Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. И. Дьяченко, Коэффициенты Фурье кусочно монотонных функций многих переменных, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1998, том 62, выпуск 2, 35–48

DOI: <https://doi.org/10.4213/im172>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 12:06:09

УДК 517.52

М. И. Дьяченко

Коэффициенты Фурье кусочно монотонных функций многих переменных

Основным результатом статьи является получение окончательной оценки для сумм Харди–Литтлвуда коэффициентов Фурье кусочно монотонных функций из пространств $L_p([-\pi, \pi]^m)$ при $2 < p < 2 + \frac{1}{m-1}$.

Библиография: 7 наименований.

§ 1. Введение

Пусть m – натуральное число, $T = [-\pi, \pi)$, $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$, а $\mathbb{Z}^m$ и $\mathbb{Z}_+^m$ суть целочисленные решетки в $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}_+^m$ соответственно. Если $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, то обозначим:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}\mathbf{y} &= \sum_{j=1}^m x_j y_j, & \Pi(\mathbf{x}) &= \prod_{j=1}^m (|x_j| + 1), \\ \Pi_1(\mathbf{x}) &= \prod_{j=1}^m x_j, & d\mathbf{x} &= dx_1 dx_2 \dots dx_m. \end{aligned}$$

Будем говорить, что $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ ($\mathbf{x} < \mathbf{y}$), если $x_j \leq y_j$ ($x_j < y_j$) при $j = 1, 2, \dots, m$. Если a – число, то через $\mathbf{a}$ будем обозначать вектор, все координаты которого равны a . Размерность этого вектора каждый раз будет ясна из контекста.

Все рассматриваемые ниже функции предполагаются 2π -периодическими по каждой переменной. Если $1 \leq p < \infty$, то, как обычно, через $L_p(T^m)$ обозначается пространство суммируемых в p -й степени функций с нормой

$$\|f(\mathbf{x})\|_p = \left(\int_{T^m} |f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}},$$

а модуль непрерывности функции $f(\mathbf{x}) \in L_p(T^m)$ – это

$$\omega(f, \delta)_p = \sup_{\mathbf{t} \in \mathbb{R}^m: |\mathbf{t}| < \delta} \|f(\mathbf{x} + \mathbf{t}) - f(\mathbf{x})\|_p.$$

Исследования, описанные в данной статье, были выполнены при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 97-01-00010).

Если $f(\mathbf{x}) \in L(T^m)$, то

$$\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m} a_{\mathbf{n}}(f) e^{i\mathbf{n}\mathbf{x}}, \quad a_{\mathbf{n}}(f) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{T^m} f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{n}\mathbf{x}} d\mathbf{x},$$

– m -мерный тригонометрический ряд Фурье данной функции.

Через C ниже будут обозначаться абсолютные положительные постоянные (не обязательно одинаковые в различных случаях), через $C(m)$ – положительные постоянные, зависящие лишь от размерности пространства, и т.д.

Хорошо известна следующая теорема Харди–Литтлвуда (по поводу одномерного случая см. [1, с. 165], а многомерный результат может быть получен с помощью индукции).

ТЕОРЕМА А. а) Если $1 < p \leq 2$ и функция $f(\mathbf{x})$ принадлежит $L_p(T^m)$, то

$$J_p(f) = \left(\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m} |a_{\mathbf{n}}(f)|^p (\Pi(\mathbf{n}))^{p-2} \right)^{\frac{1}{p}} \leq C(p, m) \|f(\mathbf{x})\|_p < \infty.$$

б) Если $2 \leq p < \infty$ и коэффициенты m -кратного тригонометрического ряда

$$\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m} a_{\mathbf{n}} e^{i\mathbf{n}\mathbf{x}}$$

удовлетворяют условию

$$\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m} |a_{\mathbf{n}}|^p (\Pi(\mathbf{n}))^{p-2} < \infty,$$

то данный ряд является рядом Фурье функции $f(\mathbf{x}) \in L_p(T^m)$.

Кроме того (см. [2, с. 657]), Г. Харди и Дж. Литтлвуд установили, что если $m = 1$ и коэффициенты $a_n \downarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то обе части теоремы А справедливы при $1 < p < \infty$.

В многомерной ситуации можно давать различные определения монотонности. Наиболее употребительным является понятие монотонности в смысле Харди.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Обозначим через Γ_m множество всех m -мерных векторов из нулей и единиц. Пусть $\{a_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}_+^m}$ – последовательность неотрицательных чисел такая, что

$$\lim_{\max_{1 \leq j \leq m} n_j \rightarrow \infty} a_{\mathbf{n}} = 0,$$

и для любого $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}_+^m$ имеем

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_m} a_{\mathbf{n}+\gamma} (-1)^{\gamma_1 + \dots + \gamma_m} \geq 0.$$

Тогда данная последовательность называется *монотонной в смысле Харди*.

Ф. Морицем [3] было установлено, что упомянутый выше одномерный результат Харди–Литтлвуда о тригонометрических рядах с монотонными коэффициентами остается справедливым и для кратных рядов, если монотонность понимается в смысле Харди. В то же время ряды с монотонными в смысле Харди коэффициентами образуют достаточно узкий класс. Так, даже среди ядер Дирихле только прямоугольные имеют коэффициенты, монотонные в смысле Харди в каждом координатном квадранте. В связи с этим представляется естественным следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $\{a_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}_+^m}$ – последовательность неотрицательных чисел. Тогда скажем, что эта последовательность *монотонно убывает*, если для любых $\mathbf{n}, \mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^m$ таких, что $\mathbf{n} \leq \mathbf{k}$, имеем $a_{\mathbf{n}} \geq a_{\mathbf{k}}$.

Автором (см. [4], [5]) были получены следующие многомерные обобщения теоремы Харди–Литтлвуда.

ТЕОРЕМА Б. Пусть $2 < p < \infty$, функция $f(\mathbf{x})$ принадлежит $L_p(T^m)$ и ее ряд Фурье имеет вид

$$\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}_+^m} a_{\mathbf{n}}(f) e^{i\mathbf{n}\mathbf{x}},$$

где последовательность $\{a_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}_+^m}$ монотонно убывает. Тогда

$$J_p(f) \leq C(p, m) \|f(\mathbf{x})\|_p < \infty.$$

ТЕОРЕМА В. Если $\frac{2m}{m+1} < p < 2$, коэффициенты m -кратного тригонометрического ряда

$$\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}_+^m} a_{\mathbf{n}} e^{i\mathbf{n}\mathbf{x}}$$

монотонно убывают и

$$\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}_+^m} a_{\mathbf{n}}^p (\Pi(\mathbf{n}))^{p-2} < \infty,$$

то данный ряд является рядом Фурье функции $f(\mathbf{x}) \in L_p(T^m)$. При этом при $p = \frac{2m}{m+1}$ утверждение становится неверным.

Далее, автором [6] был предложен к рассмотрению класс кусочно монотонных функций, в определенном смысле двойственный к классу рядов с монотонными коэффициентами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in T^m$, $\mathbf{a} < \mathbf{b}$ и $\gamma \in \Gamma_m$. Тогда скажем, что функция $f(\mathbf{x})$ принадлежит $M(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \gamma)$, если $f(\mathbf{x}) = 0$ при $\mathbf{x} \in T^m \setminus [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ и если для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ таких, что $(-1)^{\gamma_j} x_j \leq (-1)^{\gamma_j} y_j$ при $j = 1, 2, \dots, m$, имеем $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{y})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Будем говорить, что функция $f(\mathbf{x})$ принадлежит $PM(f(\mathbf{x})$ кусочно монотонна), если существуют такое конечное дизъюнктивное разложение

$$T^m = \bigsqcup_{k=1}^l [\mathbf{a}(k), \mathbf{b}(k)],$$

и такие векторы $\gamma(1), \dots, \gamma(l) \in \Gamma_m$, что при $k = 1, 2, \dots, l$ функция $f(\mathbf{x})X_{[\mathbf{a}(k), \mathbf{b}(k)]}(\mathbf{x})$ принадлежит $M(\mathbf{a}(k), \mathbf{b}(k), \gamma(k))$, где $X_E(\mathbf{x})$ — характеристическая функция множества E .

В работе [6] были установлены такие утверждения.

ТЕОРЕМА Г. Если $1 < p < 2$, $f(\mathbf{x}) \in L(T^m) \cap PM$ и $J_p(f) < \infty$, то $f(\mathbf{x}) \in L_p(T^m)$.

ТЕОРЕМА Д. Если $2 < p < 2 + \frac{1}{m-1} = \frac{2m-1}{m-1}$ и $f(\mathbf{x}) \in L_p(T^m) \cap PM$, то для любого $\varepsilon > 0$ имеем $J_{p-\varepsilon}(f) < \infty$. При этом найдется ограниченная кусочно монотонная функция $f_m(\mathbf{x})$ такая, что $J_{2+\frac{1}{m-1}}(f_m) = \infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Представляется любопытным, что показатель $2 + \frac{1}{m-1}$ не является сопряженным к $\frac{2m}{m+1}$, точнее, он расположен вдвое ближе к числу 2, чем сопряженный показатель $2 + \frac{2}{m-1}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Наряду с кусочно монотонными функциями можно рассматривать и более узкий класс кусочно монотонных функций в смысле Харди (см. [6]). Для них аналог теоремы Харди–Литтлвуда справедлив при всех p .

Целью настоящей статьи является получение окончательной оценки в теореме Д.

ТЕОРЕМА. Пусть $2 < p < 2 + \frac{1}{m-1}$ и $f(\mathbf{x}) \in L_p(T^m) \cap PM$. Тогда

$$J_p(f) \leq C(p, m, l) \|f(\mathbf{x})\|_p < \infty,$$

где l — число параллелепипедов монотонности функции $f(\mathbf{x})$.

§ 2. Вспомогательные утверждения

Установим вначале основную лемму. Метод ее доказательства был разработан В. А. Юдиным [7] в связи с задачей оценки констант Лебега и затем применен автором [5] для получения оценок норм полиномов с монотонными коэффициентами.

Предварительно введем такое обозначение. Если $f(\mathbf{x}) \in L(T^m)$ и $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, то положим

$$\hat{f}(\mathbf{y}) = \int_{T^m} f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{y}\mathbf{x}} d\mathbf{x}.$$

ЛЕММА. Пусть $2 < p < 2 + \frac{1}{m-1}$, вектор $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \dots, \delta_m) \in (0, \pi)^m$, вектор $\mathbf{N} = (N_1, N_2, \dots, N_m)$, причем $N_j \delta_j \geq 1$ при $j = 1, 2, \dots, m$, $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \subseteq \prod_{j=1}^m (-\delta_j, \delta_j)$ и для некоторого $\boldsymbol{\gamma} \in \Gamma_m$ функция $f(\mathbf{x})$ принадлежит $M(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \boldsymbol{\gamma})$, причем

$$A = \sup_{\mathbf{x} \in (\mathbf{a}, \mathbf{b})} |f(\mathbf{x})| < \infty.$$

Тогда

$$\begin{aligned} I &= \left(\int_{N_1}^{\infty} \dots \int_{N_m}^{\infty} (\Pi_1(\mathbf{x}))^{p-2} |\hat{f}(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C(p, m) A (\Pi_1(\mathbf{N}))^{\frac{m-1}{m} - \frac{2m-1}{mp}} (\Pi_1(\boldsymbol{\delta}))^{\frac{m-1}{m} (1 - \frac{1}{p})}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, будем считать, что $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}$. Делая в интеграле

$$\begin{aligned} I &= \left(\int_{N_1}^{\infty} \dots \int_{N_m}^{\infty} (\Pi_1(\mathbf{x}))^{p-2} \right. \\ &\quad \times \left. \left| \int_{-\delta_1}^{\delta_1} \dots \int_{-\delta_m}^{\delta_m} f(t_1, \dots, t_m) e^{-i(t_1 x_1 + \dots + t_m x_m)} dt_1 \dots dt_m \right|^p dx_1 \dots dx_m \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

замены $y_1 = \delta_1 x_1, \dots, y_m = \delta_m x_m$ и $s_1 = \delta_1^{-1} t_1, \dots, s_m = \delta_m^{-1} t_m$, получим

$$I = (\delta_1 \dots \delta_m)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{N_1 \delta_1}^{\infty} \dots \int_{N_m \delta_m}^{\infty} (y_1 \dots y_m)^{p-2} |\hat{\psi}(y_1, \dots, y_m)|^p dy_1 \dots dy_m \right)^{\frac{1}{p}},$$

где $\text{supp } \psi \subseteq [-1, 1]^m$.

Теперь рассмотрим множества

$$B_{\mathbf{k}} = \prod_{j=1}^m [2^{k_j-1}, 2^{k_j}),$$

где $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_m) \geq \mathbf{1}$. Пусть

$$\mathbf{k}(0) = (k_1(0), \dots, k_m(0)) = ([\log_2(N_1 \delta_1)] + 1, \dots, [\log_2(N_m \delta_m)] + 1),$$

где, как обычно, через $[a]$ обозначается целая часть числа a . Тогда

$$\begin{aligned} I &\leq (\delta_1 \dots \delta_m)^{\frac{1}{p}} \sum_{\mathbf{k}=\mathbf{k}(0)}^{\infty} \left(\int_{B_{\mathbf{k}}} (y_1 \dots y_m)^{p-2} |\hat{\psi}(y_1, \dots, y_m)|^p dy_1 \dots dy_m \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= (\delta_1 \dots \delta_m)^{\frac{1}{p}} \sum_{\mathbf{k}=\mathbf{k}(0)}^{\infty} I(\mathbf{k}). \end{aligned} \quad (1)$$

Для любого $\mathbf{k} \geq \mathbf{k}(0)$ обозначим $\nu(\mathbf{k}) = \max_{1 \leq j \leq m} k_j$. Если, например, для некоторого $\mathbf{k}$ число $\nu(\mathbf{k})$ равно k_r , то при $\mathbf{y} \in B_{\mathbf{k}}$, учитывая монотонность функции $\psi(\mathbf{y})$ на ее носителе по каждой переменной, будем иметь

$$\begin{aligned} |\hat{\psi}(y_1, \dots, y_m)| &\leq \int_{[-1,1]^{m-1}} \left| \int_{-1}^1 \psi(x_1, \dots, x_m) e^{-iy_r x_r} dx_r \right| dx_1 \dots dx_{r-1} dx_{r+1} \dots dx_m \\ &\leq \frac{C(m)A}{y_r} \leq C(m)A 2^{-\nu(\mathbf{k})}. \end{aligned}$$

Используя оценку В. А. Юдина (см. [7, с. 404]), устанавливаем, что

$$\begin{aligned} I(\mathbf{k}) &\leq C(p, m) \left(2^{(k_1 + \dots + k_m)} A 2^{-\nu(\mathbf{k})} \right)^{\left(1 - \frac{2}{p}\right)} \left(\int_{B_{\mathbf{k}}} |\hat{\psi}(\mathbf{y})|^2 d\mathbf{y} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C(p, m) \left(2^{(k_1 + \dots + k_m)} A 2^{-\nu(\mathbf{k})} \right)^{\left(1 - \frac{2}{p}\right)} \left(\omega(\psi, 2^{-\nu(\mathbf{k})})_2 \right)^{\frac{2}{p}}. \end{aligned}$$

Снова используя монотонность функции $\psi(\mathbf{y})$ на ее носителе по каждой переменной, установим, следуя [5, с. 10], что $\omega(\psi, t)_2 \leq C(m) A t^{\frac{1}{2}}$, а потому

$$I(\mathbf{k}) \leq C(p, m) A 2^{(k_1 + \dots + k_m) \left(1 - \frac{2}{p}\right)} 2^{-\nu(\mathbf{k}) \left(1 - \frac{1}{p}\right)}.$$

Учитывая, что при $2 < p < 2 + \frac{1}{m-1}$ имеем $\frac{1}{m} \left(1 - \frac{1}{p}\right) > 1 - \frac{2}{p}$, получаем отсюда (см. (1)), что при указанных p выполняется оценка

$$\begin{aligned} I &\leq C(p, m) (\delta_1 \dots \delta_m)^{\frac{1}{p}} A \sum_{\mathbf{k}=\mathbf{k}(0)}^{\infty} 2^{(k_1 + \dots + k_m) \left(\frac{m-1}{m} - \frac{2m-1}{mp}\right)} \\ &\leq C(p, m) A (\delta_1 \dots \delta_m)^{\frac{1}{p}} 2^{(k_1(0) + \dots + k_m(0)) \left(\frac{m-1}{m} - \frac{2m-1}{mp}\right)} \\ &\leq C(p, m) A (\delta_1 \dots \delta_m)^{\frac{1}{p}} (N_1 \delta_1 \dots N_m \delta_m)^{\left(\frac{m-1}{m} - \frac{2m-1}{mp}\right)} \\ &= C(p, m) A (\Pi_1(\mathbf{N}))^{\frac{m-1}{m} - \frac{2m-1}{mp}} (\Pi_1(\boldsymbol{\delta}))^{\frac{m-1}{m} \left(1 - \frac{1}{p}\right)}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

ЛЕММА А. Если $1 < p < \infty$ и $f(\mathbf{x}) \in L_p(T^m)$, то

$$\int_{T^m} (\Pi_1(\mathbf{x}))^{-p} \left(\int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_m} |f(\mathbf{t})| dt \right)^p d\mathbf{x} \leq C(p, m) \|f(\mathbf{x})\|_p^p.$$

Это утверждение для $m = 1$ доказано в [2, с. 899]. С помощью индукции легко установить справедливость утверждения леммы А для произвольного m , что и было сделано автором в статье [4].

§3. Доказательство теоремы

Предварительно докажем следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть число p и функция $f(\mathbf{x})$ удовлетворяют условиям теоремы, вектор γ принадлежит Γ_m , а множество D_γ равно $d_{\gamma_1} \times d_{\gamma_2} \times \dots \times d_{\gamma_m}$, где $d_{\gamma_j} = (-\infty, -1]$ при $\gamma_j = 1$ и $d_{\gamma_j} = [1, \infty)$ при $\gamma_j = 0$. Тогда справедлива оценка

$$Q_p(f, \gamma) = \left(\int_{D_\gamma} |\Pi_1(\mathbf{x})|^{p-2} \left| \int_{T^m} f(\mathbf{t}) e^{-i\mathbf{t}\mathbf{x}} d\mathbf{t} \right|^p d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}} \leq C(m, p, l) \|f(\mathbf{x})\|_p.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению класса PM

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{r=1}^l f_r(\mathbf{x}),$$

где $f_r(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) X_{[\mathbf{a}(r), \mathbf{b}(r)]}(\mathbf{x}) \in M(\mathbf{a}(r), \mathbf{b}(r), \beta(r))$ при $r = 1, 2, \dots, l$. Очевидно, что для любого r имеем $\|f_r(\mathbf{x})\|_p \leq \|f(\mathbf{x})\|_p$. При этом можно считать, что $\mathbf{b}(r) - \mathbf{a}(r) \leq \mathbf{1}$ для всех r . Далее, поскольку при любом r

$$f_r(\mathbf{x}) = f_{r,+}(\mathbf{x}) - f_{r,-}(\mathbf{x}),$$

где

$$f_{r,+}(\mathbf{x}) = \max(f_r(\mathbf{x}), 0), \quad f_{r,-}(\mathbf{x}) = \max(-f_r(\mathbf{x}), 0),$$

и при этом имеем

$$f_{r,+}(\mathbf{x}), -f_{r,-}(\mathbf{x}) \in M(\mathbf{a}(r), \mathbf{b}(r), \beta(r))$$

и

$$\|f_{r,+}(\mathbf{x})\|_p, \|f_{r,-}(\mathbf{x})\|_p \leq \|f(\mathbf{x})\|_p,$$

то дальнейшие рассуждения будем проводить для неотрицательных функций. Кроме того, если $1 \leq r \leq l$ и $g_r(\mathbf{x}) = f_r(\mathbf{x} - \mathbf{a}(r))$, то $Q_p(g_r, \gamma) = Q_p(f_r, \gamma)$ при любом $\gamma \in \Gamma_m$. Если же $h_r(\mathbf{t}) = f_r(t_1, \dots, t_{j-1}, -t_j, t_{j+1}, \dots, t_m)$ при некотором j , то $Q_p(h_r, \gamma) = Q_p(f_r, \gamma')$, где $\gamma'_k = \gamma_k$ при $k \neq j$ и $\gamma'_j = 1 - \gamma_j$. Исходя из изложенного выше, будем считать, что неотрицательная функция $f(\mathbf{x})$ принадлежит $L_p(T^m) \cap M(\mathbf{0}, \mathbf{b}, \mathbf{0})$, где $\mathbf{b} \leq \mathbf{1}$. Кроме того, будем оценивать лишь $Q_p(f) = Q_p(f, \mathbf{0})$, поскольку для других γ оценки проводятся аналогично. Мы докажем, что в этом случае

$$Q_p(f) \leq C(p, m) \|f(\mathbf{x})\|_p.$$

Имеем

$$\begin{aligned} Q_p(f) &\leq \sum_{B \subseteq \{1, \dots, m\}} \left(\int_{[1, \infty)^m} (\Pi_1(\mathbf{x}))^{p-2} \left| \int_{A_B(\mathbf{x})} f(\mathbf{t}) e^{-i\mathbf{t}\mathbf{x}} d\mathbf{t} \right|^p d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sum_{B \subseteq \{1, \dots, m\}} Q_{p,B}(f), \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} A_B(\mathbf{x}) &= \prod_{j=1}^m \Delta(j, B, \mathbf{x}), \\ \Delta(j, B, \mathbf{x}) &= \begin{cases} [0, 2^{-k}], & \text{если } j \in B \text{ и } 2^{k-1} \leq x_j < 2^k, \text{ где } k = 1, 2, \dots, \\ [2^{-k}, 1], & \text{если } j \notin B \text{ и } 2^{k-1} \leq x_j < 2^k, \text{ где } k = 1, 2, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

Поскольку все $Q_{p,B}(f)$ оцениваются одинаково, проведем рассуждения для $B = \{1, \dots, k\}$, где $k \leq m$, и для $B = \emptyset$ (в этом случае считаем, что $k = 0$). Используя лемму А, получим

$$\begin{aligned} (Q_{p,B})^p &= \int_{[1, \infty)^m} (\Pi_1(\mathbf{x}))^{p-2} \left| \int_{\Delta(1, B, \mathbf{x})} \dots \int_{\Delta(k, B, \mathbf{x})} \right. \\ &\quad \times \left(\int_{\Delta(k+1, B, \mathbf{x})} \dots \int_{\Delta(m, B, \mathbf{x})} f(\mathbf{t}) e^{-i\mathbf{t}\mathbf{x}} dt_{k+1} \dots dt_m \right) dt_1 \dots dt_k \Big|^p d\mathbf{x} \\ &\leq \int_{[1, \infty)^{m-k}} (x_{k+1} \dots x_m)^{p-2} \int_{[1, \infty)^k} (x_1 \dots x_k)^{p-2} \\ &\quad \times \left(\int_0^{\frac{1}{x_1}} \dots \int_0^{\frac{1}{x_k}} \left| \int_{\Delta(k+1, B, \mathbf{x})} \dots \int_{\Delta(m, B, \mathbf{x})} f(\mathbf{t}) \right. \right. \\ &\quad \times \left. \left. e^{-i\mathbf{t}\mathbf{x}} dt_{k+1} \dots dt_m \right| dt_1 \dots dt_k \right)^p dx_1 \dots dx_k dx_{k+1} \dots dx_m \\ &= \int_{[1, \infty)^{m-k}} (x_{k+1} \dots x_m)^{p-2} \int_{(0, 1]^k} (u_1 \dots u_k)^{-p} \\ &\quad \times \left(\int_0^{u_1} \dots \int_0^{u_k} \left| \int_{\Delta(k+1, B, \mathbf{x})} \dots \int_{\Delta(m, B, \mathbf{x})} f(\mathbf{t}) \right. \right. \\ &\quad \times \left. \left. e^{-i(t_{k+1}x_{k+1} + \dots + t_mx_m)} dt_{k+1} \dots dt_m \right| dt_1 \dots dt_k \right)^p du_1 \dots du_k dx_{k+1} \dots dx_m \\ &\leq C(p, m) \int_{[1, \infty)^{m-k}} (x_{k+1} \dots x_m)^{p-2} \\ &\quad \times \int_{(0, 1]^k} \left| \int_{\Delta(k+1, B, \mathbf{x})} \dots \int_{\Delta(m, B, \mathbf{x})} f(\mathbf{t}) \right. \\ &\quad \times \left. e^{-i(t_{k+1}x_{k+1} + \dots + t_mx_m)} dt_{k+1} \dots dt_m \right|^p dt_1 \dots dt_k dx_{k+1} \dots dx_m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= C(p, m) \int_{(0,1]^k} \int_{[1,\infty)^{m-k}} (x_{k+1} \dots x_m)^{p-2} \\
&\quad \times \left| \int_{\Delta(k+1, B, \mathbf{x})} \dots \int_{\Delta(m, B, \mathbf{x})} f(\mathbf{t}) \right. \\
&\quad \times \left. e^{-i(t_{k+1}x_{k+1} + \dots + t_m x_m)} dt_{k+1} \dots dt_m \right|^p dx_{k+1} \dots dx_m dt_1 \dots dt_k \\
&\equiv C(p, m) \int_{(0,1]^k} F(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k.
\end{aligned} \tag{3}$$

Отметим, что при $k = m$ требуемая оценка уже получена. Если же $k < m$, то для любых фиксированных $t_1, \dots, t_k$ рассмотрим функцию

$$\begin{aligned}
F(t_1, \dots, t_k) &= \sum_{r_{k+1}=1}^{\infty} \dots \sum_{r_m=1}^{\infty} \int_{2^{r_{k+1}-1}}^{2^{r_{k+1}}} \dots \int_{2^{r_m-1}}^{2^{r_m}} (x_{k+1} \dots x_m)^{p-2} \\
&\quad \times \left| \int_{\Delta(k+1, B, \mathbf{x})} \dots \int_{\Delta(m, B, \mathbf{x})} f(\mathbf{t}) \right. \\
&\quad \times \left. e^{-i(t_{k+1}x_{k+1} + \dots + t_m x_m)} dt_{k+1} \dots dt_m \right|^p dx_{k+1} \dots dx_m \\
&\equiv \sum_{r_{k+1}=1}^{\infty} \dots \sum_{r_m=1}^{\infty} F(t_1, \dots, t_k, r_{k+1}, \dots, r_m).
\end{aligned} \tag{4}$$

Применяя неравенство Минковского и лемму, получим, что при любых фиксированных $r_{k+1}, \dots, r_m \geq 1$ имеем

$$\begin{aligned}
&(F(t_1, \dots, t_k, r_{k+1}, \dots, r_m))^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sum_{l_{k+1}=0}^{r_{k+1}-1} \dots \sum_{l_m=0}^{r_m-1} \left(\int_{2^{l_{k+1}-1}}^{2^{l_{k+1}}} \dots \int_{2^{l_m-1}}^{2^{l_m}} (x_{k+1} \dots x_m)^{p-2} \right. \\
&\quad \times \left| \int_{2^{-l_{k+1}-1}}^{2^{-l_{k+1}}} \dots \int_{2^{-l_m-1}}^{2^{-l_m}} f(\mathbf{t}) \right. \\
&\quad \times \left. e^{-i(t_{k+1}x_{k+1} + \dots + t_m x_m)} dt_{k+1} \dots dt_m \right|^p dx_{k+1} \dots dx_m \Big)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C(p, m) \sum_{l_{k+1}=0}^{r_{k+1}-1} \dots \sum_{l_m=0}^{r_m-1} f(t_1, \dots, t_k, 2^{-l_{k+1}-1}, \dots, 2^{-l_m-1}) \\
&\quad \times 2^{(r_{k+1} + \dots + r_m) \left(\frac{m-k-1}{m-k} - \frac{2(m-k)-1}{(m-k)p} \right)} 2^{-(l_{k+1} + \dots + l_m) \left(1 - \frac{1}{p} \right) \frac{m-k-1}{m-k}}.
\end{aligned}$$

Отсюда (см. (4)) получаем, что

$$F(t_1, \dots, t_k) \leq C(p, m) \sum_{r_{k+1}=1}^{\infty} \dots \sum_{r_m=1}^{\infty} 2^{(r_{k+1}+\dots+r_m)p\left(\frac{m-k-1}{m-k}\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{1}{p}\right)} \\ \times \left(\sum_{l_{k+1}=0}^{r_{k+1}-1} \dots \sum_{l_m=0}^{r_m-1} f(t_1, \dots, t_k, 2^{-l_{k+1}-1}, \dots, 2^{-l_m-1}) \right. \\ \left. \times 2^{-(l_{k+1}+\dots+l_m)\left(1-\frac{1}{p}\right)\frac{m-k-1}{m-k}} \right)^p.$$

Возьмем $\alpha > 0$ таким, чтобы $\alpha < \frac{2m-1}{m} \left(\frac{1}{p} - \frac{m-1}{2m-1} \right)$. Тогда поскольку при любом $0 \leq k < m$ имеем $\left(1 - \frac{1}{p} \right) \frac{m-k-1}{m-k} - \frac{1}{p} + \alpha < 0$, то

$$F(t_1, \dots, t_k) \leq C(p, m) \sum_{r_{k+1}=1}^{\infty} \dots \sum_{r_m=1}^{\infty} 2^{(r_{k+1}+\dots+r_m)p\left(\frac{m-k-1}{m-k}\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{1}{p}\right)} \\ \times \left(\sum_{l_{k+1}=0}^{r_{k+1}-1} \dots \sum_{l_m=0}^{r_m-1} f(t_1, \dots, t_k, 2^{-l_{k+1}-1}, \dots, 2^{-l_m-1}) \right. \\ \left. \times 2^{-(l_{k+1}+\dots+l_m)\left(\left(1-\frac{1}{p}\right)\frac{m-k-1}{m-k}+\alpha\right)} 2^{(l_{k+1}+\dots+l_m)\alpha} \right)^p \\ \leq C(p, m) \sum_{r_{k+1}=1}^{\infty} \dots \sum_{r_m=1}^{\infty} 2^{(r_{k+1}+\dots+r_m)p\left(\frac{m-k-1}{m-k}\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{1}{p}\right)} 2^{(r_{k+1}+\dots+r_m)p\alpha} \\ \times \sum_{l_{k+1}=0}^{r_{k+1}-1} \dots \sum_{l_m=0}^{r_m-1} \left(f(t_1, \dots, t_k, 2^{-l_{k+1}-1}, \dots, 2^{-l_m-1}) \right)^p \\ \times 2^{-(l_{k+1}+\dots+l_m)p\left(\left(1-\frac{1}{p}\right)\frac{m-k-1}{m-k}+\alpha\right)} \\ = C(p, m) \sum_{l_{k+1}=0}^{\infty} \dots \sum_{l_m=0}^{\infty} \left(f(t_1, \dots, t_k, 2^{-l_{k+1}-1}, \dots, 2^{-l_m-1}) \right)^p \\ \times 2^{-(l_{k+1}+\dots+l_m)p\left(\left(1-\frac{1}{p}\right)\frac{m-k-1}{m-k}+\alpha\right)} \\ \times \sum_{r_{k+1}=l_{k+1}+1}^{\infty} \dots \sum_{r_m=l_m+1}^{\infty} 2^{(r_{k+1}+\dots+r_m)p\left(\frac{m-k-1}{m-k}\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{1}{p}+\alpha\right)} \\ \leq C(p, m) \sum_{l_{k+1}=0}^{\infty} \dots \sum_{l_m=0}^{\infty} \left(f(t_1, \dots, t_k, 2^{-l_{k+1}-1}, \dots, 2^{-l_m-1}) \right)^p \\ \times 2^{-(l_{k+1}+\dots+l_m)p\left(\left(1-\frac{1}{p}\right)\frac{m-k-1}{m-k}+\alpha-\left(1-\frac{1}{p}\right)\frac{m-k-1}{m-k}+\frac{1}{p}-\alpha\right)} \\ = C(p, m) \sum_{l_{k+1}=0}^{\infty} \dots \sum_{l_m=0}^{\infty} \left(f(t_1, \dots, t_k, 2^{-l_{k+1}-1}, \dots, 2^{-l_m-1}) \right)^p 2^{-(l_{k+1}+\dots+l_m)}$$

$$\leq C(p, m) \int_{[0,1]^{m-k}} (f(t_1, \dots, t_k, t_{k+1}, \dots, t_m))^p dt_{k+1} \dots dt_m. \quad (5)$$

Поэтому (см. (3) и (5))

$$(Q_{p,B})^p \leq C(p, m) \int_{(\mathbf{0}, \mathbf{b})} (f(\mathbf{t}))^p d\mathbf{t},$$

откуда (см. (2))

$$Q_p(f) \leq C(p, m) \|f(\mathbf{x})\|_p, \quad (6)$$

что, как было отмечено выше, эквивалентно доказываемому предложению.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть выполнены условия предложения 1. Тогда справедлива оценка

$$J_{p,\gamma}(f) = \left(\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m \cap D_\gamma} |a_{\mathbf{n}}(f)|^p (\Pi(\mathbf{n}))^{p-2} \right)^{\frac{1}{p}} \leq C(p, m, l) \|f(\mathbf{x})\|_p.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Снова рассмотрим только $J_{p,\mathbf{0}}(f)$, поскольку оценки остальных величин проводятся точно так же. Отметим, что достаточно доказать, что если функция $f(\mathbf{x})$ принадлежит $L_p(T^m) \cap M(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \beta)$, где $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in T^m$ и $\beta \in \Gamma_m$, а $2 < p < 2 + \frac{1}{m-1}$, то

$$J_{p,\mathbf{0}}(f) \leq C(p, m) \|f(\mathbf{x})\|_p.$$

Для любого целочисленного вектора $\mathbf{n} \geq \mathbf{1}$ пусть $I_{\mathbf{n}} = [\mathbf{n}, \mathbf{n} + \mathbf{1}]$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} (2\pi)^m a_{\mathbf{n}}(f) &= \int_{(\mathbf{a}, \mathbf{b})} f(\mathbf{t}) e^{-i\mathbf{n}\mathbf{t}} d\mathbf{t} = \int_{(\mathbf{a}, \mathbf{b})} f(\mathbf{t}) \int_{I_{\mathbf{n}}} e^{-i\mathbf{t}\mathbf{u}} d\mathbf{u} \prod_{j=1}^m \frac{t_j e^{-i\frac{t_j}{2}}}{2 \sin \frac{t_j}{2}} d\mathbf{t} \\ &= \int_{I_{\mathbf{n}}} \left(\int_{(\mathbf{a}, \mathbf{b})} f(\mathbf{t}) \prod_{j=1}^m \left(\frac{t_j}{2 \operatorname{tg} \frac{t_j}{2}} + i \frac{t_j}{2} \right) e^{-i\mathbf{t}\mathbf{u}} d\mathbf{t} \right) d\mathbf{u} \\ &\equiv \int_{I_{\mathbf{n}}} \int_{(\mathbf{a}, \mathbf{b})} f(\mathbf{t}) \prod_{j=1}^m \psi(t_j) e^{-i\mathbf{t}\mathbf{u}} d\mathbf{t} d\mathbf{u}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} J_{p,\mathbf{0}}(f) &= \left(\sum_{\mathbf{n} \geq \mathbf{1}} (\Pi(\mathbf{n}))^{p-2} \left| \int_{I_{\mathbf{n}}} \int_{(\mathbf{a}, \mathbf{b})} f(\mathbf{t}) \prod_{j=1}^m \psi(t_j) e^{-i\mathbf{t}\mathbf{u}} d\mathbf{t} d\mathbf{u} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\sum_{\mathbf{n} \geq \mathbf{1}} (\Pi(\mathbf{n}))^{p-2} \int_{I_{\mathbf{n}}} \left| \int_{(\mathbf{a}, \mathbf{b})} f(\mathbf{t}) \prod_{j=1}^m \psi(t_j) e^{-i\mathbf{t}\mathbf{u}} d\mathbf{t} \right|^p d\mathbf{u} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\int_{[1,\infty)^m} (\Pi(\mathbf{u}))^{p-2} \left| \int_{(\mathbf{a}, \mathbf{b})} f(\mathbf{t}) \prod_{j=1}^m \psi(t_j) e^{-i\mathbf{t}\mathbf{u}} d\mathbf{t} \right|^p d\mathbf{u} \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (7) \end{aligned}$$

Теперь фиксируем некоторое натуральное N и для $r = 1, 2, \dots$ рассмотрим функции

$$\psi_r(\tau) = \sum_{k=1}^r \psi\left(-\pi + \frac{2\pi k}{r}\right) X_{\left[-\pi + \frac{2\pi(k-1)}{r}, -\pi + \frac{2\pi k}{r}\right)}(\tau).$$

Функция $\psi(\tau)$ непрерывна на $\overline{T}$. Поэтому функции $\psi_r(t_1)$ при $r \rightarrow \infty$ равномерно на T сходятся к функции $\psi(t_1)$ и ограничены в совокупности. Используя теорему Лебега о предельном переходе, преобразование Абеля и неравенство Минковского, получим

$$\begin{aligned} S_{p,0,N}(f, 1) &\equiv \left(\int_{[1,N]^m} (\Pi(\mathbf{u}))^{p-2} \left| \int_{(\mathbf{a}, \mathbf{b})} f(\mathbf{t}) \psi(t_1) e^{-i\mathbf{t}\mathbf{u}} d\mathbf{t} \right|^p d\mathbf{u} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\int_{[1,N]^m} (\Pi(\mathbf{u}))^{p-2} \left| \int_{(\mathbf{a}, \mathbf{b})} f(\mathbf{t}) \psi_r(t_1) e^{-i\mathbf{t}\mathbf{u}} d\mathbf{t} \right|^p d\mathbf{u} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\int_{[1,N]^m} (\Pi(\mathbf{u}))^{p-2} \left| \int_{(\mathbf{a}, \mathbf{b})} f(\mathbf{t}) \right. \right. \\ &\quad \times \left(\sum_{k=1}^{r-1} \left(\psi\left(-\pi + \frac{2\pi k}{r}\right) - \psi\left(-\pi + \frac{2\pi(k+1)}{r}\right) \right) \right. \\ &\quad \times \left. X_{\left[-\pi, -\pi + \frac{2\pi k}{r}\right)}(t_1) + \psi(\pi) X_{[-\pi, \pi)}(t_1) \right) e^{-i\mathbf{t}\mathbf{u}} d\mathbf{t} \left. \right|^p d\mathbf{u} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^{r-1} \left| \psi\left(-\pi + \frac{2\pi k}{r}\right) - \psi\left(-\pi + \frac{2\pi(k+1)}{r}\right) \right| + |\psi(\pi)| \right) \\ &\quad \times \sup_k \left(\int_{[1,N]^m} (\Pi(\mathbf{u}))^{p-2} \left| \int_{(\mathbf{a}, \mathbf{b})} f(\mathbf{t}) X_{\left[-\pi, -\pi + \frac{2\pi k}{r}\right)}(t_1) e^{-i\mathbf{t}\mathbf{u}} d\mathbf{t} \right|^p d\mathbf{u} \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Действительная часть функции $\psi(t_1)$ возрастает на $[-\pi, 0]$ и убывает на $[0, \pi]$, а мнимая часть этой функции монотонно возрастает на T . Поэтому

$$\sum_{k=1}^{r-1} \left| \psi\left(-\pi + \frac{2\pi k}{r}\right) - \psi\left(-\pi + \frac{2\pi(k+1)}{r}\right) \right| + |\psi(\pi)| \leq C. \quad (9)$$

Далее, при $k = 1, 2, \dots, r$ функция вида $f(\mathbf{t}) X_{\left[-\pi, -\pi + \frac{2\pi k}{r}\right)}(t_1)$ принадлежит $M(\mathbf{a}, \mathbf{d}, \beta)$, где $d_1 = \min(b_1, -\pi + \frac{2\pi k}{r})$ и $d_j = b_j$ при $j = 2, 3, \dots, m$. Тогда согласно предложению 1 имеем

$$\begin{aligned} &\left(\int_{[1,N]^m} (\Pi(\mathbf{u}))^{p-2} \left| \int_{(\mathbf{a}, \mathbf{b})} f(\mathbf{t}) X_{\left[-\pi, -\pi + \frac{2\pi k}{r}\right)}(t_1) e^{-i\mathbf{t}\mathbf{u}} d\mathbf{t} \right|^p d\mathbf{u} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C(p, m) \left\| f(\mathbf{x}) X_{\left[-\pi, -\pi + \frac{2\pi k}{r}\right)}(x_1) \right\|_p. \end{aligned}$$

Отсюда (см. (8) и (9))

$$S_{p, \mathbf{0}, N}(f, 1) \leq \sup_{k, r} C(p, m) \left\| f(\mathbf{x}) X_{[-\pi, -\pi + \frac{2\pi k}{r}]}(x_1) \right\|_p \leq C(p, m) \|f(\mathbf{x})\|_p.$$

В силу произвольности числа N отсюда вытекает

$$\left(\int_{[1, \infty)^m} (\Pi(\mathbf{u}))^{p-2} \left| \int_{(\mathbf{a}, \mathbf{b})} f(\mathbf{t}) \psi(t_1) e^{-i\mathbf{t}\mathbf{u}} d\mathbf{t} \right|^p d\mathbf{u} \right)^{\frac{1}{p}} \leq C(p, m) \|f(\mathbf{x})\|_p.$$

Далее, используя это неравенство и повторяя предыдущие рассуждения, получим

$$\left(\int_{[1, \infty)^m} (\Pi(\mathbf{u}))^{p-2} \left| \int_{(\mathbf{a}, \mathbf{b})} f(\mathbf{t}) \psi(t_1) \psi(t_2) e^{-i\mathbf{t}\mathbf{u}} d\mathbf{t} \right|^p d\mathbf{u} \right)^{\frac{1}{p}} \leq C(p, m) \|f(\mathbf{x})\|_p.$$

Применив последовательно этот метод для всех переменных и учитывая оценку (7), устанавливаем утверждение следствия.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы. Проведем его с помощью индукции по размерности пространства. Для $m = 1$ утверждение теоремы сразу вытекает из доказанного выше следствия (впрочем для $m = 1$ теорема была установлена автором в [6]). Предположим, что оценка теоремы уже установлена для размерности $m-1$, где $m \geq 2$. Установим требуемую оценку для функции $f(\mathbf{x}) \in L_p(T^m) \cap M(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \beta)$, где $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in T^m$ и $\beta \in \Gamma_m$. Отметим, что функция $m-1$ переменных

$$g(t_1, \dots, t_{m-1}) = \frac{1}{2\pi} \int_T f(t_1, \dots, t_{m-1}, t_m) dt_m$$

принадлежит $M((a_1, \dots, a_{m-1}), (b_1, \dots, b_{m-1}), (\gamma_1, \dots, \gamma_{m-1}))$ и $2 < p < 2 + \frac{1}{m-1} < 2 + \frac{1}{m-2}$, а потому по предположению индукции имеем

$$\begin{aligned} \left(\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m : n_m = 0} |a_{\mathbf{n}}(f)|^p (\Pi(\mathbf{n}))^{p-2} \right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^{m-1}} |a_{\mathbf{k}}(g)|^p (\Pi(\mathbf{k}))^{p-2} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C(p, m) \|g(\mathbf{x})\|_p \leq C(p, m) \|f(\mathbf{x})\|_p. \end{aligned}$$

Суммы по остальным координатным гиперплоскостям оцениваются точно так же, и, учитывая согласно следствию, что

$$\left(\sum_{n_1 \neq 0} \dots \sum_{n_m \neq 0} |a_{\mathbf{n}}(f)|^p (\Pi(\mathbf{n}))^{p-2} \right)^{\frac{1}{p}} \leq C(p, m) \|f(\mathbf{x})\|_p,$$

получаем утверждение теоремы.

Список литературы

1. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Т. 1. М.: Мир, 1965.
2. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.
3. *Moricz F.* On double cosine, sine and Walsh series with monotone coefficients // Proc. Amer. Math. Soc. 1990. V. 109. № 2. P. 417–425.
4. *Dyachenko M. I.* Multiple trigonometric series with lexicographically monotone coefficients // Anal. Math. 1990. V. 16. № 3. P. 173–190.
5. *Дьяченко М. И.* Нормы ядер Дирихле и некоторых других тригонометрических полиномов в пространствах L_p // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 3. С. 3–20.
6. *Дьяченко М. И.* Кусочно-монотонные функции многих переменных и теорема Харди–Литтлвуда // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1991. Т. 55. № 6. С. 1156–1170.
7. *Юдин В. А.* Поведение констант Лебега // Матем. заметки. 1975. Т. 17. № 3. С. 401–405.

Поступило в редакцию
12.XI.1996