Общероссийский математический портал

А. С. Кривошеев, Аналитическое продолжение функции из инвариантных подпространств в выпуклых областях комплексного пространства, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1998, том 62, выпуск 2, 75–102

DOI: <https://doi.org/10.4213/im174>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 15:08:38

УДК 517.55

А. С. Кривошеев

Аналитическое продолжение функции из инвариантных подпространств в выпуклых областях комплексного пространства

В работе приводятся условия для аналитического продолжения функций из инвариантных подпространств в выпуклых областях многомерного комплексного пространства. В случае одной переменной установлен критерий аналитического продолжения для гладких выпуклых областей.

Библиография: 26 наименований.

1. Введение. Вспомогательные сведения. Пусть D – выпуклая область в $\mathbb{C}^n$, $H(D)$ – пространство функций, аналитических в D , с топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах из D , $H^*(D)$ – сильно сопряженное к $H(D)$ пространство, называемое *пространством аналитических функционалов в D* . Согласно теореме Поля–Мартини–Эренпрайса (см., например, [1]) преобразование Лапласа аналитических функционалов $\nu \in H^*(D)$, задаваемое по формуле

$$\hat{\nu}(z) = (\nu, \exp\langle z, \eta \rangle),$$

устанавливает алгебраический и топологический изоморфизм между пространством $H^*(D)$ и пространством целых функций экспоненциального типа $\mathbf{P}_D$, которое представляет из себя индуктивный предел банаховых пространств:

$$\mathbf{P}_D = \lim_{m \rightarrow \infty} \text{ind } B_m,$$

$$B_m = \left\{ f \in H(\mathbb{C}^n) : \sup_{z \in \mathbb{C}^n} |f(z)| \exp[-H_{K_m}(z)] < \infty \right\}.$$

Здесь $\{K_m\}_{m=1}^\infty$ – последовательность выпуклых компактов из D такая, что $K_m \subset \text{int } K_{m+1}$ и $\bigcup_m K_m = D$. Мы используем следующие обозначения: $\langle z, y \rangle = z_1 y_1 + \dots + z_n y_n$, $\text{int } M$ – внутренность множества $M \subset \mathbb{C}^n$ и

$$H_M(z) = \sup_{y \in M} \text{Re} \langle z, y \rangle$$

– опорная функция M . Функция $H_M(z)$ является выпуклой, положительно однородной порядка один (т.е. $H_M(tz) = tH_M(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$, $t \geq 0$), полунепрерывной снизу и может принимать значения $+\infty$. Если M – ограниченное множество, то

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 96-01-00095).

$H_M(z)$ непрерывна в $\mathbb{C}^n$. Кроме того, если M – область, то ее можно задать при помощи опорной функции следующим образом (см. [23]):

$$M = \{z \in \mathbb{C}^n : \operatorname{Re}\langle z, \eta \rangle < H_M(\eta), \eta \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}\}. \quad (1)$$

Пусть $f(z)$ – целая функция экспоненциального типа, т.е. для некоторых положительных чисел A и B выполнено неравенство

$$|f(z)| \leq A \exp(B|z|), \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

Через $\mathfrak{L}^*(z, f)$ обозначим регуляризованный радиальный индикатор функции $f(z)$:

$$\mathfrak{L}^*(z, f) = \overline{\lim}_{y \rightarrow z} \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \ln |f(ty)|/t, \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

Функция $\mathfrak{L}^*(z, f)$ является плюрисубгармонической в $\mathbb{C}^n$ и положительно однородной порядка один (см. [1]).

Из определений пространства $\mathbf{P}_D$ и индуктивного предела следует, что для всякой функции $f \in \mathbf{P}_D$ найдется номер m такой, что выполнено неравенство

$$\mathfrak{L}^*(z, f) \leq H_{K_m}(z), \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

Поскольку K_m – компакт в D , то $H_{K_m}(z) < H_D(z)$, $z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. Следовательно, $\mathfrak{L}^*(z, f) < H_D(z)$, $z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, что в силу однородности функций эквивалентно неравенству $\mathfrak{L}^*(z, f) < H_D(z)$, $z \in \mathbf{S}$, где символ $\mathbf{S}$ здесь и в дальнейшем обозначает сферу единичного радиуса в $\mathbb{C}^n$ с центром в начале координат. Из теоремы Хартогса для семейств субгармонических функций и определения регуляризованного индикатора легко следует (см. [1]), что верно и обратное, т.е. если для некоторой целой функции $f(z)$ экспоненциального типа верно неравенство $\mathfrak{L}^*(z, f) < H_D(z)$, $z \in \mathbf{S}$, то f принадлежит пространству $\mathbf{P}_D$. Таким образом, последнее соотношение эквивалентно включению $f \in \mathbf{P}_D$.

Пусть $\mathbf{W}$ – нетривиальное ($\mathbf{W} \neq \{0\}$, $H(D)$) замкнутое подпространство в $H(D)$, инвариантное относительно дифференцирования, т.е. вместе с каждой функцией $\varphi(z)$ оно содержит также и функции $\partial\varphi/\partial z_i$, $i = 1, \dots, n$. Примером такого инвариантного подпространства может служить пространство решений системы однородных уравнений свертки [1]:

$$M_{\nu_j}[\varphi](z) = (\nu_j, \varphi(z + y)) \equiv 0, \quad \nu_j \in H^*(D), \quad j = 1, \dots, k.$$

Пусть $\operatorname{ort} \mathbf{W}$ – подпространство в $H^*(D)$, состоящее из функционалов, обращающихся в нуль на элементах из $\mathbf{W}$. Поскольку $H(D)$ является $\mathbf{FS}$ -пространством, то (см. [2]) имеет место изоморфизм $\mathbf{W}^* \sim H(D)/\operatorname{ort} \mathbf{W}$. Последний с учетом преобразования Лапласа индуцирует изоморфизм $\mathbf{W}^* \sim \mathbf{P}_D/\mathbf{I}$, где $\mathbf{I}$ – замкнутое подпространство в $\mathbf{P}_D$, состоящее из преобразований Лапласа аналитических функционалов подпространства $\operatorname{ort} \mathbf{W}$.

Пусть $\mathfrak{N} \subset \mathbb{C}^n$ и $k(z)$ – неотрицательная целочисленная функция в $\mathbb{C}^n$ такая, что $k(z) = 0$ для всех $z \notin \mathfrak{N}$. Предположим, что пара $(\mathfrak{N}, k(z))$ задает множество общих нулей функций из подпространства $\mathbf{I}$ и их кратность, т.е. выполнено следующее:

- 1) для любой функции $f \in \mathbf{I}$ имеем: $(\partial^{|\alpha|} f / \partial z^\alpha)(y) = 0$ при всех $y \in \mathfrak{N}$ и $0 \leq |\alpha| < k(y)$, где $|\alpha| = |\alpha_1| + \dots + |\alpha_n|$ и $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$;
- 2) для каждого $y \in \mathbb{C}^n$ существуют вектор $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ и функция $f \in \mathbf{I}$ такие, что $|\alpha| = k(y)$ и $(\partial^{|\alpha|} f / \partial z^\alpha)(y) \neq 0$.

Будем считать, что множество $\mathfrak{N}$ не пусто и, более того, система функций

$$\mathbf{E}(\mathfrak{N}, k(z)) = \{z^\alpha \exp\langle z, y \rangle : y \in \mathfrak{N}, 0 \leq |\alpha| < k(y)\}$$

(принадлежащая, как нетрудно видеть (см., например, [1]), пространству $\mathbf{W}$) полна в $\mathbf{W}$. В этом случае говорят, что пространство $\mathbf{W}$ допускает спектральный синтез (со спектром $(\mathfrak{N}, k(z))$). Необходимым и достаточным условием наличия спектрального синтеза в пространстве $\mathbf{W}$ является совпадение подпространства $\mathbf{I}$ со следующим множеством функций (см. [1]):

$$\mathbf{I}(D, \mathfrak{N}, k(z)) = \left\{ f \in \mathbf{P}_D : (\partial^{|\alpha|} f / \partial z^\alpha)(y) = 0, y \in \mathfrak{N}, 0 \leq |\alpha| < k(y) \right\}.$$

Примерами инвариантных подпространств, допускающих спектральный синтез, служат пространства решений однородных уравнений свертки в выпуклых областях из $\mathbb{C}^n$ (см. [3]–[5]). Другие примеры таких подпространств можно найти в работах [6] и [7].

Если $\mathbf{W}$ – инвариантное подпространство, допускающее спектральный синтез, то каждая функция из $\mathbf{W}$ является пределом последовательности экспоненциальных полиномов $\sum p_i(z) \exp\langle \lambda_i, z \rangle$. Известно, что в некоторых случаях функции, аналитические в выпуклой области и аппроксимирующиеся там экспоненциальными полиномами, продолжают, как аналитические функции, в более широкую выпуклую область. В связи с этим возникла задача аналитического продолжения функций из инвариантных подпространств, допускающих спектральный синтез. Первый результат такого рода был получен, по-видимому, в [8], где показано, что каждая функция, аналитическая в окрестности отрезка мнимой оси $[-i\tau\pi, i\tau\pi]$ и являющаяся решением однородного уравнения свертки $M_\nu[\varphi] = 0$ с характеристической функцией

$$\hat{\nu}(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - (\lambda/\lambda_k)^2), \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

где $k/\lambda_k \rightarrow \tau$, $0 \leq \tau < \infty$, аналитически продолжается на некоторую вертикальную полосу, содержащую этот отрезок. Этот результат послужил толчком к ряду исследований по проблеме продолжения решений однородных сверточных уравнений, проведенных в работах [9]–[12]. Эти исследования выявили некоторые закономерности. Было установлено, что выпуклая область, куда осуществляется продолжение, зависит от углового распределения нулей характеристической функции, а само продолжение возможно при условии наличия оценок снизу на характеристическую функцию. Наиболее общий результат в одномерном случае принадлежит И. Ф. Красичкову-Терновскому [13]. Он касается уже общих инвариантных подпространств. В частности, им было установлено следующее. Если множество $\mathbf{I}(D, \mathfrak{N}, k(z))$ содержит функцию вполне регулярного роста в $\mathbb{C}$, сопряженная диаграмма K (см. [14]) которой удовлетворяет условию $D = \Omega + K$, где Ω – некоторая выпуклая область в $\mathbb{C}$, то каждая функция из инвариантного подпространства

$\mathbf{W} \subset H(D + G)$ (G – произвольная выпуклая область в $\mathbb{C}$), допускающего спектральный синтез со спектром $\mathbf{E}(\mathfrak{N}, k(z))$, продолжается в выпуклую область

$$\Omega(D + G, \mathfrak{N}) = \{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} z\lambda < H_{D+G}(\lambda), \lambda \in \mathbf{V}(\mathfrak{N})\}.$$

Здесь и в дальнейшем $\mathbf{V}(\mathfrak{N})$ обозначает множество пределов сходящихся последовательностей $\{z_k/|z_k|\}$, где $\{z_k\} \subset \mathfrak{N}$ и $|z_k| \rightarrow \infty$. В этой же работе было показано, что $\Omega(D + G, \mathfrak{N})$ – максимальная выпуклая область, куда можно аналитически продолжить все функции из подпространства $\mathbf{W}$.

В многомерном пространстве первый результат по продолжению был получен К. О. Кизелманом [15]. Он показал, что каждое решение однородного уравнения свертки с характеристической функцией, являющейся полиномом, т.е. линейного однородного уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами, которое аналитично в выпуклой области $D \subset \mathbb{C}^n$, продолжается в область $\Omega(D, \mathfrak{N}(\dot{\nu}))$ (здесь $\mathfrak{N}(\dot{\nu})$ – нулевое множество характеристического полинома). Далее этот результат для различных классов уравнений свертки был развит в [16]–[18]. Наиболее общий результат по продолжению решений однородного уравнения свертки в случае многих переменных, принципиально обобщающий все соответствующие результаты из указанных выше работ (это же частично относится и к случаю одного переменного), был доказан в работе [19]. Здесь существенно уменьшено множество, где требуется наличие вполне регулярности роста характеристической функции оператора свертки. К тому же рассматривались произвольные выпуклые области $D \subset \mathbb{C}^n$, а не только те, которые представляются в виде суммы других выпуклых множеств (как в предыдущих работах). Отметим еще, что указанные результаты носят достаточный характер. Кроме того, они обеспечивают только продолжение в максимально возможную выпуклую область. Другими словами, не рассматривается случай, когда более слабые ограничения, недостаточные для продолжения в максимальную область, дают, однако, возможность продолжения в некоторую меньшую область.

В данной работе приводится результат, обобщающий соответствующий результат из [19] (и, следовательно, из всех других указанных работ) на случай произвольных инвариантных подпространств, допускающих спектральный синтез. При этом рассматриваются любые выпуклые области, содержащие исходную, а не только максимально возможная. Для многих переменных приводится критерий локального аналитического продолжения. В случае одной переменной доказываются достаточные условия продолжения, усиливающие результат из работы [13], и показывается, что они являются также и необходимыми при продолжении с гладких выпуклых областей из $\mathbb{C}$. Таким образом, для гладких выпуклых областей в комплексной плоскости найден критерий продолжения.

2. Аналитическое продолжение. Прежде всего докажем одно простое утверждение, сводящее проблему продолжения к эквивалентной задаче из теории целых функций. В том или ином виде это утверждение использовалось во всех указанных выше работах. Нам оно понадобится в самой общей форме.

ЛЕММА 1. Пусть D, G – выпуклые области в $\mathbb{C}^n$, $D \subset G$; $\mathbf{W} \subset H(D)$ – замкнутое инвариантное подпространство со спектром $\mathbf{E}(\mathfrak{N}, k(z))$, допускающее спектральный синтез. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) каждая функция из $\mathbf{W}$ аналитически продолжается в область G и аппроксимируется там линейными комбинациями элементов из $\mathbf{E}(\mathfrak{N}, k(z))$;
 2) для любой функции $F \in \mathbf{P}_G$ существует функция $f \in \mathbf{P}_D$ такая, что $F - f$ принадлежит подпространству $\mathbf{I}(G, \mathfrak{N}, k(z))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbf{W}_1$ – инвариантное подпространство в $H(G)$, являющееся замыканием линейной оболочки системы $\mathbf{E}(\mathfrak{N}, k(z))$ в топологии пространства $H(G)$. Тогда утверждение 1) эквивалентно тому, что оператор сужения $R: \mathbf{W}_1 \rightarrow \mathbf{W}$ сюръективен. Поскольку подпространство $\mathbf{W}$ допускает спектральный синтез, а функции из $\mathbf{E}(\mathfrak{N}, k(z))$ целые, то сюръективность оператора R равносильна замкнутости его образа. Последнее согласно теореме о сопряженном отображении для пространств Фреше (см. [20]) эквивалентно замкнутости образа сопряженного оператора $R^*: \mathbf{W}^* \rightarrow \mathbf{W}_1^*$. Далее, в силу теоремы единственности для аналитических функций отображение R инъективно. Поэтому из теоремы Хана–Банаха следует, что оператор R^* имеет плотный образ. Это означает, что необходимым и достаточным условиями замкнутости его образа является сюръективность R^* , или с учетом указанных выше изоморфизмов сюръективность следующего оператора, порожденного оператором R^* :

$$\tilde{R}^*: H^*(D)/\text{ort } \mathbf{W} \rightarrow H^*(G)/\text{ort } \mathbf{W}_1.$$

Из определения сопряженного отображения и оператора R вытекает, что $\tilde{R}^*$ сюръективен тогда и только тогда, когда для любого функционала $\mu \in H^*(G)$ найдется функционал $\nu \in H^*(D) \subset H^*(G)$ такой, что разность $\mu - \nu$ принадлежит подпространству $\text{ort } \mathbf{W}_1$. Последнее же, переписанное в терминах преобразования Лапласа (т.е. с заменой функционалов μ и ν их преобразованиями Лапласа, а пространств $H^*(D)$ и $H^*(G)$ пространствами $\mathbf{P}_D$ и $\mathbf{P}_G$), означает выполнение утверждения 2). Действительно, по построению подпространство $\mathbf{W}_1$ допускает спектральный синтез. Следовательно, как указывалось выше, совокупность преобразований Лапласа элементов подпространства $\text{ort } \mathbf{W}_1$ совпадает с множеством $\mathbf{I}(G, \mathfrak{N}, k(z))$. Лемма доказана.

Нашей задачей является теперь выяснение условий, при которых будет иметь место утверждение 2) доказанной леммы. Эти условия, как отмечалось во введении, связаны с понятием регулярности роста целой функции. Поэтому мы вначале напомним это понятие и то, что с ним связано. Для целой функции $f(z)$ экспоненциального типа через $\underline{\mathcal{L}}(z, f)$ обозначим нижний индикатор функции $f(z)$, т.е. (см. [21])

$$\underline{\mathcal{L}}(z, f) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow +\infty} (\sigma_n \delta^{2n})^{-1} \int_{\mathbf{B}(z, \delta)} \ln |f(ty)|/t \, d\sigma(y),$$

где σ_n – объем единичного шара в $\mathbb{C}^n$, $d\sigma$ – мера Лебега, $\mathbf{B}(z, \delta)$ – шар с центром в точке z радиуса $\delta > 0$. Вспоминая определение регуляризованного индикатора, нетрудно показать, что всегда выполнено неравенство

$$\underline{\mathcal{L}}(z, f) \leq \mathcal{L}^*(z, f), \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

Говорят [21], что функция $f(z)$ имеет вполне регулярный рост вдоль луча tz_0 , $t > 0$, если

$$\underline{\mathcal{L}}(z_0, f) = \mathcal{L}^*(z_0, f).$$

Эквивалентное и самое простое определение состоит в следующем [22]: существует последовательность $\{z_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}^n$ такая, что $|z_k| \rightarrow \infty$, $z_k/|z_k| \rightarrow z_0/|z_0|$, $|z_{k+1}|/|z_k| \rightarrow 1$ при $k \rightarrow \infty$ и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \ln |f(z_k)|/|z_k| = \mathfrak{L}^*(z_0, f)/|z_0|.$$

В случае одного переменного вполне регулярность роста равносильна тому, что (см. [14])

$$\lim_{t \notin E_{z_0}, t \rightarrow +\infty} \ln |f(tz_0)|/t = \mathfrak{L}^*(z_0, f),$$

где E_{z_0} – множество нулевой относительной меры, т.е.

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \text{mes}(E_{z_0} \cap [0, r])/r = 0.$$

Таким образом, в случае одной переменной указанную выше последовательность $\{z_k\}$ можно выбрать на луче tz_0 .

Нам понадобится еще следующий простой факт.

ЛЕММА 2. Пусть $h(\eta)$ – полунепрерывная снизу функция в $\mathbb{C}^n$ и $L \subset \mathbb{C}^n$ – компакт. Тогда множество

$$G = \{z \in \mathbb{C}^n : \text{Re}\langle z, \eta \rangle < h(\eta), \eta \in L\}$$

является выпуклой областью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если G – пустое множество, то утверждение тривиально. Пусть $G \neq \emptyset$. Поскольку G является пересечением полупространств, т.е. выпуклых множеств, то оно выпукло. Покажем, что G – открытое множество. Предположим противное. Тогда для некоторой точки $z \in G$ найдется последовательность $\{z_k\}$, сходящаяся к z , каждый член которой не принадлежит G . Согласно определению G для каждого $k \geq 1$ найдем $\eta_k \in L$ такое, что $\text{Re}\langle z_k, \eta_k \rangle \geq h(\eta_k)$. Поскольку L – компакт, то можно считать, что последовательность $\{\eta_k\}$ сходится к некоторой точке η из L . Тогда с учетом последнего неравенства и полунепрерывности снизу функции h получаем $\text{Re}\langle z, \eta \rangle \geq h(\eta)$. Это противоречит принадлежности точки z множеству G . Лемма доказана.

Пусть D – выпуклая область в $\mathbb{C}^n$. Положим

$$\mathbf{J}(D) = \{z \in \mathbb{C}^n : H_D(z) = +\infty\}.$$

Для функции $f \in \mathbf{P}_D$ введем множество

$$\mathbf{G}(D, f) = \{z \in \mathbb{C}^n : \text{Re}\langle z, \eta \rangle < H_D(\eta) - \mathfrak{L}^*(\eta, f), \eta \in \mathbf{S}\}.$$

Поскольку $H_D(\eta)$ полунепрерывна снизу, а $\mathfrak{L}^*(\eta, f)$ полунепрерывна сверху, то по лемме 2 множество $\mathbf{G}(D, f)$ является выпуклой областью. Она непуста, так как содержит начало координат. Действительно, как отмечалось выше, включение $f \in \mathbf{P}_D$ влечет за собой неравенство $H_D(\eta) - \mathfrak{L}^*(\eta, f) > 0 \quad \forall \eta \in \mathbf{S}$.

Теперь мы можем сформулировать результат для целых функций, описывающий условия выполнения утверждения 2) леммы 1 в одном частном случае. Этот результат лишь по форме отличается от теоремы 3.1 из работы [19].

ТЕОРЕМА 1. Пусть D, G – выпуклые области в $\mathbb{C}^n$, $f \in \mathbf{P}_D$, U – открытое множество на сфере $\mathbf{S}$, $U \neq \mathbf{S}$. Предположим, что выполнено следующее:

- 1) $H_D(\eta) \geq H_G(\eta)$, $\eta \in \mathbf{S} \setminus U$;
- 2) $\mathbf{V}(\mathfrak{N}(f)) \cap U = \emptyset$;
- 3) сужение функции $\underline{\mathfrak{L}}(z, f)$ на ∂U непрерывно на множестве $\partial U \setminus \mathbf{J}(G_0)$, где $G_0 = \mathbf{G}(D, f)$;
- 4) $\underline{\mathfrak{L}}(\eta, f) = H_D(\eta) - H_{G_0}(\eta)$, $\eta \in \partial U \setminus \mathbf{J}(G_0)$;
- 5) существуют $c_0 \in \mathbb{R}$ и окрестность ω множества $\partial U \setminus \text{int } \mathbf{J}(G_0)$ такие, что $\underline{\mathfrak{L}}(\eta, f) > c_0 \quad \forall \eta \in \partial U \cap \omega$.

Тогда для каждой функции $F \in \mathbf{P}_G$ существуют функции $\varphi \in \mathbf{P}_D$ и $\psi \in \mathbf{P}_{\mathbb{C}^n}$ такие, что

$$F(z) = f(z)\psi(z) + \varphi(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}^n.$$

Доказательство этой теоремы практически дословно повторяет доказательство теоремы 3.1 из работы [19]. Действительно, оба эти утверждения отличается только то, что вместо множества ∂U в теореме 3.1 используется множество $\partial \mathbf{V}(\mathfrak{N}(f))$ (если не считать того, что в теореме 3.1 рассматривается в некотором смысле несколько более общая ситуация: допускается, чтобы не сама функция $f(z)$ принадлежала пространству $\mathbf{P}_D$, а лишь какое-нибудь произведение $f(z) \exp\langle z, \eta \rangle$). Роль же множества $\mathbf{V}(\mathfrak{N}(f))$ в теореме 3.1 только та, что на его дополнении $\mathbf{S} \setminus \mathbf{V}(\mathfrak{N}(f))$ нет предельных точек для проекций на сферу $\mathbf{S}$ неограниченных последовательностей из нулевого множества функции $f(z)$. То же самое требование накладывается и на множество U (условие 2) в данной теореме).

ЗАМЕЧАНИЕ. Поскольку $\underline{\mathfrak{L}}(\eta, f) \leq \mathfrak{L}^*(\eta, f)$ для всех $\eta \in \mathbb{C}^n$, то в силу определения области $\mathbf{G}(D, f)$ равенство

$$\underline{\mathfrak{L}}(\eta_0, f) = H_D(\eta_0) - H_{G_0}(\eta_0)$$

равносильно системе из двух равенств:

- 1) $\underline{\mathfrak{L}}(\eta_0, f) = \mathfrak{L}^*(\eta_0, f)$, т.е. функция $f(z)$ имеет вполне регулярный рост вдоль луча $t\eta_0$;
- 2) $\mathfrak{L}^*(\eta_0, f) = H_D(\eta_0) - H_{G_0}(\eta_0)$; это равенство наиболее наглядно можно пояснить в случае, когда $\mathfrak{L}^*(z, f)$ – выпуклая функция, т.е. является опорной функцией некоторого выпуклого компакта $K \subset D$ (это всегда так в случае одной переменной); тогда оно означает, что некоторый сдвиг компакта K , оставаясь в пределах замыкания области $\overline{D}$, касается границы ∂D в некоторой точке z_0 , через которую проходит опорная гиперплоскость к D в направлении η_0 , т.е. гиперплоскость, задаваемая уравнением $\text{Re}\langle z, \eta_0 \rangle = H_D(\eta_0)$.

Теперь мы можем сформулировать и доказать основной результат по продолжению функций из инвариантных подпространств для случая многих переменных. Пусть D и G – выпуклые области в $\mathbb{C}^n$. Введем множество

$$\mathfrak{I}(D, G) = \{\eta \in \mathbf{S} : H_D(\eta) < H_G(\eta)\}.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть D, G – выпуклые области в $\mathbb{C}^n$ и $D \subset G$; $\mathfrak{I}(D, G)$ – открытое (в топологии сферы $\mathbf{S}$) собственное подмножество $\mathbf{S}$; $\mathbf{W}$ – замкнутое инвариантное подпространство в $H(D)$ со спектром $\mathbf{E}(\mathfrak{N}, k(z))$, допускающее спектральный синтез; $\{U_k\}$ – разбиение множества $\mathfrak{I}(D, G)$ на открытые попарно непересекающиеся подмножества. Предположим, что для каждого номера k существуют открытое подмножество U'_k сферы $\mathbf{S}$, содержащее U_k , и функция $f_k \in \mathbf{I}(D, \mathfrak{N}, k(z))$ такие, что выполнено следующее:

- 1) $\partial U'_k \subset \mathbf{S} \setminus \mathfrak{I}(D, G)$;
- 2) $\mathbf{V}(\mathfrak{N}(f_k)) \cap U'_k = \emptyset$;
- 3) сужение функции $\underline{\mathfrak{L}}(z, f_k)$ на $\partial U'_k$ непрерывно на множестве $\partial U'_k \setminus \mathbf{J}(G_k)$, где $G_k = \mathbf{G}(D, f_k)$;
- 4) $\underline{\mathfrak{L}}(\eta, f_k) = H_D(\eta) - H_{G_k}(\eta) \quad \forall \eta \in \partial U'_k \setminus \mathbf{J}(G_k)$;
- 5) существуют вещественные постоянные c_k и окрестность ω_k множества $\partial U'_k \setminus \text{int } \mathbf{J}(G_k)$ такие, что

$$\underline{\mathfrak{L}}(\eta, f_k) > c_k \quad \forall \eta \in \partial U'_k \cap \omega_k.$$

Тогда каждая функция из $\mathbf{W}$ аналитически продолжается в область G и аппроксимируется там равномерно на компактах линейными комбинациями элементов из системы $\mathbf{E}(\mathfrak{N}, k(z))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 1 достаточно доказать, что для каждой функции $F \in \mathbf{P}_G$ существует функция $f \in \mathbf{P}_D$, удовлетворяющая условию $(F - f) \in \mathbf{I}(G, \mathfrak{N}, k(z))$.

Пусть $F \in \mathbf{P}_G$. Тогда, как отмечалось во введении, в области G найдется выпуклый компакт K такой, что

$$\mathfrak{L}^*(\eta, F) \leq H_K(\eta) \quad \forall \eta \in \mathbb{C}^n. \quad (2)$$

Тогда с учетом определения множества $\mathfrak{I}(D, G)$ и включения $K \subset G$ получаем соотношения

$$H_K(\eta) < H_G(\eta) = H_D(\eta) \quad \forall \eta \in \mathbf{S} \setminus \mathfrak{I}(D, G).$$

В силу непрерывности функции $H_K(\eta)$ и полунепрерывности снизу функции $H_D(\eta)$ найдется окрестность ω' множества $\mathbf{S} \setminus \mathfrak{I}(D, G)$ такая, что верно неравенство

$$H_K(\eta) < H_D(\eta) \quad \forall \eta \in \omega'. \quad (3)$$

Поскольку $\mathbf{S} \setminus \omega'$ – компакт и система множеств $\{U_k\}$ покрывает его, то из последней можно выделить конечное подпокрытие. Без ограничения общности можно считать, что это подпокрытие осуществляют множества $U_1, \dots, U_m$. Кроме них никакое другое U_k не имеет общих точек с $\mathbf{S} \setminus \omega'$, так как множества U_k , $k \geq 1$, попарно не пересекаются. Для каждого $i = 1, \dots, m$ определим множество

$$D_i = \left\{ z \in \mathbb{C}^n : \text{Re}\langle z, \eta \rangle < H_D(\eta), \quad \eta \in \mathbf{S} \setminus \bigcup_{k=1}^i U_k \right\}. \quad (4)$$

По лемме 2 D_i является выпуклой областью. Из самого определения с учетом (1) следуют включения $D \subseteq D_1 \subseteq \dots \subseteq D_m$. Последнее эквивалентно следующим неравенствам (см. [23]):

$$H_D(\eta) \leq H_{D_1}(\eta) \leq \dots \leq H_{D_m}(\eta) \quad \forall \eta \in \mathbf{S}. \quad (5)$$

С другой стороны, из (4) очевидным образом следуют также неравенства

$$H_{D_i}(\eta) = \sup_{z \in D_i} \operatorname{Re}\langle z, \eta \rangle \leq H_D(\eta) \quad \forall \eta \in \mathbf{S} \setminus \bigcup_{k=1}^i U_k. \quad (6)$$

Так как множества $U_1, \dots, U_m$ покрывают $\mathbf{S} \setminus \omega'$, то для дополнений верно обратное включение: $\mathbf{S} \setminus [\bigcup_{k=1}^m U_k] \subset \omega'$. Поэтому из определения области D_m с учетом (3) и определения опорной функции следует, что компакт K лежит в D_m , т.е. $H_K(\eta) < H_{D_m}(\eta) \quad \forall \eta \in \mathbf{S}$. Тогда неравенство (2), как отмечено во введении, означает, что функция F принадлежит пространству $\mathbf{P}_{D_m}$. Отметим еще, что по условию $f_m \in \mathbf{P}_D$, т.е. $\mathcal{L}^*(\eta, f_m) < H_D(\eta) \quad \forall \eta \in \mathbf{S}$. Отсюда и из (5) следует, что $f_m \in \mathbf{P}_{D_{m-1}}$.

Покажем теперь, что для областей D_{m-1} , D_m , функции f_m и множества U'_m выполнены все условия теоремы 1. Во-первых, мы должны доказать, что верно неравенство

$$H_{D_{m-1}}(\eta) \geq H_{D_m}(\eta) \quad \forall \eta \in \mathbf{S} \setminus U'_m. \quad (7)$$

Предположим противное, т.е. для некоторого $\xi \in \mathbf{S} \setminus U'_m$

$$H_{D_{m-1}}(\xi) < H_{D_m}(\xi). \quad (8)$$

Тогда по определению опорной функции в области D_m найдется точка z такая, что $H_{D_{m-1}}(\xi) < \operatorname{Re}\langle z, \xi \rangle$. Это означает, что z не принадлежит области D_{m-1} . Таким образом, $z \in D_m$ и $z \notin D_{m-1}$. Согласно определению областей D_m и D_{m-1} последнее влечет за собой существование такого $\xi' \in U_m$, для которого $\operatorname{Re}\langle z, \xi' \rangle \geq H_D(\xi')$. Так как U_m не имеет общих точек с U_k , $k = 1, \dots, m-1$, то отсюда с учетом (6) получаем

$$\operatorname{Re}\langle z, \xi' \rangle \geq H_{D_{m-1}}(\xi').$$

Это вместе с (8) и выпуклостью опорной функции дает нам неравенство

$$H_{D_{m-1}}(\tau\xi + (1-\tau)\xi') < \operatorname{Re}\langle z, \tau\xi + (1-\tau)\xi' \rangle \quad \forall \tau \in (0, 1]. \quad (9)$$

С другой стороны, поскольку $\xi \notin U_m$ (это следует из того, что $\xi \in \mathbf{S} \setminus U'_m$, и по условию $U_m \subset U'_m$) и $\xi' \in U_m$, а множества U_k открыты и попарно не пересекаются, то на полуинтервале $[\xi, \xi']$ найдется точка ξ_0 такая, что $\xi_0/|\xi_0| \in \mathbf{S} \setminus \mathcal{I}(D, G)$. Из (5) и (6) находим, что

$$H_{D_m}(\eta) = H_{D_{m-1}}(\eta) = H_D(\eta) \quad \forall \eta \in \mathbf{S} \setminus \mathcal{I}(D, G). \quad (10)$$

Это противоречит (9), так как $z \in D_m$, т.е. $\operatorname{Re}\langle z, \xi_0 \rangle < H_{D_m}(\xi_0)$. Следовательно, неравенство (7) имеет место.

Условие 2) данной теоремы дает нам условие 2) теоремы 1.

Для проверки условий 3) и 5) теоремы 1 с учетом условий 3) и 5) данной теоремы достаточно показать, что $\mathbf{J}(G_m) \subset \mathbf{J}(G'_m)$, где $G'_m = \mathbf{G}(D_{m-1}, f_m)$. А это следует из вложения областей $G_m \subset G'_m$, что выполнено в силу их определения и соотношений (5).

Остается показать равенство

$$\underline{\mathfrak{L}}(\eta, f_m) = H_{D_{m-1}}(\eta) - H_{G'_m}(\eta) \quad \forall \eta \in \partial U'_m \setminus \mathbf{J}(G'_m). \quad (11)$$

Так как $\mathbf{J}(G_m) \subset \mathbf{J}(G'_m)$, то в силу (10) и условий 1) и 4) это равенство будет выполнено с заменой $H_{G'_m}(\eta)$ на $H_{G_m}(\eta)$. Но $G_m \subset G'_m$, т.е. $H_{G_m}(\eta) \leq H_{G'_m}(\eta) \quad \forall \eta \in \mathbb{C}^n$. Поэтому мы имеем

$$\underline{\mathfrak{L}}^*(\eta, f_m) \geq H_{D_{m-1}}(\eta) - H_{G'_m}(\eta) \quad \forall \eta \in \partial U'_m \setminus \mathbf{J}(G'_m).$$

С другой стороны, из определения опорной функции и области $G'_m = \mathbf{G}(D_{m-1}, f_m)$ легко следует неравенство

$$\underline{\mathfrak{L}}(\eta, f_m) \leq H_{D_{m-1}}(\eta) - H_{G'_m}(\eta) \quad \forall \eta \in \mathbf{S}.$$

Вместе с предыдущим это дает нам (11).

Таким образом, для областей D_{m-1}, D_m , функции $f_m \in \mathbf{P}_{D_{m-1}}$ и открытого на $\mathbf{S}$ множества U'_m выполнены все условия теоремы 1. Тогда согласно этой теореме для функции $F \in \mathbf{P}_{D_m}$ найдутся функции $F_m \in \mathbf{P}_{D_{m-1}}$ и $\psi_m \in \mathbf{P}_{\mathbb{C}^n}$ такие, что

$$F(z) = F_m(z) + f_m(z)\psi_m(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}^n.$$

Точно так же проверяется, что все условия теоремы 1 выполняются для областей D_{m-2}, D_{m-1} , функции $f_{m-1} \in \mathbf{P}_D \subset \mathbf{P}_{D_{m-2}}$ и открытого множества $U'_{m-1} \subset \mathbf{S}$. Следовательно, найдутся функции $F_{m-1} \in \mathbf{P}_{D_{m-2}}$ и $\psi_{m-1} \in \mathbf{P}_{\mathbb{C}^n}$ такие, что

$$F_m(z) = F_{m-1}(z) + f_{m-1}(z)\psi_{m-1}(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}^n.$$

Повторяя эту процедуру еще $m - 2$ раз, мы построим функции $F_i \in \mathbf{P}_{D_{i-1}}$ и $\psi_i \in \mathbf{P}_{\mathbb{C}^n}$, $i = 1, \dots, m$, где $D_0 = D$, которые удовлетворяют равенству

$$F(z) = \sum_{i=1}^m f_i(z)\psi_i(z) + F_1(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}^n.$$

Так как $f_i \in \mathbf{I}(D, \mathfrak{N}, k(z))$, то очевидно, что функция $F - F_1$ обращается в нуль на множестве $\mathfrak{N}$ с кратностью $k(z)$. Кроме того, $F \in \mathbf{P}_G$ и $F_1 \in \mathbf{P}_D$. Следовательно, $(F - F_1) \in \mathbf{I}(G, \mathfrak{N}, k(z))$. Таким образом, в качестве требуемой функции f можно взять F_1 . Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Опорная функция выпуклой области $D \subset \mathbb{C}^n$ непрерывна во внутренности множества $\mathbf{S} \setminus \mathbf{J}(D)$ (см. [23]). Из определения области $G' = \mathbf{G}(D, f)$ следует, что для всякой функции $f \in \mathbf{P}_D$ выполнено включение $\text{int}(\mathbf{S} \setminus \mathbf{J}(D)) \subset \text{int}(\mathbf{S} \setminus \mathbf{J}(G'))$. Предположим, что в теореме 2 для некоторого k множество $\partial U'_k$ лежит в $\text{int}(\mathbf{S} \setminus \mathbf{J}(D))$ (например, D ограничена). Тогда для этого k выполнение условия 4) влечет за собой непрерывность функции $\underline{g}(z, f_k)$ на компакте $\partial U'_k$ и ее ограниченность на нем. Следовательно, в этом случае выполнение условия 4) означает, что условия 3) и 5) выполнены автоматически. Основными же в теореме 2 являются условия 1), 2) и 4). Мы не знаем, будут ли эти условия необходимыми для аналитического продолжения в общем случае. Однако мы можем доказать, что для одного из классов выпуклых областей они дают критерий локального продолжения.

Напомним (см. [24]), что граничная точка z выпуклой области D называется *выступающей*, если существует вещественная гиперплоскость, опорная к D , которая проходит через z и не содержит других точек замыкания $\bar{D}$. Говорят также, что точка z *гладкая*, если через нее проходит только одна вещественная гиперплоскость, опорная к D . Отметим еще, что через каждую граничную точку выпуклой области D проходит хотя бы одна вещественная опорная гиперплоскость [23].

Пусть $\eta(z) \in \mathbf{S}$ обозначает направляющий вектор опорной к D гиперплоскости, проходящей через гладкую точку $z \in \partial D$. Аналитически это можно записать следующим образом:

$$H_D(\eta(z)) = \text{Re}\langle z, \eta(z) \rangle.$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть D – выпуклая область в $\mathbb{C}^n$, z_0 – гладкая выступающая точка границы ∂D , $\mathbf{W}$ – замкнутое инвариантное подпространство в $H(D)$ со спектром $\mathbf{E}(\mathfrak{N}, k(z))$, допускающее спектральный синтез. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) все функции из $\mathbf{W}$ аналитически продолжаются в некоторую фиксированную окрестность ω точки z_0 и аппроксимируются в $D \cup \omega$ линейными комбинациями элементов из $\mathbf{E}(\mathfrak{N}, k(z))$;
- 2) существуют окрестность (на $\mathbf{S}$) U точки $\eta(z_0)$ и функция $f \in \mathbf{I}(D, \mathfrak{N}, k(z))$ такие, что $\mathbf{V}(\mathfrak{N}(f)) \cap U = \emptyset$ и

$$\underline{g}(\eta, f) = H_D(\eta) - H_{G_0}(\eta), \quad \eta \in \bar{U}, \quad (12)$$

где $G_0 = \mathbf{G}(D, f)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 2) $\rightarrow$ 1). В силу равенства (12) множество $\bar{U}$ лежит в $\mathbf{S} \setminus \mathbf{J}(D)$. Поэтому, уменьшая при необходимости окрестность U , можно считать, что $\bar{U} \subset \text{int}(\mathbf{S} \setminus \mathbf{J}(D))$. Рассмотрим множество

$$G = \{z \in \mathbb{C}^n : \text{Re}\langle z, \eta \rangle < H_D(\eta), \eta \in \mathbf{S} \setminus U\}.$$

По лемме 2 оно является выпуклой областью. Из (1) следует, что G содержит область D . Покажем, что каждая функция из $\mathbf{W}$ аналитически продолжается в область G и аппроксимируется там линейными комбинациями элементов из $\mathbf{E}(\mathfrak{N}, k(z))$. Как и в предыдущей теореме, достаточно показать, что для

областей D , G , функции f и множества U выполнены условия теоремы 1. Согласно определениям G и ее опорной функции верно неравенство

$$H_G(\eta) = \sup_{z \in G} \operatorname{Re}\langle z, \eta \rangle \leq H_D(\eta) \quad \forall \eta \in \mathbf{S} \setminus U.$$

Это дает нам условие 1) теоремы 1. Выполнение условий 2) и 4) требуется в утверждении 2) нашей теоремы. Условия же 3) и 5), как было отмечено в последнем замечании, в нашем случае выполнены автоматически вслед за равенством (12).

Для завершения первой части доказательства нам остается показать, что $z_0 \in G$. Предположим противное. Тогда согласно определению области G существует $\eta_0 \in \mathbf{S} \setminus U$ такое, что

$$\operatorname{Re}\langle z_0, \eta_0 \rangle \geq H_D(\eta_0).$$

С другой стороны, точка z_0 лежит в замыкании области D . Поэтому (см. [23]) верно и обратное к этому неравенство. Таким образом, мы имеем $\operatorname{Re}\langle z_0, \eta_0 \rangle = H_D(\eta_0)$. Это равенство означает, что точка z_0 лежит на опорной к D гиперплоскости, задаваемой уравнением $\operatorname{Re}\langle z, \eta_0 \rangle = H_D(\eta_0)$. По условию через точку z_0 проходит только одна вещественная опорная гиперплоскость к D с направляющим вектором $\eta(z_0)$. Следовательно, точки η_0 и $\eta(z_0)$ обязаны совпадать. Однако это невозможно, так как $\eta_0 \notin U$, а $\eta(z_0) \in U$.

1) $\rightarrow$ 2). Чтобы иметь возможность применить лемму 1 в нашей ситуации, мы должны вначале доказать, что при условии выполнения утверждения 1) продолжение будет осуществляться в некоторую выпуклую область, большую, чем D . Другими словами, мы должны доказать, что объединение $D \cup \omega$ содержит выпуклую область, которая больше D . Это, конечно, далеко не всегда верно, но при наших предположениях относительно точки z_0 будет иметь место. Пусть G_k обозначает выпуклую область, являющуюся выпуклой оболочкой объединения области D и шара $\mathbf{B}(z_0, 1/k)$, $k = 1, 2, \dots$. Покажем, что для некоторого номера k область G_k принадлежит множеству $D \cup \omega$.

Предположим, что это неверно. Тогда для каждого $k \geq 1$ существует точка $y_k \in G_k$, которая не принадлежит $D \cup \omega$. Это означает, что для каждого $k \geq 1$ найдется $\eta_k \in \mathbf{S}$, удовлетворяющее неравенству

$$\operatorname{Re}\langle y_k, \eta_k \rangle \geq H_D(\eta_k). \quad (13)$$

Так как G_k является выпуклой оболочкой объединения двух множеств, то ее опорная функция равна максимуму опорных функций этих множеств (см. [23]), т.е.

$$H_{G_k}(\eta) = \max \{ H_D(\eta), \operatorname{Re}\langle z_0, \eta \rangle + |\eta|/k \}, \quad (14)$$

где вторая функция в скобках представляет из себя опорную функцию шара $\mathbf{B}(z_0, 1/k)$. Точка y_k лежит в области G_k . Поэтому

$$\operatorname{Re}\langle y_k, \eta \rangle < H_{G_k}(\eta) \quad \forall \eta \in \mathbf{S}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Отсюда с учетом (13) следует, что

$$\operatorname{Re}\langle y_k, \eta_k \rangle < \operatorname{Re}\langle z_0, \eta_k \rangle + |\eta_k|/k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (15)$$

В силу этого неравенства и определения опорной функции для каждого $k \geq 1$ в шаре $\mathbf{B}(z_0, 1/k)$ найдется точка x_k такая, что

$$\operatorname{Re}\langle x_k, \eta_k \rangle > \operatorname{Re}\langle y_k, \eta_k \rangle.$$

С учетом (13) получаем отсюда, что

$$\operatorname{Re}\langle \tau x_k + (1 - \tau)y_k, \eta_k \rangle \geq H_D(\eta_k), \quad k \geq 1, \quad \forall \tau \in [0, 1]. \quad (16)$$

Так как y_k не принадлежит окрестности ω точки z_0 , то расстояния $|y_k - z_0|$ равномерно ограничены снизу положительной величиной. Точка же x_k лежит в шаре $\mathbf{B}(z_0, 1/k)$, т.е. $|x_k - z_0| < 1/k$. Поэтому на отрезке $[x_k, y_k]$ можно выбрать точку z_k , $k = 1, 2, \dots$, так, чтобы последовательность $\{z_k\}_{k=1}^\infty$ была ограничена и для некоторого $r > 0$ и каждого $k \geq 1$ выполнялось неравенство $|z_k - z_0| \geq r$. Переходя к подпоследовательностям, можно считать, что $\{z_k\}$ и $\{\eta_k\}$ сходятся соответственно к z' и η_0 . Поскольку $x_k \in \mathbf{B}(z_0, 1/k) \subset G_k$ и $y_k \in G_k$, то в силу выпуклости области G_k весь отрезок $[x_k, y_k]$, а вместе с ним и точка z_k лежат в ней. Следовательно, $\operatorname{Re}\langle z_k, \eta \rangle < H_{G_k}(\eta) \quad \forall \eta \in \mathbf{S}$. Отсюда и из (14) в пределе при $k \rightarrow \infty$ получаем

$$\operatorname{Re}\langle z', \eta \rangle \leq \max \{H_D(\eta), \operatorname{Re}\langle z_0, \eta \rangle\} \quad \forall \eta \in \mathbf{S}.$$

Вспомним теперь, что точка z_0 лежит на границе области D . Поэтому для нее выполнено неравенство (см. [23])

$$\operatorname{Re}\langle z_0, \eta \rangle \leq H_D(\eta) \quad \forall \eta \in \mathbf{S}. \quad (17)$$

Таким образом, мы имеем

$$\operatorname{Re}\langle z', \eta \rangle \leq H_D(\eta) \quad \forall \eta \in \mathbf{S}. \quad (18)$$

Так как $z_k \in [x_k, y_k]$, то из (16) с учетом полунепрерывности снизу функции $H_D(\eta)$ при $k \rightarrow \infty$ получаем $\operatorname{Re}\langle z', \eta_0 \rangle \geq H_D(\eta_0)$.

Два последних соотношения дают нам равенство

$$\operatorname{Re}\langle z', \eta_0 \rangle = H_D(\eta_0). \quad (19)$$

Пусть $\tau_k \in [0, 1]$ таково, что $z_k = \tau_k x_k + (1 - \tau_k)y_k$. Поскольку $x_k \in \mathbf{B}(z_0, 1/k)$, то

$$\operatorname{Re}\langle x_k, \eta \rangle < \operatorname{Re}\langle z_0, \eta \rangle + |\eta|/k \quad \forall \eta \in S, \quad k \geq 1.$$

Отсюда с учетом (15) имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\langle z_k, \eta_k \rangle &= \tau_k \operatorname{Re}\langle x_k, \eta_k \rangle + (1 - \tau_k) \operatorname{Re}\langle y_k, \eta_k \rangle \\ &\leq \operatorname{Re}\langle z_0, \eta_k \rangle + |\eta_k|/k, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Тогда в пределе при $k \rightarrow \infty$ получаем $\operatorname{Re}\langle z', \eta_0 \rangle \leq \operatorname{Re}\langle z_0, \eta_0 \rangle$. Это вместе с (17) и (19) дает нам равенство

$$\operatorname{Re}\langle z', \eta_0 \rangle = \operatorname{Re}\langle z_0, \eta_0 \rangle = H_D(\eta_0).$$

Последнее означает, что точки z' и z_0 лежат на одной опорной к области D гиперплоскости, задаваемой уравнением $\operatorname{Re}\langle z, \eta_0 \rangle = H_D(\eta_0)$ (см. [23]). Поскольку z_0 – гладкая точка, то η_0 обязана совпадать с $\eta(z_0)$. С другой стороны, z_0 – выступающая точка, а гиперплоскость $\operatorname{Re}\langle z, \eta(z_0) \rangle = H_D(\eta(z_0))$ – единственная опорная к D гиперплоскость, проходящая через z_0 . Следовательно, эта гиперплоскость не может содержать других, отличных от z_0 , точек замыкания $\overline{D}$. В силу же неравенства (18) точка z' лежит в $\overline{D}$ (см. [23]). Поэтому z' должна совпадать с z_0 , что противоречит выбору последовательности $\{z_k\}$.

Таким образом, мы доказали, что для некоторого номера k область G_k лежит в $D \cup \omega$. Тогда по утверждению 1) все функции из $\mathbf{W}$ аналитически продолжаются в выпуклую область G_k и аппроксимируются там линейными комбинациями элементов из $\mathbf{E}(\mathfrak{N}, k(z))$. Отсюда по лемме 1 находим, что для каждой функции $F \in \mathbf{P}_{G_k}$ найдется $\varphi \in \mathbf{P}_D$ такая, что $(F - \varphi) \in \mathbf{I}(G_k, \mathfrak{N}, k(z))$. В частности, такая φ найдется и для функции $\exp\langle z_0, \eta \rangle \in \mathbf{P}_{G_k}$, т.е. имеет место представление

$$\exp\langle z_0, \eta \rangle = \psi(\eta) + \varphi(\eta), \quad \eta \in \mathbb{C}^n, \quad (20)$$

где ψ – некоторая функция из $\mathbf{I}(G_k, \mathfrak{N}, k(z))$. Так как $\varphi \in \mathbf{P}_D$, то, как отмечено во введении, в области D существует выпуклый компакт K такой, что для некоторого $c > 0$ выполнено соотношение

$$|\varphi(\eta)| \leq c \exp H_K(\eta) \quad \forall \eta \in \mathbb{C}^n. \quad (21)$$

Согласно определению точки $\eta(z_0)$ имеем

$$H_D(\eta(z_0)) = \operatorname{Re}\langle z_0, \eta(z_0) \rangle > H_K(\eta(z_0)).$$

Следовательно, по непрерывности мы можем выбрать $\alpha > 0$ и $\delta > 0$, удовлетворяющие неравенству

$$H_K(\eta) \leq \operatorname{Re}\langle z_0, \eta \rangle - \alpha \quad \forall \eta \in U(\delta), \quad (22)$$

где $U(\delta) = \mathbf{B}(\eta(z_0), \delta) \cap \mathbf{S}$. В силу однородности $H_K(\eta)$ и соотношений (20)–(22) существует $T > 0$ такое, что

$$\begin{aligned} |\psi(\eta)| &\geq |\exp\langle z_0, \eta \rangle| - |\varphi(\eta)| \geq 2^{-1} \exp \operatorname{Re}\langle z_0, \eta \rangle \\ \forall \eta &= t\xi; \quad \xi \in U(\delta), \quad t \geq T. \end{aligned} \quad (23)$$

Отсюда с учетом определения функции $\underline{\mathcal{L}}(\eta, \psi)$ следует оценка

$$\underline{\mathcal{L}}(\eta, \psi) \geq \operatorname{Re}\langle z_0, \eta \rangle \quad \forall \eta \in \overline{U(\delta/2)}.$$

С другой стороны, согласно (20) и (21) верно неравенство

$$|\psi(\eta)| \leq 2 \max\{\exp \operatorname{Re}\langle z_0, \eta \rangle; c \exp H_K(\eta)\} \quad \forall \eta \in \mathbb{C}^n. \quad (24)$$

Отсюда с учетом (22) и определения функции $\mathcal{L}^*(\eta, \psi)$ получаем

$$\mathcal{L}^*(\eta, \psi) \leq \operatorname{Re}\langle z_0, \eta \rangle \quad \forall \eta \in U(\delta).$$

Таким образом, так как $\underline{\mathcal{L}}(\eta, \psi) \leq \mathcal{L}^*(\eta, \psi) \quad \forall \eta \in \mathbb{C}^n$, то имеет место равенство

$$\operatorname{Re}\langle z_0, \eta \rangle = \underline{\mathcal{L}}(\eta, \psi) = \mathcal{L}^*(\eta, \psi) \quad \forall \eta \in \overline{U(\delta/2)}. \quad (25)$$

Пусть K_1 – выпуклый компакт, являющийся выпуклой оболочкой объединения компакта K и точки z_0 . По построению компакт K_1 лежит в замыкании $\overline{D}$ и касается границы ∂D лишь в одной точке z_0 . Так как $K \subset D$, то найдется $\varepsilon > 0$ такое, что множество $K + \mathbf{B}(0, \varepsilon)$ компактно принадлежит области D . Выберем точку y из шара $\mathbf{B}(0, \varepsilon)$ так, что $z_0 + y \in D$ (это можно сделать, поскольку $z_0 \in \partial D$). Рассмотрим компакт $K_2 = K_1 + y$. Нетрудно видеть, что K_2 является выпуклой оболочкой объединения компакта $K + y$ и точки $z_0 + y$. В силу выбора числа ε это объединение компактно принадлежит области D . Поэтому его выпуклая оболочка K_2 также лежит в D . Опорная функция K_2 определяется равенством (см. [23])

$$H_{K_2}(\eta) = \max \{H_K(\eta), \operatorname{Re}\langle z_0, \eta \rangle\} + \operatorname{Re}\langle y, \eta \rangle, \quad \eta \in \mathbb{C}^n.$$

Определим функцию $f(\eta) = \psi(\eta) \exp\langle y, \eta \rangle$, $\eta \in \mathbb{C}^n$. Из (24) легко следует, что

$$\mathcal{L}^*(\eta, \psi) \leq H_{K_2}(\eta) \quad \forall \eta \in \mathbb{C}^n. \quad (26)$$

Так как $K_2 \subset D$, то (см. введение) $f \in \mathbf{P}_D$. Кроме того, функция f имеет те же нули и той же кратности, что и ψ , которая принадлежит $\mathbf{I}(G_k, \mathfrak{N}, k(z))$. Следовательно, $f \in \mathbf{I}(D, \mathfrak{N}, k(z))$. Мы хотим показать, что функция f и некоторая окрестность U на $\mathbf{S}$ точки $\eta(z_0)$, которая является подмножеством $U(\delta/2)$, удовлетворяют требованиям утверждения 2).

Из оценки (23) следует, что функция $f(z)$ при достаточно больших по модулю z не имеет нулей на конусе (с вершиной в начале координат), порожденном множеством $U(\delta/2)$. Поэтому согласно своему определению $\mathbf{V}(\mathfrak{N}(f))$ не пересекает $U(\delta/2)$. Нам остается найти окрестность $U \subset U(\delta/2)$ точки z_0 такую, что будет выполнено равенство (12).

Пусть для $z \in \mathbb{C}^n$ выполнено включение $K_2 + z \subset D$. Тогда $z \in \mathbf{G}(D, f)$. Действительно, в этом случае $H_{K_2}(\eta) + \operatorname{Re}\langle z, \eta \rangle < H_D(\eta) \quad \forall \eta \in \mathbf{S}$. Следовательно, с учетом (26) получаем

$$\operatorname{Re}\langle z, \eta \rangle < H_D(\eta) - H_{K_2}(\eta) \leq H_D(\eta) - \mathcal{L}^*(\eta, f) \quad \forall \eta \in \mathbf{S},$$

что согласно определению области $\mathbf{G}(D, f)$ и означает принадлежность к ней точки z .

Пусть $z \in \mathbf{B}(z_0, \varepsilon) \cap \partial D$. Рассмотрим компакт $K_2 + (z - z_0 - y) = K_1 + (z - z_0)$. Нетрудно видеть, что он является выпуклой оболочкой объединения компакта $K + (z - z_0)$ и точки z . В силу выбора числа ε и точки z оба элемента объединения лежат в замыкании $\overline{D}$ выпуклого множества. Следовательно, это же верно и для выпуклой оболочки. Но тогда в силу включения $K_2 \subset D$ для каждого неотрицательного $\tau < 1$ компакт $K_2 + \tau(z - z_0 - y)$ принадлежит уже самой области D . По доказанному чуть выше это означает, что $\tau(z - z_0 - y) \in \mathbf{G}(D, f) \quad \forall \tau \in [0, 1)$.

Возьмем произвольную точку $\eta \in U(\delta/2)$ такую, что гиперплоскость, опорная к области D в направлении η (т.е. гиперплоскость, задаваемая уравнением

$\operatorname{Re}\langle x, \eta \rangle = H_D(\eta)$), проходит через какую-либо точку z из множества $\mathbf{B}(z_0, \varepsilon) \cap \partial D$. Тогда для $G_0 = \mathbf{G}(D, f)$ имеем

$$H_{G_0}(\eta) = \sup_{x \in G_0} \operatorname{Re}\langle x, \eta \rangle \geq \sup_{\tau \in [0, 1]} \operatorname{Re}\langle \tau(z - z_0 - y), \eta \rangle \geq \operatorname{Re}\langle z - z_0 - y, \eta \rangle.$$

Отсюда с учетом (25) и очевидного равенства $\mathfrak{L}^*(\eta, f) = \mathfrak{L}^*(\eta, \psi) + \operatorname{Re}\langle y, \eta \rangle$ $\forall \eta \in \mathbb{C}^n$ получаем

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}^*(\eta, f) + H_{G_0}(\eta) &\geq \operatorname{Re}\langle z_0 + y, \eta \rangle + \operatorname{Re}\langle z - z_0 - y, \eta \rangle \\ &= \operatorname{Re}\langle z, \eta \rangle = H_D(\eta). \end{aligned}$$

Из определения области $G_0 = \mathbf{G}(D, f)$ легко следует и обратное к этому неравенство:

$$\mathfrak{L}^*(\eta, f) + H_{G_0}(\eta) \leq H_D(\eta).$$

Таким образом, мы установили истинность соотношения (12) для всех точек η , выбранных из указанного выше условия. Чтобы завершить доказательство теоремы, нам остается доказать существование окрестности $U \subset \mathbf{S}$ точки $\eta(z_0)$ такой, что для каждого $\eta \in U$ опорная к области D гиперплоскость, задаваемая уравнением $\operatorname{Re}\langle x, \eta \rangle = H_D(\eta)$, проходит через какую-нибудь точку z из множества $\overline{\mathbf{B}(z_0, \varepsilon/2)} \cap \partial D$. Поскольку последнее имеет место для $\eta = \eta(z_0)$, то в случае ограниченной области D это нетрудно показать, руководствуясь соображениями непрерывности. Для неограниченной области без дополнительных условий на точку z_0 это, вообще говоря, неверно.

Предположим, что это неверно и в нашем случае. Тогда найдется последовательность $\{\eta_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbf{S}$, которая сходится к $\eta(z_0)$, и для каждого $k \geq 1$ гиперплоскость $\operatorname{Re}\langle x, \eta_k \rangle = H_D(\eta_k)$ не пересекает множество $\overline{\mathbf{B}(z_0, \varepsilon/2)} \cap \partial D$. При этом, как отмечено выше, η_k не совпадает с $\eta(z_0)$. Рассмотрим области

$$D_k = D \cap \{x \in \mathbb{C}^n : \operatorname{Re}\langle x, \eta_k \rangle > \operatorname{Re}\langle z_0, \eta_k \rangle\}.$$

Предположим, что для каждого номера k множество $D_k \setminus \overline{\mathbf{B}(z_0, \varepsilon/2)}$ непусто, и пусть $x_k \in D_k \setminus \overline{\mathbf{B}(z_0, \varepsilon/2)}$, $k = 1, 2, \dots$. Поскольку $z_0 \in \overline{D_k}$, то в силу выпуклости области D_k полуинтервал $[x_k, z_0]$ принадлежит ей. Пусть $\{z_k\} = [x_k, z_0] \cap \partial \mathbf{B}(z_0, \varepsilon/2) \subset D_k$, $k \geq 1$. Переходя к подпоследовательности, можно считать, что $\{z_k\}_{k=1}^\infty$ сходится к некоторой точке $z' \in \partial \mathbf{B}(z_0, \varepsilon/2)$. Тогда из определения D_k следует, что

$$\operatorname{Re}\langle z_0, \eta(z_0) \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \operatorname{Re}\langle z_0, \eta_k \rangle \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \operatorname{Re}\langle z_k, \eta_k \rangle = \operatorname{Re}\langle z', \eta(z_0) \rangle.$$

С другой стороны, так как $z_k \in D_k \subset D$, то $z' \in \overline{D}$, и с учетом определения опорной функции и вектора $\eta(z_0)$ получаем

$$\operatorname{Re}\langle z', \eta(z_0) \rangle \leq H_D(\eta(z_0)) = \operatorname{Re}\langle z_0, \eta(z_0) \rangle.$$

Следовательно, $\operatorname{Re}\langle z', \eta(z_0) \rangle = \operatorname{Re}\langle z_0, \eta(z_0) \rangle$. Это означает, что на опорной к области D гиперплоскости, задаваемой уравнением $\operatorname{Re}\langle x, \eta(z_0) \rangle = H_D(\eta(z_0))$, лежат

две различные точки z_0 и z' из замыкания этой области. Поскольку z_0 – гладкая точка, то указанная гиперплоскость является единственной опорной к D гиперплоскостью, содержащей z_0 . Но тогда мы получаем противоречие с тем, что z_0 является выступающей точкой.

Таким образом, наше предположение насчет областей D_k неверно, т.е. найдется номер k такой, что D_k лежит в шаре $\mathbf{B}(z_0, \varepsilon/2)$. Так как $z_0 \in \overline{D}$, то $\operatorname{Re}\langle z_0, \eta_k \rangle \leq H_D(\eta_k)$. Пусть $\operatorname{Re}\langle z_0, \eta_k \rangle = H_D(\eta_k)$. Тогда z_0 лежит на опорной гиперплоскости $\operatorname{Re}\langle x, \eta_k \rangle = H_D(\eta_k)$, что противоречит выбору точки η_k . Следовательно, верно неравенство $\operatorname{Re}\langle z_0, \eta_k \rangle < H_D(\eta_k)$. Согласно ему и определению опорной функции в области D найдем последовательность $\{y_j\}$ такую, что $\operatorname{Re}\langle y_j, \eta_k \rangle > \operatorname{Re}\langle z_0, \eta_k \rangle$, $j = 1, 2, \dots$, и

$$\operatorname{Re}\langle y_j, \eta_k \rangle \rightarrow H_D(\eta_k), \quad k \rightarrow \infty. \quad (27)$$

Тогда $\{y_j\}$ лежит в области D_k , а вместе с ней и в шаре $\mathbf{B}(z_0, \varepsilon/2)$. Поэтому, переходя к подпоследовательности, можно считать, что $\{y_j\}$ сходится к некоторому $y' \in \overline{\mathbf{B}(z_0, \varepsilon/2)}$. Очевидно выполнено включение $y' \in \partial D$. Кроме того, из (27) получаем

$$\operatorname{Re}\langle y', \eta_k \rangle = H_D(\eta_k).$$

Это означает, что точка $y' \in \overline{\mathbf{B}(z_0, \varepsilon/2)} \cap \partial D$ лежит на опорной гиперплоскости, задаваемой уравнением $\operatorname{Re}\langle x, \eta_k \rangle = H_D(\eta_k)$, вопреки выбору η_k . Таким образом, теорема полностью доказана.

В заключительной части параграфа мы хотим дать описание максимальной выпуклой области, куда можно осуществить одновременное аналитическое продолжение всех функций из инвариантного подпространства $\mathbf{W} \subset H(D)$.

Пусть D – выпуклая область в $\mathbb{C}^n$ и $\mathbf{V}$ – замкнутое подмножество $\mathbf{S}$. Положим

$$D(\mathbf{V}) = \{z \in \mathbb{C}^n : \operatorname{Re}\langle z, \eta \rangle < H_D(\eta) \quad \forall \eta \in \mathbf{V}\}.$$

По лемме 2 $D(\mathbf{V})$ – выпуклая область.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть D – выпуклая область в $\mathbb{C}^n$, $\mathbf{W} \subset H(D)$ – замкнутое инвариантное подпространство со спектром $\mathbf{E}(\mathfrak{N}, k(z))$, допускающее спектральный синтез. Предположим, что все функции из $\mathbf{W}$ аналитически продолжаются в выпуклую область G и аппроксимируются там линейными комбинациями элементов из $\mathbf{E}(\mathfrak{N}, k(z))$. Тогда имеет место включение $G \subset D(\mathbf{V}(\mathfrak{N}))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При выполнении условия предложения с учетом леммы 1 для каждой функции $F \in \mathbf{P}_G$ существует функция $f \in \mathbf{P}_D$ такая, что $(F - f) \in \mathbf{I}(G, \mathfrak{N}, k(z))$.

По определению $\mathbf{P}_D$ найдем выпуклый компакт $K \subset D$ и постоянную $c > 0$, удовлетворяющие неравенству

$$|f(z)| \leq c \exp H_K(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}^n.$$

Поскольку функции $F(z)$ и $f(z)$ совпадают на множестве $\mathfrak{N}$, то отсюда получаем оценку

$$|F(z)| \leq c \exp H_K(z) \quad \forall z \in \mathfrak{N}. \quad (28)$$

Предположим, что G не лежит в области $D(\mathbf{V}(\mathfrak{N}))$. Тогда из определения последней следует, что существуют точки $z_0 \in G$ и $\eta_0 \in \mathbf{V}(\mathfrak{N})$ такие, что

$$\operatorname{Re}\langle z_0, \eta_0 \rangle \geq H_D(\eta_0). \quad (29)$$

По выбору z_0 функция $\exp\langle z_0, \eta \rangle$ принадлежит $\mathbf{P}_G$. Поэтому для нее выполнено (28). С другой стороны, в силу (29) найдутся $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ такие, что

$$|\exp\langle z_0, \eta \rangle| \geq \exp\{H_K(\eta) + \varepsilon|\eta|\} \quad \forall \eta = ty, \quad y \in \mathbf{B}(\eta_0, \delta), \quad t \geq 0.$$

Согласно определению множества $\mathbf{V}(\mathfrak{N})$ выберем последовательность $\{\eta_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathfrak{N}$ такую, что $|\eta_k| \rightarrow \infty$ и $\eta_k/|\eta_k| \rightarrow \eta_0$ при $k \rightarrow \infty$. Тогда для всех достаточно больших номеров k в точке η_k будет выполнено последнее неравенство. А это противоречит (28). Предложение доказано.

3. Одномерный случай. В этом пункте мы будем рассматривать инвариантные подпространства в выпуклых областях комплексной плоскости. Здесь удается получить более точный результат по сравнению с многомерным случаем. Это становится возможным благодаря дискретности нулевых множеств аналитических функций одной переменной. Вначале мы докажем некоторые вспомогательные утверждения.

В дальнейшем будем рассматривать целые функции $f(z)$ порядка $\rho > 0$ и конечного типа в $\mathbb{C}$ с индикаторами $\underline{\mathcal{L}}(z, f)$ и $\mathcal{L}^*(z, f)$, которые определяются точно так же, как и для функций первого порядка, только с заменой символа t в знаменателях на t^ρ .

ЛЕММА 3. Пусть $f(z)$ – целая функция порядка ρ и конечного типа в $\mathbb{C}$; $z_0 \in \mathbf{S}$. Для любых положительных ε и $\delta < \delta(\varepsilon)$ существуют постоянная $T > 0$ и область $U \subset \mathbb{C}$ такие, что выполнено следующее:

- 1) $ty \in U$ для любых $y \in \mathbf{B}(z_0, \delta)$ и $t > T$;
- 2) $z/|z| \in \mathbf{B}(z_0, 4\delta)$ для любого $z \in U$;
- 3) $\ln |f(z)|/|z|^\rho \geq [\underline{\mathcal{L}}(z_0, f) - \varepsilon + \mu_0(\underline{\mathcal{L}}(z_0, f) - \mathcal{L}^*(z_0, f) - 2\varepsilon)](1 \pm 3\delta)_{-\rho} \quad \forall z \in \partial U$, где $\mu_0 = 3 + \ln 36$, а знак в круглых скобках совпадает со знаком выражения, стоящего в квадратных скобках.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varepsilon > 0$. Поскольку в случае одной переменной индикатор $\mathcal{L}^*(z, f)$ непрерывен (см. [14]), то найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\mathcal{L}^*(z, f) \leq \mathcal{L}^*(z_0, f) + \varepsilon/2 \quad \forall z \in \mathbf{B}(z_0, 20\delta(\varepsilon)).$$

Отсюда по свойствам индикаторов (см. [25]) следует, что мы можем выбрать $T_1 > 0$ так, что будет выполнено неравенство

$$\ln |f(tz)|/t^\rho \leq \mathcal{L}^*(z_0, f) + \varepsilon \quad \forall z \in \mathbf{B}(z_0, 19\delta(\varepsilon)), \quad t \geq T_1. \quad (30)$$

Пусть $\delta \in (0, \delta(\varepsilon))$. Если $\underline{\mathcal{L}}(z_0, f) = -\infty$, то утверждение становится тривиальным. Можно считать поэтому, что $\underline{\mathcal{L}}(z_0, f) > -\infty$. Тогда согласно лемме 2.7 из [19] существует последовательность $\{z_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{C}$, удовлетворяющая условиям

$$\begin{aligned} |z_k| &\rightarrow \infty, \quad k \rightarrow \infty; \quad |z_k/|z_k| - z_0| < \delta/4; \\ |z_{k+1}|/|z_k| &< 1 + \delta/4; \quad |z_k| > T_1; \\ \ln |f(z_k)|/|z_k|^\rho &\geq \underline{\mathcal{L}}(z_0, f) - \varepsilon, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (31)$$

Для $k \geq 1$ рассмотрим функции

$$f_k(z) = f(z_k + z)/f(z_k), \quad |z| < 18\delta|z_k|.$$

Из (30), (31) и теоремы об оценке снизу модуля аналитической функции (см. [14]) следует, что имеет место неравенство

$$\ln |f_k(z)| \geq -(3 + \ln 36) [(\mathfrak{L}^*(z_0, f) + \varepsilon)|z_k|^\rho - \ln |f(z_k)|],$$

которое выполнено в круге $\mathbf{B}(0, 3\delta|z_k|)$, но вне исключительных кружков с общей суммой радиусов, равной $\delta|z_k|/2$. Отсюда с учетом последней оценки в (31) находим, что для каждого $k \geq 1$ можно выбрать число $d_k \in [2, 3)$ такое, что

$$\begin{aligned} \ln |f(z)|/|z_k|^\rho &\geq \mathfrak{L}(z_0, f) - \varepsilon + \mu_0 [\mathfrak{L}(z_0, f) - \mathfrak{L}^*(z_0, f) - 2\varepsilon] \\ &\quad \forall z \in \partial \mathbf{B}(z_k, d_k \delta|z_k|). \end{aligned}$$

Пусть U – область, являющаяся объединением кругов $\mathbf{B}(z_k, d_k \delta|z_k|)$, $k = 1, 2, \dots$. Тогда последнее неравенство дает нам, очевидно, п. 3) леммы. Пункты же 1) и 2) легко следуют из соотношений (31) для точек последовательности $\{z_k\}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Пусть $f(z)$ – целая функция порядка ρ и конечного типа в $\mathbb{C}$; $z_0 \in \mathbf{S}$. Для любого $\delta > 0$ существуют положительные числа $A, \tilde{T}$ и область $U \subset \mathbb{C}$ такие, что выполнено следующее:

- 1) $ty \in U$ для любых $y \in \mathbf{B}(z_0, \delta)$ и $t > \tilde{T}$;
- 2) $z/|z| \in \mathbf{B}(z_0, 3\delta)$ для любого $z \in U$;
- 3) $\ln |f(z)| \geq -A|z|^\rho \quad \forall z \in \partial U$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как функция $f(z)$ имеет порядок ρ и конечный тип, то найдутся $A_1, A_2 > 0$ такие, что

$$\ln |f(z)| \leq A_1 + A_2|z|^\rho, \quad z \in \mathbb{C}.$$

С другой стороны, по теореме об оценке снизу на окружностях целой функции конечного порядка и типа (см. [14]) для любого $\delta > 0$ существуют постоянная $A_3 > 0$ и последовательность положительных чисел $\{r_k\}$ такие, что

$$\begin{aligned} r_k &\rightarrow +\infty, \quad k \rightarrow \infty; \quad r_{k+1}/r_k < 1 + \delta; \\ \ln |f(r_k z_0)| &\geq -A_3 r_k^\rho, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Из этих соотношений, как и в предыдущей лемме, следует требуемое утверждение. Лемма доказана.

В одномерном случае для обозначения общего кратного нулевого множества функций из пространства $\mathbf{P}_D$ вместо символа $(\mathfrak{N}, k(z))$ естественнее использовать более устоявшийся $\Lambda = \{\lambda_k, m_k\}$, где $\{\lambda_k\}$ – последовательность в $\mathbb{C}$ и m_k – кратность точки λ_k . Пусть $\mathbf{V}(\Lambda)$ обозначает совокупность предельных точек множества $\{\lambda_k/|\lambda_k|, k \geq 1\}$. Для множества $Y \in \mathbb{C}$ символ Y^δ означает δ -вздутие этого множества.

Дадим теперь достаточные условия для аналитического продолжения в одномерном случае.

ТЕОРЕМА 4. Пусть D, G – выпуклые области в $\mathbb{C}$, $D \subset G$; $\mathbf{W}$ – замкнутое инвариантное подпространство в $H(D)$ со спектром $\mathbf{E}(\Lambda)$, допускающее спектральный синтез. Предположим, что:

1) $\mathfrak{I}(D, G)$ является собственным подмножеством окружности $\mathbf{S}$ и не пересекает $\mathbf{V}(\Lambda)$;

2) для любого $\delta > 0$ и любой связной компоненты U множества $\mathbf{S} \setminus [\overline{Y^\delta} \cup \text{int } \mathbf{J}(D)]$ (где $Y = \mathbf{S} \setminus [\mathfrak{I}(D, G) \cup \text{int } \mathbf{J}(D)]$) существует связное открытое на $\mathbf{S}$ множество U' такое, что

$$U \subset U', \quad \partial U' \subset \overline{Y^\delta} \cup \text{int } \mathbf{J}(D), \quad U' \cap \mathbf{V}(\Lambda) = \emptyset;$$

3) для каждого $\varepsilon > 0$ найдется функция $f \in \mathbf{I}(D, \Lambda)$, удовлетворяющая условию

$$\mathfrak{L}(z, f) \geq H_D(z) - H_{G_0}(z) - \varepsilon \quad \forall z \in \partial U' \setminus \text{int } \mathbf{J}(D), \quad (32)$$

где $G_0 = \mathbf{G}(D, f)$.

Тогда каждая функция из $\mathbf{W}$ аналитически продолжается в область G и аппроксимируется там линейными комбинациями элементов множества $\mathbf{E}(\Lambda)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $F \in \mathbf{P}_G$. Согласно лемме 1 достаточно показать, что для некоторой функции $\varphi \in \mathbf{P}_D$ разность $F - \varphi$ принадлежит множеству $\mathbf{I}(G, \Lambda)$.

Пусть K – выпуклый компакт из G , являющийся сопряженной диаграммой функции F (см. [14]), т.е.

$$\mathfrak{L}^*(z, F) = H_K(z) < H_G(z) \quad \forall z \in \mathbf{S}. \quad (33)$$

Выберем $\tilde{\varepsilon} > 0$, для которого $K^{\tilde{\varepsilon}}$ компактно принадлежит G . В силу непрерывности $H_K(z)$ и полунепрерывности снизу $H_D(z)$ множество

$$\omega = \{z \in \mathbb{C} : H_K(z) + \tilde{\varepsilon}|z| < H_D(z)\}$$

открыто. Из определений ω и $\mathfrak{I}(D, G)$ следует, что ω содержит $\mathbf{S} \setminus \mathfrak{I}(D, G)$ и, в частности, множество Y .

В одномерном случае в отличие от многих переменных из выпуклости и однородности опорной функции $H_D(z)$ вытекает, что ее сужение на множество $\mathbf{S} \setminus \mathbf{J}(D)$ непрерывно (в многомерном случае можно гарантировать только непрерывность сужения на множество $\text{int}(\mathbf{S} \setminus \mathbf{J}(D))$). В более широком смысле непрерывным является также ее сужение на множество $\mathbf{S} \setminus \text{int } \mathbf{J}(D)$. Действительно, если $z \in \mathbf{J}(D) \cap \partial \mathbf{J}(D)$, то $H_D(z) = +\infty$, и в силу полунепрерывности снизу H_D имеем $H_D(y) \rightarrow +\infty$, когда $y \rightarrow z$ и $y \in \mathbf{S} \setminus \text{int } \mathbf{J}(D)$. Таким образом, с учетом определения Y и полунепрерывности снизу $H_G(z)$ находим отсюда, что множество Y замкнуто. Поэтому мы можем выбрать $\delta > 0$ такое, что $\overline{Y^{6\delta}} \subset \omega$.

Легко видеть, что так же, как и в теореме 2, множество $\mathbf{S} \setminus [\overline{Y^{6\delta}} \cup \text{int } \mathbf{J}(D)]$ состоит лишь из конечного числа связных компонент. Обозначим их через $U_1, \dots, U_m$. Каждая из U_i лежит в некоторой связной компоненте множества $\mathbf{S} \setminus [\overline{Y^\delta} \cup \text{int } \mathbf{J}(D)]$. Пусть U'_i обозначает открытое на $\mathbf{S}$ множество, содержащее последнюю, существование которого предполагается в условии 2) теоремы.

Среди компонент $U_1, \dots, U_m$ могут оказаться множества U_i , которые не являются открытыми на $\mathbf{S}$ (таких множеств может быть самое большее два). Это произойдет в ситуации, когда граничная точка $z \in \partial U_i$ принадлежит $\partial \mathbf{J}(D) \cap \mathfrak{I}(D, G)$ и $\mathbf{J}(D)$ “открыто со стороны точки z ”. В этом случае мы несколько расширим компоненту U_i . А именно, вместо нее рассмотрим объединение $U_i \cup \mathbf{B}(z, 5\tilde{\delta}) \cap \mathbf{S}$. Для простоты за новым множеством мы сохраним старое обозначение U_i , а $\tilde{\delta} > 0$ считаем настолько малым, что U_i по-прежнему принадлежит U'_i .

Возможен также случай, когда U_i – замкнутое множество. Тогда $\mathbf{J}(D)$ открыто и U_i – единственная компонента, совпадающая в этом случае с множеством $\mathfrak{I}(D, G) = \mathbf{S} \setminus \mathbf{J}(D)$. Указанное расширение здесь мы проведем для обеих граничных точек U_i .

Таким образом, множества $U_1, \dots, U_m$ открыты, а поскольку расширение произведено выше только за счет точек из $\text{int } \mathbf{J}(D)$ (при достаточно малом $\tilde{\delta} > 0$), то они остались попарно непересекающимися.

Пусть $D_1, \dots, D_m$ – выпуклые области, определяемые равенством (4) в теореме 2 для случая $n = 1$. Так как $\mathbf{S} \setminus \bigcup_{k=1}^m U_k \subset \omega$, то из (33) и определения множества ω следует, что

$$\mathfrak{L}^*(z, F) < H_{D_m}(z) \quad \forall z \in \mathbf{S},$$

т.е. функция $F(z)$ принадлежит пространству $\mathbf{P}_{D_m}$. Докажем существование функции $\psi \in \mathbf{P}_{D_{m-1}}$ такой, что разность $F - \psi$ обращается в нуль в точках λ_k с кратностью m_k , $k = 1, 2, \dots$

Пусть z_1, z_2 – граничные точки связного множества $U'_m \subset \mathbf{S}$. По условию z_1 и z_2 принадлежат либо $\mathbf{S} \setminus \mathbf{J}(D)$, либо $\text{int } \mathbf{J}(D)$. Разберем ситуацию, когда $z_1 \in \mathbf{S} \setminus \mathbf{J}(D)$ и $z_2 \in \text{int } \mathbf{J}(D)$. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Выберем положительное число ε , удовлетворяющее условию $2\varepsilon + 3\varepsilon\mu_0 < \tilde{\varepsilon}/24$ (где μ_0 определено в лемме 3). Пусть $f(z)$ – функция из $\mathbf{I}(D, \Lambda)$, для которой в точке z_1 выполнено неравенство (32). (Отметим, что в ситуации, когда $z_1, z_2 \in \text{int } \mathbf{J}(D)$, неравенство (32) отсутствует, т.е. наличие функции $f(z)$ не предполагается. В этом случае в качестве $f(z)$ достаточно рассмотреть произвольную ненулевую функцию из множества $\mathbf{I}(D, \Lambda)$, которая существует, поскольку мы рассматриваем только нетривиальные инвариантные подпространства.)

Так как $z_1 \in \omega$, то в силу (33), выбора числа $\tilde{\varepsilon}$ и свойств индикаторов (см. [25]) найдутся $\delta_1, T_1 > 0$ такие, что выполнена оценка

$$\begin{aligned} \ln |F(z)|/|z| &\leq H_K(z_1) + \tilde{\varepsilon}/3 < H_D(z_1) - 2\tilde{\varepsilon}/3 \\ \forall z: z/|z| &\in \mathbf{B}(z_1, 5\delta_1), \quad |z| > T_1. \end{aligned} \quad (34)$$

Пусть $G_{m-1} = \mathbf{G}(D_{m-1}, f)$. В силу второго включения из условия 2) точка z_1 не принадлежит объединению множеств U_k , $k = 1, \dots, m$. Поэтому согласно (5) и (6) имеем $H_D(z_1) = H_{D_{m-1}}(z_1)$. С учетом включения $z_1 \in \mathbf{S} \setminus \mathbf{J}(D)$ получаем отсюда $H_{D_{m-1}}(z_1) < +\infty$. Поскольку $\mathfrak{L}^*(z, f) \neq -\infty \quad \forall z \in \mathbb{C}$ ($\mathfrak{L}^*$ является выпуклой функцией [14]), то по определению опорной функции и области G_{m-1} конечной будет также и величина $H_{G_{m-1}}(z_1)$. Поэтому существует точка $y_1 \in G_{m-1}$ такая, что для некоторого $\delta_2 > 0$ имеет место неравенство

$$\text{Re } y_1 z > H_{G_{m-1}}(z_1) - \tilde{\varepsilon}/3 \quad \forall z \in \mathbf{B}(z_1, 5\delta_2). \quad (35)$$

Из определения области $G_0 = \mathbf{G}(D, f)$ следует, что

$$H_{G_0}(z) \leq H_D(z) - \mathfrak{L}^*(z, f) \quad \forall z \in \mathbb{C}. \quad (36)$$

Вместе с (32) это дает нам соотношение $\underline{\mathfrak{L}}(z_1, f) \geq \mathfrak{L}^*(z_1, f) - \varepsilon$. Отсюда по лемме 3 с учетом выбора числа ε и неравенства (32) находим, что существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для каждого положительного $\delta_3 < \delta(\varepsilon)$ найдутся число $T_2 > 0$ и область $U \subset \mathbb{C}$, удовлетворяющие свойствам 1), 2) из леммы 3 (при $T = T_2$ и $\delta = \delta_3$), и, кроме того, выполнено следующее:

$$\ln |f(z)|/|z| \geq [q - \tilde{\varepsilon}/24](1 \pm 3\delta_3) \quad \forall z \in \partial U,$$

где $q = H_D(z_1) - H_{G_0}(z_1)$. Выбирая $\delta_3 > 0$ достаточно малым, добьемся того, что верна оценка

$$\ln |f(z)|/|z| \geq q - \tilde{\varepsilon}/12 \quad \forall z \in \partial U. \quad (37)$$

При этом будем также считать, что $\delta_3 < \min\{\delta, \delta_1, \delta_2, \delta(\varepsilon)\}$.

Согласно выбору $\delta(\varepsilon)$ в лемме 3, числа $\tilde{\varepsilon}$ и неравенству (36) имеет место оценка

$$\ln |f(z)|/|z| < q + \tilde{\varepsilon}/12, \quad z/|z| \in \mathbf{B}(z_1, 6\delta_3), \quad |z| > T_2.$$

Отсюда и из интегральной формулы Коши следует, что для некоторых $c_1 > 0$ и $T_3 > T_2$ верна оценка на производную:

$$|f'(z)| \leq c_1 \exp\{(q + \tilde{\varepsilon}/12)|z|\}, \quad z/|z| \in \mathbf{B}(z_1, 5\delta_3), \quad |z| > T_3.$$

Применяя теперь формулу для первообразной, находим

$$|f(x)| \geq |f(z)| - c_2 \exp\{(q + \tilde{\varepsilon}/12)|z|\}|x - z|,$$

где $z \in \partial U$, $x \in \mathbf{B}(z, 1)$ и $|z| > T_4 > T_3$. Наконец, с учетом (37) для некоторого $T_5 > T_4$ получаем

$$|f(x)| \geq c_3 \exp\{(q - \tilde{\varepsilon}/12)|x|\}, \quad x \in \mathbf{B}(z, \exp[-\tilde{\varepsilon}|z|/4]), \quad z \in \partial U, \quad |z| > T_5. \quad (38)$$

Аналогичные рассуждения с применением леммы 4 к функции $f(z)$ для точки z_2 и выбранного выше числа $\tilde{\delta}$ позволяют найти положительные числа $A_1, A_2, T_6 > T_5$ и область $U' \subset \mathbb{C}$ такие, что выполнены свойства 1), 2) леммы 4 для $U', \tilde{\delta}$ и следующее неравенство:

$$\begin{aligned} |f(x)| &\geq \exp[-A_1|x|], \\ x &\in \mathbf{B}(z, \exp[-A_2|z|]), \quad z \in \partial U', \quad |z| > T_6. \end{aligned} \quad (39)$$

Функция $F(z)$ имеет первый порядок и конечный тип. Поэтому найдется $A_3 > 0$ такое, что

$$|F(z)| \leq \exp[A_3|z|], \quad |z| > T_6. \quad (40)$$

Поскольку $D \subset D_{m-1}$, то с учетом леммы 3.6 из [19] имеют место включения

$$\text{int } \mathbf{J}(D) \subset \text{int } \mathbf{J}(D_{m-1}) \subset \mathbf{J}(G_{m-1}).$$

В силу выбора числа $\tilde{\delta} > 0$ круг $\mathbf{B}(z_2, 4\tilde{\delta})$ компактно принадлежит множеству $\text{int } \mathbf{J}(D)$. Следовательно, это же верно и для множества $\text{int } \mathbf{J}(G_{m-1})$. Вспоминая теперь определение опорных функций, легко показать, что в области G_{m-1} найдется выпуклый компакт K_1 , который удовлетворяет неравенству

$$H_{K_1}(z) > (A_1 + A_2 + A_3)|z| \quad \forall z \in \mathbf{B}(z_2, 4\tilde{\delta}). \quad (41)$$

По условию 2) теоремы пересечение $U'_m \cap \mathbf{V}(\Lambda)$ пусто. Поэтому с учетом определения $\mathbf{V}(\Lambda)$ существует $T_7 > T_6$ такое, что множество

$$R = \left\{ z = ty : y \in U'_m \setminus \left[\mathbf{B}(z_1, \delta_3) \cup \mathbf{B}(z_2, \tilde{\delta}) \right], t \geq T_7 \right\}$$

не содержит ни одной точки λ_k из последовательности $\Lambda = \{\lambda_k, m_k\}$. При этом, несколько увеличивая при необходимости число T_7 , можно считать, что для некоторого $a > 0$ множество $[\partial \mathbf{B}(0, T_7)]^a$ не содержит нулей функции $f(z)$.

Через $Q(\tau)$, $0 \leq \tau \leq 1$, обозначим дополнение до $\mathbb{C}$ той компоненты множества (здесь предполагается равенство $\mathbf{B}(z, 0) = \{z\}$)

$$\mathbb{C} \setminus \left[\mathbf{B}(0, T_7 + \tau a) \cup \{ \mathbf{B}(z, \tau \exp[-\tilde{\varepsilon}|z|/4]), z \in U \} \cup \{ \mathbf{B}(z, \tau \exp[-A_2|z|]), z \in U' \} \right],$$

которая лежит в R . Такая компонента существует согласно свойству 1) из лемм 3 и 4.

Пусть $\alpha(z)$ – бесконечно дифференцируемая функция в $\mathbb{C}$, удовлетворяющая условиям

$$\begin{aligned} 0 \leq \alpha(z) \leq 1, \quad z \in \mathbb{C}; \quad \alpha(z) = 1, \quad z \in Q(0); \\ \alpha(z) = 0, \quad z \in \mathbb{C} \setminus Q(1); \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} |d\alpha(z)/d\bar{z}| \leq c_4 \exp[\tilde{\varepsilon}|z|/4], \quad z/|z| \in \mathbf{B}(z_1, 5\delta_3), \\ |d\alpha(z)/d\bar{z}| \leq c_5 \exp[A_2|z|], \quad z/|z| \in \mathbf{B}(z_2, 4\tilde{\delta}). \end{aligned} \quad (43)$$

Построить подобную функцию можно, например, следующим образом. Выбирая подходящее локально конечное покрытие множества $Q(1)$ ограниченными областями, мы можем вначале в виде суммы построить функцию $\alpha_1(z)$ со свойствами:

$$\begin{aligned} \alpha_1 \in C^\infty(\mathbb{C}); \quad 0 \leq \alpha_1(z) \leq M_1, \quad z \in \mathbb{C}; \quad \alpha_1(z) \geq 1, \quad z \in Q(1/3); \\ \alpha_1(z) = 0, \quad z \in \mathbb{C} \setminus Q(1). \end{aligned}$$

Кроме того, для $\alpha_1(z)$ выполнено (43). Точно так же построим затем функцию $\alpha_2 \in C^\infty(\mathbb{C})$, удовлетворяющую (43) и следующим условиям:

$$\begin{aligned} 0 \leq \alpha_2(z) \leq M_2, \quad z \in \mathbb{C}; \quad \alpha_2(z) \geq 1, \quad z \in \mathbb{C} \setminus Q(1/3); \\ \alpha_2(z) = 0, \quad z \in Q(0). \end{aligned}$$

В качестве $\alpha(z)$ можно взять теперь функцию $\alpha_1(z)(\alpha_1(z) + \alpha_2(z))^{-1}$.

Пусть K_2 – выпуклый компакт из области G_{m-1} , являющийся выпуклой оболочкой объединения компакта K_1 и точки y_1 . Выберем число $\varepsilon_1 > 0$ такое, что $K_2^{\varepsilon_1}$ компактно принадлежит G_{m-1} . Такие же рассуждения, как и при получении соотношения (11) в теореме 2, показывают, что верно равенство

$$q = H_D(z_1) - H_{G_0}(z_1) = H_{D_{m-1}}(z_1) - H_{G_{m-1}}(z_1).$$

Тогда из свойства 2) в леммах 3, 4 и соотношений (34), (35) и (38)–(43) легко следует, что

$$\int_{\mathbb{C}} |d\alpha(z)/d\bar{z}|^2 |F(z)/f(z)|^2 \exp[-2H_{K_2}(z) - 2\varepsilon_1|z|/3] d\lambda < \infty.$$

Следовательно (см. [26]), мы можем найти функцию $v(z)$, которая является решением $\bar{\partial}$ -уравнения

$$dv(z)/d\bar{z} = -(d\alpha(z)/d\bar{z})F(z)/f(z)$$

и удовлетворяет неравенству

$$\int_{\mathbb{C}} |v(z)|^2 \exp[-2H_{K_2}(z) - \varepsilon_1|z|] d\lambda < \infty. \quad (44)$$

Определим функцию $\varphi(z)$ равенством

$$\varphi(z) = \alpha(z)F(z) + v(z)f(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

По построению φ – целая функция. Поскольку имеет место равенство (см. (5), (6))

$$H_{D_m}(z) = H_{D_{m-1}}(z), \quad z \in \mathbf{S} \setminus U_m, \quad (45)$$

то из (42) и (44) с использованием неравенства о среднем для субгармонических функций стандартным образом (см., например, [19]) получаем оценку

$$|\varphi(z)| \leq c \exp H_{K_3}(z), \quad z \in \mathbb{C},$$

где K_3 – выпуклый компакт из D_{m-1} , удовлетворяющий неравенствам

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_f^*(z) + H_{K_2}(z) + \varepsilon_1|z|/2 &< H_{K_3}(z), \quad z \in \mathbf{S}; \\ \mathfrak{L}_F^*(z) &< H_{K_3}(z), \quad z \in \mathbf{S}. \end{aligned}$$

Такой компакт существует в силу (45) и соотношения, которое следует из определения области G_{m-1} :

$$\mathfrak{L}_f^*(z) + H_{G_{m-1}}(z) \leq H_{D_{m-1}}(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Таким образом, $\varphi \in \mathbf{P}_{D_{m-1}}$. Кроме того, функция $F - \varphi$ обращается в нуль в точках λ_k с кратностью m_k , $k = 1, 2, \dots$

Проводя далее последовательные построения функций так же, как и в теореме 2, мы тем самым завершим доказательство.

ЗАМЕЧАНИЕ. В отличие от теоремы 2, в только что доказанном утверждении отсутствует условие, предполагающее пустоту пересечения $\mathbf{V}(\mathfrak{N}(f)) \cap U'$. В одномерном случае это условие удаётся отбросить благодаря дискретности нулевого множества аналитической функции одной переменной.

Рассмотрим ситуацию, когда функции из инвариантного подпространства $\mathbf{W} \subset H(D)$ являются целыми и аппроксимируются в $\mathbb{C}$ линейными комбинациями элементов из $\mathbf{E}(\Lambda)$. Если это имеет место, то согласно предложению 1 выполнено равенство $D(\mathbf{V}(\Lambda)) = \mathbb{C}$. Последнее согласно определению $D(\mathbf{V}(\Lambda))$ означает, что множество $\mathbf{V}(\Lambda)$ лежит в $\mathbf{J}(D)$. С другой стороны, если $\mathbf{V}(\Lambda) \subset \text{int } \mathbf{J}(D)$, то нетрудно видеть, что в этом случае условия теоремы 4 будут выполнены для областей D и $\mathbb{C}$. Таким образом, верно следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть D – неограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}$ такая, что $\mathbf{J}(D)$ – открытое множество; $\mathbf{W}$ – замкнутое инвариантное подпространство в $H(D)$ со спектром $\mathbf{E}(\Lambda)$, допускающее спектральный синтез. Для того чтобы все функции из $\mathbf{W}$ были целыми и аппроксимировались в $\mathbb{C}$ линейными комбинациями элементов из $\mathbf{E}(\Lambda)$, необходимо и достаточно выполнение включения $\mathbf{V}(\Lambda) \subset \mathbf{J}(D)$.

Теперь мы опишем класс выпуклых областей в $\mathbb{C}$, для которых условия теоремы 4 дают критерий продолжения.

ТЕОРЕМА 5. Пусть D и G – выпуклые области в $\mathbb{C}$, $D \subset G$ и D имеет гладкую границу; $\mathbf{W}$ – замкнутое инвариантное подпространство в $H(D)$ со спектром $\mathbf{E}(\Lambda)$, допускающее спектральный синтез; $\mathfrak{I}(D, G)$ – собственное подмножество $\mathbf{S}$, не пересекающее $\mathbf{V}(\Lambda)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) каждая функция из $\mathbf{W}$ аналитически продолжается в область G и аппроксимируется там линейными комбинациями элементов из множества $\mathbf{E}(\Lambda)$;
- 2) для любых $\delta, \varepsilon > 0$ существует функция $f \in \mathbf{I}(D, \Lambda)$, удовлетворяющая неравенству

$$\underline{\mathfrak{L}}(z, f) \geq H_D(z) - H_{G_0}(z) - \varepsilon \quad \forall z \in \overline{\partial Y^\delta} \cap \mathbf{S} \setminus \overline{\mathbf{J}(D)}, \quad (46)$$

где $G_0 = \mathbf{G}(D, f)$ и множество Y определено в теореме 4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 2) $\rightarrow$ 1). Проверим выполнение условий теоремы 4. Пусть U – компонента множества $\mathbf{S} \setminus [\overline{Y^\delta} \cup \text{int } \mathbf{J}(D)]$. Поскольку $U \subset \mathfrak{I}(D, G)$, то по условию имеем $U \cap \mathbf{V}(\Lambda) = \emptyset$. Если U открыто, то из определения Y легко следует, что $\overline{U} \subset \mathbf{S} \setminus \overline{\mathbf{J}(D)}$ (достаточно заметить, что в силу выпуклости $H_D(z)$ множество $\mathbb{C} \setminus \mathbf{J}(D)$ выпукло, т.е. $\mathbf{J}(D)$ – угол раствора, не меньше π). Положим $U' = U$. Согласно последнему включению $\partial U' \subset \overline{Y^\delta}$, а с учетом (46) получаем неравенство (32).

Если некоторая граничная точка z множества U принадлежит ему, то необходимо $z \in \partial \mathbf{J}(D)$. Тогда в качестве U' можно взять некоторое расширение (как в теореме 4) множества U “со стороны” точки z за счет точек из $\text{int } \mathbf{J}(D)$. Так как

$z \notin \mathbf{V}(\Lambda)$, то в силу замкнутости множества $\mathbf{V}(\Lambda)$ для некоторого $\tau > 0$ пересечение круга $\mathbf{B}(z, \tau)$ с $\mathbf{V}(\Lambda)$ пусто. Поэтому расширение можно провести так, что $U' \cap \mathbf{V}(\Lambda) = \emptyset$. При этом, очевидно, будет выполнено (32).

1) $\rightarrow$ 2). Пусть $\varepsilon, \delta > 0$ фиксированы. Положим $\{z_1, \dots, z_m\} = \partial \overline{Y^\delta} \cap \mathbf{S} \setminus \overline{\mathbf{J}(D)}$. Поскольку в окрестности точки z_i функция $H_D(z)$ ограничена, то элементарные геометрические рассуждения убеждают нас в том, что для каждого $i = 1, \dots, m$ опорная к области D прямая $\operatorname{Re} z_i y = H_D(z_i)$ обязана пересекать ее границу ∂D , т.е. существует $y_i \in \partial D$, удовлетворяющее равенству $\operatorname{Re} z_i y_i = H_D(z_i)$. Так как $D \subset G$, то y_i принадлежит замыканию $\overline{G}$. Покажем, что $y_i \in G$. Предположим противное, т.е. $y_i \in \partial G$. Через каждую граничную точку области G проходит некоторая опорная прямая к G . Поэтому найдется $\eta_i \in \mathbf{S}$ такое, что $H_G(\eta_i) = \operatorname{Re} y_i \eta_i$. Отсюда с учетом включений $y_i \in \overline{D} \subset \overline{G}$ получаем

$$\operatorname{Re} y_i \eta_i \leq H_D(\eta_i) \leq H_G(\eta_i) = \operatorname{Re} y_i \eta_i. \quad (47)$$

Следовательно, $\operatorname{Re} y_i \eta_i = H_D(\eta_i)$. Это означает, что через граничную точку y_i области D проходит опорная к D прямая, задаваемая уравнением $\operatorname{Re} y_i \eta_i = H_D(\eta_i)$. По условию y_i — гладкая точка области D . Поэтому в силу выбора y_i точки η_i и z_i обязаны совпадать. Однако с учетом (47) это противоречит включению $z_i \in \mathcal{I}(D, G)$.

Таким образом, $y_i \in G$. Следовательно, функция $\exp y_i z$ является элементом пространства $\mathbf{P}_G$. Тогда по лемме 1 найдется функция $\varphi_i \in \mathbf{P}_D$ такая, что $f_i(z) = \exp y_i z - \varphi_i(z)$ принадлежит $\mathbf{I}(G, \Lambda)$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Пусть $K_i \subset D$ — сопряженная диаграмма функции φ_i , $i = 1, \dots, m$, т.е. $\mathfrak{L}^*(z, \varphi_i) = H_{K_i}(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$. Так как $H_D(z_i) = \operatorname{Re} y_i z_i$, то найдется $\varepsilon_1 > 0$ такое, что

$$\operatorname{Re} y_i z > H_{K_j}(z) + \varepsilon_1 \quad \forall z \in U_i, \quad j = 1, \dots, m, \quad (48)$$

где U_i — некоторая окрестность точки z_i , $i = 1, \dots, m$. В силу гладкости граничных точек области D будет выполнено неравенство

$$\operatorname{Re} y_i z < H_D(z) \quad \forall z \in \mathbf{S} \setminus \{z_i\}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Поэтому мы можем выбрать $\varepsilon_2 > 0$ и окрестности U'_i точек z_i такие, что для каждого номера i имеют место соотношения

$$\operatorname{Re} y_i z > \operatorname{Re} y_j z + \varepsilon_2 \quad \forall z \in U'_i, \quad j = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, m. \quad (49)$$

Выберем $\varepsilon_3 > 0$, для которого множества $K_i + \mathbf{B}(0, \varepsilon_3)$, $i = 1, \dots, m$, компактно принадлежат D . Положим $\varepsilon_4 = \min\{\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$. Для каждого $i = 1, \dots, m$ в круге $\mathbf{B}(0, \varepsilon_4/2)$ возьмем точку x_i такую, что $y_i + x_i \in D$. Тогда с учетом выбора ε_3 функция

$$f_i(z) \exp(x_i z) = \exp(y_i + x_i)z - \varphi_i(z) \exp(x_i z)$$

принадлежит пространству $\mathbf{P}_D$. Рассмотрим еще функцию

$$f(z) = \sum_{i=1}^m f_i(z) \exp x_i z, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Из (48), (49) и выбора точек x_i следуют неравенства

$$|f(z)| \geq 2^{-1} \exp \operatorname{Re}(y_i + x_i)z \geq 2^{-1} \exp [\operatorname{Re} y_i z - \varepsilon_4 |z|/2] \\ \forall z: z/|z| \in U_i \cap U'_i, \quad |z| > T, \quad i = 1, \dots, m.$$

Отсюда, как и в теореме 3, находим, что для всех $i = 1, \dots, m$ имеют место соотношения

$$\underline{\mathfrak{L}}(z_i, f) = \mathfrak{L}^*(z_i, f) = \operatorname{Re}(y_i + x_i)z_i \geq \operatorname{Re} y_i z_i - \varepsilon_4/2. \quad (50)$$

Согласно определению области G_0 она содержит начало координат. Это означает, что $H_{G_0}(z) \geq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$. Поэтому с учетом равенства $H_D(z_i) = \operatorname{Re} y_i z_i$ мы из (50) получаем (46). Кроме того, по построению функция $f(z)$ принадлежит пространству $\mathbf{P}_D$ и обращается в нуль в точках λ_k с кратностью m_k , где $\Lambda = \{\lambda_k, m_k\}$. Следовательно, $f \in \mathbf{I}(D, \Lambda)$. Теорема доказана.

В заключение мы хотим привести результат, показывающий, что возможность продолжения функций из подпространства $\mathbf{W} \subset H(D)$ в область $G \supset D$ автоматически влечет за собой их продолжение в некоторую максимальную выпуклую область, построенную по D и G .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть D, G – выпуклые области в $\mathbb{C}$, $D \subset G$ и D имеет гладкую границу; $\mathbf{W}$ – замкнутое инвариантное подпространство в $H(D)$ со спектром $\mathbf{E}(\Lambda)$, допускающее спектральный синтез; $\mathfrak{I}(D, G)$ – собственное подмножество $\mathbf{S}$, не пересекающее $\mathbf{V}(\Lambda)$. Предположим, что функции из $\mathbf{W}$ продолжаются в G и аппроксимируются там линейными комбинациями элементов из $\mathbf{E}(\Lambda)$. Тогда последнее выполнено также и для области $D(V)$ (см. предложение 1), где $V = \mathbf{S} \setminus \mathfrak{I}(D, G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С учетом теоремы 5 достаточно доказать равенство

$$\mathfrak{I}(D, G) = \mathfrak{I}(D, D(V)).$$

Согласно определению области $D(V)$ имеем

$$H_{D(V)}(z) = H_D(z) \quad \forall z \in V = \mathbf{S} \setminus \mathfrak{I}(D, G).$$

Это означает, что $\mathfrak{I}(D, D(V)) \subset \mathfrak{I}(D, G)$.

Обратно, пусть $y \in G$. Тогда

$$\operatorname{Re} yz < H_G(z) = H_D(z) \quad \forall z \in V.$$

Следовательно, $G \subset \overline{D(V)}$, а поскольку G — область, то $G \subset D(V)$. Последнее влечет неравенство $H_G(z) \leq H_{D(V)}(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$, а вместе с ним и включение $\mathfrak{I}(D, G) \subset \mathfrak{I}(D, D(V))$. Предложение доказано.

Список литературы

1. Напалков В. В. Уравнения свертки в многомерных пространствах. М.: Наука, 1982.
2. Гротендик А. О. О пространствах (F) и (DF) // Математика. 1958. Т. 2. №3. С. 81–127.
3. Красичков-Терновский И. Ф. Однородное уравнение типа свертки на выпуклых областях // ДАН СССР. 1971. Т. 197. №1. С. 29–31.
4. Юлмухаметов Р. С. Однородные уравнения свертки // ДАН СССР. 1991. Т. 316. №2. С. 312–315.
5. Кривошеев А. С., Напалков В. В. Комплексный анализ и операторы свертки // УМН. 1992. Т. 47. №6(288). С. 3–58.
6. Красичков-Терновский И. Ф. Инвариантные подпространства аналитических функций. I. Спектральный анализ на выпуклых областях // Матем. сб. 1972. Т. 87(129). №4. С. 459–489.
7. Красичков-Терновский И. Ф. Инвариантные подпространства аналитических функций. II. Спектральный синтез на выпуклых областях // Матем. сб. 1972. Т. 88(130). №1. С. 3–30.
8. Леонтьев А. Ф. Ряды полиномов Дирихле и их обобщения // Тр. МИАН. 1951. Т. 39. С. 1–215.
9. Kahane J. P. Sur quelques problemes d'unicité et de prolongement, relatifs aux fonctions approchables par des sommes d'exponentielles // Ann. Inst. Fourier. 1953–1954. V. 5. P. 39–130.
10. Леонтьев А. Ф. О сходимости последовательности полиномов Дирихле // ДАН СССР. 1956. Т. 108. №1. С. 23–26.
11. Baillellette A. Approximation de fonctions par des sommes d'exponentielles // C. R. Acad. Sci. Paris. 1959. V. 249. P. 2470–2471.
12. Красичков И. Ф. Сходимость полинома Дирихле // Сиб. матем. журн. 1966. Т. 7. С. 1039–1058.
13. Красичков-Терновский И. Ф. Инвариантные подпространства аналитических функций. Аналитическое продолжение // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1973. Т. 37. №4. С. 933–947.
14. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М.: Гостехиздат, 1956.
15. Kieselmann C. O. Prolongement des solutions d'une equation aux dérivées partielles à coefficients constants // Bull. Soc. Math. France. 1969. V. 97. P. 329–354.
16. Sebbbar A. Prolongements des solutions holomorphes de certains operateurs différentiel d'ordre infini à coefficients constants // Lect. Notes in Math. 1980. V. 822. P. 199–220.
17. Meril A., Struppa D. C. Convolutors of holomorphic functions // Lect. Notes in Math. 1987. V. 1276. P. 253–275.
18. Ishimura R., Okada Ya. The existence and the continuation of holomorphic solutions for convolution equations in tube domains // Bull. Soc. Math. France. 1994. V. 122. P. 413–433.
19. Кривошеев А. С. Об индикаторах целых функций и продолжении решений однородного уравнения свертки // Матем. сб. 1993. Т. 184. №8. С. 81–108.
20. Дьедонне Ж., Шварц Л. Двойственность в пространствах (F) и (FL) // Математика. 1958. Т. 2. №2. С. 77–107.
21. Лелон П., Груман Л. Целые функции многих комплексных переменных. М.: Мир, 1989.
22. Wiegnerinck J. J. Growth properties of Paley–Wiener functions on $\mathbb{C}^n$ // Nederl. Acad. Wetensch. Proc. 1984. V. 87. P. 95–112.
23. Лейтвейс К. Выпуклые множества. М.: Наука, 1985.
24. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
25. Ронкин Л. И. Введение в теорию целых функций многих переменных. М.: Наука, 1971.
26. Хермандер Л. Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. М.: Мир, 1968.