n_p$. Поэтому построенная выше сеть $\bar{\Gamma}'$ однозначно определяется точкой $t = (t_1, \dots, t_k)$ из $\mathbb{R}^k$, причем ясно, что разным точкам t соответствуют разные такие сети. Кроме того, по предложению 5.1 каждому малому t соответствует ровно одна сеть $\bar{\Gamma}'$, которую мы обозначим через $\bar{\Gamma}'_t$. Наконец, как и выше, для каждой сети $\bar{\Gamma}'_t$ мы построим свою минимальную реализацию Γ_t графа G с границей ∂G . Таким образом, мы построили k -параметрические вариации сетей $\bar{\Gamma}'$ и Γ , являющиеся топологическими вложениями ν' и ν малого открытого k -мерного куба I^k из $\mathbb{R}^k$ с центром в нуле в пространстве $\mathcal{L}(G')$ и $[G, \varphi]$ соответственно.

Отображение ν обладает дополнительно следующим важным свойством.

УТВЕРЖДЕНИЕ 8.1. *Отображение ν переводит куб I^k взаимно однозначно на некоторую окрестность сети Γ во множестве $[G, \varphi]_{\min}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как уже было отмечено выше, отображение ν является вложением в $[G, \varphi] \supset [G, \varphi]_{\min}$. Кроме того, по определению каждая сеть из $\nu(I^k)$ является минимальной сетью, и поэтому в силу предложения 8.5 лежит в $[G, \varphi]_{\min}$. Поэтому нам осталось показать, что все линейные сети из $[G, \varphi]_{\min}$, близкие к Γ , лежат в образе отображения ν .

Действительно, пусть $\bar{\Gamma}$ – линейная сеть из $[G, \varphi]_{\min}$, настолько близкая к Γ , что:

- а) для любой вершины $v \in G$ расстояние между точками $\Gamma(v)$ и $\bar{\Gamma}(v)$ меньше половины длины самого короткого ребра сети Γ ;
- б) прямая, проходящая через $\Gamma(A_p)$ в направлении n_p , пересекает отрезок $\bar{\Gamma}(e_p)$ ровно в одной точке. Эту точку мы обозначим через B_p .

Первое ограничение гарантирует, что сеть $\bar{\Gamma}$ не содержит вырожденных ребер, поэтому по следствию 8.2 $\bar{\Gamma}$ обязана быть минимальной сетью.

Далее, определив все t_p из соотношения $\Gamma(A_p)B_p = t_p n_p$, мы получаем представление сети $\bar{\Gamma}$ в виде $\nu(t)$, т.е. сеть $\bar{\Gamma}$ действительно лежит в $\nu(I)$. Доказательство закончено.

Следующая лемма содержит еще одно важное свойство отображений ν и ν' .

ЛЕММА 8.1. *Отображения ν и ν' аффинны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала мы докажем лемму для отображения ν' . Напомним, что пространство $\mathcal{L}(G')$ евклидово четной размерности, равной удвоенному количеству всех вершин 2-дерева G' . Имеется каноническое отождествление пространства $\mathcal{L}(G')$ с $\mathbb{R}^2 \times \dots \times \mathbb{R}^2$, где каждое $\mathbb{R}^2$ – конфигурационное пространство некоторой вершины из $\Gamma' \in \mathcal{L}(G')$. Ясно, что аффинность отображения ν' равносильна аффинности композиции его с проекцией на каждый сомножитель $\mathbb{R}^2$. Эта

последняя композиция есть отображение из куба I^k в конфигурационное пространство некоторой вершины v из G' .

Прежде всего отметим, что если v – граничная вершина из G' , то v или неподвижна при построенной деформации $\bar{\Gamma}'_t$ (в этом случае v также является граничной вершиной для G), или v – это одна из вершин A_p , и тогда по определению деформации $\bar{\Gamma}'_t$ вершина v движется по прямой $\Gamma(A_p) + t_p n_p$. В обоих случаях композиция отображения ν' с проекцией на соответствующее $\mathbb{R}^2$, очевидно, аффинна. Таким образом, для завершения доказательства леммы остается рассмотреть случай, когда v – точка Штейнера графа G' .

Итак, пусть v – некоторая точка Штейнера из G' , e и e' – два ребра дерева G' , инцидентные v , а V – образ вершины v при отображении Γ' . Пусть $L = [X, Y]$ и $L' = [X', Y']$ – линии Симпсона, соответствующие e и e' . Обозначим через m_p комплексные координаты точек $\Gamma(A_p)$. По предложению 6.3

$$X = A + \sum_{p=1}^k m_p C_p, \quad Y = B + \sum_{p=1}^k m_p C'_p, \quad (*)$$

где A, B, C_p и C'_p – комплексные числа, зависящие лишь от оснащения вращения, индуцированного погружением Γ' , а также от координат образов граничных вершин дерева G' , отличных от A_p^1 и A_p^2 . Покажем, что в формулах для X и Y коэффициенты при m_p , на самом деле, одинаковы, т.е. $C'_p = C_p$.

Действительно, обозначим через γ единственный цикл графа, полученного из G' склейкой по вершинам A_p^1 и A_p^2 . Если ребро e принадлежит γ , то ребра e_p^1 и e_p^2 находятся в разных компонентах графа $G' \setminus E$, где E – внутренняя точка ребра e , и разность между числами вращения $\text{tw}(e_p^1, e)$ и $\text{tw}(e_p^2, e)$ кратна 6. Поэтому $C'_p = C_p$. Если же реализуется вторая возможность, т.е. $e \notin \gamma$, то ребра e_p^1 и e_p^2 находятся в одной компоненте графа $G' \setminus E$, поэтому m_p входит в одну из сумм из $(*)$ с нулевым коэффициентом. Пусть, для определенности, $C'_p = 0$. Вычислим коэффициент C_p при m_p в оставшейся сумме. Так как в этом случае, как легко видеть, числа вращения $\text{tw}(e_p^1, e)$ и $\text{tw}(e_p^2, e)$ отличаются на целое число, дающее остаток 3 при делении на 6, имеем

$$C_p = e^{i\pi \text{tw}(e_p^1, e)/3} + e^{i\pi \text{tw}(e_p^2, e)/3} = 0,$$

т.е. во втором случае $C_p = C'_p = 0$.

Вернемся к доказательству леммы. Пусть $t = (t_1, \dots, t_k) \in I^k$. Обозначим через V_t образ вершины v при отображении $\nu'(t)$. Пусть $L_t = [X_t, Y_t]$ и $L'_t = [X'_t, Y'_t]$ – линии Симпсона сети $\nu'(t)$, соответствующие ребрам e и e' . Ясно, что точка V_t является точкой пересечения прямых, проходящих через L_t и L'_t соответственно. Сначала мы покажем, что точки X_t, Y_t, X'_t и Y'_t аффинно зависят от t , причем векторы $Y_t X_t$ и $Y'_t X'_t$ не зависят от t , а после этого воспользуемся следующим простым утверждением, которое проверяется непосредственными вычислениями.

УТВЕРЖДЕНИЕ 8.2. Пусть V – точка плоскости, являющаяся пересечением прямых XY и $X'Y'$. Пусть X_t, Y_t, X'_t, Y'_t – k -параметрическая деформация точек X, Y, X' и Y' , аффинно зависящая от $t \in \mathbb{R}^k$, $X_0 = X, Y_0 = Y$,

$X'_0 = X'$, $Y'_0 = Y'$, причем векторы $Y_t X_t$ и $Y'_t X'_t$ не зависят от t . Тогда точка V_t , являющаяся точкой пересечения прямых $X_t Y_t$ и $X'_t Y'_t$, аффинно зависит от t . Другими словами, точка пересечения прямых, движущихся поступательно и с постоянными скоростями, сама движется по некоторой прямой и тоже с постоянной скоростью.

Итак, покажем, что точки X_t , Y_t , X'_t и Y'_t аффинно зависят от t . Так как мы рассматриваем столь малые деформации (малые кубы I^k), что индуцированное сетью $\nu'(t)$ оснащение вращения на G' не зависит от t , имеем

$$X_t = X + \sum_{p=1}^k t_p n_p C_p, \quad Y_t = Y + \sum_{p=1}^k t_p n_p C_p,$$

и точно также

$$X'_t = X' + \sum_{p=1}^k t_p n_p C'_p, \quad Y'_t = Y' + \sum_{p=1}^k t_p n_p C'_p,$$

где n_p – комплексное число, соответствующее вектору n_p . Легко видеть, что эти формулы задают аффинную зависимость точек X_t , Y_t , X'_t и Y'_t от t , причем, очевидно, векторы $Y_t X_t$ и $Y'_t X'_t$ постоянны. Таким образом, доказательство аффинности отображения ν' завершено.

Доказательство аффинности отображения ν получается автоматически, так как подвижные вершины дерева Γ , координатами которых параметризуется пространство $[G, \varphi]$ – это все точки Штейнера дерева Γ' . Доказательство леммы закончено.

Итак, мы показали, что отображения ν и ν' – аффинные отображения из некоторого k -мерного куба $I^k \subset \mathbb{R}^k$ в пространства $[G, \varphi]$ и $\mathcal{L}(G')$ соответственно. Из взаимной однозначности этих отображений вытекает, что их образы – это некоторые k -мерные кубы. Продолжим эти отображения по аффинности на все пространство $\mathbb{R}^k$ и полученные отображения обозначим через $\bar{\nu}$ и $\bar{\nu}'$ соответственно. Понятно, что $\nu(I^k)$ и $\nu'(I^k)$ – это открытые подмножества в $\bar{\nu}(\mathbb{R}^k)$ и $\bar{\nu}'(\mathbb{R}^k)$ соответственно.

УТВЕРЖДЕНИЕ 8.3. *Множество $[G, \varphi]_{\min}$ целиком лежит в $\bar{\nu}(\mathbb{R}^k)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{\Gamma}$ – произвольная сеть из $[G, \varphi]_{\min}$. Соединим сети Γ и $\bar{\Gamma}$ отрезком I' в $[G, \varphi]$. Этот отрезок целиком лежит в $[G, \varphi]_{\min}$ в силу выпуклости последнего. Однако начальный отрезок из I' лежит в $\bar{\nu}(\mathbb{R}^k)$, так как все близкие к Γ сети из $[G, \varphi]_{\min}$ лежат в $\bar{\nu}(\mathbb{R}^k)$. Поэтому и весь отрезок I' , включая сеть $\bar{\Gamma}$, лежит в $\bar{\nu}(\mathbb{R}^k)$, что и требовалось доказать.

Таким образом, в сделанных предположениях $[G, \varphi]_{\min}$ – выпуклое тело в $\bar{\nu}(\mathbb{R}^k)$ (с непустой внутренностью). Утверждение 8.1 влечет следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 8.4. *В сделанных предположениях каждая минимальная сеть Γ топологии G с границей $\partial\Gamma = \varphi$ является внутренней точкой выпуклого тела $[G, \varphi]_{\min} \subset \bar{\nu}(\mathbb{R}^k)$.*

Ниже мы покажем, что внутренность множества $[G, \varphi]_{\min}$ состоит из невырожденных линейных сетей, которые по следствию 8.2 являются также минимальными сетями. Для этого нам потребуется следующий результат.

УТВЕРЖДЕНИЕ 8.4. Пусть L – прямая в $\mathfrak{L}(G)$, проходящая через невырожденную линейную сеть Γ . Тогда L содержит не более чем конечное множество вырожденных линейных сетей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть прямая L задается параметрически так: $L(t) = \Gamma + tn$, где $t \in \mathbb{R}$ – параметр, а n – ненулевой вектор в $\mathfrak{L}(G)$. Напомним, что $\mathfrak{L}(G)$ параметризуется координатами образов вершин линейных сетей из $\mathfrak{L}(G)$. Поэтому если сеть Γ задается, как точка из $\mathfrak{L}(G)$, вектором $(V_1, \dots, V_m)$, составленным из двумерных координат V_k образов своих вершин, то прямая L имеет вид

$$L(t) = (V_1 + tn_1, \dots, V_m + tn_m),$$

где $(n_1, \dots, n_m)$ – координаты вектора n . Отметим, что линейная сеть $L(t)$ вырождена тогда и только тогда, когда для некоторых i и j выполняется условие: $V_i + tn_i = V_j + tn_j$. Однако при $t = 0$ линейная сеть $L(0) = \Gamma$ невырождена, поэтому $V_i \neq V_j$. Отсюда немедленно вытекает, что или $n_i = n_j$, и тогда $V_i + tn_i$ не совпадает с $V_j + tn_j$ ни при каком t , или, в противном случае, существует единственное t , при котором эти точки одинаковы. Доказательство закончено.

Так как $[G, \varphi]$ – линейное подпространство в $\mathfrak{L}(G)$, получаем следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 8.5. Пусть L – прямая в $[G, \varphi]$, проходящая через невырожденную линейную сеть Γ . Тогда L содержит не более чем конечное множество вырожденных линейных сетей.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.6. Пусть $\bar{\Gamma}$ – произвольная внутренняя точка множества $[G, \varphi]_{\min} \subset \bar{\nu}(\mathbb{R}^k)$. Тогда $\bar{\Gamma}$ – невырожденная линейная сеть, а значит, $\bar{\Gamma}$ – минимальная сеть.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Рассмотрим отрезок I' в пространстве $[G, \varphi]$, соединяющий Γ и $\bar{\Gamma}$, и пусть L – прямая, проходящая через этот отрезок. Так как $[G, \varphi]_{\min}$ выпукло, то $I' \subset [G, \varphi]_{\min}$. По следствию 8.5 на отрезке I' существует вырожденная линейная сеть $\bar{\Gamma}'$, ближайшая к Γ среди всех вырожденных линейных сетей из I' , причем все линейные сети из прямой L , близкие к $\bar{\Gamma}'$, являются невырожденными. Так как Γ и $\bar{\Gamma}$ – внутренние точки из $[G, \varphi]_{\min}$, то $\bar{\Gamma}'$ – также внутренняя точка из $[G, \varphi]_{\min}$. Отсюда вытекает, что существует невырожденная линейная сеть $\bar{\Gamma}'' \in I'$, которая лежит внутри $[G, \varphi]_{\min}$, причем отрезок $I'' \subset [G, \varphi]_{\min}$, соединяющий Γ и $\bar{\Gamma}''$, содержит сеть $\bar{\Gamma}'$, являющуюся единственной вырожденной линейной сетью из I'' . Мы получим противоречие, показав, что сети из I'' , близкие к $\bar{\Gamma}'$ и лежащие между $\bar{\Gamma}'$ и $\bar{\Gamma}''$, не могут минимизировать функционал длины ℓ .

ЛЕММА 8.2. Линейная сеть $\bar{\Gamma}'$ содержит такую вершину $\bar{\Gamma}': v \rightarrow \mathbb{R}^2$, что одно из ребер, инцидентных $\bar{\Gamma}': v \rightarrow \mathbb{R}^2$, скажем ребро $\bar{\Gamma}': e \rightarrow \mathbb{R}^2$, невырождено, а другое ребро $\bar{\Gamma}': e' \rightarrow \mathbb{R}^2$ вырождено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $[G, \varphi]_{\min}$ содержит невырожденную линейную сеть, то по предложению 4.2 образ границы сети $\bar{\Gamma}'$ не равен одной точке. Поэтому сеть $\bar{\Gamma}'$ содержит невырожденные ребра. Отсюда и из связности каждой сети немедленно вытекает утверждение леммы.

Итак, пусть v , e и e' – вершина и два инцидентных ей ребра из G , описанные в лемме 8.2. Так как линейные сети ψ , лежащие между Γ и $\bar{\Gamma}'$, невырождены, то они минимальны и по предложению 4.1 угол между ψ -образами ребер e и e' постоянен и равен 120° . Так как ребро $\bar{\Gamma}': e' \rightarrow \mathbb{R}^2$ вырождено, а ребро $\bar{\Gamma}: e \rightarrow \mathbb{R}^2$ – нет, то для сетей ψ' , близких к $\bar{\Gamma}'$ и лежащих между $\bar{\Gamma}'$ и $\bar{\Gamma}''$, угол между ψ' -образами ребер e и e' должен равняться 60° . Действительно, чтобы убедиться в справедливости последнего утверждения, введем на плоскости поступательно движущуюся систему координат, начало которой совпадает с образом подвижной вершины v . В этой системе координат, очевидно, ребра e и e' по-прежнему меняются аффинно. В качестве одной из координатных осей выберем прямую l' , вдоль которой движется отличная от v вершина ребра e' . Так как ребро e' вырождается, оно все время лежит на прямой l' . Поэтому ребро e все время лежит в прямой l , образующей с l' угол в 120° , откуда и вытекает требуемое. Итак, угол между ψ' -образами ребер e' и e равен 60° . Однако последнее невозможно, так как линейные сети ψ' являются минимальными сетями. Полученное противоречие и заканчивает доказательство утверждения.

Из предложения 8.6 непосредственно получается следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.7. Пусть $\Gamma_i: G \rightarrow \mathbb{R}^2$, $i = 0, 1$, – две невырожденные минимальные сети топологии G с одной и той же границей φ . Тогда все линейные сети Γ_t вида $(1-t)\Gamma_0 + t\Gamma_1$, $t \in [0, 1]$, являются обычными (погруженными) минимальными сетями той же топологии G и с той же границей φ . Более того, все эти сети параллельны между собой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предложению 8.5 сети Γ_i лежат в $[G, \varphi]_{\min}$. Из предложения 8.2 вытекает, что и все линейные сети Γ_t также лежат в $[G, \varphi]_{\min}$. По следствию 8.4 сети Γ_i являются внутренними точками множества $[G, \varphi]_{\min}$, рассматриваемого как подмножество линейного пространства $\bar{\nu}(\mathbb{R}^k)$ (см. выше). Поэтому все сети Γ_t также являются внутренними точками из $[G, \varphi]_{\min}$. Однако по предложению 8.6 сети Γ_t минимальны. Доказательство закончено.

Предложение 8.7 легко обобщается на минимальные сети произвольной топологии и приводит к следующей итоговой теореме.

ТЕОРЕМА 8.2. Пусть $\Gamma_i: G \rightarrow \mathbb{R}^2$, $i = 0, 1$, – две произвольные минимальные сети топологии G с одной и той же границей φ . Тогда все линейные сети Γ_t вида $(1-t)\Gamma_0 + t\Gamma_1$, $t \in [0, 1]$, являются обычными (погруженными) минимальными сетями той же топологии G и с той же границей φ . Более того, все эти сети параллельны между собой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, разрежем граф G по всем вершинам степени 2. Полученные невырожденные графы Штейнера обозначим через G^k . Обозначим через Γ_i^k соответствующие невырожденные минимальные сети, индуцированные этим разрезанием. По предложению 8.7 семейство $(1-t)\Gamma_0^k + t\Gamma_1^k$ состоит из взаимно параллельных невырожденных минимальных сетей. Поэтому, при рассматриваемой деформации, в вершинах стыковки разных невырожденных компонент углы между соответствующими ребрами сохраняются, что в силу предложения 4.1 гарантирует минимальность всех сетей вида $(1-t)\Gamma_0 + t\Gamma_1$. Теорема доказана.

Из приведенных выше утверждений непосредственно получается следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 8.6. Пусть G – произвольный граф Штейнера с границей ∂G , а φ – любое граничное отображение. Тогда множество минимальных сетей топологии G с границей φ или пусто, или является k -мерным выпуклым открытым телом в некотором k -мерном подпространстве конфигурационного пространства $[G, \varphi]$ точек Штейнера графа G , где k – наименьшее количество ребер, после разрезания по которым подвижный подграф $\hat{G}_\varphi$ графа G превращается в граф без циклов, т.е. k – цикломатическое число графа $\hat{G}_\varphi$. В частности, если $k = 0$, т.е. подвижный подграф $\hat{G}_\varphi$ графа G по отношению к границе φ ациклический, то существует не более одной минимальной сети типа G с границей φ .

Более того, все минимальные сети данной топологии и с данной границей параллельны между собой и имеют одинаковую длину.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Начнем с первого утверждения. Если граф G – невырожденный граф Штейнера и его граница эффективна, то, очевидно, каждый цикл из G лежит в $\hat{G}_\varphi$, цикломатические числа графов G и $\hat{G}_\varphi$ совпадают, и утверждение следствия очевидно из вышесказанного. В общем случае снова разрежем граф G по всем граничным вершинам степени 2 и 3 и рассмотрим полученные связные компоненты, каждая из которых является невырожденным графом Штейнера с эффективной границей. Из теоремы 8.2 вытекает, что любые две минимальные сети топологии G с границей φ могут быть продеформированы одна в другую постоянной на границе линейной деформацией в классе минимальных сетей. Эта деформация, очевидно, представима в виде последовательных линейных деформаций невырожденных компонент, постоянных на эффективных границах этих компонент. Так как каждая компонента связности графа $\hat{G}_\varphi$ целиком лежит в некоторой компоненте связности разрезанного графа G и цикломатическое число произвольного графа равно сумме цикломатических чисел его связных компонент, нам остается воспользоваться уже доказанным утверждением для невырожденных сетей.

Постоянство длины непосредственно вытекает из предложения 7.2. Доказательство закончено.

В следующем параграфе мы опишем более подробно, как устроены деформации минимальных сетей данной топологии с фиксированной границей.

§ 9. Деформация минимальной сети

Выше мы определили усы для 2-дерева. Это понятие достаточно полезно в теории минимальных 2-деревьев. Дело в том, что с помощью него можно получать многие результаты, проводя индукцию по числу ребер 2-дерева. При этом индуктивный переход осуществляется с помощью операции отрезания усов.

Оказывается, для невырожденных графов Штейнера, имеющих циклы, также можно ввести некоторый аналог усов, к определению которого мы и переходим.

Пусть G – произвольный невырожденный граф Штейнера. Ребро графа G назовем *циклическим*, если оно принадлежит хотя бы одному циклу. Обозначим через $C(G)$ множество всех циклических ребер из G . Множество $C(G)$ является подграфом в G . Связные компоненты графа $C(G)$ назовем *ядрами*.

Профакторизуем G , как топологическое пространство, по $C(G)$. Результат обозначим через G' . Полученное факторпространство естественным образом наделяется структурой графа, вершины которого – это вершины из G , не входящие ни в какое ядро, а также все ядра. Две вершины из G' смежны тогда и только тогда, когда соответствующие им элементы из G (вершины и ядра) соединены в G ребром. Естественную проекцию графа G на факторграф G' обозначим через π .

Легко видеть, что G' является деревом. Более того, в силу невырожденности графа Штейнера G граф G' не содержит вершин степени 2.

Пусть $\bar{G}$ – произвольное дерево, степени вершин которого отличны от 2. Для краткости мы будем называть вершины из $\bar{G}$ степени 1 *граничными* так же, как и ребра, инцидентные им. Все остальные ребра будем называть *внутренними*. Совокупность смежных граничных ребер из $\bar{G}$ назовем *усами*, если из общей для них вершины выходит не более одного внутреннего ребра.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.1. *Каждое дерево $\bar{G}$ без вершин степени 2 имеет усы. Если это дерево содержит неграничное ребро, то имеются два непересекающихся уса.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отрежем от дерева $\bar{G}$ все граничные ребра. Если у полученного дерева нет ребер, то все граничные ребра из $\bar{G}$ образуют усы. В противном случае у полученного дерева имеется не менее двух вершин степени 1. Ясно, что все граничные ребра из $\bar{G}$, инцидентные каждой такой вершине степени 1, образуют усы. Доказательство закончено.

Итак, рассмотрим в факторграфе G' некоторые усы. Ясно, что π -прообраз этих усов – это или два смежных граничных ребра (т.е. усы в старом смысле), или некоторое ядро вместе с выходящими из него граничными ребрами графа G . Более того, в последнем случае существует не более одного неграничного нециклического ребра из G , инцидентного этому ядру. Полученный π -прообраз будем называть *усами графа G* , а единственное неграничное нециклическое ребро, инцидентное усам (если таковое имеется), – *ребром крепления* этих усов. Если усы состоят ровно из двух граничных ребер, как в случае 2-дерева, то такие усы будем называть *стандартными*. Из предложения 9.1 мгновенно получается следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 9.1. *Каждый невырожденный граф Штейнера имеет некоторые усы. Если этот граф содержит внутреннее ребро, то он имеет два непересекающихся уса.*

Пусть теперь G – невырожденный граф Штейнера с циклами, совпадающий со своими единственными усами, и пусть $\partial G = \partial_e G$. Рассмотрим два граничных отображения φ и φ' , совпадающих на всех граничных вершинах из G , кроме одной, скажем v . Обозначим через e ребро из G , инцидентное v .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.2. *Предположим, что G имеет минимальные реализации Γ и Γ' по граничным отображениям φ и φ' соответственно, описанным выше. Более того, пусть минимальные сети Γ и Γ' параллельны. Тогда отрезок $[\varphi(v), \varphi'(v)]$ параллелен Γ -образу ребра e . В частности, отрезки $\Gamma(e)$ и $\Gamma'(e)$ лежат на одной прямой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через n единичный вектор направлений входящих в вершины $\Gamma: v \rightarrow \mathbb{R}^2$ и $\Gamma: v' \rightarrow \mathbb{R}^2$ ребер сетей Γ и Γ' соответственно. Вектору

n соответствует комплексное число $e^{i\alpha}$, а точкам $\varphi(v)$ и $\varphi'(v)$ – комплексные числа m и m' . Рассмотрим функции Максвелла минимальных сетей Γ и Γ' . Имеем $\mu(\Gamma) - \mu(\Gamma') = (m - m')e^{-i\alpha}$. По предложению 7.1 это – вещественное число. Следовательно, вектор $\varphi(v)\varphi'(v)$ коллинеарен вектору n . Доказательство предложения закончено.

Пусть G – произвольный граф Штейнера с границей ∂G и φ – некоторое граничное отображение. Разобьем ребра графа G на три класса. Ребро называется *циклическим*, если оно принадлежит какому-нибудь циклу. Иными словами, при выбрасывании циклического ребра связность графа не нарушается.

Обозначим через $\hat{G}$ подвижный граф для Γ . Ребро e из G отнесем к *нулевому уровню*, если e – циклическое ребро подвижного графа $\hat{G}$. Ребро e , не лежащее на нулевом уровне, но смежное с некоторым ребром нулевого уровня, отнесем к *первому уровню*, а все ребра, не лежащие ни на нулевом, ни на первом уровнях, отнесем ко *второму уровню*.

Имеет место следующий результат.

ТЕОРЕМА 9.1. *Пусть Γ – произвольная минимальная сеть топологии G с границей φ и Γ_t , $t \in [0, 1]$, – некоторая ее деформация в классе минимальных сетей с той же границей φ . Тогда в процессе деформации Γ_t все ребра остаются параллельны себе. При этом ребра второго уровня неподвижны, а для ребер первого уровня остаются неподвижными прямые, содержащие эти ребра.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То, что в процессе деформации Γ_t все ребра остаются параллельными, следует из невырожденности всех ребер сетей Γ_t , постоянства границы и непрерывности деформации Γ_t . Докажем теперь вторую часть теоремы.

Разрежем граф G по всем граничным вершинам степени 2 и 3 и рассмотрим связанные компоненты полученного графа. Граничное отображение φ индуцирует соответствующие граничные отображения на каждой из полученных компонент. Легко видеть, что каждая компонента является невырожденным графом Штейнера, причем ее граница совпадает с эффективной границей. Далее, легко видеть, что множество ребер нулевого уровня графа G состоит в точности из всех циклических ребер по всем полученным компонентам, а множество ребер первого (второго) уровня графа G является объединением множеств ребер первого (второго) уровня полученных компонент.

Ясно, что если мы докажем теорему для каждой из этих компонент, то мы получим доказательство и для сети Γ . Поэтому, учитывая все вышесказанное, заключаем, что теорему достаточно доказать в предположении невырожденности сети Γ и совпадения ее границы с эффективной.

Далее, если граф G содержит одно ребро, то утверждение теоремы тривиально. Предположим теперь, что для всех G , содержащих менее n ребер, теорема доказана. Пусть G содержит n ребер.

Если G имеет стандартные усы (e, e') , то в силу неизменности направления каждого ребра в процессе этой деформации эти усы неподвижны. Ясно, что усы (e, e') состоят из ребер второго уровня. Значит, для них теорема имеет место.

Далее, из неподвижности усов (e, e') вытекает неподвижность общей для них точки Штейнера, образ которой мы обозначим через V . Отрежем от G усы (e, e') и полученный невырожденный граф Штейнера обозначим через G' . Обозначим

через Γ'_t ограничение деформации Γ на G' . Так как вершина V неподвижна при деформации Γ_t , то деформация Γ'_t сетей топологии G' также неподвижна на границе. По предположению индукции теорема имеет место для сетей Γ'_t . Легко видеть, что ребра из G' относятся, по отношению к G' , к тем же уровням, что и по отношению к G . Таким образом, в этом случае теорема доказана.

Пусть теперь в G нет стандартных усов. По следствию 9.1 граф G содержит некоторые усы G' , имеющие цикл. Пусть e – ребро крепления усов G' , и $a \in e$ – некоторая внутренняя точка ребра e . Ясно, что ребро e не циклическое. Разрежем граф G по точке a . Так как e – не циклическое ребро, граф G распадется на две компоненты. Обозначим через $\bar{G}'$ ту из этих двух компонент, которая содержит усы G' , а через e' – ребро из $\bar{G}'$, принадлежащее e . Оставшуюся компоненту обозначим через $\bar{G}$.

Рассмотрим ограничение Γ'_t деформации Γ_t на $\bar{G}'$. По предложению 9.2 отрезки $\Gamma'_t(e')$ лежат на одной прямой. Поэтому для ребра e , которое, очевидно, относится к первому уровню, теорема доказана. Кроме того, мы получаем, что для t , близких к 0, можно сделать такую репараметризацию ребер $\Gamma_t: e \rightarrow \mathbb{R}^2$ сетей Γ_t , которая, во-первых, непрерывно зависит от t и, во-вторых, после нее точка $\Gamma_t(a)$ неподвижна. Теперь применим предположение индукции к обоим компонентам $\bar{G}$ и $\bar{G}'$. Очевидно, ребра из $\bar{G}$ и $\bar{G}'$, отличные от ребер разреза, принадлежат к тем же уровням, что и в графе G . Последнее замечание и завершает доказательство теоремы.

Теорема 9.1 позволяет описать, чем минимальные сети с одинаковыми топологиями и границами отличаются друг от друга.

СЛЕДСТВИЕ 9.2. Пусть Γ и Γ' – две минимальных сети одной и той же топологии G и с одной и той же границей. Тогда имеют место следующие свойства:

- 1) сеть Γ параллельна сети Γ' ;
- 2) длины сетей Γ и Γ' равны;
- 3) если e – произвольное ребро из G , лежащее на втором уровне, то его образы при отображениях Γ и Γ' совпадают;
- 4) если e – произвольное ребро из G , лежащее на первом уровне, то его образы при отображениях Γ и Γ' лежат на одной прямой;
- 5) если e – произвольное ребро из G , лежащее на нулевом уровне, то его образы при отображениях Γ и Γ' (в соответствии с первым пунктом) параллельны между собой.

Список литературы

1. Clark R. C. Communication networks, soap films and vectors // Phys. Ed. 1981. V. 16. P. 32–37.
2. Dijkstra E. W. A note on two problems with connection with graphs // Numer. Math. 1959. V. 1. № 5. P. 269–271.
3. Du D. Z., Hwang F. K. A New Bound for the Steiner Ratio // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. V. 278. № 1. P. 137–148.
4. Du D. Z., Hwang F. K. A Proof of Gilbert–Pollak’s Conjecture on the Steiner Ratio // DIMACS Technical Report. 1990. P. 90–72.
5. Du D. Z., Hwang F. K. An approach for proving lower bounds: solution of Gilbert–Pollak’s Conjecture on the Steiner Ratio // Proc of the 31st annual symp. on found. of comp. science. 1990.

6. *Du D. Z., Hwang F. K., Chao S. C.* Steiner minimal trees for points on a circle // Proc. Amer. Math. Soc. 1985. V. 95. № 4. P. 613–618.
7. *Du D. Z., Hwang F. K., Weng J. F.* Steiner minimal trees for points on a zig-zag lines // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. V. 278. № 1. P. 149–156.
8. *Du D. Z., Hwang F. K., Weng J. F.* Steiner minimal trees for Regular Polygons // Disc. and Comp. Geometry. 1987. V. 2. P. 65–84.
9. *Du D. Z., Hwang F. K., Yao E. N.* The Steiner ratio conjecture is true for five points // J. Combin. Th. Ser. A. 1985. V. 38. P. 230–240.
10. *Du D. Z., Hwang F. K., Song G. D., Ting G. T.* Steiner minimal trees on sets of four points // Discr. and Comp. Geometry. 1987. V. 2. P. 401–414.
11. *Garey M. R., Graham R. L., Johnson D. S.* Some NP-complete geometric problems // Eighth Annual Symp. on Theory of Comput. 1976. P. 10–22.
12. *Gilbert E. N., Pollak H. O.* Steiner minimal trees // SIAM J. Appl. Math. 1968. V. 16. № 1. P. 1–29.
13. *Hildebrandt S., Tromba A.* Mathematics and optimal form. New York: Scientific American Books, Inc., 1984.
14. *Hwang F. K.* A linear time algorithm for full Steiner trees // Oper. Res. Letter. 1986. V. 5. P. 235–237.
15. *Hwang F. K., Weng J. F.* Hexagonal coordinate Systems and Steiner minimal trees // Disc. Math. 1986. V. 62. P. 49–57.
16. *Hwang F. K., Richards D., Winter P.* The Steiners Tree Problem. Elsevier Science Publishers, 1992.
17. *Jarník V., Kössler M.* O minimalnich grafeth obeahujících n daných bodů // Cas. Pest. Mat. a Fys. 1934. V. 63. P. 223–235.
18. *Kruskal J. B.* On the shortest spanning subtree of a graph and traveling salesman problem // Proc. Amer. Math. Soc. 1956. V. 7. P. 48–50.
19. *Melzak Z. A.* On the problem of Steiner // Canad. Math. Bull. 1960. V. 4. P. 143–148.
20. *Melzak Z. A.* Companion to concrete mathematics. New York: Wiley-Interscience, 1973.
21. *Pollak H. O.* Some remarks on the Steiner problem // J. Combin. Thy. Ser. A24. 1978. P. 278–295.
22. *Preparata F., Shamos M.* Computational Geometry. An introduction. New York: Springer-Verlag, 1985.
23. *Prim R. C.* Shortest connecting networks and some generalizations // BSTJ. 1957. V. 36. P. 1389–1401.
24. *Rubinstein J. H., Thomas D. A.* The Steiner ratio conjecture for six points // J. Combin. Thy. Ser. A58. 1989. P. 54–77.
25. *Rubinstein J. H., Thomas D. A., Cole T.* Steiner Minimal Networks for Convex Configurations. Preprint series № 15 – 1991. The university of Melbourne dept of Math.
26. *Rubinstein J. H., Thomas D. A.* Graham's Problem On Shortest Networks for Points on a Circle // Algorithmica. 1992. V. 7. P. 193–218.
27. *Shamos M. I.* Computational Geometry. Ph. D. Thesis, Dept. of Comput. Sci., Yale Univ., 1978.
28. *Smith W. D.* How to find Steiner minimal trees in Euclidean d -space // Algorithmica. 1992. № 7. P. 137–177.
29. *Емеличев В. А. и др.* Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990.
30. *Дао Чонг Тги, Фоменко А. Т.* Минимальные поверхности и проблема Плато. М.: Наука, 1987.
31. *Фоменко А. Т.* Топологические вариационные задачи. М.: Изд-во МГУ, 1984.
32. *Фоменко А. Т.* Вариационные методы в топологии. М.: Наука, 1982.
33. *Гужилин А. А., Фоменко А. Т.* Элементы геометрии и топологии минимальных поверхностей. М.: Наука, 1991.
34. *Иванов А. О.* Геометрия плоских локально минимальных бинарных деревьев // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 9. С. 45–76.
35. *Иванов А. О.* Плоские взвешенные минимальные бинарные деревья // Фундаментальные проблемы матем. 1996. Т. 2. № 2. С. 511–562.

36. *Иванов А. О., Тужилин А. А.* Решение задачи Штейнера для выпуклых границ // УМН. 1990. Т. 45. № 2. С. 207–208.
37. *Иванов А. О., Тужилин А. А.* Задача Штейнера для выпуклых границ или плоские минимальные сети // Матем. сб. 1991. Т. 182. № 12. С. 1813–1844.
38. *Иванов А. О., Тужилин А. А.* Геометрия минимальных сетей и одномерная проблема Плато // УМН. 1992. Т. 47. № 2. С. 53–115.
39. *Ivanov A. O., Tuzhilin A. A.* The Steiner problem for convex boundaries. I. General case // Advances in Soviet Mathematics. 1993. V. 15. P. 15–92.
40. *Ivanov A. O., Tuzhilin A. A.* The Steiner problem for convex boundaries. II. The regular case // Advances in Soviet Mathematics. 1993. V. 15. P. 93–131.
41. *Ivanov A. O., Tuzhilin A. A.* Minimal Networks. The Steiner Problem and Its Generalizations. N.W., Boca Raton, Florida: CRC Press, 1994.
42. *Иванов А. О., Тужилин А. А.* Топологии локально минимальных плоских бинарных деревьев // УМН. 1994. Т. 49. № 6. С. 191–192.
43. *Иванов А. О., Тужилин А. А.* Взвешенные минимальные 2-деревья // УМН. 1995. Т. 50. № 3. С. 155–156.
44. *Иванов А. О., Тужилин А. А.* Геометрия плоских линейных деревьев // УМН. 1996. Т. 51. № 2. С. 161–162.
45. *Иванов А. О., Тужилин А. А.* Число вращения плоских линейных деревьев // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 8. С. 41–92.
46. *Иванов А. О., Исаков И. В., Тужилин А. А.* Минимальные сети на правильных многоугольниках: реализация линейных паркетов // Вестн. МГУ. Сер. матем. 1993. № 6. С. 77–81.
47. *Иванов А. О., Птицына И. В., Тужилин А. А.* Классификация замкнутых минимальных сетей на плоских двумерных торах // Матем. сб. 1992. Т. 183. № 12. С. 3–44.
48. *Тужилин А. А.* Минимальные бинарные деревья с правильной границей: случай скелетов с четырьмя концами // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 4. С. 117–159.
49. *Тужилин А. А.* Минимальные бинарные деревья с правильной границей: случай скелетов с пятью концами // Матем. заметки. 1997. Т. 61. № 6.
50. *Kuhn H. W.* Steiner's problem revisited // Studies in Optimization. Ser. Studies in Math. / Eds. Ed. by G. B. Dantzig and B. C. Eaves. V. 10. Math. Assoc. Amer., 1975. P. 53–70.
51. *Zacharias M.* Encyklopädie der Mathematischen // Wissenschaften. V. III. AB9.

Поступило в редакцию
1. III. 1996