Общероссийский математический портал

В. В. Долотин, О дискриминантах полилинейных форм, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1998, том 62, выпуск 2, 3–34

DOI: <https://doi.org/10.4213/im171>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 05:06:22

УДК 512.7+515.1

В. В. Долотин

О дискриминантах полилинейных форм

Дан алгоритм вычисления дискриминантов полилинейных форм. Развита техника вычисления условий вырожденности и других инвариантов n -арных форм. Введено интегральное преобразование относительно форм степени 3 и выше (аналог преобразования Гаусса для квадратичных форм).

Библиография: 5 наименований.

§ 0. Введение

Для некоторых объектов полилинейной алгебры уместно использовать терминологию из линейной алгебры (см. [1]). Так, для множества коэффициентов d -линейной формы будет использоваться термин “ d -мерная матрица”, а для ее дискриминанта (см. определение ниже) мы можем использовать слово “детерминант”, причем так же естественно использовать понятие “минора”.

Исследование детерминантов многомерных матриц может быть полезным уже в линейной алгебре (см. § 1), которая существенно занята прямоугольными матрицами. Хорошим примером (см. § 1) является трехмерная формулировка теории кронеккеровских пар, которая в этом контексте получает непосредственное обобщение. Также интересно получить обобщение теории собственных значений. Теория собственных значений в различных вариантах эквивалентна исследованию матриц типа $A + \lambda B$, где A и B есть пара $(n \times n)$ -матриц, и инвариантов этой пары, что можно выразить в терминах $GL(n) \times GL(n)$ -действия на $(n \times n \times 2)$ -формах (3-мерных матрицах). Подобным образом многомерная “теория собственных значений” сводится к инвариантам “3-мерных матриц” большего формата.

Исследование условий вырожденности полилинейных форм для случая симметрических форм непосредственно связано с вопросом вырожденности n -арных форм (однородных многочленов от n переменных) степени d и приводит к вычислению дискриминантов многочленов многих переменных. В этой работе мы покажем, как инварианты n -арных форм можно получать из дискриминантов полилинейных форм (детерминантов многомерных матриц), что следует рассматривать как обобщение операции взятия классических гессианов и результатов. В частности, эту технику можно применить (см. § 3) для получения генераторов алгебры инвариантов бинарных форм.

Мы можем изучать вырожденность d -линейной формы в терминах структуры множества критических точек соответствующей однородной полиномиальной функции. В случае квадратичных форм такое рассмотрение привело к методу стационарной фазы для вычисления интегрального преобразования типа Гаусса (т.е.

квадратичного). В физике это преобразование имеет бесконечномерный аналог, называемый *континуальным интегрированием*. Подобная же техника может быть развита (см. § 4) для интегральных преобразований относительно форм степени 3 и выше. Результатом таких преобразований являются аналитические функции (называемые в физике *корреляционными функциями*) от коэффициентов формы, имеющие полюса как раз на дискриминантном множестве формы.

Проиллюстрируем некоторые свойства, характерные для полилинейного случая, на примере 3-линейных форм. Мы знаем, что в случае билинейных форм (“2-мерных матриц”) детерминант (как гиперповерхность, задаваемая одним многочленом) определен только для квадратных матриц. Поэтому для задания размера 2-мерной матрицы, имеющей одно выражение (детерминант) в качестве условия вырожденности, достаточно задать одно число n – число ее строк или столбцов. Теперь возьмем “3-мерную матрицу” с элементами $a_{i_1 i_2 i_3}$, где $1 \leq i_1 \leq n_1$, $1 \leq i_2 \leq n_2$, $1 \leq i_3 \leq n_3$. Фиксируем n_1 и n_2 . Тогда детерминант определен для матриц с n_3 , удовлетворяющим следующему неравенству (см. [1]):

$$n_1 - n_2 + 1 \leq n_3 \leq n_1 + n_2 - 1. \quad (1)$$

Таким образом, размер (“формат”) d -мерных матриц, имеющих детерминант, в общем случае задается d параметрами, в то время как в 2-мерном случае только одним. Но в d -мерном случае, при $d > 2$, также имеется класс матриц, чей размер описывается $d - 1$ параметром. Они называются *матрицами граничного формата*, и их размер соответствует равенству в (1). В 2-мерном случае матрицы, чья вырожденность не может быть охарактеризована одним выражением, – это прямоугольные матрицы. В случае высшей размерности это матрицы “грассманова формата” такие, которые в случае $d = 3$ не удовлетворяют (1). В этой работе мы приводим ряд свойств матриц граничного и грассманова форматов, которые показывают, что они являются подходящими обобщениями квадратных и прямоугольных матриц соответственно. В частности, условие того, что прямоугольная матрица имеет коранг 1, – это равенство нулю детерминантов всех максимальных квадратных подматриц (максимальных миноров). Соответствующее первое условие вырожденности для d -мерных матриц, определенное здесь как условия коранга 1 (см. п. 2.1 из § 1), – это равенство нулю детерминантов всех максимальных подматриц граничного формата. Прямоугольной матрице можно поставить в соответствие множество ковекторов – множество ее строк или столбцов. Тогда условие коранга 1 для прямоугольной матрицы имеет геометрическую интерпретацию как линейная зависимость этих ковекторов (1-мерных матриц). d -мерной матрице с элементами $a_{i_1 \dots i_d}$ можно поставить в соответствие набор “слоев” в k -м направлении, которые являются $(d - 1)$ -мерными матрицами с элементами $a_{i_1 \dots \widehat{i_k} \dots i_d}$. Тогда условие коранга 1 для d -мерных матриц грассманова формата можно выразить геометрически в терминах сингулярности пересечения линейной оболочки этих слоев с подмногообразием $(d - 1)$ -мерных матриц коранга 1. Замечательным фактом, делающим понятие коранга 1 корректным, является то, что это условие сингулярности не зависит от направления “среза” нашей матрицы (числа k).

Рассмотрим задачу нахождения ядра линейной комбинации $S(\lambda) := \lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_k A_k$ из k прямоугольных матриц размера $m \times n$. Это ядро будет $(n - m)$ -мерным подпространством, т.е. элементом $G_{m,n}$. Меняя $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, мы получаем k -параметрическое подмножество в $G_{m,n}$. В случае, когда $k = n - m + 1$, образ этого подмножества при плюккеровом вложении $G_{m,n}$ будет многообразием Веронезе. Многообразия Веронезе, получаемые таким образом, называются здесь *собственными*. Условие вырожденности собственного многообразия Веронезе можно выразить двумя способами:

1) как условия существования таких $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, что все плюккеровы координаты ядра $S(\lambda)$ (которые есть $(m \times m)$ -миноры $S(\lambda)$) равны нулю, или как сингулярность пересечения $\text{спр}(A_1, \dots, A_k)$ с подмногообразием M'_{mn} вырожденных $(m \times n)$ -матриц;

2) как условие того, что детерминант 3-мерной матрицы размера $m \times n \times (n - m + 1)$, составленной из элементов $A_1, \dots, A_{n-m+1}$, равен нулю.

В случае грасманова формата, когда $k > n - m + 1$, условием существования пересечения $\text{спр}(A_1, \dots, A_k)$ с M'_{mn} является то, что детерминанты всех $(m \times n \times (n - m + 1))$ -подматриц соответствующей 3-мерной матрицы равны нулю. Подобный факт имеет место в общем d -мерном случае. Это позволяет интерпретировать детерминанты максимальных подматриц граничного формата матрицы грасманова формата как многомерный аналог плюккеровых координат и рассматривать аналог плюккерова отображения на пространстве d -мерных матриц грасманова формата: $M_{n_1 \dots n_d} \rightarrow \mathbf{P}^{\binom{n}{m}}$, ставя в соответствие d -мерной матрице множество ее максимальных миноров граничного формата. Как и в 2-мерном случае, здесь возникает фундаментальная проблема нахождения соотношений между минорами d -мерной матрицы (аналога плюккеровых соотношений), т.е. описание образа $M_{n_1 \dots n_d}$ как алгебраического многообразия.

В изучении дискриминантов полилинейных форм имеется фундаментальная проблема нахождения алгоритма явного вычисления этих дискриминантов. В п. 2 § 2 мы развиваем технику, которая дает алгоритм вычисления дискриминантов d -линейных форм граничного формата (“гиперплюккеровы координаты”). Эта техника оказывается основой для вычисления дискриминантов d -линейных форм общего формата. В п. 3 § 2 мы наметим и дадим пример применения этого общего алгоритма.

Пусть $f(X_1, \dots, X_d) = \sum_{I_1, \dots, I_d} c_{I_1 \dots I_d} X_1^{I_1} \dots X_d^{I_d}$ есть функция на $\mathbf{P}_{n_1} \times \dots \times \mathbf{P}_{n_d} \ni (X_1, \dots, X_d)$ однородной степени $m_1, \dots, m_d$ относительно $X_1, \dots, X_d$ соответственно. Здесь $X^I := x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что набор коэффициентов c принадлежит *дискриминантному множеству*, если система уравнений

$$\frac{\partial f(X_1, \dots, X_d)}{\partial X_k} = 0, \quad k = 1, \dots, d, \quad (2)$$

имеет решение в $\mathbf{P}_{n_1} \times \dots \times \mathbf{P}_{n_d}$. В случае, когда дискриминантное множество является алгебраическим подмногообразием коразмерности 1 в пространстве коэффициентов, оно называется *дискриминантом* f и обозначается $D(f)$.

ПРИМЕР 1. Пусть $d = 2$ и $f(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$. Система (2) в этом случае:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2ax_1 + bx_2 = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = bx_1 + 2cx_2 = 0, \quad k = 1, \dots, d.$$

Условие ее разрешимости – это $D(f) = b^2 - 4ac = 0$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Условие разрешимости системы (2) есть условие того, что алгебраическая гиперповерхность $f(X_1, \dots, X_d) = 0$ особа.*

Поэтому изучение дискриминантов – это изучение множества особых гиперповерхностей данной однородной степени.

Теперь рассмотрим специальный случай этого определения, когда $m_1 = \dots = m_d = 1$, т.е. случай d -линейной формы. Пусть $V_{n_1}, \dots, V_{n_d}$ есть набор линейных векторных пространств таких, что $\dim(V_{n_i}) = n_i$. Пусть $A \in V_{n_1}^* \otimes \dots \otimes V_{n_d}^*$ есть d -линейная форма. Для набора векторов $X_k \in V_{n_k}$, $k = 1, \dots, d$, с координатами $X_k = (x_1^{(k)}, \dots, x_{n_k}^{(k)})$ в выбранном базисе, форма $A(X_1, \dots, X_d)$ есть многочлен от d наборов переменных $X_1, \dots, X_d$ степени d и система (2) состоит из d подсистем $(d-1)$ -линейных уравнений

$$\frac{\partial A(X_1, \dots, X_d)}{\partial x_i^{(k)}} = 0, \quad i = 1, \dots, n_k, \quad k = 1, \dots, d. \quad (3)$$

Коэффициенты $a_{i_1 \dots i_d}$ этой системы (коэффициенты формы A) являются элементами d -мерной прямоугольной $(n_1 \times \dots \times n_d)$ -матрицы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Дискриминант многочлена $A(X_1, \dots, X_d)$ называется *детерминантом* $(n_1 \times \dots \times n_d)$ -матрицы $(a_{i_1 \dots i_d})$ и обозначается $\text{Det}(A)$.

ПРИМЕР 2. Пусть $A \in U_n^* \otimes V_n^*$. Тогда ее коэффициенты образуют обычную квадратную $(n \times n)$ -матрицу. Тогда $h = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i a_{ij} y_j$. Система (2) в этом случае:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad \sum_{i=1}^n x_i a_{ij} = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (4)$$

Заметим, что эта система содержит однородную систему линейных уравнений вместе с ее сопряженной. Для дискриминантов полилинейных форм это свойство будет существенным.

Имеется естественное действие группы $\text{GL}_{n_1} \times \dots \times \text{GL}_{n_d}$ на $\bigotimes_{j=1}^d V_{n_j}$ с индуцированным действием на $\bigotimes_{j=1}^d V_{n_j}^*$. Поскольку система (2) для $f = A(X_1, \dots, X_d)$ инвариантна относительно этого действия, то мы получаем

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Детерминант $(n_1 \times \dots \times n_d)$ -матрицы является инвариантом относительно действия $\text{GL}_{n_1} \times \dots \times \text{GL}_{n_d}$.*

Обозначим $M_{n_1 \dots n_d} := \bigotimes_{j=1}^d V_{n_j}^*$.

§ 1. Геометрия детерминантного множества

1. Задачи линейной алгебры и детерминанты “3-мерных матриц”.

1.1. *Общая конструкция.* Пусть M_{nm} , где $n \leq m$, есть линейное пространство $(n \times m)$ -матриц. Пусть $M'_{nm} \subset M_{nm}$ – подмногообразие матриц ранга $n - 1$. Пусть $A_1, \dots, A_k \in M_{nm}$ есть набор $(n \times m)$ -матриц. Из их элементов можно составить $(n \times m \times k)$ -матрицу коэффициентов 3-линейной формы $(a_{i_1 i_2 i_3})$. Имеется взаимно однозначное соответствие между линейными подпространствами $\text{span}(A_1, \dots, A_k) \subset M_{nm}$ для различных наборов $A_1, \dots, A_k$ и орбитами соответствующих форм $(a_{i_1 i_2 i_3}(A_1, \dots, A_k))$ под действием GL_k на $M_{nmk} = V_n^* \otimes V_m^* \otimes V_k^*$.

ПРИМЕР 3. Пусть A и B есть $(n \times n)$ -матрицы. Тогда имеет место следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Пусть $\det(B) \neq 0$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) $\text{Det}(a_{i_1 i_2 i_3}(A, B)) = 0$;
- 2) $D(\det(A + zB)) = 0$ или $D(\det(AB^{-1} - zI)) = 0$, т.е. характеристический многочлен для AB^{-1} имеет кратные корни.

Здесь $D(f(z))$ означает дискриминант многочлена $f(z)$.

ПРИМЕР 4. Пусть A и B есть $(n \times (n + 1))$ -матрицы. Тогда имеет место следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Детерминант $(n \times (n + 1) \times 2)$ -матрицы $\text{Det}(a_{i_1 i_2 i_3}(A, B))$ не равен нулю, если и только если пара (A, B) является кронеккеровой, т.е. действием $\text{GL}_n \times \text{GL}_{n+1}$ ее можно привести к следующему каноническому виду:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & \vdots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

1.2. *Многообразия Веронезе.* Пусть $k = m - n + 1$, $A_1, \dots, A_k \in M_{nm}$. Пусть $S(z_1, \dots, z_k) := z_1 A_1 + \dots + z_k A_k$ есть точка в подпространстве $\text{span}(A_1, \dots, A_k) \subset M_{nm}$. Пусть $\Delta(z_1, \dots, z_k) := (\Delta_{i_1 \dots i_n}(S))_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq m} \in \mathbf{P}^{\binom{n}{m}}$ есть вектор, компоненты которого – $(n \times n)$ -миноры S . Он является образом $S(z)$ при плюккеровом вложении. Отображение $\varphi: (z_1, \dots, z_k) \mapsto \Delta(z_1, \dots, z_k)$ дает k -параметрическое подмногообразие $\mathcal{V}(A_1, \dots, A_k)$ в $\mathbf{P}^{\binom{n}{m}}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. Для $A_1, \dots, A_k$ в общем положении пересечение $M'_{nm} \cap \text{span}(A_1, \dots, A_k)$ пусто.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. Для $A_1, \dots, A_k$ в общем положении многообразие $\mathcal{V}(A_1, \dots, A_k) := \varphi(\mathbf{C}^k) \subset \mathbf{P}^{\binom{n}{m}}$ является многообразием Веронезе.

Многообразия Веронезе, полученные таким образом, мы будем называть *собственными*.

ТЕОРЕМА 1. Следующие утверждения эквивалентны:

- 1) пересечение $M'_{nm} \cap \text{span}(A_1, \dots, A_k)$ не пусто;
- 2) $\text{Det}(a_{i_1 i_2 i_3}(A_1, \dots, A_k)) = 0$;
- 3) многообразие $\mathcal{V}(A_1, \dots, A_k)$ особо;
- 4) $\mathcal{V}(A_1, \dots, A_k)$ принадлежит гиперплоскости в $\mathbf{P}^{\binom{m}{n}}$.

Пусть $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_m), (z_1, \dots, z_k)$ есть координаты в V_n, V_m, V_k соответственно. Для $(a_{i_1 i_2 i_3}) = (a_{i_1 i_2 i_3}(A_1, \dots, A_k)) \in M_{nmk} = V_n^* \otimes V_m^* \otimes V_k^*$ система (2), где $f = \sum a_{i_1 i_2 i_3} x_{i_1} y_{i_2} z_{i_3}$, содержит подсистему

$$\frac{\partial \sum a_{i_1 i_2 i_3} x_{i_1} y_{i_2} z_{i_3}}{\partial x_i} = \sum_{i_2=1}^m (z_1 A_1 + \dots + z_k A_k)_{ii_2} y_{i_2} = S(Z)Y = 0,$$

$$i = 1, \dots, n. \quad (5)$$

Данному $Z \in \mathbf{P}_{k-1}$ мы можем поставить в соответствие подпространство $\text{Ker}(S(Z)) \subset V_m$ решений (5). Если $\text{rank}(S(Z)) = n$, то $\text{Ker}(S(Z))$ имеет размерность $(m - n)$. Если $\text{rank}(S(Z)) < n$, то $\text{Ker}(S(Z))$ имеет размерность больше, чем $(m - n)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 7. $\text{Det}(a(A_1, \dots, A_k)) = 0$, если и только если имеется $Z \in \mathbf{P}_{k-1}$ такое, что размерность пространства решений соответствующей системы (5) больше, чем $(m - n)$, и φ -образ множества таких Z есть в точности множество особых точек $\mathcal{V}(A_1, \dots, A_k)$.

2. Дискриминанты d -линейных форм.

2.1. Ядро и ранг полилинейной формы. Если $A \in (V_1 \otimes \dots \otimes V_d)^*$ есть d -линейная форма, то для любого $I = \{i_1, \dots, i_k \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq d\}$ эта форма задает отображение

$$A: \bigotimes_{i \in I} V_i \rightarrow \bigotimes_{i \in \hat{I}} V_i^*,$$

где $\hat{I} = \{1, \dots, d\} \setminus I$ есть дополнение к I .

Обозначим через $M'_{n_1 n_2}$ множество $(n_1 \times n_2)$ -матриц коранга 1.

Теперь индукцией по d мы можем ввести следующие определения. Пусть $M'_I := \bigotimes_{i \in \hat{I}} V_i^* \subset M_I$ обозначает множество вырожденных $(d - k)$ -линейных форм.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Если $A(X_{i_1}, \dots, X_{i_k}) \in M'_I$, то будем говорить, что $X_{i_1}, \dots, X_{i_k}$ принадлежит I -ядру (или просто гиперядру) A , обозначаемому $\text{Ker}_I(A) = A^{-1}(M'_I)$.

ТЕОРЕМА 2. $D(A) = 0$, если и только если образ $A(M_I)$ находится не в общем положении по отношению к M'_I для всех $I \subset \{1, \dots, d\}$ (т.е. топология гиперядра $\text{Ker}_I(A)$ меняется).

Таким образом, вырожденность d -линейной формы описывается в терминах геометрии ее гиперядер. В частности, когда $I = \{1, \dots, d\}$, наша форма считается полиномиальной функцией, I -ядро есть прообраз 0, который является гиперповерхностью $A(X_1, \dots, X_d) = 0$, и вырожденность A эквивалентна особости этого алгебраического многообразия, как упомянуто во введении.

Степень вырожденности формы естественно назвать ее рангом. Пусть $I = \{k\} \in \{1, \dots, d\}$. Заданной форме $A = (a_{i_1 \dots i_d}) \in M_{n_1 \dots n_d}$ и целому числу $1 \leq k \leq d$ мы можем поставить в соответствие набор форм $S_{i_k} \in M_{n_1 \dots \hat{n}_k \dots n_d}$, $i_k = 1, \dots, n_k$, таких, что $(S_{i_k})_{i_1 \dots \hat{i}_k \dots i_d} = a_{i_1 \dots i_d}$. Для данного k имеется взаимно однозначное соответствие между орбитами форм A под действием GL_{n_k} на $M_{n_1 \dots n_d}$ и соответствующими линейными подпространствами $\mathrm{span}(S_1, \dots, S_{n_k}) \subset M_{n_1 \dots \hat{n}_k \dots n_d}$. Мы говорим, что GL_{n_k} -орбита A имеет пересечение с подмногообразием в $M_{n_1 \dots \hat{n}_k \dots n_d}$, если $\mathrm{span}(S_1, \dots, S_{n_k})$ имеет пересечение с этим подмногообразием, обозначенное выше как $\mathrm{Ker}_k(A)$.

Для мультииндекса $I = (i_1 \dots i_d)$ пусть $\hat{i}_k := i_1 \dots i_{k-1} i_{k+1} \dots i_d$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Подмножество пространства $M_{n_1 \dots n_d}$ называется *множеством форм коранга 1* (обозначается $M'_{n_1 \dots n_d}$), если для $A \in M'_{n_1 \dots n_d}$ и любого “направления” $k = 1, \dots, d$ пересечение $\mathrm{span}(S_1, \dots, S_{n_k}) \cap M'_{\hat{n}_k}$ находится не в общем положении.

Другими словами, когда A попадает на $M'_{n_1 \dots n_d}$, топология этого пересечения меняется. В общем случае можно сказать, что *ранг формы* – это топология ее гиперядер. В отличие от билинейных форм, при $d > 2$ ранги не будут иметь естественного линейного упорядочения так же, как формат $(n_1 \times \dots \times n_d)$ -формы не выражается одним целым числом.

УТВЕРЖДЕНИЕ 8. Множество $M'_{n_1 \dots n_d}$ является дискриминантным для системы (3).

Как будет показано в п. 2.3, $M'_{n_1 \dots n_d}$ есть алгебраическое многообразие.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. i) Пространство $M_{n_1 \dots n_d}$ называется *пространством внутреннего формата*, если для любого $a \in M_{n_1 \dots n_d}$ и любого “направления” $k = 1, \dots, d$ пересечение GL_{n_k} орбиты a с подмногообразием $M'_{\hat{n}_k}$ $(d-1)$ -линейных форм коранга 1 непусто.

ii) В противном случае формат $n_1 \dots n_d$ называется *грассмановым*. Грассманов формат $n_1 \dots n_d$, для которого $M'_{n_1 \dots n_d}$ имеет коразмерность 1, называется *граничным*.

Мотивировкой для термина “грассманов формат” является тот факт, что определенная (см. п. 2.3) факторизация пространства $M_{n_1 \dots n_d}$ дает алгебраическое многообразие, которое в случае $d = 2$ есть грассманиан G_{n_1, n_2} .

ПРИМЕР 5. Рассмотрим случай 3-линейной формы формата $2 \times 2 \times n$, где $n \geq 4$. Это формы грассманова формата. Для заданного $A \in M_{22n}$ возьмем GL_n -орбиту, т.е. множество линейных комбинаций $S(Z) := A_1 z_1 + \dots + A_n z_n$, где (2×2) -матрицы

$A_1, \dots, A_n$ есть (2×2) -слои A . Пересечение $\text{span}(A_1, \dots, A_n)$ с подмногообразием M'_{22} вырожденных (2×2) -матриц соответствует множеству таких $(z_1, \dots, z_n)$, что $\det(S(Z)) = 0$. Выражение $\det(S(Z))$ есть квадратичная форма от $(z_1, \dots, z_n)$. Пересечение $\text{span}(A_1, \dots, A_n)$ с M'_{22} описывается в терминах ранга этой квадратичной формы. Тогда понятие коранга нашей 3-линейной формы $A = (a_{i_1 i_2 i_3}(A_1, \dots, A_n))$, $i_1 \leq 2, i_2 \leq 2, i_3 \leq n$, можно сформулировать в терминах ранга квадратичной формы $\det(S(Z))$ так:

УТВЕРЖДЕНИЕ 9. *Коранг $(2 \times 2 \times n)$ -формы $(a_{i_1 i_2 i_3}(A_1, \dots, A_n))$ равен 1, если и только если ранг квадратичной формы $\det(S(Z))$ равен 2.*

2.2. Собственные гипермногообразия Веронезе. Для набора целых чисел $n_1, \dots, n_k$ пусть $m_k := n_1 + \dots + n_k + 1 - k$. Возьмем $(n_1 \times \dots \times n_d \times m_d)$ -матрицу $(a_{i_1 \dots i_d j}) \in M_{n_1 \dots n_d m_d}$. Обозначим $S_i \in M_{n_1 \dots n_{d-1} m_d}$, $i = 1, \dots, n_d$, форму, заданную как $(S_i)_{i_1 \dots i_{d-1} j} = a_{i_1 \dots i_{d-1} i j}$, которая есть $(n_1 \times \dots \times n_{d-1} \times m_d)$ -“слой” матрицы A .

Для $(z_1, \dots, z_{n_d}) \in \mathbf{P}_{n_d-1}$ пусть $S(z_1, \dots, z_{n_d}) := z_1 S_1 + \dots + z_{n_d} S_{n_d}$ есть точки в $\text{span}(S_1, \dots, S_{n_d})$. Обозначим через $\Delta_{j_1 \dots j_{m_d-1}}(S(z_1, \dots, z_{n_d}))$, где $(j_1, \dots, j_{m_d-1}) \in \binom{[m_d]}{m_d-1}$, множество $(n_1 \times \dots \times n_{d-1} \times m_{d-1})$ -миноров S . Тогда задача о нахождении пересечения $\text{span}(S_1, \dots, S_{n_d}) \cap M'_{n_1 \dots n_{d-1} m_d}$ есть задача о решении системы

$$\Delta_{j_1 \dots j_{m_d-1}}(S(z_1, \dots, z_{n_d})) = 0, \quad (j_1, \dots, j_{m_d-1}) \in \binom{[m_d]}{m_d-1}. \quad (6)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 10. *Система (6) имеет ненулевое решение $Z \in \mathbf{P}_{n_d-1}$, если и только если A принадлежит подмногообразию коразмерности 1.*

Согласно определению 5 это означает, что формат $n_1 \times \dots \times n_d \times m_d$ является граничным.

Множество $\Delta = (\Delta_{j_1 \dots j_{m_d-1}})$ миноров дает нам компоненты вектора в $\mathbf{P}^{\binom{m_d}{m_d-1}}$. Таким образом, мы имеем отображение

$$\phi: \mathbf{P}_{n_d-1} \rightarrow \mathbf{P}^{\binom{m_d}{m_d-1}}, \quad (z_1, \dots, z_{n_d}) \mapsto \Delta(Z),$$

образ которого есть многообразие $\mathcal{V}(\mathcal{A})$, параметризованное $(z_1, \dots, z_{n_d})$.

ТЕОРЕМА 3. *Следующие утверждения эквивалентны:*

- 1) $\text{Det}(a_{i_1 \dots i_d j}) = 0$;
- 2) многообразие $\mathcal{V}$ особо;
- 3) система

$$\Delta_{j_1 \dots j_{m_d-1}}(S(Z)) = 0, \quad (j_1, \dots, j_{m_d-1}) \in \binom{[m_d]}{m_d-1},$$

имеет решения в $\mathbf{P}_{n_d-1}$ и ϕ дает взаимно однозначное соответствие между решениями системы и особыми точками $\mathcal{V}$.

Сравнивая это утверждение с теоремой 1, мы приходим к следующему:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Для $A \in M_{n_1 \dots n_d m_d}$ многообразие $\mathcal{V}(\mathcal{A})$ называется *собственным гипер-многообразием Веронезе*.

2.3. *Гиперграссманиан*. Пусть $A = (a_{i_1 \dots i_d j}) \in M_{n_1 \dots n_d m}$, где $m > m_d = 1 + n_1 + \dots + n_d - d$. Миноры $\Delta_{j_1 \dots j_{m_d}}$ формата $n_1 \times \dots \times n_d \times m_d$ формы A являются инвариантами относительно $\mathrm{GL}_{n_1} \times \dots \times \mathrm{GL}_{n_d}$ действия на $M_{n_1 \dots n_d m} = V_{n_1}^* \otimes \dots \otimes V_{n_d}^* \otimes V_m^*$. Для $1 \leq k \leq d$ возьмем множество $S_1, \dots, S_{n_d}$ “слоев” формата $n_1 \times \dots \times \hat{n}_d \times \dots \times m$ для A в k -м направлении (см. п. 2.1).

УТВЕРЖДЕНИЕ 11. Пересечение $\mathrm{span}(S_1, \dots, S_{n_d}) \cap M'_{\hat{n}_k}$ непусто, если и только если

$$\Delta_{j_1 \dots j_{m_d}}(A) = 0 \quad \text{для всех} \quad (j_1, \dots, j_{m_d}) \in \binom{[m]}{m_d}.$$

Из этого следует, что отображение

$$\mathcal{P}: M_{n_1 \dots n_d m} \rightarrow \mathbf{P}^{\binom{m}{m_d}}, \quad A \mapsto \Delta(A)$$

имеет ядро $M'_{n_1 \dots n_d m}$, индуцирует вложение открытого страта пространства орбит $M_{n_1 \dots n_d m} / \mathrm{GL}_{n_1} \times \dots \times \mathrm{GL}_{n_d}$ в $\mathbf{P}^{\binom{m}{m_d}}$ и его образ является проективным алгебраическим многообразием $\mathcal{G}_{n_1 \dots n_d, m}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Многообразие $\mathcal{G}_{n_1 \dots n_d, m}$ называется *гиперграссманианом*.

Таким образом, координаты на гиперграссманиане (открытый страт фактор-пространства пространства $M_{n_1 \dots n_d m}$ форм грассманова формата), как и в частном случае (для $d = 1$) грассмановых многообразий, задаются минорами граничного формата (“гиперплюккеровыми координатами”).

§ 2. Алгоритм

Здесь мы даем алгоритм для вычисления дискриминантов форм граничного формата (“гиперплюккеровых координат”).

1. Исходный пример. Пусть $P_0, \dots, P_d$ есть набор упорядоченных множеств P_k таких, что $|P_k| = k + 1$. Обозначим через $\mathcal{C}$ пространство последовательностей $q := (q_1, q_2, \dots, q_d)$, где $q_k \in P_k$. Для пары таких последовательностей $q', q'' \in \mathcal{C}$ мы говорим, что $q' \leq q''$, если имеется $K < d$ такое, что $q'_k \leq q''_k$ в P_k при $k > K$.

Рис. 1

Рис. 2

Рис. 3

Последовательность $P_0, \dots, P_4$ можно представить в виде диаграммы, изображенной на рис. 1, где $(k+1)$ -я строка представляет элементы множества P_k , упорядоченные слева направо. Последовательность q можно представить в виде диаграммы, изображенной на рис. 2, где q_k представлен крестиком в $(k+1)$ -м ряду.

Для данного $q_{k+1} \in P_{k+1}$ имеется единственное сохраняющее порядок вложение $f_k^q: P_k \hookrightarrow P_{k+1}$ такое, что $q_{k+1} \notin f_k^q(P_k)$, и наоборот.

Для q , представленной на рис. 2, соответствующую последовательность $f^q := (f_1^q, \dots, f_4^q)$ вложений можно представить в виде диаграммы, изображенной на рис. 3. Тогда каждая последовательность q задает последовательность $p(q) := (p_1, \dots, p_d)$, где $p_k \in P_k$, такую, что $p_{k+1} = f_k^q(p_k)$. Последовательность p , соответствующую последовательности q (см. рис. 2), можно представить в виде диаграммы, изображенной на рис. 4, где путь проходит через элементы p_k . Правило рисования пути, соответствующего данной q , можно сформулировать так:

если $q_{k+1} \in P_{k+1}$ лежит (на диаграмме) слева от p_k , то мы должны перейти от p_k к ближайшему справа элементу P_{k+1} , если $q_{k+1} \in P_{k+1}$ лежит справа от p_k , то мы должны перейти от p_k к ближайшему слева элементу P_{k+1} .

С другой стороны, для данного q_k соответствующее $f_k^q: P_k \rightarrow P_{k+1}$ задает разбиение P_k на две части: $P_k^-(q)$ и $P_k^+(q)$, где

$$P_k^-(q) := \{p_k \in P_k \mid f_k^q(p_k) < q_{k+1}\},$$

$$P_k^+(q) := \{p_k \in P_k \mid f_k^q(p_k) > q_{k+1}\}.$$

Последовательность разбиений, соответствующая последовательности сохраняющих порядок вложений $f^q = (f_0^q, f_1^q, f_2^q, f_3^q)$ (см. рис. 3), можно представить в виде диаграммы, изображенной на рис. 5, где в k -м ряду элементы $P_k^-(q)$ представлены цифрами 1, а элементы $P_k^+(q)$ представлены цифрами 2.

Рис. 4

Рис. 5

Рис. 6

Обозначим через $j(q)$ порядковый номер элемента $p_d(q) \in P_d$ относительно упорядочения на P_d . Для заданной пары $q', q'' \in \mathcal{C}$ обозначим через $[i_1, \dots, i_d, j](q', q'')$ последовательность индексов $(i_1, \dots, i_d, j)$ таких, что

$$j = j(q), \quad i_{k+1} = \begin{cases} 1, & \text{если } p_k(q') \in P_k^-(q''), \\ 2, & \text{если } p_k(q') \in P_k^+(q''). \end{cases}$$

Например, если $q' = q'' = q$, то по рис. 2 можно выписать $(i_1, \dots, i_4, j)$, используя диаграмму, изображенную на рис. 6, которую можно рассматривать как “суперпозицию” рис. 4 и рис. 5, $(i_1, \dots, i_4, j) = [i_1, i_2, i_3, i_4, j](q, q) = (2, 1, 2, 2, 4)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 12. *Произведение*

$$\prod_{q \in \mathcal{C}} a_{[i_1, \dots, i_d, j]}(q, q)$$

является мономом дискриминанта полилинейной формы размерности

$$\underbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}_{d \text{ раз}} \times (d+1)$$

с коэффициентами $(a_{i_1, \dots, i_d, j})$.

Этот моном будем называть *диагональным мономом*.

2. Общий алгоритм. Пусть $n_1, \dots, n_d$ есть последовательность положительных целых чисел, и пусть $n_0 = 1$. Обозначим $m_k := n_0 + n_1 + \dots + n_k - k$. Пусть $P_0, \dots, P_d$ есть последовательность упорядоченных множеств таких, что $|P_k| = m_k$. Пусть $T_1, \dots, T_d$ есть последовательность упорядоченных множеств таких, что $|T_k| = n_k$.

Обозначим $\mathcal{C}_k := \{Q_k \subset P_k : |Q_k| = m_k - m_{k-1}\}$ и через $\mathcal{C}$ – пространство последовательностей $Q := (Q_1, \dots, Q_d)$, где $Q_k \in \mathcal{C}_k$.

Для пары $S', S'' \subset P_k$, где $S' = (s'_1, \dots, s'_{n_k})$, $S'' = (s''_1, \dots, s''_{n_k})$ и элементы S' и S'' записаны в порядке, индуцированном упорядочением на P_k , мы говорим, что $S' \leq S''$, если $\exists N < n_k$ такое, что $s'_n \leq s''_n$ для $n > N$. Это дает упорядочение на $\mathcal{C}_k$. Для пары последовательностей $Q', Q'' \in \mathcal{C}$ мы говорим, что $Q' \leq Q''$, если $\exists K < d$ такое, что $Q'_k \leq Q''_k$ для $k > K$. Для заданного $Q_{k+1} \in \mathcal{C}_{k+1}$ имеется единственное сохраняющее порядок вложение $f_k^Q : P_k \hookrightarrow P_{k+1} \setminus Q_{k+1}$. Тогда каждая последовательность $Q \in \mathcal{C}$ задает последовательность $p(Q) := (p_0, p_1, \dots, p_d)$, где $p_k \in P_k$, такую, что $p_{k+1} = f_k^Q(p_k)$, которая называется *Q-путем*. Пример Q-пути показан на рис. 4.

С другой стороны, поскольку P_k упорядочены, то данное Q_k задает разбиение $R_k = (R_k^1, \dots, R_k^{n_k})$ множества $P_k \setminus Q_k$ на n_k подмножеств R_k^i . Тогда всякое вложение $\phi : P_{k-1} \hookrightarrow P_k \setminus Q_k$ индуцирует отображение $g_k : P_{k-1} \rightarrow T_k$ следующим образом:

$$\text{если } p \in \phi^{-1}(R_k^i), \text{ то } g_k(p) = i \in T_k, \quad (7)$$

где мы пишем число i вместо i -го элемента в T_k .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Для заданного $Q_k \in \mathcal{C}_k$ такое отображение будет называться *Q-допустимым* и последовательность $g^Q = (g_1, \dots, g_d)$ *Q-допустимых* отображений называется *Q-диаграммой*. Если в *Q-диаграмме* все g_k индуцированы сохраняющими порядок вложениями f_k^Q , то такая *Q-диаграмма* называется *исходной*.

Пример исходной *Q-диаграммы* показан на рис. 5. Теперь возьмем пару $Q', Q'' \in \mathcal{C}$. Тогда для Q' мы берем Q' -путь $p(Q') = (p_0, p_1, \dots, p_d)$, а для Q'' мы выбираем Q'' -диаграмму $g^{Q''} = (g_1, \dots, g_d)$ из множества Q'' -допустимых диаграмм. Это дает нам последовательность индексов

$$I(Q', g^{Q''}) = (i_1, \dots, i_d), \text{ где } i_k := g^{Q''}(p_{k-1}^{Q'}). \quad (8)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Пара $(p^{Q'}, g^{Q''})$ называется Q' -путем на Q'' -диаграмме.

Пример такой конструкции показан на рис. 6.

Обозначим через $\mathcal{C}^{(k)}$ пространство подпоследовательностей $Q^{(k)} := (Q_{k+1}, \dots, Q_d)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Для заданной $Q^{(k)} \in \mathcal{C}^{(k)}$ две последовательности $Q', Q'' \in \mathcal{C}$ будут называться $Q^{(k)}$ -сопряженными, если $Q'_m = Q''_m = Q_m^{(k)}$ для $m > k$. Для заданной $Q^{(k)} \in \mathcal{C}^{(k)}$ и $p := (p_1, \dots, p_d)$ две последовательности $Q', Q'' \in \mathcal{C}$ будут называться $(Q^{(k)}, p_k)$ -сопряженными, если $Q'_m = Q''_m = Q_m^{(k)}$ для $m > k$, и $p(Q')_k = p(Q'')_k = p_k \in P_k$.

Обозначим $\mathcal{D}(Q^{(k)})$ множество всех $Q^{(k)}$ -сопряженных последовательностей, а $\mathcal{D}(Q^{(k)}, p_k)$ – множество всех $(Q^{(k)}, p_k)$ -сопряженных последовательностей в $\mathcal{C}$. Положим по определению $\mathcal{D}(Q^{(d)}) := \mathcal{C}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 13. Для заданного $k \leq d$

$$|\mathcal{D}(Q^{(k)}, p_k)| = \frac{(m_k - 1)!}{(n_1 - 1)! \dots (n_k - 1)!}$$

при любом $p_k \in P_k$.

На каждом $\mathcal{D}(Q^{(k)}, p_k)$ имеется упорядочение, индуцированное упорядочением на $\mathcal{C}$.

Для заданного k обозначим через $\mathcal{L}_k$ множество порядковых номеров, нумерующих элементы каждого $\mathcal{D}(Q^{(k)}, p_k)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из утверждения 13 следует, что $|\mathcal{L}_0| = 1$ и $|\mathcal{L}_1| = 1$.

Тогда для заданной $Q \in \mathcal{C}$ мы имеем последовательность целых чисел $L(Q) := (l_1, \dots, l_d)$, где $l_k(Q)$ есть порядковый номер Q в $\mathcal{D}(Q^{(k)}, p_k)$.

Для заданной $Q^{(k)}$ и $l \in \mathcal{L}_{k-1}$ обозначим через $\mathcal{E}(Q^{(k)}, l)$ множество последовательностей Q таких, что $l_{k-1}(Q) = l$. Обозначим через $S_{\mathcal{C}_k}$ группу перестановок элементов $\mathcal{C}_k$.

Тогда $S_{\mathcal{C}_k}$ действует на $\mathcal{E}(Q^{(k)}, l)$ следующим образом: для $\sigma \in S_{\mathcal{C}_k}$ и заданной $Q = (Q_1, \dots, Q_k, Q^{(k)}) \in \mathcal{E}(Q^{(k)}, l)$

$$\sigma Q = (Q_1, \dots, \sigma Q_k, Q^{(k)}).$$

Если каждой $\mathcal{E}(Q^{(k)}, l_{k-1})$ мы поставим в соответствие группу $S(Q^{(k)}, l_{k-1}) \cong S_{\mathcal{C}_k}$ с описанным выше действием, то на всем $\mathcal{C}$ мы имеем действие группы

$$\Sigma := \prod_{k=0}^{d-1} \prod_{Q^{(k+1)}} \prod_{l_k} S(Q^{(k+1)}, l_k).$$

Каждая $Q \in \mathcal{C}$ задает следующую подгруппу Σ_Q в Σ :

$$\Sigma_Q = S_{\mathcal{C}_1}(Q) \times \dots \times S_{\mathcal{C}_d}(Q),$$

где $S_{\mathcal{C}_k}(Q) = S(Q^{(k)}, l_{k-1}(Q))$; Σ_Q действует на Q покомпонентно: для $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_d) \in \Sigma_Q$

$$\tau Q = (\tau_1 Q_1, \dots, \tau_d Q_d).$$

Роль группы Σ аналогична роли симметрической группы в вычислении детерминанта $(n \times n)$ -матрицы.

УТВЕРЖДЕНИЕ 14. Если $Q \in \mathcal{C}$, $\sigma \in \Sigma$ и $\sigma Q \in \Sigma_Q \subset \Sigma$ есть Σ_Q -компонента для σ , то

$$\sigma Q = \sigma_Q Q.$$

Для $\sigma \in \Sigma$ обозначим

$$\text{sign}(\sigma) := \prod_{k=0}^{d-1} \prod_{Q^{(k+1)}} \prod_{l_k} \text{sign}(\sigma(Q^{(k+1)}, l_k)),$$

где $\text{sign}(\sigma(Q^{(k+1)}, l_k))$ есть сигнатура перестановки $\sigma(Q^{(k+1)}, l_k) \in S(Q^{(k+1)}, l_k)$.

Поставим в соответствие каждому $Q^{(k)} \in \mathcal{C}^{(k)}$ и $l_k \in \mathcal{L}_k$ множество $G(Q^{(k)}, l_k)$ всех Q_{k+1} -допустимых отображений g_{k+1} и возьмем их прямое произведение:

$$\Gamma := \prod_{k=0}^{d-1} \prod_{Q^{(k)}} \prod_{l_k} G(Q^{(k)}, l_k).$$

Обозначим $j(Q)$ порядковый номер элемента $p_d(Q) \in P_d$ относительно упорядочения на P_d . Для заданных $Q \in \mathcal{C}$, $\sigma \in \Sigma$ и $\gamma \in \Gamma$ обозначим через $[i_1, \dots, i_d](Q, \sigma Q, \gamma)$ последовательность индексов $(i_1, \dots, i_d, j)$, где

$$j = j(Q), \quad i_k = g_k(p_{k-1}(Q)), \quad g_k = \gamma(Q^{(k)}, l_k(Q)) \in G((\sigma Q)^{(k)}, l_k(Q)).$$

ТЕОРЕМА 4. Если $\Omega = (a_{i_1 \dots i_d j})$ есть полилинейная форма размерности $n_1 \times \dots \times n_d \times m_d$, то ее дискриминант

$$D_\Omega = \sum_{\sigma \in \Sigma} \text{sign}(\sigma) \sum_{\gamma \in \Gamma} \prod_{Q \in \mathcal{C}} a_{[i_1, \dots, i_d, j]}(Q, \sigma Q, \gamma).$$

ПРИМЕР 6. Пусть $d = 1$, $n_1 = n$. Тогда $m_1 = n$, $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 = \{Q_1 \subset P_1 : |Q| = n - 1\}$ и каждая Q задается значением $j(Q)$. Поскольку $|\mathcal{L}_0| = 1$, то для каждой $Q = Q_1$ множество $G(Q^{(0)})$ состоит только из одного элемента g^Q такого, что порядковый номер $g^Q(p_0)$ в T_1 равен $j(Q)$, и $\Gamma = \prod_{Q^{(0)}} G(Q^{(0)})$ состоит только из одного элемента $\gamma = \prod_{Q \in \mathcal{C}} g^Q$. При этом $\Sigma = S_{\mathcal{C}_1} \cong S_n$. Тогда для $\Omega = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$

$$D_\Omega = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \prod_{Q \in \mathcal{C}} a_{[i, j]}(Q, \sigma Q, \gamma) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \prod_{j=1}^n a_{\sigma j, j}$$

есть детерминант квадратной матрицы $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$.

3. Замкнутый дискриминант.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Для d -линейной $(n_1 \times \dots \times n_d)$ -формы $(a_{i_1 \dots i_d})$ произведение всех ее миноров (включая сам дискриминант) называется *замкнутым дискриминантом* (обозначается $\overline{D}(a)$).

Термин “замкнутый” отражает тот факт, что $\overline{D}(a)$ как алгебраическое многообразие соответствует проективно двойственному многообразию к замыканию $(\mathbb{C}^*)^{n_1 + \dots + n_d}$ орбиты вектора $(1, \dots, 1) \otimes \dots \otimes (1, \dots, 1) \in V_{n_1} \otimes \dots \otimes V_{n_d}$.

ПРИМЕР 7. $(2 \times 2 \times 2)$ -матрица. Пусть $(a_{i_1 i_2 i_3})_{i_1, i_2, i_3=1,2}$ есть $(2 \times 2 \times 2)$ -форма. Тогда ее замкнутый дискриминант

$$\begin{aligned} \text{Det}(a) = & a_{111}a_{112}a_{121}a_{122}a_{211}a_{212}a_{221}a_{222} \\ & \times (a_{111}a_{122} - a_{121}a_{112})(a_{211}a_{222} - a_{221}a_{212}) \\ & \times (a_{111}a_{212} - a_{211}a_{112})(a_{121}a_{222} - a_{221}a_{122}) \\ & \times (a_{111}a_{221} - a_{211}a_{121})(a_{112}a_{222} - a_{212}a_{122}) \\ & \times (a_{111}^2a_{222}^2 + a_{112}^2a_{221}^2 + a_{121}^2a_{212}^2 + a_{211}^2a_{122}^2 \\ & - 2a_{111}a_{121}a_{212}a_{222} - 2a_{111}a_{211}a_{122}a_{222} \\ & - 2a_{111}a_{112}a_{221}a_{222} - 2a_{121}a_{221}a_{112}a_{212} \\ & - 2a_{211}a_{221}a_{112}a_{122} - 2a_{212}a_{211}a_{121}a_{122} \\ & + 4a_{111}a_{221}a_{212}a_{122} + 4a_{121}a_{211}a_{112}a_{222}). \end{aligned}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 15. Степень замкнутого дискриминанта d -мерной матрицы формата $n_1 \times \dots \times n_d$ равна степени (обычного) дискриминанта $(d+1)$ -мерной матрицы граничного формата $n_1 \times \dots \times n_d \times (1 + n_1 + \dots + n_d - d)$.

Для каждой исходной Q -диаграммы возьмем Q -путь на ней (см. определение 9). Соответствующий набор индексов будем обозначать через $I(Q)$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $(a_{i_1 \dots i_d})$ есть d -мерная матрица. Моном

$$\prod_{Q \in \mathcal{C}} a_{I(Q)} \tag{9}$$

является мономом замкнутого детерминанта $\overline{D}(a)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Моном $\prod_{Q \in \mathcal{C}} a_{I(Q)}$ называется *диагональным*.

Имеется алгоритм, задаваемый в терминах путей на Q -диаграммах (свидетельством существования которого являются утверждение 15 и теорема 5) вычисления замкнутых дискриминантов полилинейных форм, которому будет посвящена отдельная работа. Здесь мы приведем пример этой процедуры.

ПРИМЕР 8. $(2 \times 2 \times 2)$ -матрица. В качестве средства для вычислений изобразим набор исходных Q -диаграмм с соответствующими Q -путями на них:

Рис. 7

Диаграммы сгруппированы в четыре ряда с тремя парами в каждом ряду. Занумеруем диаграммы тройками чисел (q_1, q_2, q_3) , где $q_3 = 1, 2, 3, 4$ есть номер ряда, $q_2 = 1, 2, 3$ есть номер группы и $q_1 = 1, 2$ есть номер внутри группы. Для диаграммы с номером (q_1, q_2, q_3) ее строки представляют функции $g_1^{q_1, q_2, q_3} : P_0 \rightarrow 1, 2$, $g_2^{q_1, q_2, q_3} : P_1 \rightarrow 1, 2$, $g_3^{q_1, q_2, q_3} : P_2 \rightarrow 1, 2$ (где P_0, P_1, P_2 есть упорядоченные множества из п. 2 такие, что $|P_0| = 1$, $|P_1| = 2$, $|P_2| = 3$), так что сказать “функция $g_k^{q_1, q_2, q_3}$ ” – это то же, что сказать “ k -я строка диаграммы (q_1, q_2, q_3) ”, и наоборот. Каждая тройка (q_1, q_2, q_3) есть просто последовательность Q из 1-элементных подмножеств в $P_1, \dots, P_3$ (см. п. 2 § 3), так что теперь мы можем говорить “ (q_1, q_2, q_3) -диаграмма” вместо “ Q -диаграмма для $Q = (q_1, q_2, q_3)$ ”. Множество Q -путей, изображенных на рис. 7, дает нам диагональный моном

$$a_{111}a_{112}a_{121}a_{122}a_{211}a_{212}a_{221}a_{222}a_{111}a_{122}a_{211} \\ \times a_{222}a_{111}a_{212}a_{121}a_{222}a_{111}a_{221}a_{112}a_{222}a_{111}^2a_{222}^2$$

для $\overline{D}(2 \times 2 \times 2)$. Остальные мономы получаются как Q -пути на диаграммах, полученных из исходных перестановками следующих типов.

i) *Перестановки нечетного типа.* Это перестановки строк между различными диаграммами. Генераторами являются:

1) для заданных (q_2, q_3) и $\tau \in S_2$ действие τ на $g_1^{\bullet, q_2, q_3}$ (первых строках диаграмм $(1, q_2, q_3)$ и $(2, q_2, q_3)$) следующее:

$$\tau(g_1^{q_1, q_2, q_3}) = g_1^{\tau(q_1), q_2, q_3}; \quad (10)$$

2) для заданных (q_3) и $\tau \in S_3$ действие τ на $g_1^{\bullet, \bullet, q_3}$ следующее:

$$\tau(g_2^{\bullet, q_2, q_3}) = g_2^{\bullet, \tau(q_2), q_3}, \quad (11)$$

причем перестановки τ для $q_3 = 2$ следует брать такими же, как для $q_3 = 3$. Другими словами, мы должны переставлять соответствующие вторые строки диаграмм с $q_3 = 2$ и $q_3 = 3$ синхронно, так что перестановки вторых строк являются элементами группы $S_3 \times S_3 \times S_3$.

Мы приписываем перестановкам нечетного типа знак, который соответствует их сигнатуре.

ii) *Перестановки четного типа.* Это перестановки элементов внутри строк (элементов множеств P_k). Генераторами являются:

для заданного (q_3) переставляем элементы вторых строк (элементы множеств P_1) в $(\bullet, 2, q_3)$ -диаграммах (знак $\bullet$ означает, что эта перестановка не зависит от значения q_1) так, что эти перестановки для диаграмм с $q_3 = 2$ и $q_3 = 3$ совпадают (условие синхронизации).

Все перестановки четного типа имеют положительный знак.

Перестановки различного (нечетного и четного) типов коммутируют. Для заданной перестановки знак монома, вычисленного по Q -путям на переставленных Q -диаграммах, равен знаку компоненты нечетного типа.

В общем случае алгоритм вычисления замкнутого дискриминанта отличается от приведенного в § 2 алгоритма вычисления дискриминанта форм граничного формата тем, что “синхронизация” перестановок на пространстве Q -диаграмм делается для подмножеств диаграмм, которые имеют совпадающие области значений для $g_k : P_{k-1} \rightarrow T_k$.

Коль скоро мы умеем вычислять замкнутый дискриминант формы заданного формата, ее дискриминант вычисляется как частное замкнутого дискриминанта и произведения всех ее миноров, которые являются дискриминантами подматриц меньшего формата. Таким образом, дискриминант d -линейной формы можно вычислить, применяя алгоритм вычисления замкнутого дискриминанта индукцией по размеру формы, начиная с 2-мерных квадратных матриц.

§ 3. Дискриминанты n -арных форм

1. Гиперполяризация и гипергессианы.

1.1. Исходный пример. Бинарные формы.

ПРИМЕР 9. Пусть $f = c_{30}x^3 + c_{21}x^2y + c_{12}xy^2 + c_{03}y^3$ есть однородный многочлен 3-й степени. Возьмем форму его полной поляризации, т.е. 3-линейную форму $(a_{i_1 i_2 i_3})$ с коэффициентами

$$\begin{aligned} a_{111} &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, & a_{112} &= a_{121} = a_{211} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}, \\ a_{122} &= a_{212} = a_{221} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial^2 y}, & a_{222} &= \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}. \end{aligned}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 16. Дискриминант формы полной поляризации $(a_{i_1 i_2 i_3})$ равен дискриминанту f .

Теперь пусть $f = c_{k0}x^k + c_{k-1,1}x^{k-1}y + \dots + c_{0k}y^k$ есть однородный многочлен степени k . Пусть $(a_{i_1 \dots i_k})$ есть k -линейная форма ($\underbrace{(2 \times \dots \times 2)}_{k \text{ раз}}$ -матрица) с коэффициентами

$$a_{i_1 \dots i_k} = \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j},$$

где i – число тех i_k , которые равны 1, j – число тех i_k , которые равны 2.

УТВЕРЖДЕНИЕ 17. Дискриминант формы полной поляризации $(a_{i_1 \dots i_k})$ является произведением GL_2 -инвариантов бинарной формы f и, в частности, делится на дискриминант f .

1.2. Общая конструкция. Далее в работе обозначим через V линейное векторное пространство размерности $n + 1$, и пусть $\mathbf{P}_n := \mathbf{P}(V)$ обозначает его проективизацию. Пусть $f(x_0, x_1, \dots, x_n)$ – однородный многочлен степени k , или глобальное сечение $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_n}(k)$. Для последовательности положительных целых чисел $K := (k_1, \dots, k_d)$ мы имеем d -линейную форму с коэффициентами

$$a_{I_1 \dots I_d} = \frac{\partial^{|I_1 + \dots + I_d|} f}{\partial X^{I_1 + \dots + I_d}}, \quad (12)$$

где $I_m \in \{(i_0, \dots, i_n) \mid i_0 + \dots + i_n = k_m\}$ являются мультииндексами. Для мультииндекса $I = (i_0, \dots, i_n)$ обозначим $\partial X^I := \partial x_0^{i_0} \dots \partial x_n^{i_n}$. Заметим, что $|I_1 + \dots + I_d| = k_1 + \dots + k_d$. Каждый $a_{I_1 \dots I_d}$ снова есть однородный многочлен от $(x_0, \dots, x_n)$, но степени $k - (k_1 + \dots + k_d)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. Будем называть форму $(a_{I_1 \dots I_d})$, задаваемую (12), *формой K -поляризации* (или просто *гиперполяризацией*) и обозначать ее $P^{(k_1 \dots k_d)}(f)$.

Таким образом, K -поляризация – это отображение из пространства $\mathcal{O}(k)$ однородных многочленов степени k в пространство d -линейных форм с коэффициентами в $\mathcal{O}(k - |K|)$, которое будем обозначать $\mathcal{O}(k - |K|) \otimes S^K T^*(V)$ (где мы используем обозначение $S^K U := S^{k_1} U \otimes \dots \otimes S^{k_d} U$):

$$\mathcal{O}(k) \rightarrow \mathcal{O}(k - |K|) \otimes S^K T^*(V), \quad f \mapsto P^{(k_1 \dots k_d)}(f).$$

ПРИМЕР 10. Для $k_1 = \dots = k_d = 1$ соответствующая форма гиперполяризации есть форма обычной d -й поляризации f .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. Дискриминант формы $(a_{I_1 \dots I_d}) = P^{(k_1 \dots k_d)}(f)$ называется $(k_1, \dots, k_d)$ -гессианом (или просто *гипергессианом*) для f и обозначается

$$\mathcal{H}^{(k_1 \dots k_d)}(f) := D(a_{I_1 \dots I_d}) = D(P^{(k_1 \dots k_d)}(f)).$$

ПРИМЕР 11. Обычный гессиаан соответствует случаю, когда $d = 2$ и $k_1 = k_2 = 1$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 18. Пусть $k_1 + \dots + k_d = k$. Тогда K -гессиаан $\mathcal{H}^{(k_1 \dots k_d)}(f) = D(a_{I_1 \dots I_d})$ есть произведение GL_n -инвариантов n -арной формы f .

Таким образом, если мы знаем, как вычислять дискриминанты d -линейных форм (см. схему алгоритма в [3]), то каждое разбиение $k_1, \dots, k_d$ целого числа $k = k_1 + \dots + k_d$ дает нам набор инвариантов n -арной формы f степени k . В п. 2.5 мы дадим пример использования гипергессиаанов.

2. Гиперякобианы и гиперрезультанты.

2.1. *Исходный пример.* Пусть $f_1 = c'_{20}x^2 + c'_{11}xy + c'_{02}y^2$ и $f_2 = c''_{20}x^2 + c''_{11}xy + c''_{02}y^2$ – пара многочленов. Возьмем 3-линейную форму $(a_{i_1 i_2 j})$ (с $(2 \times 2 \times 2)$ -матрицей коэффициентов) такую, что

$$a_{11j} = \frac{\partial^2 f_j}{\partial x^2}, \quad a_{12j} = a_{21j} = \frac{\partial^2 f_j}{\partial x \partial y}, \quad a_{22j} = \frac{\partial^2 f_j}{\partial y^2},$$

т.е. $a_{i_1 i_2 j} = (P^{(1,1)}(f_j))_{i_1 i_2}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 19. Дискриминант формы $(a_{i_1 i_2 j})$ равен результату f_1 и f_2 :

$$D(a_{i_1 i_2 j}) = \mathrm{Res}(f_1, f_2).$$

Теперь пусть

$$f_1 = c'_{k0}x^k + c'_{k-1,1}x^{k-1}y^1 + \dots + c'_{0k}y^k$$

и

$$f_2 = c''_{k0}x^k + c''_{k-1,1}x^{k-1}y^1 + \dots + c''_{0k}y^k$$

есть пара однородных многочленов степени k . Пусть $(a_{i_1 \dots i_k j}) - (k+1)$ -линейная форма с $\underbrace{(2 \times \dots \times 2)}_{k+1 \text{ раз}}$ -матрицей коэффициентов

$$a_{i_1 \dots i_k j} = \frac{\partial^{j_1+j_2} f_j}{\partial x^{j_1} \partial y^{j_2}},$$

где j_1 – число значений i_k , которые равны 1, j_2 – число значений i_k , которые равны 2.

УТВЕРЖДЕНИЕ 20. Дискриминант формы $(a_{i_1 \dots i_k j})$ является произведением GL_2 -инвариантов пары бинарных форм f_1, f_2 и, в частности, делится на результат $\text{Res}(f_1, f_2)$.

2.2. *Общая конструкция.* Пусть $M := (m_1, \dots, m_{d_1})$ – последовательность положительных целых чисел и $F^M(k) := \{f_I\}_{I \leq M}$ – система однородных многочленов степени k , занумерованных индексами $I = (i_1, \dots, i_{d_1})$, т.е. глобальное сечение $\mathcal{O}(k)^M := \mathcal{O}(k)^{\oplus m_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{O}(k)^{\oplus m_{d_1}}$.

Пусть $K := (k_1, \dots, k_{d_2})$. Для каждого f_I возьмем его форму K -поляризации $P^{(k_1 \dots k_{d_2})}(f_I)$, как описано в п. 1.2. Тогда мы получаем $(d_1 + d_2)$ -линейную форму $(a_{i_1 \dots i_{d_1} j_1 \dots j_{d_2}})$ такую, что

$$a_{i_1 \dots i_{d_1} j_1 \dots j_{d_2}} = (P^{(k_1 \dots k_{d_2})}(f_{i_1 \dots i_{d_1}}))_{j_1 \dots j_{d_2}}, \quad (13)$$

где, как и в п. 1.2, $J_i \in \{(j_0, \dots, j_n) \mid j_0 + \dots + j_n = k_i\}$ есть мультииндексы. Каждый $a_{i_1 \dots i_{d_1} j_1 \dots j_{d_2}}$ есть однородный многочлен от $(x_0, \dots, x_n)$ степени $k - |K|$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15. Форма, задаваемая (13), называется K -формой Якоби сечения $(f_{i_1 \dots i_{d_1}})_{I \leq M}$, рассматриваемого как отображение $\mathbf{P}_n$ в пространство $(n_1 \times \dots \times n_{d_1})$ -тензоров (или тензорное поле на $\mathbf{P}_n$), и обозначается

$$J^K(F^M) = \frac{D^K((f_I)_{I \leq M})}{D(x_1, \dots, x_n)^{|K|}}.$$

Дискриминант K -формы Якоби называется K -якобианом для $(f_{i_1 \dots i_{d_1}})_{I \leq M}$ (или просто гиперякобианом).

Итак, взятие K -формы Якоби тензорных полей $F^M \in \mathcal{O}(k)^M$ дает отображение

$$J^K: \mathcal{O}(k)^M \rightarrow \mathcal{O}(k - |K|)^M \otimes S^K T^*(V).$$

ПРИМЕР 12. Для $F^M = (f_1, \dots, f_m)$ и $K = (1)$ форма гиперполяризации $P^{(1)}(f_i)$ есть дифференциал df_i , и соответствующая K -форма Якоби есть обычная матрица Якоби отображения $\mathbf{P}_n \rightarrow \mathbf{P}_m$.

2.3. *Гиперрезультант.* Пусть F^M есть сечение $\mathcal{O}(k)^{\oplus m}$, т.е. отображение $\mathbf{P}_n \rightarrow \mathbf{P}_m$ степени k , или система $(f_1, \dots, f_m)$ из m однородных многочленов степени k . Для $K = \underbrace{(1, \dots, 1)}_{k \text{ раз}}$ форма гиперполяризации $P^K(f_i)$ есть форма с постоянными коэффициентами. Для соответствующего K -якобиана мы зарезервируем специальное название.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16. $\underbrace{(1, \dots, 1)}_{k \text{ раз}}$ -якобиан системы $(f_1, \dots, f_m)$ многочленов степени k называется *гиперрезультантом* этой системы и обозначается

$$R_m(f_1, \dots, f_m) := D((a_{i_1 \dots i_k j})_{i_1, \dots, i_k \leq n, j \leq m}) = D(P^{(1, \dots, 1)}(f_j)_{j \leq m}).$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 21. Для $m = 2$ гиперрезультант $R_2(f_1, f_2)$ делится на обычный результат $R(f_1, f_2)$.

ПРИМЕР 13. Пусть $f_1 = a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2$, $f_2 = b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2$ и $f_3 = c_{20}x^2 + c_{11}xy + c_{02}y^2$. Если записать $f_i(x, y)$ как функции неоднородных переменных $x' := \frac{x}{y}$, то вронскиан

$$W(f_1, f_2, f_3) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x'^2} & \frac{\partial f_1}{\partial x'} & f_1 \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial x'^2} & \frac{\partial f_2}{\partial x'} & f_2 \\ \frac{\partial^2 f_3}{\partial x'^2} & \frac{\partial f_3}{\partial x'} & f_3 \end{vmatrix}$$

равен нулю, если и только если f_1, f_2 и f_3 линейно независимы. С другой стороны, для каждого f_i мы берем (2×2) -матрицу $P^{(1,1)}(f_i)$ и составляем из этих матриц $(2 \times 2 \times 3)$ -форму $R_3(f_1, f_2, f_3)$ согласно (14). Тогда для 3-результанта f_1, f_2 и f_3 (дискриминант $J^{(1,1)}(f_1, f_2, f_3)$) имеет место равенство

$$R_3(f_1, f_2, f_3) = W(f_1, f_2, f_3)^2.$$

2.4. *Последовательность Якоби.* Пусть $K = (1)$. Тогда соответствующее 1-якобиево отображение дает последовательность

$$\mathcal{O}(k) \xrightarrow{J^{(1)}} \mathcal{O}(k-1) \otimes T^*(V) \xrightarrow{J^{(1)}} \dots \xrightarrow{J^{(1)}} \mathcal{O}(0) \otimes T^*(V)^{\otimes k}.$$

Теперь продолжим отображение Якоби с однородных многочленов на пространство $\mathcal{O}$ аналитических (а для некоторых целей просто дифференцируемых) функций на n -мерной локальной карте X и обозначим через $T^*(X) \cong \mathcal{O} \otimes T_x^*(X)$ (для любого данного $x \in X$) пространство аналитических сечений кокасательного расслоения X . Это дает нам бесконечную последовательность

$$\mathcal{O} \xrightarrow{J^{(1)}} T^*(X) \xrightarrow{J^{(1)}} \dots \xrightarrow{J^{(1)}} T^*(X)^{\otimes d} \xrightarrow{J^{(1)}} \dots,$$

которую мы назовем *последовательностью Якоби* $\mathcal{J}$.

Естественно, заданная в таком виде последовательность отображений $\mathcal{J}$ зависит от выбора координат на X , т.е. мы имеем семейство последовательностей, параметризованное множеством выбора координатизации. Однако описанные в пп. 3, 4 свойства пространств $T^*(X)^{\otimes d}$ позволяют указать свойства, общие для последовательностей этого семейства.

3. Комбинаторное наблюдение. Пусть $d > 0$ есть целое число и $k_1 \geq \dots \geq k_p$ есть его разбиение: $k_1 + \dots + k_p = d$. Группа $S_d/S_{k_1} \times \dots \times S_{k_p}$ свободно действует на множестве слов длины d из p букв. Лексикографическое упорядочение на этом пространстве представления индуцирует упорядочение на группе. Для $\sigma \in S_d/S_{k_1} \times \dots \times S_{k_p}$ пусть $\text{ord}(\sigma)$ означает порядковый номер элемента группы σ в этом упорядочении.

Для целого d пусть ε означает примитивный корень степени $d!$ из единицы, $\varepsilon^{d!} = 1$.

Для n -мерного векторного пространства V пусть $V_k^{\otimes d} \subset V^{\otimes d}$ означает подпространство d -векторов с условием ε^k -симметрии их координат:

$$a_{\sigma(i_1 \dots i_d)} = \varepsilon^{k \text{ord}(\sigma)} a_{i_1 \dots i_d}.$$

Здесь каждое множество индексов $\{i_1, \dots, i_d\}$ устроено так:

$$\begin{aligned} i_1 &= \dots = i_{k_1}, \\ i_{k_1+1} &= \dots = i_{k_1+k_2}, \\ &\dots\dots\dots, \\ i_{k_1+\dots+k_{d-1}+1} &= \dots = i_d, \end{aligned}$$

где $k_1 \geq \dots \geq k_d$ и $\varepsilon^{k \frac{d!}{k_1! \dots k_d!}} = 1$. Тогда такое множество можно считать начальным (в лексикографическом упорядочении) элементом пространства представления группы $S_d/S_{k_1} \times \dots \times S_{k_p} \ni \sigma$ с соответствующей корректно определенной функцией номера $\text{ord}(\sigma)$ на нем.

УТВЕРЖДЕНИЕ 22. *Имеет место разложение*

$$V^{\otimes d} = \bigoplus_{k=1}^{k=d!} V_k^{\otimes d}.$$

ПРИМЕР 14. Пусть $\dim V = 3$, $d = 3$. Тогда

$$V^{\otimes 3} = V_0^{\otimes 3} \oplus V_1^{\otimes 3} \oplus V_5^{\otimes 3} \oplus V_2^{\otimes 3} \oplus V_4^{\otimes 3} \oplus V_3^{\otimes 3}.$$

Здесь $V_0^{\otimes 3}$ есть симметрическая компонента размерности 10 с ненулевыми координатами с индексами (111), (222), (333), (112), (113), (223), (221), (331), (332), (123); $V_1^{\otimes 3}$, $V_5^{\otimes 3}$ есть компоненты размерности 1 с множеством индексов (123); $V_2^{\otimes 3}$, $V_4^{\otimes 3}$ есть компоненты размерности 7 с множеством индексов (112), (113), (223), (221), (331), (332), (123); $V_3^{\otimes 3}$ есть антисимметрическая компонента размерности 1 с множеством индексов (123). Примером элемента общего вида из $V_2^{\otimes 3}$

является

$$\begin{aligned}
& a_{112}e_1 \otimes e_1 \otimes e_2 + \varepsilon^2 a_{112}e_1 \otimes e_2 \otimes e_1 + \varepsilon^4 a_{112}e_2 \otimes e_1 \otimes e_1 \\
& + a_{113}e_1 \otimes e_1 \otimes e_3 + \varepsilon^2 a_{113}e_1 \otimes e_3 \otimes e_1 + \varepsilon^4 a_{113}e_3 \otimes e_1 \otimes e_1 \\
& + a_{223}e_2 \otimes e_2 \otimes e_3 + \varepsilon^2 a_{223}e_2 \otimes e_3 \otimes e_2 + \varepsilon^4 a_{223}e_3 \otimes e_2 \otimes e_2 \\
& + a_{221}e_2 \otimes e_2 \otimes e_1 + \varepsilon^2 a_{221}e_2 \otimes e_1 \otimes e_2 + \varepsilon^4 a_{221}e_1 \otimes e_2 \otimes e_2 \\
& + a_{331}e_3 \otimes e_3 \otimes e_1 + \varepsilon^2 a_{331}e_3 \otimes e_1 \otimes e_3 + \varepsilon^4 a_{331}e_1 \otimes e_3 \otimes e_3 \\
& + a_{332}e_3 \otimes e_3 \otimes e_2 + \varepsilon^2 a_{332}e_3 \otimes e_2 \otimes e_3 + \varepsilon^4 a_{332}e_2 \otimes e_3 \otimes e_3 \\
& + a_{123}e_1 \otimes e_2 \otimes e_3 + \varepsilon^2 a_{123}e_1 \otimes e_3 \otimes e_2 + \varepsilon^4 a_{123}e_2 \otimes e_1 \otimes e_3 \\
& + a_{123}e_2 \otimes e_3 \otimes e_1 + \varepsilon^2 a_{123}e_3 \otimes e_1 \otimes e_2 + \varepsilon^4 a_{123}e_3 \otimes e_2 \otimes e_1,
\end{aligned}$$

где ε – примитивный корень степени $3!$ из единицы.

В фиксированном базисе в V обозначим через p_k отображение проекции $V^{\otimes d}$ на ε^k -кососимметрическую компоненту $V_k^{\otimes d}$ для $k \leq d!$:

$$p_k: V^{\otimes d} \rightarrow V_k^{\otimes d}.$$

4. Формы Грама. Пусть $F \in U^{*\otimes d}$ есть d -линейная форма. Тогда для каждого $\{u_1, \dots, u_m\} \in \underbrace{U \times \dots \times U}_{d \text{ раз}}$ мы имеем набор выражений

$$\langle u_{i_1}, \dots, u_{i_d} \rangle := F(u_{i_1}, \dots, u_{i_d}), \quad i_1, \dots, i_d = 1, \dots, m.$$

Пусть $D(\langle u \rangle)$ есть дискриминант $\underbrace{m \times \dots \times m}_{d \text{ раз}}$ формы с коэффициентами $\langle u_{i_1}, \dots, u_{i_d} \rangle$. Тогда $D(\langle u \rangle)^{m/d \deg D(\langle u \rangle)}$ есть выражение от $u_1, \dots, u_m$ со степенью однородности 1 по каждому из u_i .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 17. Функция

$$G^d: \{u_1, \dots, u_m\} \mapsto D(\langle u \rangle)^{\frac{m}{d \deg D(\langle u \rangle)}}$$

называется d -формой Грама.

ПРИМЕР 15. Пусть $d = 2$. Тогда $(\langle u_{i_1}, u_{i_2} \rangle)_{1 \leq i_1, i_2 \leq m}$ есть обычная матрица Грама для m векторов $u_1, \dots, u_m$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 23. Пусть $g \in \text{GL}(m)$. Тогда $G^d(\langle g(u) \rangle) = |g| G^d(\langle u \rangle)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это следствие того факта, что дискриминант $\underbrace{(m \times \dots \times m)}_{d \text{ раз}}$ -форм является $\text{GL}(m)$ -инвариантом.

УТВЕРЖДЕНИЕ 24. Если $u_1, \dots, u_m$ линейно зависимы, то $G^d(\langle u \rangle) \equiv 0$.

В частности, если число векторов u_i меньше, чем “размерность” формы $m < d$, то $G^d(u_1, \dots, u_m) \equiv 0$.

Пусть X – многообразие и F_x – сечение $T^*(X)^{\otimes d}$, т.е. поле d -линейных форм на $T(X)^{\times m}$. Тогда отображение $G^d(F_x): u_1, \dots, u_m \mapsto G^d(u_1, \dots, u_m; F_x)$ дает нам меру интегрирования на любом m -подмногообразии в X . Пусть $\mu(X)$ обозначает пространство аналитических мер на X . Тогда взятие формы Грама определяет отображение

$$T^*(X)^{\otimes d} \rightarrow \mu(X), \quad F(\bullet) \mapsto G^d(\bullet; F).$$

Согласно п. 3 $\underbrace{(m \times \dots \times m)}_{d \text{ раз}}$ -форму $(\langle u_{i_1}, \dots, u_{i_d} \rangle)$ можно разложить на ε^k -симметрические компоненты $(\langle u_{i_1}, \dots, u_{i_d} \rangle)_k$:

$$\begin{aligned} u_1 \times \dots \times u_m &\rightarrow (\langle u_{i_1}, \dots, u_{i_d} \rangle) \\ &\downarrow p_k \\ (\langle u_{i_1}, \dots, u_{i_d} \rangle)_k &\quad \text{для } k = 1, \dots, d! \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 18. Функции $G_k^d: u_1, \dots, u_m \mapsto D((F(u_{i_1}, \dots, u_{i_d}))_k)$ называются k -симметрическими формами Грама.

УТВЕРЖДЕНИЕ 25. k -симметрические формы Грама являются $\text{GL}(m)$ -инвариантами.

Таким образом, если задано поле d -линейных форм, то на X имеются инвариантно определенные подмногообразия вырождения соответствующих k -симметрических форм Грама. Ограничения последовательностей Якоби на k -симметрические компоненты $T^*(X)^{\otimes m}$ обладают инвариантными свойствами (см. [4]).

ПРИМЕР 16. При $k = d!/2$ соответствующее ограничение $\mathcal{J}$ на подпространства кососимметрических форм является комплексом де Рама.

5. Приложения гиперякобианов. Пусть $f = c_{40}x^4 + a_{31}x^3y + c_{22}x^2y^2 + c_{13}x^1y^3 + c_{04}y^4$ – бинарная форма степени 4. Известно (см. [2]), что кольцо GL_2 -инвариантов f порождается многочленами:

1) определитель Ганкеля

$$\mathcal{H} := \frac{1}{8} \begin{vmatrix} 24c_{40} & 6c_{31} & 4c_{22} \\ 6c_{31} & 4c_{22} & 6c_{13} \\ 4c_{22} & 6c_{13} & 24c_{04} \end{vmatrix};$$

2) аполяр

$$\mathcal{A} := c_{22}^2 + 3c_{31}c_{13} + 12c_{40}c_{04}.$$

Обозначим через $\mathcal{D}$ другой инвариант из этого кольца – дискриминант f .

С другой стороны, мы можем взять $(1,1,1)$ -гессиян f , обозначаемый $f^{111} := \mathcal{H}^{(1,1,1)}(f)$, который снова есть многочлен от (x, y) степени 4.

УТВЕРЖДЕНИЕ 26. *Имеем*

$$\begin{aligned} D(f^{111}) &= 2^{36} 3^6 \mathcal{D} \mathcal{H}^6, \\ R(f, f^{111}) &= 2^{24} 3^{12} \mathcal{D}^2 \mathcal{A}^4. \end{aligned}$$

Таким образом, коль скоро мы знаем, как вычислять гипергессианы $\mathcal{H}^{(111)}(f)$ (т.е. 3-мерные детерминанты, см. § 2), мы можем получить генераторы кольца инвариантов, взяв классические дискриминант и результат от f и f^{111} .

§ 4. Гипергауссово интегральное преобразование и континуальное интегрирование

1. Неквадратичный функционал действия и критические точки.

Процесс вычисления континуального интеграла в бесконечномерном случае можно определить как последовательность конечномерных интегралов и процедуру нахождения предела этой последовательности, когда число переменных интегрирования (размерность) стремится к ∞ . В частности, если базовое многообразие M (область определения полей ψ) компактно, то каждая триангуляция M дает конечное множество узлов в качестве базиса пространства, на котором задана форма действия $S(\psi)$, которая становится функционалом действия, когда число узлов стремится к ∞ . Поэтому нам нужно вычислить интеграл, в котором действие является формой на конечномерном пространстве, и задать процедуру перехода к пределу при уменьшении шага триангуляции.

Итак, возьмем функционал действия как форму на m -мерном векторном пространстве V , т.е. многочлен (в общем случае неоднородный) от m переменных $P(x_1, \dots, x_m)$. Возьмем m -куб R в V с центром в 0 и длиной стороны l . Мы можем взять интеграл по R и попытаться перейти к пределу при $l \rightarrow \infty$:

$$Z(P) := \lim_{l \rightarrow \infty} \int_R \exp(iP(x_1, \dots, x_m)) dx_1 \dots dx_m.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 27. *Предел $Z(P)$ существует, если и только если множество C критических точек функционала $P(x_1, \dots, x_m)$ на V компактно.*

Это множество критических точек находится как решение вариационной задачи

$$dP(x_1, \dots, x_m) = 0.$$

Можно ожидать, что $Z(P)$ является аналитической функцией от коэффициентов P , которая согласно утверждению 27 имеет полюса в тех точках, которые соответствуют формам с некомпактным множеством критических точек. В частности, когда $\dim V = n$ и действие $P = Q(x)$ есть невырожденная квадратичная форма, континуальный интеграл (преобразование Гаусса) есть

$$Z(Q) := \langle 1 \rangle = \int_V \exp(iQ(x)) d^n x = \frac{\pi^{n/2}}{|\det Q|^{1/2}} \exp\left(i\pi \frac{\operatorname{sgn} Q}{4}\right). \quad (14)$$

2. Однородные формы. Пусть $T(x)$ – однородный многочлен от m переменных $x := (x_1, \dots, x_m)$. Рассмотрим соответствующую (конечномерную) вариационную задачу

$$dT(x) = 0.$$

В общем случае число уравнений в этой системе больше числа неоднородных переменных, поэтому система разрешима, только если коэффициенты T удовлетворяют некоторым условиям.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 19. Если вариационная задача имеет решения, отличные от $x \equiv (x_1, \dots, x_m) = (0, \dots, 0)$ (а значит, поскольку T однородна, множество критических точек C некомпактно), то форма T называется *вырожденной*. Множество вырожденных форм называется *дискриминантным*.

Дискриминантное множество описывается уравнением на коэффициенты формы $D(T) = 0$, где вырождение $D(T)$ есть многочлен от коэффициента T , называемое *дискриминантом*. Это инвариант формы.

Разрешимость вариационной задачи можно переформулировать в терминах геометрических свойств алгебраического многообразия, соответствующего многочлену $T(x)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 28. Если (конечномерная) вариационная задача $dT(x) = 0$ разрешима, то алгебраическая гиперповерхность $T(x) = 0$ особа.

ПРИМЕР 17. Пусть $T(x) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$ – бинарная форма степени 2. Соответствующая вариационная задача – это:

$$\frac{\partial T(x)}{\partial x_1} = 2ax_1 + bx_2 = 0, \quad \frac{\partial T(x)}{\partial x_2} = bx_1 + 2cx_2 = 0.$$

Эта система разрешима, только если $D(T) = \begin{vmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{vmatrix} = b^2 - 4ac = 0$, т.е. корни $T(x) = 0$ (которые являются двумя 1-мерными подпространствами в 2-мерном пространстве однородных переменных (x_1, x_2)) сливаются.

2.1. d -линейные формы. Исходным примером является следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 29. Имеем

$$\int_{\mathbf{R}^1} \int_{\mathbf{R}^1} \exp(iaxy) dx dy = \frac{2\pi}{a}.$$

Для квадратичной формы Q на n -мерном векторном пространстве V можно взять ее поляризацию – симметричную билинейную форму $B(u, v)$ на паре $U \times V$ n -мерных пространств таких, что $Q(v) = B(v, v)$. Напишем аналог формулы (14) в терминах B . Пусть R_1, R_2 есть два n -куба в V и U соответственно с центрами в 0 и сторонами длины l .

УТВЕРЖДЕНИЕ 30. *Имеем*

$$Z(B) := \int_U \int_V \exp(iB(v, u)) dv du := \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{R_1} \int_{R_2} \exp(iB(v, u)) dv du = \frac{(2\pi)^n}{\det B}.$$

Таким образом, мы можем понимать $\int_V \int_U \exp(iB(v, u)) dv du$ как интеграл, взятый в указанном несобственном смысле.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сделаем замену переменных: $v' = B^{-1}v$, $u' = u$. Используя эти переменные и утверждение 29, запишем

$$\begin{aligned} \int_U \int_V \exp(iB(v, u)) dv du &= \int_U \int_V \exp\left(i \sum_{k=1}^n v'_k u'_k\right) \frac{dv'}{\det B} du' \\ &= \frac{1}{\det B} \left(\iint \exp(ixy) dx dy \right)^n = \frac{(2\pi)^n}{\det B}. \end{aligned}$$

В билинейном случае условие вырожденности B – это условие разрешимости системы $d_v B(u, v) = 0$, $d_u B(u, v) = 0$, которые являются парой эквивалентных систем линейных уравнений. При этом каждая из них в свою очередь эквивалентна системе $dQ(v) = 0$. Эта эквивалентность является свойством билинейного случая.

Общая конструкция следующая. Возьмем в качестве функционала действия d -линейную форму T на пространстве $V_1 \oplus \dots \oplus V_d$, и пусть $\dim V_i = n$ для каждого i . Имея такую форму, мы получаем меру интегрирования

$$\exp(iT(v_1, \dots, v_d)) dv_1 \dots dv_d.$$

Возьмем n -кубы R_i с центрами в 0 в соответствующих V_i и сторонами длины l . Можно взять интеграл по $R_1 \times \dots \times R_d$ и попытаться перейти к пределу при $l \rightarrow \infty$, как в п. 1:

$$Z(T) := \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{R_d} \dots \int_{R_1} \exp(iT(v_1, \dots, v_d)) dv_1 \dots dv_d.$$

Чтобы определить, компактно ли C , нам нужно написать для формы $T(v_1, \dots, v_d)$ (как и для всех форм, рассмотренных до сих пор) условия стационарности:

$$\delta T(v) = 0 \iff d_{v_1} T(v_1, \dots, v_d) = 0, \dots, d_{v_d} T(v_1, \dots, v_d) = 0. \quad (15)$$

Это набор из d (одна для каждого v_i) неэквивалентных (в отличие от билинейного случая) систем $(d-1)$ -линейных уравнений.

Далее следует рассмотреть два случая:

и) *Компактное множество критических точек.* Пусть форма T невырождена. Тогда множество критических точек состоит только из одной точки – начала отсчета. Термин “компактный” применительно к этому множеству станет более содержательным в случае неоднородных форм, рассмотренном ниже. Пусть $\deg_T$ означает степень $D(T)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 31. *Имеем*

$$\begin{aligned} & \int_{V_d} \cdots \int_{V_1} \exp(iT(v_1, \dots, v_d)) dv_1 \dots dv_d \\ & := \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{R_d} \cdots \int_{R_1} \exp(iT(v_1, \dots, v_d)) dv_1 \dots dv_d = \frac{(2\pi)^{n(d-1)}}{|D(T)|^{n/\deg_T}}. \end{aligned}$$

Заметим, что когда T билинейна, то $\deg_T = n$, $D(T) = \det T$, и мы получаем формулу (15). Таким образом, можно понимать $Z(T)$ как интеграл, взятый в описанном выше смысле.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО состоит из следующих шагов:

- 1) для $d = 2$ это – содержание утверждения 30;
- 2) $(d + 1)$ -линейная форма $T(v_1, \dots, v_d, v_{d+1})$ рассматривается как линейная комбинация d -линейных форм $T'(v_1, \dots, v_d)$, т.е. ее можно считать d -линейной формой на $V_1 \oplus \cdots \oplus V_d$ с коэффициентами $a'_{i_1 \dots i_d}$, зависящими от $v_{d+1} \in V_{d+1}$:

$$a'_{i_1 \dots i_d} = \sum_{i_{d+1}} a_{i_1 \dots i_d i_{d+1}} (v_{d+1})_{i_{d+1}},$$

где $(v_k)_i$ означает i -ю компоненту вектора $v_k \in V_k$;

- 3) считая, что утверждение верно для d -линейных форм, проинтегрируем по пространству $V_1 \oplus \cdots \oplus V_d$ и получим

$$Z(T) = (2\pi)^{n(d-2)} \int_{V_{d+1}} \frac{dv_{d+1}}{|\text{Dis } T'(v_{d+1})|^{n/\deg_{T'}}};$$

- 4) рассмотрим V_{d+1} как вещественный n_{d+1} -цикл интегрирования в $\mathbf{C}^{n_{d+1}}$, выколотый в бесконечности, и вычислим последний интеграл как многомерный вычет мероморфной функции $f(v_{d+1}) := 1/\text{Dis } T'(v_{d+1})$.

ПРИМЕР 18. Проиллюстрируем этот метод в случае $(2 \times 2 \times 2)$ -формы

$$T(x, y, z) = \sum_{i,j,k=1,2} a_{ijk} x_i y_j z_k.$$

Используем следующий факт из анализа многих комплексных переменных:

ЛЕММА 1. *Для функции $f(z_1, z_2)$, голоморфной на области $R \subset \mathbf{C}^2$, и $(w_1, w_2) \in R$*

$$f(z_1, z_2) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint_{|w_i - z_i| = r} \frac{f(w_1, w_2)}{(w_1 - z_1)(w_2 - z_2)} dw_1 dw_2.$$

Теперь для $(x_1, x_2) \in V$, $(y_1, y_2) \in U$, $(z_1, z_2) \in W$, используя утверждение 30, имеем

$$\begin{aligned} & \int_V \int_U \int_W \exp \left(i \sum_{i,j,k} a_{ijk} x_i y_j z_k \right) d^2 x d^2 y d^2 z \\ &= \int_W \left(\int_V \int_U \exp \left(i \sum_{i,j} b_{ij} x_i y_j \right) d^2 x d^2 y \right) d^2 z = (2\pi)^2 \int_W \frac{dz_1 dz_2}{\det B}, \end{aligned}$$

где $b_{ij} := \sum_k a_{ijk} z_k$. Тогда

$$\det B = az_1^2 + bz_1 z_2 + cz_2^2,$$

где a, b, c являются выражениями степени 2 от a_{ijk} . Сделаем замену переменных:

$$\begin{aligned} z'_1 &:= ((2b + \sqrt{D}) z_1 + (-2b + \sqrt{D}) z_2) / (2a\sqrt{D}), \\ z'_2 &:= (z_1 - z_2) / \sqrt{D}, \end{aligned}$$

где $D := b^2 - 4ac$. Используя эти переменные, можно записать

$$\int_W \frac{dz_1 dz_2}{\det B} = \frac{1}{\sqrt{D}} \int_W \frac{dz'_1 dz'_2}{z'_1 z'_2}.$$

Считая W вещественным 2-мерным циклом в $\mathbf{C}^2$, вычислим значение последнего интеграла согласно лемме как 2-мерный вычет функции $\frac{1}{z'_1 z'_2}$ в 0:

$$\iint_{|z'_i|=r} \frac{dz'_1 dz'_2}{z'_1 z'_2} = (2\pi i)^2.$$

Подставляя эти данные, получаем

$$\begin{aligned} & \int_V \int_U \int_W \exp \left(i \sum_{i,j,k} a_{ijk} x_i y_j z_k \right) d^2 x d^2 y d^2 z = -\frac{(2\pi)^4}{\sqrt{D}} \\ &= -(2\pi)^4 (a_{111}^2 a_{222}^2 + a_{112}^2 a_{221}^2 + a_{121}^2 a_{212}^2 + a_{211}^2 a_{122}^2 \\ &\quad - 2a_{111} a_{121} a_{212} a_{222} - 2a_{111} a_{211} a_{122} a_{222} \\ &\quad - 2a_{111} a_{112} a_{221} a_{222} - 2a_{121} a_{221} a_{112} a_{212} \\ &\quad - 2a_{211} a_{221} a_{112} a_{122} - 2a_{212} a_{211} a_{121} a_{122} \\ &\quad + 4a_{111} a_{221} a_{212} a_{122} + 4a_{121} a_{211} a_{112} a_{222})^{-1/2} \\ &= -\frac{(2\pi)^4}{D(a_{ijk})^{1/2}}, \end{aligned}$$

где $D(a_{ijk})$ – дискриминант 3-линейной формы, равенство нулю которого есть:

1) условие разрешимости системы $d(\sum a_{ijk}x_i y_j z_k) = 0$ из 6-ти билинейных уравнений (вариационная задача);

2) условие того, что множество критических точек функции $\sum a_{ijk}x_i y_j z_k$ на $V \times U \times W$ некомпактно (недискретно);

3) условие того, что кубика $\sum a_{ijk}x_i y_j z_k$ неособа.

ii) *Некомпактное множество критических точек.* Возьмем в качестве функционала действия d -линейную форму T на пространстве $V_1 \oplus \dots \oplus V_d$. Имея эту форму, мы получаем меру интегрирования $\exp(iT(v_1, \dots, v_d)) dv_1 \dots dv_d$. Пусть размерность каждого V_i равна n_i . Возьмем n_i -кубы R_i с центрами в 0 в соответствующих V_i и сторонами длины l . Можно взять интеграл по $R_1 \times \dots \times R_d$ и попробовать перейти к пределу при $l \rightarrow \infty$, как указано в п. 1:

$$Z(T) := \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{R_d} \dots \int_{R_1} \exp(iT(v_1, \dots, v_d)) dv_1 \dots dv_d.$$

Чтобы выяснить, компактно ли C , нужно написать для формы $T(v_1, \dots, v_d)$ (как и для всех форм, рассмотренных до сих пор) условия стационарности:

$$\delta T(v) = 0 \iff d_{v_1} T(v_1, \dots, v_d) = 0, \dots, d_{v_d} T(v_1, \dots, v_d) = 0. \quad (16)$$

Это набор из d систем (одна для каждого v_i) из $(d-1)$ -линейных уравнений, решениями которых будут критические точки для T . Как и в билинейном случае, эта однородная система в общем случае не разрешима. Если мы хотим, чтобы эта система имела нетривиальные (ненулевые) решения, которые (поскольку $T(v_1, \dots, v_d)$ d -линейна) образуют линейное подпространство в $V_1 \oplus \dots \oplus V_d$, то число уравнений должно быть не больше, чем число неоднородных переменных, т.е. мы получаем условия на размерность пространств V_i : $n_1 + \dots + \hat{n}_k + \dots + n_d - d + 2 < n_k$ для некоторого k . В этом случае интеграл расходится. Поскольку в этом случае множество C критических точек является линейным подпространством в $V_1 \oplus \dots \oplus V_d$, мы можем взять форму T' , индуцированную на факторпространстве $V_1 \oplus \dots \oplus V_d / C$, на котором форма невырождена, так что мы попадаем в условия утверждения 31. В терминах вычислений, чтобы получить конечное число в качестве значения $Z(T)$, берем предел:

$$\begin{aligned} Z(T) &:= \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{\text{Vol}(R_1 \times \dots \times R_d \cap C)} \int_{R_d} \dots \int_{R_1} \exp(iT(v_1, \dots, v_d)) dv_1 \dots dv_d \\ &= \frac{\Lambda(n_1, \dots, n_d)}{|D(T')|^{(n_1 + \dots + n_d)/d \deg_{T'}}}, \end{aligned}$$

где $\text{Vol}(R_1 \times \dots \times R_d \cap C)$ вычисляется относительно формы объема на C , индуцированной с полного пространства $V_1 \oplus \dots \oplus V_d$, и $\Lambda(n_1, \dots, n_d)$ есть константа.

ПРИМЕР 19. Пусть $T = a_1 x_1 y + a_2 x_2 y + \dots + a_n x_n y$ – билинейная форма на $V \times U$, где $\dim V = n$, $\dim U = 1$. Эта форма вырождена, множество ее критических точек есть $C = \{(x_1, \dots, x_n) \in V \mid a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0\} \times U$, и $\dim C = n - 1$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 32. *Имеем*

$$\begin{aligned} Z(T) &= \frac{1}{\text{Vol}(C)} \int_U \int_V \exp(i(a_1 x_1 y + a_2 x_2 y + \dots + a_n x_n y)) dx_1 \dots dx_n dy \\ &= \frac{2\pi}{(a_1^4 + \dots + a_n^4)^{1/4}}, \end{aligned}$$

где процедура деления понимается в смысле перехода к вышеописанному пределу.

Заметим, что если $n = 1$, то эта формула дает результат утверждения 29.

2.2. *n-арные формы.* Функционалы действия, рассматривавшиеся в физике до сих пор, являются ограничением d -линейных форм (на конечно- или бесконечномерных пространствах) на диагональ множеств $V_1 \oplus \dots \oplus V_d$, т.е. их берут в виде $S(v) = T(v, \dots, v)$. Взяв вариационную задачу, мы должны продифференцировать только по одному набору переменных v . Получающиеся уравнения не $(d-1)$ -линейные, а являются уравнениями степени $(d-1)$ по v . Эти уравнения можно получить из любой из d систем (15) ограничением ее на диагональ, т.е. полагая $v_1 = \dots = v_d = v$. Это ограничение вызывает нарушение симметрии в значении $Z(S)$ – оно приобретает ненулевую мнимую часть.

УТВЕРЖДЕНИЕ 33. *Пусть $\dim V = n$. Тогда*

$$Z(S) := \int_V \exp(iS(v)) dv = \frac{\Lambda(n, d)}{|D(S)|^{n/d \deg S}} \exp(i\pi \text{sgn}(S)),$$

где $\Lambda(n, d)$ – константа (которую еще нужно вычислить для общих значений n и d), $D(S)$ – дискриминант S , т.е. условие особенности алгебраической гиперповерхности $S(v) = 0$ в V , а фаза $\text{sgn}(S)$ – функция на множестве компонент связности $S^d V^* \setminus D(S)$.

Дискриминантное многообразие $D(S)$ дает разбиение пространства $S^d V^*$ n -арных форм (с вещественными коэффициентами), “фазовая” функция постоянна на каждой из этих компонент и претерпевает скачок, когда набор коэффициентов S пересекает дискриминантную поверхность при переходе к другой компоненте. Таким образом, “фазовая функция” $\text{sgn}(S)$ различает компоненты дополнения к дискриминантному множеству. Первый пример этого явления – формула (14). Там $\Lambda = \Lambda(n, 2) = \pi^{n/2}$.

Пусть $\dim V = 2$ (случай бинарных форм, когда базовое пространство состоит только из двух точек), так что $S(v) = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} y + \dots + a_0 y^d$. В этом случае $\deg S = 2(d-1)$. Тогда

$$\begin{aligned} Z(S) &:= \int_V \exp(i(a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} y + \dots + a_0 y^d)) dx dy \\ &= \frac{\Lambda(2, d)}{|D(S)|^{1/d(d-1)}} \exp(i\pi \text{sgn}(S)). \end{aligned}$$

Здесь $D(S)$ есть обычный дискриминант многочлена степени d . Для бинарных форм число компонент дополнения к дискриминантному множеству имеет геометрическую интерпретацию в терминах корней многочлена S , значения $\text{sgn}(S)$ на этих компонентах являются рациональными числами, которые еще нужно вычислить в общем случае.

ПРИМЕР 20. $S = ax^2 + bxy + cy^2$. Тогда $\Lambda(2, 2) = \pi$ и дискриминантная поверхность разделяет 3-мерное пространство $S^2V^* \ni (a, b, c)$ коэффициентов на следующие три компоненты:

$$\begin{aligned} D_1 &= \left\{ \left(\frac{b}{2} \right)^2 - ac < 0, a > 0, c > 0 \right\}, \\ D_2 &= \left\{ \left(\frac{b}{2} \right)^2 - ac < 0, a < 0, c < 0 \right\}, \\ D_3 &= \left\{ \left(\frac{b}{2} \right)^2 - ac > 0 \right\}. \end{aligned}$$

Тогда

$$Z(S) := \int_V \exp(i(ax^2 + bxy + cy^2)) dx dy = \frac{\pi}{\left| \left(\frac{b}{2} \right)^2 - ac \right|^{1/2}} \exp(i\pi \operatorname{sgn}(S)),$$

где “фазовая функция” есть

$$\operatorname{sgn}(S) = \begin{cases} 1/2 & \text{для } (a, b, c) \in D_1, \\ -1/2 & \text{для } (a, b, c) \in D_2, \\ 0 & \text{для } (a, b, c) \in D_3. \end{cases}$$

3. Неоднородные формы. Пусть форма действия $P(v)$ неоднородна, т.е. имеет члены различных степеней, например квадратные и кубические. Сначала заметим, что всякое неоднородное действие можно сделать однородным, введя дополнительные переменные, и наоборот. Множество C решений вариационной задачи $\delta P = 0$ в общем случае состоит из нескольких точек, критических точек функции P . Заметим, что если v_0 есть критическая точка для $P(v)$, то, делая замену переменных $v' := v - v_0$, мы получаем $P(v) = c_0 + P'(v')$, где $c_0 = P(v_0)$ – константа и $P'(v')$ имеет члены только порядка ≥ 2 . Таким образом, без потери общности можно рассматривать формы без линейных членов. Согласно утверждению 28 мы ожидаем, что $Z(P)$ будет аналитической функцией от коэффициентов P с полюсами в тех точках, где множество решений $\delta P = 0$ некомпактно. Назовем такие формы *невыврожденными*, как и в однородном случае.

Заметим, что условие вырожденности для коэффициентов P не совпадает с условием вырожденности соответствующей однородной формы и наоборот. Нахождение $Z(P)$ как аналитической функции от коэффициентов P в общем случае является открытым вопросом (например, при $P = x^3 + i\sqrt{c}x^2$ функция $Z(P) = \mathcal{A}i(c)$ – функция Эйри), но мы рассмотрим пример, когда аналитические свойства $Z(P)$ имеют наглядную интерпретацию в терминах геометрических свойств алгебраической гиперповерхности $P(v) = 0$.

ПРИМЕР 21. Если дана квадратичная форма $T = \sum_{i,j=0}^n q_{ij}y_iy_j$ на $(n+1)$ -мерном пространстве $V \ni (y_0, y_1, \dots, y_n)$, то мы имеем неоднородную форму от $x_i := \frac{y_i}{y_0}$ вида $P = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j + \sum_{i=1}^n b_ix_i + c$, где $a_{ij} := q_{ij}$, $b_i := a_{i0} + a_{0i} = 2a_{i0}$, $c := a_{00}$. Здесь для придания более симметричного вида формулам мы используем суммирование по всем значениям i, j , но, конечно, $q_{ij} = q_{ji}$. Вариационная задача для P есть

$$\sum a_{ij}x_j = b_i/2, \quad i = 1, \dots, n.$$

Пусть v_0 есть решение этой неоднородной системы. Тогда в терминах $v' = v - v_0$ можно записать $P = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x'_ix'_j + P(v_0)$. Рассмотрим соответствующие корреляционные функции $Z(T)$ и $Z(P)$. Условия вырожденности T есть $\det(q) = 0$, а для P это $\det(a) = 0$. Значит, хотя $Z(T)$ расходится, мы все же получаем конечный ответ для $Z(P)$, интегрируя по неоднородным переменным. А $Z(P)$ становится расходящейся в свою очередь, только если главный $(n \times n)$ -минор в (q_{ij}) равен нулю.

Список литературы

1. *Gelfand I., Kapranov M., Zelevinsky A.* Hyperdeterminants // Adv. in Math. 1993. V. 22.
2. *Vinberg E.B.* Popov Invariant Theory // Itogi nauki i tekhniki. Sovremennye problemy matematiki. Fundamentalnye napravleniya. V. 55.
3. *Dolotin V.* On Discriminants of Multilinear Forms. E-print alg-geom/9511010.
4. *Dolotin V.* On Invariant Theory. E-print alg-geom/9512011.
5. *Dolotin V.* QFT's with Action of Order Three and Higher and Degeneracy of Tensors. E-print hep-th/9706001.

Математический Колледж,
Независимый Московский Университет
vd@main.mccme.rssi.ru

Поступило в редакцию
24.VI.1997