Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. П. Замаховский, Периодические и трисимметрические пространства внутреннего типа с простыми группами движений, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1997, том 61, выпуск 6, 103–118

DOI: <https://doi.org/10.4213/im170>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 17:25:10

УДК 519.46

М. П. Замаховский

Периодические и трисимметрические пространства внутреннего типа с простыми группами движений

В статье показывается, что каждое периодическое пространство внутреннего типа с вещественной простой группой движений вполне определяется набором простых корней приведенной и неприводимой системы корней. Устанавливается связь периодических пространств с флаговыми многообразиями и трисимметрическими пространствами Сабина. Рассматривается одно из обобщений трисимметрических пространств.

Библиография: 18 наименований.

Введение

В. И. Ведерников [1] ввел понятие однородного Φ -пространства – однородного пространства G/H , определяемого произвольным аналитическим эндоморфизмом Φ группы Ли G , с условием

$$G_0^\Phi \subset H \subset G^\Phi,$$

где G^Φ – замкнутая подгруппа всех неподвижных точек эндоморфизма Φ и G_0^Φ – компонента единицы группы G^Φ .

Н. А. Степанов [2], [3] выделил большой класс однородных Φ -пространств, включающий в себя периодические однородные пространства – Φ -пространства, соответствующие периодическим автоморфизмам Φ конечного порядка k ($\Phi^k = \text{id}$). При $k = 2$ периодические пространства являются симметрическими.

Φ -пространства изучались Вольфом и Греем [4], А. С. Феденко [5] и другими (см. [6]). Вольф и Грей указали на языке корневых систем условия периодичности автоморфизма Φ и дали классификацию периодических пространств 3-го порядка с простыми группами движений. А. С. Феденко привел классификацию периодических пространств с простыми вещественными группами движений и для некоторых из них указал геометрические интерпретации.

Обобщения римановых симметрических пространств изучались Л. В. Сабининым [7]–[9]. В работе [7] он ввел понятие субсимметрического пространства как риманова пространства, с каждой точкой x которого связана инволютивная изометрия S_x , оставляющая точку x неподвижной. Неподвижные точки симметрии S_x образуют вполне геодезическую поверхность, называемую *зеркалом*. В работе [8] введено понятие трисимметрического пространства как однородного риманова пространства, с каждой точкой которого связаны три вполне ортогональных

Статья частично поддержана Международным научным фондом (грант МЗС300).

зеркала. В работе [9] приводится классификация трисимметрических пространств с простыми компактными группами движений.

Титс [10] и Вольф [11] изучали однородное пространство G/P , где G – простая группа Ли и P – ее параболическая подгруппа. Титс называл такое пространство *R-пространством*, Вольф – *флаговым многообразием*, в работе [12] оно названо *параболическим пространством*.

В § 1–3 приведены необходимые сведения о системах корней, простых вещественных алгебрах Ли [13, гл. 6, 8] и их внутренних автоморфизмах конечного порядка [14], [15]. В § 4 показано, что однородное периодическое пространство внутреннего типа с простой группой движений является пространством локально тривиального расслоения, базой и слоем которого служат противоположные флаговые многообразия. В § 5 найдены необходимые и достаточные условия трисимметричности несимметрических периодических пространств внутреннего типа с простыми группами движений. В § 6 рассмотрено одно из обобщений трисимметрических пространств. В статье рассматриваются простые вещественные группы Ли с точностью до локального изоморфизма.

Автор благодарит проф. Б. А. Розенфельда за полезные обсуждения результатов статьи.

§ 1. Системы корней

Пусть V – вещественное конечномерное евклидово векторное пространство и α – его ненулевой вектор. *Отражением* относительно вектора α называется автоморфизм s_α пространства V , удовлетворяющий условиям:

- 1) $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$;
- 2) множество всех векторов пространства V , инвариантных при автоморфизме s_α , является гиперплоскостью в V .

Системой корней называется подмножество Δ пространства V , удовлетворяющее условиям:

- 1) Δ – конечное множество, порождающее пространство V и не содержащее нулевого вектора;
- 2) для любого вектора $\alpha \in \Delta$ существует отражение s_α , переводящее множество Δ в себя;
- 3) для любых $\alpha, \beta \in \Delta$ $s_\alpha(\beta) - \beta = n\alpha$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Размерность пространства V называется *рангом* системы Δ , а векторы из Δ – *корнями*. Система корней называется *приведенной*, если при любом $\alpha \in \Delta$ вектор $-\alpha$ является единственным корнем, коллинеарным α . Система Δ называется *неприводимой*, если не существует разложения пространства V в прямую сумму ортогональных подпространств V_1 и V_2 таких, что $\Delta_i = \Delta \cap V_i$ – система корней в пространстве V_i ($i = 1, 2$).

Подмножество $\pi(\Delta) \subset \Delta$ называется *базисом* системы Δ , если $\pi(\Delta)$ – базис пространства V и все корни из Δ записываются в виде линейных комбинаций с целыми коэффициентами одного и того же знака. Базис системы корней называют также *системой простых корней*, а его элементы – *простыми корнями*. Корень из Δ , представимый в виде линейной комбинации с положительными (отрицательными) коэффициентами, называется *положительным* (*отрицательным*).

базисом системы корней Δ .

Каждая приведенная и неприводимая система корней является системой корней простой комплексной или вещественной расщепленной алгебры Ли и принадлежит одному из следующих типов:

$$A_n, B_n, C_n \quad (n \geq 1), \quad D_n \quad (n \geq 3), \quad G_2, F_4, E_6, E_7, E_8,$$

причем $A_1 = B_1 = C_1$, $B_2 = C_2$, $A_3 = D_3$.

Базис приведенной и неприводимой системы корней изображается диаграммой Дынкина, вершины которой представляют простые корни. Если угол между двумя соседними простыми корнями равен $2\pi/3$, $3\pi/4$, $5\pi/6$ или $\pi/2$, то соответственные вершины соединены одним, двумя или тремя ребрами или не соединены вообще. Направление от короткого к длинному корню указывается знаком $<$. Расширенные базисы систем корней представляются расширенными диаграммами Дынкина, изображенными на рис. 1. Над каждой вершиной, представляющей простой корень, указан коэффициент, с которым он входит в разложение максимального корня.

§ 2. Простые вещественные алгебры Ли

Рассмотрим простую вещественную расщепляемую алгебру Ли $\mathfrak{G}$. Пусть $\mathfrak{K}$ – ее расщепляющая подалгебра Картана, являющаяся максимальной коммутативной подалгеброй, для каждого элемента X которой оператор $\text{ad } X$ присоединенного представления алгебры $\mathfrak{G}$ приводится к диагональному виду. Фиксируя $\mathfrak{K}$ в $\mathfrak{G}$ и базис $\pi(\Delta)$ в системе корней Δ алгебры $\mathfrak{G}$, получим размеченную расщепленную алгебру Ли, представляемую в виде прямой суммы

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{K} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{G}^\alpha, \quad (2.1)$$

где $\mathfrak{G}^\alpha$ – одномерное подпространство, состоящее из всех элементов X , удовлетворяющих условию $[K, X] = \alpha(K)X$ для любого $K \in \mathfrak{K}$.

Подалгебры

$$\mathfrak{B}_+ = \mathfrak{K} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta_+} \mathfrak{G}^\alpha, \quad \mathfrak{B}_- = \mathfrak{K} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta_-} \mathfrak{G}^\alpha, \quad (2.2)$$

где Δ_+ и Δ_- – множества положительных и отрицательных корней системы Δ , являются противоположными подалгебрами Бореля алгебры (2.1). Всякая подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{G}$, содержащая ее подалгебру Бореля, называется *параболической подалгеброй*. Все параболические подалгебры простой вещественной расщепленной алгебры Ли $\mathfrak{G}$ могут быть получены следующим образом.

Для любого набора $A = \{\alpha_i, \alpha_j, \dots, \alpha_k\}$ r простых корней из $\pi(\Delta)$ обозначим через $\Delta_q(A)$ множество всех корней из Δ , в разложениях которых на простые корни сумма коэффициентов при корнях из A равна q (при $r = 1$ коэффициент при корне α_i равен q). Полагая

$$\mathfrak{G}_0(A) = \mathfrak{K} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta_0} \mathfrak{G}^\alpha, \quad (2.3)$$

$$\mathfrak{G}_q(A) = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_q} \mathfrak{G}^\alpha, \quad q \neq 0, \quad (2.4)$$

запишем алгебру Ли (2.1) в виде градуированной алгебры

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_{-s}(A) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{G}_{-1}(A) \oplus \mathfrak{G}_0(A) \oplus \mathfrak{G}_1(A) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{G}_s(A), \quad (2.5)$$

для которой $[\mathfrak{G}_q(A), \mathfrak{G}_t(A)] \subset \mathfrak{G}_{q+t}(A)$.

Представление алгебры Ли (2.1) в виде (2.5) было предложено И. Л. Кантором [16] и М. Кехером [17].

Подалгебры

$$\mathfrak{P}_+(A) = \mathfrak{G}_0(A) \oplus \mathfrak{G}_1(A) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{G}_s(A), \quad (2.6)$$

$$\mathfrak{P}_-(A) = \mathfrak{G}_{-s}(A) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{G}_{-1}(A) \oplus \mathfrak{G}_0(A) \quad (2.7)$$

содержат соответственно подалгебры (2.2) и, следовательно, являются противоположными параболическими подалгебрами алгебры (2.1). Автоморфизм алгебры $\mathfrak{G}$, индуцированный автоморфизмом $\alpha \rightarrow -\alpha$ ее системы корней, переводит подалгебры (2.6) и (2.7) друг в друга.

Подалгебры (2.6) и (2.7) пересекаются по подалгебре (2.3), являющейся прямой суммой полупростой алгебры Ли $\mathfrak{G}'_0(A)$ и r -мерной коммутативной алгебры D_1^r (прямой суммы r одномерных коммутативных алгебр D_1). Очевидно, что базис системы корней алгебры $\mathfrak{G}'_0(A)$ может быть получен из базиса $\pi(\Delta)$ удалением всех корней, входящих в A . Обозначим через $\mathfrak{G}^{0'}(A)$ алгебру Ли, базис системы корней которой получается из расширенного базиса $\tilde{\pi}(\Delta)$ системы Δ удалением всех корней, входящих в A .

Подалгебра

$$\mathfrak{G}^0(A) = \mathfrak{G}_{-s}(A) \oplus \mathfrak{G}_0(A) \oplus \mathfrak{G}_s(A) \quad (2.8)$$

алгебры (2.1) при $r = 1$ и $s = 1$ совпадает с алгеброй $\mathfrak{G}$, при $r = 1$ и $s > 1$ является полупростой алгеброй $\mathfrak{G}^{0'}(A)$, а при $r > 1$ – прямой суммой подалгебры $\mathfrak{G}^{0'}(A)$ и алгебры D_1^{r-1} .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Удаление из расширенного базиса $\tilde{\pi}(\Delta)$ простого корня, входящего в разложение максимального корня $\tilde{\alpha}$ с коэффициентом 1, приводит к обычному базису системы Δ .

Отсюда следует, что набор A простых корней, не содержащий корня, входящего в разложение корня $\tilde{\alpha}$ с коэффициентом 1, определяет две собственные подалгебры алгебры Ли, $\mathfrak{G} - \mathfrak{G}_0(A)$ и $\mathfrak{G}^0(A)$. В противном случае он определяет только одну подалгебру $\mathfrak{G}_0(A)$.

Классификация простых расщепляемых алгебр Ли сводится к классификации их систем корней (§1). Простые алгебры Ли типов A_n , B_n , C_n и D_n называются *классическими*, а алгебры Ли остальных пяти типов – *особыми* или *исключительными*.

Разложение

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{L} \quad (2.9)$$

алгебры Ли $\mathfrak{G}$ называется *картановым*, если подпространства $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{L}$ удовлетворяют условиям $[\mathfrak{H}, \mathfrak{H}] \subseteq \mathfrak{H}$, $[\mathfrak{H}, \mathfrak{L}] \subseteq \mathfrak{L}$, $[\mathfrak{L}, \mathfrak{L}] \subseteq \mathfrak{H}$.

Картаново разложение (2.9) алгебры Ли $\mathfrak{G}$ определяет ее инволютивный автоморфизм σ ($\sigma^2 = \text{id}$), оставляющий неподвижными все элементы подалгебры $\mathfrak{H}$ и умножающий на -1 все элементы подпространства $\mathfrak{L}$.

Все вещественные простые алгебры Ли, имеющие общую комплексную форму $\mathbb{C}\mathfrak{G}$ с алгеброй Ли $\mathfrak{G}$, могут быть получены из $\mathfrak{G}$ картановым алгоритмом [18, с. 176]: для каждого инволютивного автоморфизма σ алгебры $\mathfrak{G}$ достаточно записать соответствующее картаново разложение (2.9) и получить вещественную алгебру Ли

$$\mathfrak{G}(\sigma) = \mathfrak{H} \oplus i\mathfrak{L}, \quad i^2 = -1. \quad (2.10)$$

Так как в случае $\sigma = \text{id}$ алгебра (2.10) совпадает с алгеброй Ли $\mathfrak{G}$, то будем в дальнейшем обозначать произвольную простую вещественную алгебру Ли через $\mathfrak{G}(\sigma)$, где $\mathfrak{G}$ – алгебра Ли (2.1). Если алгебра Ли $\mathfrak{G}(\sigma)$ получена из алгебры Ли $\mathfrak{G}$ картановым алгоритмом, то подалгебры алгебры Ли $\mathfrak{G}(\sigma)$, получаемые при этом картановом алгоритме из подалгебр $\mathfrak{P}_{\pm}(A)$, $\mathfrak{G}_0(A)$ и $\mathfrak{G}^0(A)$ алгебры Ли $\mathfrak{G}$, будем обозначать соответственно через $\mathfrak{P}_{\pm}(A; \sigma)$, $\mathfrak{G}_0(A; \sigma)$ и $\mathfrak{G}^0(A; \sigma)$.

§ 3. Внутренние автоморфизмы простых вещественных алгебр Ли

Описание всех автоморфизмов конечного порядка простых алгебр Ли дано В. Капом [14, гл. 8]. Следующая теорема описывает на языке систем корней все внутренние автоморфизмы минимального порядка вещественных простых алгебр Ли.

ТЕОРЕМА 3.1. *Для любого внутреннего автоморфизма Φ конечного порядка алгебры Ли $\mathfrak{G}(\sigma)$ существует такое множество A ее простых корней, что Φ оставляет неподвижной подалгебру $\mathfrak{G}_0(A; \sigma)$ или $\mathfrak{G}^0(A; \sigma)$ и имеет соответственно минимальный порядок $s + 1$ или s , где s – сумма коэффициентов, с которыми простые корни из A входят в разложение максимального корня $\tilde{\alpha}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать теорему для простой вещественной расщепленной алгебры Ли $\mathfrak{G}$.

Пусть Φ – произвольный внутренний автоморфизм конечного порядка алгебры Ли $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}^{\Phi}$ – его алгебра неподвижных точек. Так как автоморфизм Φ внутренний, то его ограничение на подалгебру Картана $\mathfrak{K}$ является тождественным преобразованием. Следовательно, каждое корневое подпространство $\mathfrak{G}^{\alpha}$ автоморфизм Φ умножает на некоторое ненулевое вещественное число t_{α} . Поэтому подалгебра $\mathfrak{G}^{\Phi}$ имеет вид

$$\mathfrak{G}^{\Phi} = \mathfrak{K} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta^{\Phi}} \mathfrak{G}^{\alpha}, \quad (3.1)$$

где Δ^{Φ} – замкнутое множество корней из системы Δ .

Так как $[\mathfrak{G}^{\alpha}, \mathfrak{G}^{-\alpha}] \subset \mathfrak{K}$, то Δ^{Φ} – симметричное множество. В силу леммы 1.1 множество Δ^{Φ} является системой корней. Из леммы 1.2 и замечания 2.1 следует, что найдется такой набор A простых корней алгебры Ли $\mathfrak{G}$, что алгебра (2.1) совпадает с подалгеброй $\mathfrak{G}_0(A)$ или $\mathfrak{G}^0(A)$.

Набору A простых корней алгебры Ли $\mathfrak{G}$ соответствуют две градуировки:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_0(A) \oplus \mathfrak{A}_1(A) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{A}_s(A), \quad \mathfrak{G} = \mathfrak{G}^0(A) \oplus \mathfrak{A}_1(A) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{A}_{s-1}(A), \quad (3.2)$$

где $\mathfrak{A}_k(A) = \mathfrak{G}_k(A) \oplus \mathfrak{G}_{-k}(A)$, $k \neq 0$, а s – сумма коэффициентов, с которыми простые корни из A входят в разложение максимального корня $\tilde{\alpha}$. Известно [13,

Таблица 3.1

$\mathfrak{G}$	m	$\mathfrak{G}_0(\alpha_m)$	$\dim \mathfrak{G}_0(\alpha_m)$	m	$\mathfrak{G}^0(\alpha_m)$	$\dim \mathfrak{G}^0(\alpha_m)$
A_n	1	$A_{n-1} \oplus D_1$	n^2			
	n $1 < m < n$	$A_{m-1} \oplus A_{n-m} \oplus D_1$	$n^2 + 2(m^2 - nm + n - m)$			
B_2	1	$B_1 \oplus D_1$	4	2	$B_1 \oplus B_1$	6
B_n $n > 2$	1	$B_{n-1} \oplus D_1$	$2n^2 - 3n + 2$	2	$B_1 \oplus B_1 \oplus B_{n-2}$	$2n^2 - 7n + 12$
				m	$D_m \oplus B_{n-m}$	$2n^2 + 4m^2 -$
				$2 < m < n$		$-4mn + n - 2m$
				n	D_n	$n(2n - 1)$
C_n	n	$A_{n-1} \oplus D_1$	n^2	m $m < n$	$C_m \oplus C_{n-m}$	$2n^2 + 4m^2 -$ $-4nm + n$
D_n	1	$D_{n-1} \oplus D_1$	$2n^2 - 5n + 4$	2	$A_1 \oplus A_1 \oplus D_{n-2}$	$2n^2 - 9n + 16$
	$n-1$	$A_{n-1} \oplus D_1$	n^2	$n-2$	$D_m \oplus D_{n-m}$	$2n^2 + 4m^2 -$ $-4mn - n$
	n			m		
				$2 < m$ $m < n-2$		
G_2				2	$A_1 \oplus A_1$	6
F_4				1	$A_1 \oplus C_3$	24
				4	B_4	36
E_6	1	$D_5 \oplus D_1$	46	2	$A_1 \oplus A_5$	38
	6			3		
				5		
E_7	7	$E_6 \oplus D_1$	79	2	A_7	63
				1	$A_1 \oplus D_6$	69
				6		
E_8				1	D_8	120
				8	$A_1 \oplus E_7$	136

гл. 8, с. 133], что градуировки вида (3.2) определяют автоморфизмы минимальных порядков $s + 1$ и s алгебры Ли $\mathfrak{G}$, оставляющие неподвижными подалгебры $\mathfrak{G}_0(A)$

и $\mathfrak{G}^0(A)$ соответственно. Эти автоморфизмы оставляют неподвижной подалгебру $\mathfrak{K}$ и, следовательно, являются внутренними. Теорема доказана.

Обозначим внутренний автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{G}(\sigma)$, оставляющий неподвижной ее подалгебру $\mathfrak{G}_0(A; \sigma)$ или $\mathfrak{G}^0(A; \sigma)$, через $\Phi_0(A; \sigma)$ или $\Phi^0(A; \sigma)$ и будем называть его *внутренним автоморфизмом типа 1 или 2* соответственно.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *Для любого внутреннего инволютивного автоморфизма Ψ алгебры Ли $\mathfrak{G}(\sigma)$ найдется такой простой корень α_p или α_k , входящий в разложение максимального корня с коэффициентом 1 или 2, что $\Psi = \Phi_0(\alpha_p, \sigma)$ или $\Psi = \Phi^0(\alpha_k, \sigma)$ соответственно.*

В табл. 3.1, полученной на основании следствия 3.1 и расширенных диаграмм Дынкина (рис. 1), для каждой простой расщепленной алгебры Ли $\mathfrak{G}$ приведены с точностью до изоморфизма алгебры неподвижных точек всех ее внутренних инволютивных автоморфизмов и их размерности; символом D_1 обозначена одномерная алгебра Ли, а $D_2 = A_1 \oplus A_1$. Алгебры неподвижных точек всех внутренних автоморфизмов минимального порядка простых компактных алгебр Ли приведены в работе [15].

ТЕОРЕМА 3.2. *Каждому набору A простых корней алгебры Ли $\mathfrak{G}(\sigma)$, входящих в разложение максимального корня с суммой коэффициентов s , соответствует инволютивный автоморфизм $\psi(A; \sigma)$ алгебры Ли $\mathfrak{G}(A; \sigma)$, оставляющий неподвижной ее подалгебру $\mathfrak{G}_0(A; \sigma)$ и, при четном s , подалгебру $\mathfrak{G}^0(A; \sigma)$.*

Аutomорфизмы $\psi(A_1; \sigma)$ и $\psi(A_2; \sigma)$ перестановочны, и их композиция является автоморфизмом $\psi(A_1 \cup A_2; \sigma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать теорему для алгебры $\mathfrak{G}$. Пусть подалгебра $\mathfrak{H}$ в разложении (2.9) алгебры $\mathfrak{G}$ имеет вид

$$\mathfrak{G}_{-2k}(A) \oplus \mathfrak{G}_{-2(k-1)}(A) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{G}_{-2}(A) \oplus \mathfrak{G}_0(A) \oplus \mathfrak{G}_2(A) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{G}_{2k}(A), \quad (3.3)$$

где $k = s/2$ при четном s и $k = (s-1)/2$ при нечетном s . Тогда разложение (2.9) алгебры $\mathfrak{G}$ является картановым и, следовательно, оно определяет ее инволютивный автоморфизм $\psi(A)$. Алгебра (3.3) содержит подалгебру $\mathfrak{G}_0(A)$ и, при четном s , подалгебру $\mathfrak{G}^0(A)$.

Пусть $A = A_1 \cup A_2$. Инволютивный автоморфизм $\psi(A_b)$, где $b = 1, 2$, оставляет неподвижными все элементы подпространств $\mathfrak{G}^\alpha$, для которых разложение корня α содержит простые корни из A_b с четной суммой коэффициентов, а все остальные элементы умножает на -1 . Поэтому композиция автоморфизмов $\psi(A_1)$ и $\psi(A_2)$ оставляет неподвижными все элементы подпространств $\mathfrak{G}^\alpha$, для которых разложение корня α содержит простые корни из A с четной суммой коэффициентов. Следовательно, $\psi(A) = \psi(A_1)\psi(A_2) = \psi(A_2)\psi(A_1)$.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. *Если простой корень α_m входит в разложение максимального корня $\tilde{\alpha}$ с коэффициентом 1 или 2, то инволютивный автоморфизм $\psi(\alpha_m; \sigma)$ совпадает соответственно с автоморфизмом $\Phi_0(\alpha_m; \sigma)$ или $\Phi^0(\alpha_m; \sigma)$.*

§ 4. Периодические пространства внутреннего типа и их связь с флаговыми многообразиями

Простая вещественная алгебра Ли $\mathfrak{G}(\sigma)$ (при $\sigma = \text{id}$ – расщепляемая алгебра) определяет с точностью до локального изоморфизма простую вещественную группу Ли $G(\sigma)$ (при $\sigma = \text{id}$ – расщепляемую группу), а ее подалгебры $\mathfrak{P}_+(\mathbf{A}; \sigma)$ и $\mathfrak{P}_-(\mathbf{A}; \sigma)$ – противоположные параболические подгруппы $P_+(\mathbf{A}; \sigma)$ и $P_-(\mathbf{A}; \sigma)$ группы $G(\sigma)$. Обозначим флаговые многообразия $G(\sigma)/P_+(\mathbf{A}; \sigma)$ и $G(\sigma)/P_-(\mathbf{A}; \sigma)$ соответственно через $F_+(\mathbf{A}; G(\sigma))$ и $F_-(\mathbf{A}; G(\sigma))$ и назовем их *противоположными*. Локальный автоморфизм группы $G(\sigma)$, индуцированный автоморфизмом $\alpha \rightarrow -\alpha$ системы ее корней, переводит противоположные флаговые многообразия друг в друга. Назовем пары соответственных при этом автоморфизме точек парами *противоположных точек*.

Обозначим через $G_0(\mathbf{A}; \sigma)$ и $G^0(\mathbf{A}; \sigma)$ подгруппы группы Ли $G(\sigma)$, алгебрами Ли которых являются подалгебры $\mathfrak{G}_0(\mathbf{A}; \sigma)$ или $\mathfrak{G}^0(\mathbf{A}; \sigma)$ алгебры $\mathfrak{G}(\sigma)$. Заметим, что подгруппа $G_0(\mathbf{A}; \sigma)$ группы $G(\sigma)$ является пересечением противоположных параболических подгрупп $P_+(\mathbf{A}; \sigma)$ и $P_-(\mathbf{A}; \sigma)$ группы $G(\sigma)$.

Из теоремы 3.1 непосредственно следует, что периодическое пространство с группой движений $G(\sigma)$, определяемое автоморфизмом $\Phi_0(\mathbf{A}; \sigma)$ или $\Phi^0(\mathbf{A}; \sigma)$, является однородным пространством $G(\mathbf{A}; \sigma)/G_0(\mathbf{A}; \sigma)$ или $G(\mathbf{A}; \sigma)/G^0(\mathbf{A}; \sigma)$ соответственно. Будем называть эти пространства *периодическими пространствами внутреннего типа 1 и 2* и обозначать их через $P_0(\mathbf{A}; G(\sigma))$ и $P^0(\mathbf{A}; G(\sigma))$. Порядок первого пространства равен $s + 1$, а порядок второго пространства равен s , где s – сумма коэффициентов, с которыми простые корни из $\mathbf{A}$ входят в разложение максимального корня $\tilde{\alpha}$. В силу следствия 3.1 пространства $P_0(\alpha_p; G(\sigma))$ и $P^0(\alpha_m; G(\sigma))$, где простые корни α_p и α_m входят в разложение максимального корня с коэффициентом 1 и 2 соответственно, являются симметрическими. Заметим, что набору $\mathbf{A}$, содержащему простой корень, входящий в разложение максимального корня с коэффициентом 1, соответствует только периодическое пространство внутреннего типа 1.

Если группы автоморфизмов конечного порядка k группы G при различных k изоморфны, то определяемые ими периодические пространства изоморфны как однородные пространства. Поэтому одно и то же однородное пространство может иметь структуру различных периодических пространств. Например, стабилизаторы точек пространств $P_0(\alpha_1; G_2)$, $P_0(\alpha_2; G_2)$ и $P^0(\alpha_1, \alpha_2; G_2)$ локально изоморфны прямому произведению простой группы типа A_1 и одномерной коммутативной группы D_1 и, следовательно, указанные пространства изоморфны как однородные пространства. С другой стороны, первые два пространства являются периодическими пространствами внутреннего типа 1 порядка 4 и 3, а третье – периодическим пространством внутреннего типа 2 порядка 5.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Разложение (2.8) алгебры Ли $\mathfrak{G}^0(\mathbf{A})$ картаново, и, следовательно, пространство

$$P(\mathbf{A}; G(\sigma)) = G^0(\mathbf{A}; \sigma)/G_0(\mathbf{A}; \sigma) \quad (4.1)$$

является симметрическим.

Из разложения (2.5) алгебры Ли (2.1) видно, что касательное пространство к $P_0(A; G)$ является прямой суммой касательных пространств к $P_+(A; G)$ и $P_-(A; G)$ или прямой суммой касательных пространств к $P^0(A; G)$ и $P(A; G)$. Отсюда следует

ТЕОРЕМА 4.1. *Пространство $P_0(A; G(\sigma))$ является пространством локально тривиального расслоения с базой $P_+(A; G(\sigma))$ и слоем $P_-(A; G(\sigma))$ или с базой $P^0(A; G(\sigma))$ и слоем $P(A; G(\sigma))$.*

СЛЕДСТВИЕ 4.1.

$$\begin{aligned}\dim P_0(A; G(\sigma)) &= 2 \dim P_+(A; G(\sigma)) = \dim G(\sigma) - \dim G_0(A; G(\sigma)), \\ \dim P^0(A; G(\sigma)) &= \dim P_0(A; G(\sigma)) - \dim P(A; G(\sigma)) \\ &= \dim G(\sigma) - \dim G^0(A; G(\sigma)).\end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 4.2. *Точки пространства $P_0(A; G(\sigma))$ представляются парами противоположных точек многообразий $P_+(A; G(\sigma))$ и $P_-(A; G(\sigma))$ или парами точек, одна из которых принадлежит пространству $P^0(A; G(\sigma))$, а другая – пространству $P(A; G(\sigma))$.*

Из табл. 3.1 следует, что пространства

$$\begin{aligned}P_0(\alpha_m; A_n), \quad P_0(\alpha_1; B_n), \quad P_0(\alpha_n; C_n), \quad P_0(\alpha_m; D_n), \quad m = 1, n-1, n; \\ P_0(\alpha_m; E_6), \quad m = 1, 6; \quad P_0(\alpha_7; E_7)\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}P^0(\alpha_m; B_n), \quad m > 1; \quad P^0(\alpha_m; C_n), \quad m < n; \quad P^0(\alpha_m; D_n), \quad m \neq 1, n-1, n; \\ P^0(\alpha_2; G_2); \quad P^0(\alpha_m; F_4), \quad m = 1, 4; \quad P^0(\alpha_m; E_6), \quad m = 2, 3, 5; \\ P^0(\alpha_m; E_7), \quad m = 1, 2, 6; \quad P^0(\alpha_m; E_8), \quad m = 1, 8,\end{aligned}$$

являются симметрическими пространствами внутреннего типа 1 и 2 соответственно.

§ 5. Трисимметрические пространства

Трисимметрическое пространство с группой движений G локально можно определить следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Однородное пространство G/H называется *трисимметрическим*, если:

- 1) алгебра Ли $\mathfrak{G}$ группы G является суммой $\mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_2 + \mathfrak{G}_3$ алгебр неподвижных точек ее перестановочных инволютивных автоморфизмов Ψ_1, Ψ_2 и $\Psi_3 = \Psi_1\Psi_2$;
- 2) алгебра Ли $\mathfrak{H}$ группы H является суммой $\mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_2 + \mathfrak{H}_3$, где $\mathfrak{H}_a$ – алгебра неподвижных точек инволютивного автоморфизма алгебры $\mathfrak{G}_a$ ($a = 1, 2, 3$);
- 3) $\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2 \cap \mathfrak{G}_3 = \mathfrak{G}_0 \subseteq \mathfrak{H}$.

Трисимметрическое пространство называется *тривиальным* или *полутривиальным*, если соответственно $\mathfrak{G}_0 = \mathfrak{H}$ или $\mathfrak{G}_0 = \mathfrak{H}_a$ при некотором $a = 1, 2, 3$. Если существует автоморфизм f группы G , удовлетворяющий условиям $f\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{G}_2$,

$f\mathfrak{G}_2 = \mathfrak{G}_3$ и $f\mathfrak{G}_3 = \mathfrak{G}_1$, то трисимметрическое пространство называется *свертывающим*.

Зеркалами трисимметрического пространства G/H являются симметрические пространства G_a/H_a , где G_a и H_a – группы с алгебрами Ли $\mathfrak{G}_a$ и $\mathfrak{H}_a$.

Связь между периодическими пространствами внутреннего типа и трисимметрическими пространствами устанавливает

ТЕОРЕМА 5.1. *Несимметрическое пространство $P_0(A; G(\sigma))$ или $P^0(A; G(\sigma))$ обладает структурой трисимметрического пространства тогда и только тогда, когда соответственно $A = \{\alpha_p, \alpha_q\}$ или $A = \{\alpha_h\}$, где простые корни α_p и α_q входят в разложение максимального корня с коэффициентом 1, а простой корень α_h – с коэффициентом 3.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть пространство $P_0(A; G)$ или $P^0(A; G)$ с простой расщепляемой группой движений G обладает структурой трисимметрического пространства, определяемой перестановочными инволютивными автоморфизмами Ψ_1 , Ψ_2 и $\Psi_3 = \Psi_1\Psi_2$ алгебры Ли $\mathfrak{G}$. Тогда возможны только следующие случаи.

1. $\Psi_1 = \Phi_0(\alpha_p)$, $\Psi_2 = \Phi_0(\alpha_q)$ и $\Psi_3 = \psi(\alpha_p, \alpha_q)$, где простые корни α_p и α_q входят в разложение максимального корня $\tilde{\alpha}$ с коэффициентом 1. Алгебрами неподвижных точек этих автоморфизмов являются подалгебры $\mathfrak{G}_0(\alpha_p)$, $\mathfrak{G}_0(\alpha_q)$ и $\mathfrak{G}^0(\alpha_p, \alpha_q)$ алгебры $\mathfrak{G}$. Эти подалгебры пересекаются по подалгебре $\mathfrak{G}_0(\alpha_p, \alpha_q)$, входящей в $\mathfrak{G}_0(A)$ или $\mathfrak{G}^0(A)$. Отсюда следует, что $A = \{\alpha_p\}$, $A = \{\alpha_q\}$ или $A = \{\alpha_p, \alpha_q\}$. В первых двух случаях пространство $P_0(A; G)$ симметрическое, а пространство $P^0(A; G)$ не определено. В третьем случае пространство $P_0(A; G)$ имеет порядок 3, а пространство $P^0(A; G)$ является симметрическим.

Покажем, что пространство $P_0(\alpha_p, \alpha_q; G)$ порядка 3 является тривиальным трисимметрическим пространством с зеркалами

$$\begin{aligned} Z_1 &= G_0(\alpha_p)/G_0(\alpha_p, \alpha_q), & Z_2 &= G_0(\alpha_q)/G_0(\alpha_p, \alpha_q), \\ Z_3 &= G^0(\alpha_p, \alpha_q)/G_0(\alpha_p, \alpha_q). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Очевидно, что

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_0(\alpha_p) + \mathfrak{G}_0(\alpha_q) + \mathfrak{G}^0(\alpha_p, \alpha_q), \quad (5.2)$$

и слагаемые суммы (5.2) пересекаются по подалгебре $\mathfrak{G}_0(\alpha_p, \alpha_q)$. В силу замечания 4.1 подалгебра $\mathfrak{G}_0(\alpha_p, \alpha_q)$ является алгеброй неподвижных точек инволютивного автоморфизма алгебры $\mathfrak{G}^0(\alpha_p, \alpha_q)$. Так как подалгебры $\mathfrak{G}_0(\alpha_p)$ и $\mathfrak{G}_0(\alpha_q)$ содержат $\mathfrak{G}_0(\alpha_p, \alpha_q)$, то утверждение доказано.

2. $\Psi_1 = \Phi_0(\alpha_p)$, $\Psi_2 = \Phi^0(\alpha_k)$ и $\Psi_3 = \psi(\alpha_p, \alpha_k)$, где простые корни α_p и α_k входят в разложение максимального корня $\tilde{\alpha}$ с коэффициентами 1 и 2 соответственно. Алгебрами неподвижных точек этих автоморфизмов являются подалгебры $\mathfrak{G}_0(\alpha_p)$, $\mathfrak{G}^0(\alpha_k)$ и

$$\overline{\mathfrak{G}_0}(\alpha_p, \alpha_k) = \mathfrak{G}_{-2}(\alpha_p, \alpha_k) \oplus \mathfrak{G}_0(\alpha_p, \alpha_k) \oplus \mathfrak{G}_2(\alpha_p, \alpha_k) \quad (5.3)$$

алгебры $\mathfrak{G}$. Пересечение $\mathfrak{G}_0$ этих подалгебр состоит из всех элементов корневых подпространств $\mathfrak{G}^\alpha$, для которых разложение корня α не содержит α_p и содержит α_k с коэффициентом 0 или 2. Поэтому включение $\mathfrak{G}_0 \subseteq \mathfrak{G}_0(A)$ возможно только

тогда, когда $A = \{\alpha_p\}$. В этом случае пространство $P_0(A; G)$ симметрическое. Включение $\mathfrak{G}_0 \subseteq \mathfrak{G}^0(A)$ возможно только тогда, когда $A = \{\alpha_p\}$ или $A = \{\alpha_k\}$. В первом случае пространство $P^0(A; G)$ не определено, а во втором оно симметрическое.

3. $\Psi_1 = \Phi^0(\alpha_m)$, $\Psi_2 = \Phi^0(\alpha_k)$ и $\Psi_3 = \psi(\alpha_m, \alpha_k)$, где простые корни α_m и α_k входят в разложение максимального корня $\tilde{\alpha}$ с коэффициентом 2. Алгебрами неподвижных точек этих автоморфизмов являются подалгебры $\mathfrak{G}^0(\alpha_m)$, $\mathfrak{G}^0(\alpha_k)$ и

$$\overline{\mathfrak{G}}^0(\alpha_k, \alpha_m) = \mathfrak{G}_{-2}(\alpha_k, \alpha_m) \oplus \mathfrak{G}^0(\alpha_k, \alpha_m) \oplus \mathfrak{G}_2(\alpha_k, \alpha_m) \quad (5.4)$$

алгебры $\mathfrak{G}$. Пересечение $\mathfrak{G}_0$ этих подалгебр состоит из всех элементов корневых подпространств $\mathfrak{G}^\alpha$, для которых разложение корня α содержит каждый из корней α_k и α_m с коэффициентом 0 или 2. Поэтому включение $\mathfrak{G}_0 \subseteq \mathfrak{G}^0(A)$ невозможно, а включение $\mathfrak{G}_0 \subseteq \mathfrak{G}^0(A)$ возможно только тогда, когда $A = \{\alpha_m\}$ или $A = \{\alpha_k\}$. В обоих случаях пространство $P^0(A; G)$ симметрическое.

4. Один из автоморфизмов Ψ_a , например Ψ_1 , совпадает с $\psi(B)$, где B – множество простых корней алгебры $\mathfrak{G}$, отличное от $\{\alpha_p\}$, $\{\alpha_k\}$, $\{\alpha_p, \alpha_q\}$, $\{\alpha_p, \alpha_k\}$ и $\{\alpha_k, \alpha_m\}$. Разложение (3.3) алгебры $\mathfrak{G}_1$ неподвижных точек этого автоморфизма является картановым только при $s = 2, 3$. Это возможно только в том случае, когда $B = \{\alpha_h\}$, где простой корень α_h входит в разложение максимального корня с коэффициентом 3. Автоморфизм $\Psi(\alpha_h)$ сопряжен с некоторым автоморфизмом $\Phi_0(\alpha_p)$ или $\Phi^0(\alpha_k)$. Поэтому $\mathfrak{G}_2 = \mathfrak{G}_0(\alpha_p)$ или $\mathfrak{G}_2 = \mathfrak{G}^0(\alpha_k)$. В первом случае включение $\mathfrak{G}_0 \subseteq \mathfrak{G}_0(A)$ возможно только тогда, когда $A = \{\alpha_p\}$, а во втором случае оно не имеет места. Включение $\mathfrak{G}_0 \subseteq \mathfrak{G}^0(A)$ возможно только тогда, когда $A = \{\alpha_p\}$, $A = \{\alpha_k\}$ или $A = \{\alpha_h\}$. Пространства $P_0(\alpha_p; G)$ и $P^0(\alpha_k; G)$ симметрические, пространство $P^0(\alpha_p; G)$ не определено, а пространство $P^0(\alpha_h; G)$ имеет порядок 3.

Л. В. Сабинин [9] получил локальную классификацию нетривиальных сверхинволютивных трисимметрических и несимметрических пространств с простыми компактными группами движений, равносильную классификации таких пространств с простыми вещественными расщепляемыми группами движений. Из этой классификации следует, что пространства $P^0(\alpha_h; G)$:

$$\begin{aligned} P^0(\alpha_1; G_2) &= G_2/A_2, \\ P^0(\alpha_2; F_4) &= F_4/(A_2 \times A_2), \\ P^0(\alpha_4; E_6) &= E_6/(A_2 \times A_2 \times A_2), \\ P^0(\alpha_3; E_7) &= P^0(\alpha_5; E_7) = E_7/(A_5 \times A_2), \\ P^0(\alpha_7; E_8) &= E_8/(E_6 \times A_2), \end{aligned}$$

являются нетривиальными сверхинволютивными трисимметрическими и несимметрическими пространствами. Пространство $P^0(\alpha_2; E_8) = E_8/A_8$ является тривиальным сверхинволютивным трисимметрическим пространством.

Применение картанова алгоритма, переводящего алгебру $\mathfrak{G}$ в $\mathfrak{G}(\sigma)$, завершает доказательство теоремы.

Заметим, что нетривиальные сверхинволютивные трисимметрические пространства с классическими группами движений, указанные Л. В. Сабининым, не являются периодическими пространствами внутреннего типа.

Перечислим все пространства $P_0(\alpha_p, \alpha_q; G)$ с вещественными простыми расщепляемыми группами движений. Сначала найдем подалгебры $\mathfrak{G}_0(\alpha_t)$ алгебры Ли $\mathfrak{G}$, изоморфные ее подалгебре $\mathfrak{G}^0(\alpha_p, \alpha_q)$. Для этого, удаляя из расширенной диаграммы Дынкина алгебры Ли $\mathfrak{G}$ вершины, изображающие простые корни α_p и α_q , получим диаграмму Дынкина полупростой части алгебры $\mathfrak{G}^0(\alpha_p, \alpha_q)$. Затем по табл. 3.1 находим алгебру $\mathfrak{G}_0(\alpha_t)$.

Подалгебра $\mathfrak{G}^0(\alpha_p, \alpha_q)$ алгебры Ли A_n ($p < q$) является алгеброй Ли $A_{q-p-1} \oplus A_{n-q+p} \oplus D_1$ и изоморфна алгебре $\mathfrak{G}_0(\alpha_{q-p})$. Подалгебры $\mathfrak{G}_0(\alpha_p)$, $\mathfrak{G}_0(\alpha_q)$, $\mathfrak{G}_0(\alpha_p, \alpha_q)$ являются соответственно алгебрами $A_{p-1} \oplus A_{n-p} \oplus D_1$, $A_{q-1} \oplus A_{n-q} \oplus D_1$, $A_{p-1} \oplus A_{q-p-1} \oplus D_1^2$.

Подалгебра $\mathfrak{G}^0(\alpha_1, \alpha_q)$ алгебры Ли D_n ($q = n-1, n$) является алгеброй Ли $A_{n-1} \oplus D_1$ и изоморфна алгебре $\mathfrak{G}_0(\alpha_{n-1}) \simeq \mathfrak{G}_0(\alpha_n)$. Подалгебры $\mathfrak{G}_0(\alpha_1)$, $\mathfrak{G}_0(\alpha_q)$, $\mathfrak{G}_0(\alpha_1, \alpha_q)$ являются соответственно алгебрами $D_{n-1} \oplus D_1$, $A_{n-1} \oplus D_1$, $A_{n-2} \oplus D_1^2$.

Подалгебра $\mathfrak{G}^0(\alpha_{n-1}, \alpha_n)$ алгебры Ли D_n является алгеброй $D_{n-1} \oplus D_1$ и изоморфна $\mathfrak{G}_0(\alpha_1)$. Подалгебры $\mathfrak{G}_0(\alpha_{n-1}) \simeq \mathfrak{G}_0(\alpha_n)$ и $\mathfrak{G}_0(\alpha_{n-1}, \alpha_n)$ являются соответственно алгебрами $A_{n-1} \oplus D_1$ и $A_{n-2} \oplus D_1^2$.

Подалгебра $\mathfrak{G}^0(\alpha_1, \alpha_6)$ алгебры Ли E_6 является алгеброй Ли $D_5 \oplus D_1$ и изоморфна алгебре $\mathfrak{G}_0(\alpha_1) \simeq \mathfrak{G}_0(\alpha_6)$. Алгебры $\mathfrak{G}_0(\alpha_1) \simeq \mathfrak{G}_0(\alpha_6)$ и $\mathfrak{G}_0(\alpha_1, \alpha_6)$ являются соответственно алгебрами $D_5 \oplus D_1$ и $D_4 \oplus D_1^2$.

Ниже приведены пространства $P_0(\alpha_p, \alpha_q; G)$ и их зеркала (5.1) ($\times$ – знак прямого произведения групп; символом D_1 обозначена одномерная группа Ли и $D_1^2 = D_1 \times D_1$):

$$P_0(\alpha_p, \alpha_q; A_n),$$

$$\begin{aligned} Z_1 &= (A_{p-1} \times A_{n-p} \times D_1) / (A_{p-1} \times A_{q-p-1} \times D_1^2), \\ Z_2 &= (A_{q-1} \times A_{n-q} \times D_1) / (A_{p-1} \times A_{q-p-1} \times D_1^2), \\ Z_3 &= (A_{q-p-1} \times A_{n-q+p} \times D_1) / (A_{p-1} \times A_{q-p-1} \times D_1^2); \end{aligned}$$

$$P_0(\alpha_1, \alpha_{n-1}; D_n) = P_0(\alpha_1, \alpha_n; D_n),$$

$$Z_1 = (D_{n-1} \times D_1) / (A_{n-2} \times D_1^2), \quad Z_2 = Z_3 = (A_{n-1} \times D_1) / (A_{n-2} \times D_1^2);$$

$$P_0(\alpha_{n-1}, \alpha_n; D_n),$$

$$Z_1 = Z_2 = (A_{n-1} \times D_1) / (A_{n-2} \times D_1^2), \quad Z_3 = (D_{n-1} \times D_1) / (A_{n-2} \times D_1^2);$$

$$P_0(\alpha_1, \alpha_6; E_6),$$

$$Z_1 = Z_2 = Z_3 = (D_5 \times D_1) / (D_4 \times D_1^2).$$

§ 6. Обобщенные трисимметрические пространства

Заменяя в определении 5.1 условие 2) условием

2') $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_2 + \mathfrak{H}_3$, где $\mathfrak{H}_a$ – алгебра неподвижных точек автоморфизма порядка k_a подалгебры $\mathfrak{H}_a$,

и отказываясь от условия 3), получим определение *обобщенного трисимметрического пространства* $T(k_1, k_2, k_3; G)$.

Однородные пространства G_a/H_a , где G_a и H_a – подгруппы группы G с алгебрами Ли $\mathfrak{G}_a$ и $\mathfrak{H}_a$, назовем *зеркалами* в пространстве $T(k_1, k_2, k_3; G)$. Зеркала G_a/H_a являются периодическими пространствами порядка k_a . Заметим, что трисимметрическое пространство является пространством $T(2, 2, 2; G)$.

ТЕОРЕМА 6.1. *Пусть s – сумма коэффициентов, с которыми корни из A входят в разложение максимального корня. Разбиение $A = A_1 \cup A_2$ определяет структуру пространства $T(k_1, k_2, k_3; G(\sigma))$ в пространстве $P_0(A; G(\sigma))$ и, при четном s , в пространстве $P^0(A; G(\sigma))$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать теорему при $\sigma = \text{id}$. Пусть $A_3 = A = A_1 \cup A_2$. По теореме 3.2 инволютивные автоморфизмы $\Psi_1 = \psi(A_1)$ и $\Psi_2 = \psi(A_2)$ алгебры Ли $\mathfrak{G}$ перестановочны и их композицией является инволютивный автоморфизм $\Psi_3 = \psi(A)$. При этом алгебра $\mathfrak{G}_a$ ($a = 1, 2, 3$) неподвижных точек автоморфизма Ψ_a содержит подалгебру $\mathfrak{G}_0(A)$, являющуюся алгеброй неподвижных точек автоморфизма $\Phi_0(A)$ порядка $s + 1$ алгебры $\mathfrak{G}$. Ограничение автоморфизма $\Phi_0(A)$ алгебры $\mathfrak{G}$ на ее подалгебру $\mathfrak{G}_a$ является автоморфизмом порядка k_a . Поэтому пространство $P_0(A; G)$ можно рассматривать как пространство $T(k_1, k_2, k_3; G)$ с зеркалами $Z_a = \tilde{G}(A_a)/G_0(A)$, где $\tilde{G}(A_a)$ – подгруппы группы G с алгебрами Ли вида (3.3).

При четном s алгебра $\mathfrak{G}_3$ содержит также подалгебру $\mathfrak{G}^0(A)$, являющуюся алгеброй неподвижных точек автоморфизма $\Phi^0(A)$ порядка s алгебры $\mathfrak{G}$. Отсюда следует, что при четном s пространство $P^0(A; G)$ можно рассматривать как пространство $T(k_1, k_2, k_3; G)$ с зеркалами $Z_b = \tilde{G}(A_b)/G_0(A)$, $Z_3 = \tilde{G}(A)/G^0(A)$, $b = 1, 2$.

СЛЕДСТВИЕ 6.1. *Пусть простой корень α_p алгебры Ли $\mathfrak{G}$ входит в разложение максимального корня с коэффициентом 1, а простые корни α_k и α_m – с коэффициентом 2. Тогда зеркалами пространств $P_0(\alpha_p, \alpha_k; G(\sigma))$ и $P^0(\alpha_k, \alpha_m; G(\sigma))$ являются однородные пространства*

$$\begin{aligned} Z_1 &= G_0(\alpha_p; \sigma)/G_0(\alpha_p, \alpha_k; \sigma), \\ Z_2 &= G_0(\alpha_k; \sigma)/G_0(\alpha_p, \alpha_k; \sigma), \\ Z_3 &= \bar{G}_0(\alpha_p, \alpha_k; \sigma)/G_0(\alpha_p, \alpha_k; \sigma) \end{aligned} \quad (6.1)$$

и

$$\begin{aligned} Z_1 &= G^0(\alpha_k; \sigma)/G_0(\alpha_k, \alpha_m; \sigma), \\ Z_2 &= G^0(\alpha_m; \sigma)/G_0(\alpha_k, \alpha_m; \sigma), \\ Z_3 &= \bar{G}^0(\alpha_k, \alpha_m; \sigma)/G^0(\alpha_k, \alpha_m; \sigma), \end{aligned} \quad (6.2)$$

где $\bar{G}_0(\alpha_p, \alpha_k; \sigma)$ и $\bar{G}^0(\alpha_k, \alpha_m; \sigma)$ – подгруппы группы $G(\sigma)$ с алгебрами Ли (5.3) и (5.4).

Чтобы для каждой простой расщепленной группы Ли G указать зеркала пространств $P_0(\alpha_p, \alpha_k; G)$ и $P^0(\alpha_k, \alpha_m; G)$, достаточно найти алгебры Ли ее подгрупп, указанных в (6.1) и (6.2).

Таблица 6.1

$\mathfrak{G}$	p	k	$\overline{\mathfrak{G}}_0(\alpha_p, \alpha_k)$	k	m	$\overline{\mathfrak{G}}^0(\alpha_p, \alpha_k)$
B_n	1	k	$D_{k-1} \oplus B_{n-k+1}$	$k > 1$	$m > k$	$D_{m-k} \oplus B_{n-m+k}$
C_n	n	k	$A_{n-1} \oplus D_1$	$k < n$	$k < m < n$	$C_{m-k} \oplus C_{n-m+k}$
D_n	1	$k < n-1$	$D_{k-1} \oplus D_{n-k+1}$	$1 < k < n-1$	$k < m < n-1$	$D_{m-k} \oplus D_{n-m+k}$
	$n-1$	$k < n-1$	$A_{n-1} \oplus D_1$			
	n					
F_4				1	4	$C_3 \oplus A_1$
E_6	1	2	$D_5 \oplus D_1$	2	3	$D_5 \oplus D_1$
	1	3		2	5	
	2	6		3	5	
	5	6				
	3	6	$A_1 \oplus A_5$			
	1	5				
E_7	1	7	$E_6 \oplus D_1$	1	2	$E_6 \oplus D_1$
	6	7		2	6	
	2	7	$D_6 \oplus A_1$	1	6	$D_6 \oplus A_1$
E_8				1	8	$E_7 \oplus A_1$

Подалгебры (5.3) (или (5.4)) алгебры Ли $\mathfrak{G}$ найдем следующим образом. Удаляя из обычной (или расширенной) диаграммы Дынкина алгебры Ли $\mathfrak{G}$ вершины, изображающие простые корни α_p и α_k (или α_k и α_m), получим диаграмму Дынкина полупростой части алгебры $\mathfrak{G}_0(\alpha_p, \alpha_k)$ (или $\mathfrak{G}^0(\alpha_k, \alpha_m)$). Это позволяет вычислить размерность d алгебры $\mathfrak{G}_0(\alpha_p, \alpha_k)$ (или $\mathfrak{G}^0(\alpha_k, \alpha_m)$). Прибавляя к d число u корней алгебры Ли $\mathfrak{G}$, разложения которых содержат указанные простые корни с суммой коэффициентов ± 2 , получим размерность алгебры Ли (5.3) (или (5.4)). Затем по табл. 3.1 найдем искомую алгебру Ли. Число u можно найти, используя табл. I–X из [13, гл. 6, с. 302–319]. Полученные результаты приведены в табл. 6.1.

По табл. 3.1 и 6.1 нетрудно для каждой простой расщепляемой группы G записать зеркало (6.1) и (6.2).

Список литературы

1. Ведерников В. И. Об одном специальном классе однородных пространств // Изв. вузов. Сер. матем. 1972. № 12. С. 17–22.
2. Степанов Н. А. Основные факты теории ϕ -пространств // Изв. вузов. Сер. матем. 1967. № 3. С. 88–95.

3. Степанов Н. А. ϕ -пространства в случае полной линейной группы // Изв. вузов. Сер. матем. 1972. № 3. С. 70–79.
4. Wolf J. A., Gray A. Homogeneous spaces defined by Lie group automorphisms // J. Differential. Geom. 1968. V. 2. № 1–2. P. 77–159.
5. Феденко А. С. Пространства с симметриями. Минск: Изд-во БГУ, 1977.
6. Ковальский О. Обобщенные симметрические пространства. М.: Мир, 1984.
7. Сабинин Л. В. О геометрии субсимметрических пространств // Научн. докл. высш. школы. Физ.-мат. науки. 1958. № 6. С. 127–138.
8. Сабинин Л. В. О геометрии трисимметрических римановых пространств // Сиб. матем. журн. 1961. Т. 2. № 2. С. 266–278.
9. Сабинин Л. В. Трисимметрические пространства с простыми компактными группами движений // Труды семин. по векторн. и тензорн. анализу. Вып. 16. М.: Изд-во МГУ, 1972. С. 202–226.
10. Tits J. Sur certaines classes d'espaces homogènes de Lie // Mém. Acad. roy. Belg. Cl. sci. 1955. V. 29. № 3.
11. Wolf J. A. The action of real semisimple group in complex flag manifold. I // Bull. Amer. Math. Soc. 1969. V. 75. № 6. P. 1121–1237.
12. Розенфельд Б. А., Замаховский М. П., Тимошенко Т. А. Параболические пространства // Алгебра. Топология. Геометрия. Итоги науки и техники. 1988. Т. 26. С. 125–160.
13. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. М.: Мир, 1972 (гл. 4–6); 1978 (гл. 7, 8).
14. Кац В. Бесконечномерные алгебры Ли. М.: Мир, 1993.
15. Комраков Б. П. Однородные пространства, порожденные автоморфизмами, и инвариантные геометрические структуры // Проблемы геометрии. Итоги науки и техники. 1975. Т. 7. С. 81–104.
16. Кантор И. Л. Транзитивно-дифференциальные группы Ли // Труды семин. по векторн. и тензорн. анализу. Вып. 13. М.: Изд-во МГУ, 1966. С. 310–398.
17. Koecher M. Imbedding of Jordan algebras // Amer. J. of Math. 1967. V. 39. № 3. P. 787–816; 1968. V. 40. № 2. P. 476–510.
18. Карпан Э. Геометрия групп Ли и симметрические пространства. М.: ИЛ, 1949.