Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Маринов, Константы Липшица оператора метрического ε -проектирования в пространствах с заданными модулями выпуклости и гладкости, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1998, том 62, выпуск 2, 103–130

DOI: <https://doi.org/10.4213/im175>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 13:02:38

УДК 517.982.256

А. В. Маринов

**Константы Липшица оператора метрического
ε-проектирования в пространствах
с заданными модулями выпуклости и гладкости**

Найдены неудлучшаемые на классе всех линейных нормированных пространств оценки сверху для констант Липшица оператора метрического ε-проектирования P через модули выпуклости и гладкости пространства при вариации трех параметров: приближаемого элемента x , выпуклого аппроксимирующего множества M и точности аппроксимации $\varepsilon > 0$. На их основе получены новые оценки устойчивости непрерывного селектора оператора P .

Библиография: 28 наименований.

§ 1. Введение и основной результат

В дальнейшем, если не оговорено противное, через X обозначается линейное нормированное пространство над полем действительных чисел с нормой $\|\cdot\|$. Через $B(x, r)$, $S(x, r)$ и S обозначим шар $\{y \in X: \|x - y\| \leq r\}$, сферу ($= r$) и единичную сферу $S(0, 1)$ соответственно. Под 2^X понимается множество всех подмножеств из X .

Для непустого подмножества $M \subset X$, элемента $x \in X$ и $\varepsilon \geq 0$ положим

$$xM = \inf\{\|x - z\|: z \in M\}$$

– величина наилучшего приближения элемента x множеством M и

$$x_M^\varepsilon = \{z \in M: \|x - z\| \leq xM + \varepsilon\}$$

– метрическая ε-проекция x на M .

Пусть $\mathcal{V} = \mathcal{V}(X)$ – множество тех троек (x, M, ε) , для которых $x_M^\varepsilon \neq \emptyset$. Оператор $P: \mathcal{V} \mapsto 2^X \setminus \{\emptyset\}$, задаваемый равенством

$$P(v) = x_M^\varepsilon, \quad v = (x, M, \varepsilon),$$

называется *оператором метрического ε-проектирования*. Эти определения естественным образом обобщают классические понятия метрической проекции $x_M = x_M^0$ и оператора метрического проектирования $x \mapsto x_M$ на заданное множество M .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 93-0110-196).

Метрику ϱ на множестве $\mathcal{V}$ определим формулой

$$\varrho(v, w) = |\varepsilon - \delta| + 2\|x - y\| + 3\alpha(M, N),$$

где $v = (x, M, \varepsilon)$, $w = (y, N, \delta) \in \mathcal{V}$, $\alpha(M, N)$ – хаусдорфово расстояние между множествами M и N , т.е.

$$\begin{aligned}\alpha(M, N) &= \max(\beta(M, N), \gamma(M, N)), \\ \beta(M, N) &= \gamma(N, M) = \sup_{p \in M} \inf_{q \in N} \|p - q\|.\end{aligned}$$

Пространство образов $2^X \setminus \{\emptyset\}$ оператора P будем наделять одним из трех уклонений $\tau = \alpha, \beta, \gamma$. Введенные τ -уклонения, как и расстояние ϱ на $\mathcal{V}$, удовлетворяют неравенству треугольника: $\tau(A, B) \leq \tau(A, C) + \tau(C, B)$ для $A, B, C \subset X$, а хаусдорфово расстояние α вместе с метрикой ϱ еще и симметричны. В дальнейшем используются сокращения $xy = \|x - y\|$, $MN = \beta(M, N)$, при этом выражения $2xy$, $3MN$ и т.д. понимаются как $2\|x - y\|$, $3\beta(M, N)$ и т.д. Через $\text{Cv}(X)$ обозначается множество всех непустых выпуклых подмножеств из пространства X .

В [1], [2] для $x \in X$, $M \in \text{Cv}(X)$ и $\varepsilon > 0$ при $\tau = \alpha, \beta, \gamma$ доказана τ -липшицевость оператора P в точке $v = (x, M, \varepsilon)$ по совокупности переменных, т.е. фактически установлена конечность и получены некоторые оценки сверху (см. (1.2), (1.1)) для τ -констант Липшица $K_\tau(v)$, задаваемых формулами

$$K_\tau(v) = \sup \left\{ \frac{\tau(P(w), P(v))}{\varrho(v, w)} : w \in \mathcal{V}, \varrho(v, w) \neq 0 \right\}.$$

В настоящей статье, в частности, получены оценки сверху для $K_\tau(v)$ через модули выпуклости и гладкости пространства X и показана их неулучшаемость на классе всех линейных нормированных пространств.

Устойчивости и оценкам устойчивости оператора P при $\varepsilon > 0$ посвящены работы [1]–[10] (более подробный обзор этих и других результатов можно найти в [2]). Заметим, что устойчивость оператора наилучшего приближения $x \mapsto x_M$ изучалась гораздо интенсивнее (см. [11]–[13]).

В дальнейшем нам будет удобнее иметь дело не с τ -константами Липшица в точке v , а с некоторыми равномерными τ -константами $K_\tau(a, s)$ и $K'_\tau(a, s)$, которые определим следующим образом. При $a, s \geq 0$ положим

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(a, s) &= \{v = (x, M, \varepsilon) \in \mathcal{V} : x \in X, M \in \text{Cv}(X), xM \leq a, \varepsilon \geq s\}, \\ \mathcal{V}'(a, s) &= \{v = (x, M, \varepsilon) \in \mathcal{V} : x \in X, M \in \text{Cv}(X), xM = a, \varepsilon = s\}, \\ K_\tau(a, s) &= \sup\{K_\tau(v) : v \in \mathcal{V}(a, s)\}, \\ K'_\tau(a, s) &= \sup\{K_\tau(v) : v \in \mathcal{V}'(a, s)\}.\end{aligned}$$

Ясно, что

$$\begin{aligned}K'_\tau(a, s) &\leq K_\tau(a, s), \quad \mathcal{V}(a, s) = \cup\{\mathcal{V}'(b, t) : b \leq a, t \geq s\}, \\ K_\tau(a, s) &= \sup\{K'_\tau(b, t) : b \leq a, t \geq s\}.\end{aligned}$$

В терминах равномерных констант проще формулируются утверждения о точности оценок сверху для τ -констант Липшица (см., например, (1.9)); в то же время равномерные и поточечные оценки легко вытекают одна из другой (ср. оценки (1.7), (1.8) с (2.27) и (3.19)).

Очевидны соотношения

$$K_\alpha(v) = \max(K_\beta(v), K_\gamma(v)), \quad K_\alpha(a, s) = \max(K_\beta(a, s), K_\gamma(a, s))$$

и аналогичные для констант K' .

Функция

$$\varphi(t) = \inf \left\{ 1 - \frac{\|x + y\|}{2} : xy \geq t, \ x, y \in S \right\},$$

определенная для $t \in [0, 2]$, называется *модулем выпуклости пространства X* . Пространство X называется *равномерно выпуклым*, если $\varphi(t) > 0$ для любого $t \in (0, 2]$. Известно [14], [15], что $\varphi(t)$ строго возрастает на промежутке $[t_0, 2]$, где $t_0 = \max\{t \in [0, 2] : \varphi(t) = 0\}$ и непрерывна на $[0, 2)$, поэтому обратную функцию естественно определить следующим образом:

$$\varphi^{-1}(s) = \sup \left\{ xy : 1 - \frac{\|x + y\|}{2} \leq s, \ x, y \in S \right\}.$$

Ясно, что φ^{-1} возрастает и непрерывна на $[0, 1]$. Для $a, s \geq 0$, $a + s > 0$ положим

$$\Phi(a, s) = (a + s)\varphi^{-1}\left(\frac{s}{a + s}\right).$$

Из оценок устойчивости оператора P , полученных в теоремах 3, 4 из [2], легко вытекают следующие оценки сверху для τ -констант Липшица:

$$K_\beta(a, s) \leq \frac{\Phi(a, s)}{s} - 1 \leq \frac{2a}{s} + 1, \quad (1.1)$$

$$K_\alpha(a, s) \leq \min\left(\frac{2a}{s} + 2, 2\frac{\Phi(a, s)}{s}\right). \quad (1.2)$$

Заметим, что в равномерно выпуклых пространствах X оценки сверху для $K_\tau(a, s)$ через функцию $\Phi(a, s)$ при $a > 0$ указывают на более медленный порядок роста к бесконечности констант Липшица при $s \rightarrow 0$, нежели оценка в общих пространствах ($\leq 2a/s + 1$ или $\leq 2a/s + 2$). В самом деле, нетрудно показать (см. ниже лемму 9, в)), что справедливо порядковое равенство

$$\frac{\Phi(a, s)}{s} - 1 \asymp \frac{\varphi^{-1}(s)}{s}, \quad s \rightarrow 0.$$

Таким образом, в первом случае порядок не выше, чем у отношения $\varphi^{-1}(s)/s$, причем $\varphi^{-1}(s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow 0$, а во втором – не выше, чем $1/s$.

Как отмечено в [2], в случае гильбертова пространства X оценки через Φ дают правильный порядок роста, т.е. при $a > 0$ и $\tau = \alpha, \beta, \gamma$ справедливы соотношения

$$K_\tau(a, s) \asymp \frac{\varphi^{-1}(s)}{s} \asymp \frac{1}{\sqrt{s}}, \quad s \rightarrow 0.$$

В то же время в пространствах, единичная сфера S которых содержит отрезок длины 2, при $\tau = \alpha, \beta, \gamma$ выполняются порядковые равенства

$$K_\tau(a, s) \asymp \frac{1}{s}, \quad s \rightarrow 0.$$

В этом нас убеждает справедливая в таких пространствах оценка снизу

$$\frac{2a}{s} + 1 \leq K_\tau(a, s), \quad \tau = \alpha, \beta, \gamma \quad (1.3)$$

(она вытекает из [2, §3, пример 1]), которая, с учетом (1.2) и (1.1), с одной стороны, дает равенства

$$K_\beta(a, s) = \frac{\Phi(a, s)}{s} - 1 = \frac{2a}{s} + 1, \quad (1.4)$$

а с другой – двусторонние оценки

$$\frac{2a}{s} + 1 \leq K_\tau(a, s) \leq \frac{2a}{s} + 2, \quad \tau = \gamma, \alpha. \quad (1.5)$$

Равенства (1.4) указывают на неулучшаемость оценки (1.1) на классе всех линейных нормированных пространств. Главная цель настоящей статьи состоит в получении неулучшаемых в том же смысле оценок для $K_\tau(a, s)$, $\tau = \gamma, \alpha$, и, в частности, в ликвидации разрыва в оценках (1.5), а также в уточнении оценки (1.1) с использованием модуля гладкости пространства.

Чтобы сформулировать основной результат статьи – теорему 1 – введем еще одну величину

$$\Psi(a, s) = \Phi(a, s) - \max \left[s, a\theta^{-1} \left(\frac{s}{2a} \right) \right].$$

Здесь

$$\theta(t) = \sup \left\{ \frac{\|x + ty\| + \|x - ty\|}{2} - 1 : x, y \in S \right\}$$

– модуль гладкости пространства X . Так как $\sqrt{1+t^2} - 1 \leq \theta(t) \leq t$ и $\theta(t)$ – выпуклая функция (см., например, [16]), то функция $\theta(t)$, а вместе с ней и обратная функция $\theta^{-1}(t)$ строго возрастают и непрерывны при $t \geq 0$. В идейном отношении появление величины $\Psi(a, s)$ связано с леммой 1 из [17]. Ясно, что

$$\Psi(a, s) \leq \Phi(a, s) - s \leq 2a + s. \quad (1.6)$$

ТЕОРЕМА 1. При $a \geq 0$, $s > 0$ справедливы оценки

$$K_\beta(a, s) \leq \frac{\Psi(a, s)}{s} \leq \frac{2a}{s} + 1, \quad (1.7)$$

$$K_\alpha(a, s) \leq \frac{\Phi(a, s)}{s} - 1 \leq \frac{2a}{s} + 1. \quad (1.8)$$

А если дополнительно предположить, что единичная сфера пространства X содержит отрезок длины 2, то при $\tau = \alpha, \beta, \gamma$ имеем

$$K'_\tau(a, s) = K_\tau(a, s) = \frac{2a}{s} + 1. \quad (1.9)$$

Заметим, что равенства (1.9) выполняются и в некоторых строго выпуклых пространствах, т.е. таких пространствах, в которых единичная сфера S вообще не содержит отрезков. Таково, например, построенное в [15] строго выпуклое пространство с разрывным модулем выпуклости: $\varphi(t) = 0$ при $t \in [0, 2)$ и $\varphi(2) = 1$.

Доказательству оценки (1.7) посвящен § 2, а (1.8) – § 3. При этом получены новые оценки устойчивости оператора P , уточняющие теоремы 3, 4 из [2]. Равенства (1.9) вытекают из (1.7), (1.8) и (1.3). В § 4 даются уточнения полученных результатов для α -устойчивости при дополнительном предположении выпуклости множества N , что в свою очередь используется в § 5 для оценок устойчивости непрерывного селектора оператора P . В § 6 показано, что оценки устойчивости оператора P , полученные в § 2, 3, позволяют получить неуплучшаемые оценки τ -констант Липшица оператора P не только по совокупности переменных x, M, ε , но и по каждой из переменных в отдельности.

Как уже отмечалось, оценки (1.3) вытекают из [2, § 3, пример 1], где показано, что в двумерном пространстве X с квадратом в качестве единичной сферы S для любых $a \geq 0$, $\delta \geq \varepsilon \geq 0$ существуют точка $x \in X$ и прямая M такие, что $xM = a$ и

$$x_M^\delta x_M^\varepsilon = \left(\frac{2a}{\delta} + 1 \right) (\delta - \varepsilon).$$

Отсюда следует, что при $\tau = \alpha, \beta, \gamma$ через величину $2a/s + 1$ оцениваются снизу соответствующие равномерные τ -константы Липшица оператора P по переменной ε (т.е. при вариации только одного параметра ε), а значит, и константы $K_\tau(a, s)$. Попутно установлено, что теорема 1 останется справедливой, если в ней заменить $K_\tau(a, s)$ на равномерные τ -константы Липшица по переменной ε . В § 6 аналогичный результат получен для констант Липшица по переменным x и M в отдельности.

Заметим, что в [2], вслед за более ранними исследованиями (см. [6] и библиографию к ней), рассмотрена более общая ситуация, когда варьируется еще и норма пространства X . Здесь мы ограничимся только тремя переменными x, M, ε . Тем не менее полезно отметить, что часть результатов статьи автоматически переносится на общий случай (см. замечание в конце § 2).

Всюду в дальнейшем множества M, N и проекции $x_M^\varepsilon, y_N^\delta$ предполагаются непустыми. Будем пользоваться сокращениями вида

$$x_M^\varepsilon x_M^{+0} = \lim_{t \rightarrow +0} x_M^\varepsilon x_M^t, \quad x_M^\varepsilon y_N^{\delta-0} = \lim_{t \rightarrow +0} x_M^\varepsilon y_N^{\delta-t}$$

и т.д. Для непустых множеств $A, B \subset X$ положим

$$\chi(A, B) = \sup\{x, y : x \in A, y \in B\}.$$

Диаметр подмножества $A \subset X$ обозначим через $\text{diam } A$.

§ 2. Оценки для β -констант Липшица и промежуточные неравенства

Оценка (1.7) для $K_\beta(a, s)$ будет получена последовательным доказательством следующей цепочки неравенств:

$$K_\beta(a, s) \leq \frac{\xi(a, s)}{s} \leq \frac{\zeta(a, s)}{s} \leq \frac{\Psi(a, s)}{s}, \quad (2.1)$$

где

$$\begin{aligned} \xi(a, s) &= \sup\{x_M^s x_M^{+0} : x \in X, M \in \text{Cv}(X), xM = a\}, \\ \zeta(a, s) &= \sup\{\chi(x_M^s x_M^{+0}) : x \in X, M \in \text{Cv}(X), xM = a\}. \end{aligned}$$

Введение промежуточных величин $\xi(a, s)$ и $\zeta(a, s)$ объясняется тем, что, во-первых, $\xi(a, s)$ (как, впрочем, и $\zeta(a, s)$) обладает необходимыми свойствами монотонности, существенно используемыми при доказательстве первого неравенства в (2.1), и, во-вторых, тем, что величина $\zeta(a, s)$ допускает более простое представление, позволяющее установить последнее неравенство (заметим, что среднее неравенство в (2.1) тривиально). Аналогичные свойства монотонности для функции $\Psi(a, s)$ установить не удастся.

Доказательство (2.1) начнем с первого неравенства. Из [2, лемма 10] следует, что для любых $v = (x, M, \varepsilon)$, $w = (y, N, \delta) \in \mathcal{V}$ с выпуклым M и

$$\lambda = \max(\varepsilon, \delta) + 2xy + 2\alpha(M, N) > 0$$

справедлива оценка

$$y_N^\delta x_M^\varepsilon \leq NM + \frac{x_M^\lambda x_M^{+0}}{\lambda} (|\delta - \varepsilon| + 2xy + 2\alpha(M, N)). \quad (2.2)$$

При этом в [2] (см. (3.8)) установлена также монотонность отношения $x_M^\lambda x_M^{+0}/\lambda$, а именно

$$\frac{x_M^\delta x_M^{+0}}{\delta} \leq \frac{x_M^\varepsilon x_M^{+0}}{\varepsilon}, \quad (2.3)$$

если $\delta \geq \varepsilon$. Так как $\varepsilon \leq \lambda$, то из этих результатов легко следует оценка

$$K_\beta(v) \leq \max\left(1, \frac{x_M^\varepsilon x_M^{+0}}{\varepsilon}\right). \quad (2.4)$$

Беря в качестве M прямую, опорную к шару $B(x, a)$, без труда убеждаемся в том, что $x_M^\varepsilon x_M^{+0} \geq \varepsilon$, значит,

$$\xi(a, s) \geq s. \quad (2.5)$$

Поэтому из (2.4) следует неравенство

$$K'_\beta(a, \varepsilon) \leq \frac{\xi(a, \varepsilon)}{\varepsilon}. \quad (2.6)$$

Далее нам понадобятся следующие усиления соотношения (2.3).

ЛЕММА 1 [2]. Пусть $x \in X$, M выпукло, $\delta \geq \varepsilon > t > 0$ ($t \geq 0$ при $x_M \neq \emptyset$), и пусть $G \subset x_M^t$. Тогда

$$\frac{x_M^\delta G}{\delta - t} \leq \frac{x_M^\varepsilon G}{\varepsilon - t}. \quad (2.7)$$

ЛЕММА 2 [2]. Пусть $x \in X$, M выпукло, $\delta > \varepsilon > 0$, $t > s > 0$ ($\varepsilon, s \geq 0$ при $x_M \neq \emptyset$), и пусть $\delta \geq t$, $\varepsilon \geq s$. Тогда

$$\frac{x_M^\delta x_M^\varepsilon}{\delta - \varepsilon} \leq \frac{x_M^t x_M^s}{t - s}. \quad (2.8)$$

СЛЕДСТВИЕ 1 [1]. При $\delta > \varepsilon > 0$ имеем

$$x_M^\delta x_M^\varepsilon \leq \frac{x_M^\delta x_M^{+0}}{\delta} (\delta - \varepsilon). \quad (2.9)$$

ЛЕММА 3. Функция $\xi(a, s)$ возрастает по обоим аргументам в области $a \geq 0$, $s > 0$, а отношение $\xi(a, s)/s$ убывает по переменной s .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $0 \leq a \leq b$, $0 < s \leq t$. Покажем неравенство

$$\xi(a, s) \leq \xi(b, t). \quad (2.10)$$

Пусть $x \in X$, M выпукло, причем $xM = a$. Рассмотрим гомотетию $f(y) = a(y - x)/b + x$ пространства X с центром в точке x и коэффициентом a/b . Пусть $L = f(M)$. Ясно, что $xL = b$ и L выпукло. Кроме того, если положить $\varepsilon = as/b$, $\delta = al/b$, то, очевидно, $0 < l < s$ и

$$\frac{b}{a} x_M^\varepsilon x_M^\delta = x_L^s x_L^l.$$

Отсюда ввиду (2.8) имеем

$$x_M^s x_M^l = \frac{x_M^\varepsilon x_M^\delta}{\varepsilon - \delta} (s - l) = \frac{b}{a} x_M^\varepsilon x_M^\delta = x_L^s x_L^l \leq x_L^t x_L^l.$$

Переходя здесь к пределу при $l \rightarrow 0$ и взяв затем верхнюю грань по всем $M \in \text{Cv}(X)$ с $xM = a$, получаем (2.10).

Монотонность отношения $\xi(a, s)/s$ доказывается переходом к верхней грани по всем выпуклым множествам $M \subset X$ с $xM = a$ в неравенстве (2.3).

ЛЕММА 4. Пусть $a \geq 0$, $s > 0$. Тогда

$$K_\beta(a, s) \leq \frac{\xi(a, s)}{s}. \quad (2.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь неравенством (2.6) и предыдущей леммой, имеем

$$K_\beta(a, s) = \sup_{\substack{b \leq a \\ \varepsilon \geq s}} K'_\beta(b, \varepsilon) \leq \sup_{\substack{b \leq a \\ \varepsilon \geq s}} \frac{\xi(b, \varepsilon)}{\varepsilon} \leq \sup_{\varepsilon \geq s} \frac{\xi(a, \varepsilon)}{\varepsilon} \leq \frac{\xi(a, s)}{s}.$$

Следующая лемма показывает, что величина $\zeta(a, s)$ обладает теми же свойствами монотонности, что и $\xi(a, s)$ (этот факт не используется в дальнейшем, но, по-видимому, представляет самостоятельный интерес).

ЛЕММА 5. Функция $\zeta(a, s)$ монотонно возрастает по обоим аргументам в области $a \geq 0$, $s > 0$, а отношение $\zeta(a, s)/s$ монотонно убывает по s .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая в (2.7) $G = y \in x_M^t$ и переходя затем к верхней грани по $y \in x_M^t$, получаем следующую оценку:

$$\frac{\chi(x_M^\delta, x_M^t)}{\delta - t} \leq \frac{\chi(x_M^\varepsilon, x_M^t)}{\varepsilon - t} \quad (2.12)$$

при $\delta \geq \varepsilon > t > 0$. Устремляя здесь t к нулю и взяв затем верхнюю грань по всем $x \in X$ и $M \in \text{Cv}(X)$ таким, что $xM = a$, приходим к нужному неравенству $\zeta(a, \delta)/\delta \leq \zeta(a, \varepsilon)/\varepsilon$.

Доказательство монотонности функции $\zeta(a, s)$ по обоим переменным дословно повторяет доказательство для $\xi(a, s)$ с той лишь разницей, что все β -уклонения в последнем нужно заменить на χ -расстояния, а вместо неравенства (2.8) использовать (2.12).

ЛЕММА 6. Пусть $x \in X$, $M \in \text{Cv}(X)$, $\varepsilon \geq t > 0$ ($t \geq 0$ при $x_M \neq \emptyset$), $xM > 0$, H – гиперплоскость, разделяющая шар $B(x, xM)$ и множество M . Тогда

$$\chi(x_M^\varepsilon, x_M^t) \leq \chi(x_H^\varepsilon, x_H^t). \quad (2.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $y \in x_M^\varepsilon$, $z \in x_M^t$, $y \neq z$. Проведем луч $l = \{\alpha z + (1 - \alpha)x : \alpha \geq 0\}$. Пусть v – точка пересечения l и сферы $S(x, xM + \varepsilon)$. Пусть Π – двумерная плоскость, проходящая через точки x, y, v (при $y \in l$ берем одну из таких плоскостей). Обозначим $S_2 = S(x, xM + \varepsilon) \cap \Pi$ сферу в плоскости $(\Pi, \|\cdot\|)$. Она разбивается на две дуги диаметрально противоположными точками v и $2x - v$.

Пусть точка $w \in S_2$ удаляется от точки v по одной из двух дуг по направлению к точке $2x - v$. Нетрудно показать, что при этом расстояние zw не убывает. Отсюда следует, что одно из расстояний zw_i , $i = 1, 2$, где $w_i \in H \cap S_2$, не меньше расстояния между точками y и z , скажем,

$$yz \leq w_1z. \quad (2.14)$$

Из этих же соображений получаем, что расстояние от любой из двух точек пересечения $H \cap S(x, xz)$ до точки $p = l \cap H$ не меньше pz . Значит, если через q обозначить ту из них, которая лежит между p и w_2 , то получим

$$w_1z \leq w_1p + pz \leq w_1p + pq = w_1q. \quad (2.15)$$

А так как $q \in x_H^t$, $w_1 \in x_H^\varepsilon$, то из (2.14) и (2.15) ввиду произвольности точек $y \in x_M^\varepsilon$ и $z \in x_M^t$ следует (2.13).

СЛЕДСТВИЕ 2. $\chi(x_M^\varepsilon, x_M^{+0}) \leq \chi(x_H^\varepsilon, x_H^{+0})$.

Отсюда вытекает, что в определении величины $\zeta(a, s)$ верхнюю грань можно брать только по гиперплоскостям, т.е. получаем такое

СЛЕДСТВИЕ 3. При $a \geq 0$, $s > 0$ справедливо представление

$$\zeta(a, s) = \sup \{ \chi(x_H^s, x_H^{+0}) : x \in X, H - \text{гиперплоскость в } X, xH = a \}.$$

В [18] для выпуклого M получена оценка

$$\text{diam } x_M^\varepsilon \leq \Phi(xM, \varepsilon), \quad (2.16)$$

а в [2] – неравенство

$$x_M^\varepsilon x_M^{+0} \leq \Phi(xM, \varepsilon) - \varepsilon, \quad (2.17)$$

причем здесь x_M^{+0} можно заменить на x_M , если $x_M \neq \emptyset$.

Следующая лемма уточняет оценку (2.17).

ЛЕММА 7. Пусть $a \geq 0$, $s > 0$. Тогда

$$\zeta(a, s) \leq \Psi(a, s). \quad (2.18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду следствия 2 из леммы 6 достаточно показать справедливость неравенства

$$\chi(x_H^s, x_H^{+0}) \leq \Psi(a, s) \quad (2.19)$$

для любой гиперплоскости H , опорной к шару $B(x, a)$. Пусть $p \in S(x, a + s)$, $0 < t < s$, $z \in x_H^t$, L – прямая, проходящая через точки p и z , а q – вторая точка пересечения прямой L и сферы $S(x, a + s)$. Имеем

$$qz = qp - pz \leq \text{diam } x_H^s - \inf \{ p_1 z_1 : p_1 \in S(x, xM + \varepsilon) \cap H, z \in x_H^t \}.$$

Переходя в левой части к верхней грани по соответствующим q и z и обозначая последний $\inf$ через $g(t)$, с учетом (2.16) получаем

$$\chi(x_H^s, x_H^t) \leq \Phi(xH, s) - g(t).$$

Ясно, что

$$g(t) \geq s - t. \quad (2.20)$$

Для оценки $g(t)$ снизу через модуль гладкости пространства X воспользуемся идеей доказательства леммы 1 из [17]. Будем считать, что $x = 0$. Оценим расстояние pz снизу.

Пусть $y = z/(a + s)$, $u = (p - z)/(a + s)$. Тогда $\|y + u\| = 1$, а значит,

$$\left\| \frac{y}{\|y\|} + \frac{u}{\|y\|} \right\| = \frac{1}{\|y\|} \geq \frac{a + s}{\|z\|} \geq \frac{a + s}{(a + t)}.$$

Кроме того, по построению $y \in H/(a + s)$, а вектор u параллелен H , в то время как $H/(a + s)$ – гиперплоскость, опорная к $B(0, a/(a + s))$, поэтому точка $y - u$ лежит вне шара $B(0, a/(a + s))$ и, следовательно,

$$\left\| \frac{y}{\|y\|} - \frac{u}{\|y\|} \right\| \geq \frac{a}{a + s} \cdot \frac{1}{\|y\|} \geq \frac{a}{a + t}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \theta \left(\frac{\|u\|}{\|y\|} \right) &\geq \frac{1}{2} \left(\left\| \frac{y}{\|y\|} + \frac{u}{\|y\|} \right\| + \left\| \frac{y}{\|y\|} - \frac{u}{\|y\|} \right\| \right) - 1 \\ &\geq \left(\frac{a + s}{2(a + t)} + \frac{a}{2(a + t)} \right) - 1 = \frac{s - 2t}{2(a + t)}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\|u\| \geq \|y\| \theta^{-1} \left(\frac{s - 2t}{2(a + t)} \right)$$

или

$$pz \geq \|z\| \theta^{-1} \left(\frac{s - 2t}{2(a + t)} \right) \geq a \theta^{-1} \left(\frac{s - 2t}{2(a + t)} \right).$$

Поскольку такая же оценка снизу справедлива и для $g(t)$, то, принимая во внимание (2.20), получаем

$$\chi(x_H^s, x_H^t) \leq \Phi(a, s) - \max \left[s - t, \theta^{-1} \left(\frac{s - 2t}{2(a + t)} \right) \right]. \quad (2.21)$$

Переходя здесь к пределу при $t \rightarrow 0$ и учитывая непрерывность функции θ^{-1} , приходим к (2.19). Лемма доказана.

Итак, доказательство цепочки неравенств (2.1), а вместе с ней и оценки (1.7), полностью завершено. Попутно в § 2 получена новая оценка β -устойчивости оператора P , улучшающая оценку (4.5) теоремы 3 из [2] (в случае вариации трех параметров x, M, ε). Сформулируем этот результат в виде теоремы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть M – выпуклое подмножество из X , $N \subset X$, $x, y \in X$, $\varepsilon, \delta \geq 0$ и

$$\lambda = \max(\varepsilon, \delta) + 2xy + 2\alpha(M, N) > 0.$$

Тогда

$$y_N^\delta x_M^\varepsilon \leq NM + \frac{\Psi(xM, \lambda)}{\lambda} (|\delta - \varepsilon| + 2xy + 2\alpha(M, N)), \quad (2.22)$$

причем λ в этом неравенстве можно заменить на $\mu = \max(\varepsilon, \delta)$ или на ε в случае их положительности.

Неравенство (2.22) следует из (2.2) и соотношения

$$x_M^t x_M^{+0} \leq \Psi(xM, t), \quad t > 0, \quad (2.23)$$

а возможность замены λ на μ или на ε вытекает из того, что $\lambda \geq \mu \geq \varepsilon$, свойства монотонности (2.3) и опять же (2.23).

Приведем еще одно полезное для дальнейшего утверждение. Из леммы 6, неравенства (2.21) и того, что в (2.21) $xM = xH = a$, вытекает следующая

ЛЕММА 8. Если $M \in \text{Cv}(X)$, $x \in X$, $\varepsilon \geq t > 0$ ($t \geq 0$ при $x_M \neq \emptyset$), то

$$\chi(x_M^\varepsilon, x_M^t) \leq \Phi(xM, \varepsilon) - (\varepsilon - t). \quad (2.24)$$

В связи с соотношением (1.6) естественно возникает вопрос о справедливости аналога неравенства (1.7) из теоремы 1 для константы $K_\alpha(a, s)$, т.е. о справедливости неравенства

$$K_\alpha(a, s) \leq \frac{\Psi(a, s)}{s}, \quad (2.25)$$

усиливающего оценку (1.8). И хотя ответ на этот вопрос автору не известен (естественно, за исключением тех пространств, в которых выполняются равенства (1.9)), но тем не менее в случае евклидова пространства $X = \mathbb{R}^2$ удастся показать непригодность для доказательства (2.25) метода промежуточных оценок, использованного при получении неравенства (1.7). Оказывается, что в $\mathbb{R}^2$ для любых $a, s > 0$ выполняется соотношение

$$K_\alpha(a, s) > \frac{\zeta(a, s)}{s}. \quad (2.26)$$

При доказательстве (2.26) без ограничения общности можно предположить, что $a = 1$. Пусть $x \in \mathbb{R}^2$, $t > 0$, M и L – параллельные прямые, касающиеся шаров $B(x, 1)$ и $B(x, 1 + t)$ соответственно и отстоящие друг от друга на расстояние t . Через q обозначим точку пересечения $L \cap B(x, 1 + t)$, через z – одну из точек пересечения $M \cap B(x, 1 + t)$. Опустим из точки z перпендикуляр на прямую L : $p \in L$, $[p, z] \perp L$. Положим $N = [p, z] \cup (L \setminus \{q\})$. Тогда $\alpha(M, N) = NM = t$, $x_N = z$ и

$$x_M^s x_N = \alpha(x_M^s, x_N) = \sqrt{s^2 + 2s} + \sqrt{t^2 + 2t}.$$

Но $\zeta(a, \varepsilon) = \sqrt{\varepsilon^2 + 2\varepsilon}$, поэтому для $v = (x, M, s)$ имеем

$$\begin{aligned} K_\gamma(1, s) &\geq K_\gamma(v) = \sup \left\{ \frac{P(v)P(w)}{\varrho(v, w)} : w \in \mathcal{V}, \varrho(v, w) \neq 0 \right\} \\ &\geq \sup_{t>0} \frac{x_M^s x_N}{s + 3t} > \frac{\sqrt{s^2 + 2s}}{s} = \frac{\zeta(1, s)}{s}. \end{aligned}$$

В приведенном примере верхняя грань берется по точкам w вида $(x, N, 0)$ при некотором незамкнутом множестве N . Нетрудно подправить пример таким образом, чтобы точка w имела вид $(x, N, s/2)$, а множество N было замкнутым. Для этого нужно лишь продлить отрезок $[p, z]$ за точку z до соответствующего отрезка $[p, z']$.

Полезно привести поточечный вариант неравенства (1.7). При $x \in X$, $M \in \text{Cv}(X)$ и $\varepsilon > 0$ для точки $v = (x, M, \varepsilon)$ выполняются соотношения

$$K_\beta(v) \leq \frac{\Psi(xM, \varepsilon)}{\varepsilon} \leq \frac{2xM}{\varepsilon} + 1. \quad (2.27)$$

В заключение заметим, что фактически в § 2 доказано больше, а именно, что неравенства (1.7) и (2.27) справедливы и в случае вариации нормы пространства. Это становится вполне очевидным, если при их доказательстве вместо неравенства (2.2) воспользоваться его обобщением – оценкой (4.1) леммы 10 из [2].

§ 3. Оценка для α -констант Липшица

Ввиду уже доказанной оценки (1.7) и соотношений (1.6) для доказательства (1.8) достаточно получить неравенство

$$K_\gamma(a, s) \leq \frac{\Phi(a, s)}{s} - 1. \quad (3.1)$$

В этом нам поможет следующая

ТЕОРЕМА 3. Пусть M – выпуклое подмножество из X , $N \subset X$, $z, y \in X$, $\varepsilon, \delta \geq 0$, $\mu = \max(\varepsilon, \delta) > 0$. Тогда при $\tau = \alpha, \gamma$ справедливы неравенства

$$\tau(y_N^\delta, x_M^\varepsilon) \leq \tau(N, M) + \left(\frac{\Phi(xM, \mu)}{\mu} - 1 \right) (|\delta - \varepsilon| + 2xy + 2\alpha(M, N)), \quad (3.2)$$

причем μ здесь можно заменить на ε , если $\varepsilon > 0$.

Заметим сразу, что при $\tau = \beta$ неравенство (3.2) уже установлено – оно является следствием более сильной оценки теоремы 2. Поэтому если мы докажем теорему 3 при $\tau = \gamma$, то тем самым докажем ее и при $\tau = \alpha$, т.е. останется рассмотреть только случай $\tau = \gamma$.

Неравенство (3.1) является тривиальным следствием оценки (3.2) при $\tau = \alpha$. Нужно только воспользоваться соотношением

$$\frac{\Phi(xM, t)}{t} - 1 \geq 1, \quad t > 0, \quad (3.3)$$

которое, наряду с другими свойствами функции $\Phi(a, s)$, содержится в следующей лемме.

ЛЕММА 9 [2]. а) Если $a + t \leq b + s$ и $t \leq s$, то

$$\Phi(a, t) \leq \Phi(b, s),$$

в частности, функция $\Phi(a, t)$ не убывает по каждой переменной a, t .

б) Отношение $\Phi(a, t)/t$ не возрастает по t при $t > 0$.

в) При $a, t \geq 0$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} \min(a + t, 1)\varphi^{-1}(t) &\leq \Phi(a, t) \leq \max(a + t, 1)\varphi^{-1}(t), \\ 2t &\leq \Phi(a, t) \leq 2(a + t). \end{aligned}$$

Оценка (3.2) уточняет неравенство (4.6) из [2] при вариации трех параметров x, M, ε . Из (3.2) также легко следует неравенство

$$\alpha(y_N^\delta, x_M^\varepsilon) \leq \frac{\Phi(xM, \mu)}{\mu} (|\delta - \varepsilon| + 2xy + 2\alpha(M, N)), \quad (3.4)$$

где μ можно заменить на $\varepsilon > 0$. Возможность замены μ на ε в (3.2) и (3.3) вытекает из леммы 9, б). Оценка (3.4) улучшает результат следствия 2 теоремы 1 из [2].

Доказательство теоремы 3 разбивается на ряд случаев. В первом случае (грубо говоря, при малых возмущениях параметра M) нам понадобится оценка расстояния $x_M^\varepsilon y_N^\delta$ через величину вида $y_M^t y_M^s$ (см. ниже (3.10)). В работах [1], [2] в подобном случае использовалась оценка через величину вида $x_M^t x_M^s$, что приводило к менее точным оценкам устойчивости оператора P .

Определения метрической ε -проекции и τ -расстояний в произвольном метрическом пространстве X аналогичны их определениям в линейном нормированном пространстве.

ЛЕММА 10. Пусть X – метрическое пространство, $M, N, F \subset X$, $y \in X$, $\delta \geq 0$, и пусть выполняется условие

$$yM + MN < \delta + yN. \quad (3.5)$$

Тогда величина $s = \delta + yN - yM - MN$ положительна и имеет место неравенство

$$Fy_N^\delta \leq MN + Fy_M^{s-0}. \quad (3.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $0 < t < s$. По неравенству треугольника получаем

$$Fy_N^\delta \leq Fy_M^{s-t} + y_M^{s-t} y_N^\delta. \quad (3.7)$$

Покажем, что $y_M^{s-t} y_N^\delta \leq MN$, т.е., другими словами, что $zy_N^\delta \leq MN$ при $z \in y_M^{s-t}$. Имеем

$$zy \leq yM + s - t = \delta + yN - MN - t. \quad (3.8)$$

Но

$$zy_N^\delta \leq zz_N^t + z_N^t y_N^\delta \quad (3.9)$$

и при этом, очевидно, $zz_N^t \leq zN \leq MN$. Остается показать, что второе слагаемое в (3.8) равно нулю.

Пусть $p \in z_N^t$. Тогда $p \in N$ и $pz \leq zN + t \leq MN + t$. Отсюда с учетом (3.8) имеем

$$py \leq pz + zy \leq MN + t + \delta + yN - MN - t = \delta + yN.$$

Поэтому $p \in y_N^\delta$, т.е. $z_N^t \subset y_N^\delta$ и $z_N^t y_N^\delta = 0$. Итак, $y_M^{s-t} y_N^\delta \leq MN$ и оценка (3.6) получается из (3.7) заменой второго слагаемого на MN и последующим переходом к пределу при $t \rightarrow 0$.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $t > 0$ ($t \geq 0$, если $x_M \neq \emptyset$), $l = t + xy + xM - yM$. Тогда в условиях леммы 10 выполняется неравенство

$$x_M^t y_N^\delta \leq MN + y_M^l y_M^{s-0}. \quad (3.10)$$

Для доказательства нужно только положить в (3.6) $F = x_M^t$ и заметить, что $x_M^t \subset y_M^l$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Как уже отмечалось, неравенство (3.2) достаточно установить только для $\tau = \gamma$. Докажем больше, а именно, что та же оценка сверху справедлива и для расстояния $x_M^\mu y_N^\delta$, где $\mu = \max(\varepsilon, \delta)$. Доказательство распадается на ряд случаев и подслучаев.

СЛУЧАЙ 1. $yM + MN < \delta + yN$, т.е. выполняется условие (3.5) леммы 10. Воспользовавшись следствием из леммы 10 при $t = \mu$, получаем

$$x_M^\mu y_N^\delta \leq MN + y_M^l y_M^{s-0},$$

где

$$l = \mu + yx + xM - yM,$$

$$s = \delta + yN - yM - MN.$$

Отсюда ввиду выпуклости M и неравенства (2.9) имеем

$$x_M^\mu y_N^\delta \leq MN + \frac{y_M^l y_M^{+0}}{l} (l - s). \quad (3.11)$$

Из неравенства треугольника легко следуют соотношения

$$0 \leq l - s \leq |\varepsilon - \delta| + 2xy + NM + MN, \quad (3.12)$$

$$\mu \leq l \leq \mu + 2xy. \quad (3.13)$$

Кроме того, из условия $s > 0$ вытекает

$$0 \leq \frac{l - s}{l} < 1. \quad (3.14)$$

Далее, ввиду (2.18) $y_M^l y_M^{+0} \leq \Phi(yM, l) - l$, а потому из (3.11) следует

$$x_M^\mu y_N^\delta \leq MN + \left(\frac{\Phi(yM, l)}{l} - 1 \right) (l - s). \quad (3.15)$$

Рассмотрим два подслучая.

СЛУЧАЙ 1.1. $xM \geq yM$. По лемме 9, а) имеем $\Phi(yM, l) \leq \Phi(xM, l)$. При этом $l \geq \mu + xy$, и тогда из (3.15) и (3.12) с использованием леммы 9, в) (монотонность отношения $\Phi(a, t)/t$) получаем

$$x_M^\mu y_N^\delta \leq MN + \left(\frac{\Phi(xM, \mu + xy)}{\mu + xy} - 1 \right) (|\delta - \varepsilon| + 2xy + MN + NM). \quad (3.16)$$

СЛУЧАЙ 1.2. $xM < yM$. По лемме 9, а) $\Phi(yM, l) \leq \Phi(xM, \mu + xy)$. Отсюда

$$\begin{aligned} \Phi(yM, l) - l &\leq \Phi(xM, \mu + xy) - \mu - xy + yM - xM \\ &\leq \Phi(xM, \mu + xy) - \mu - xy + yx. \end{aligned}$$

Вследствие неотрицательности числителя и знаменателя дроби $(l - s)/l$ и соотношений (3.12)–(3.14) имеем

$$\frac{l - s}{l} \leq \frac{l - s + yM - xM}{l + yM - xM} \leq \frac{|\delta - \varepsilon| + xy + MN + NM}{\mu + xy}.$$

Таким образом, второе слагаемое в правой части (3.15) можно оценить следующим образом:

$$\begin{aligned} &(\Phi(yM, l) - l) \frac{l - s}{l} \\ &\leq \left(\frac{\Phi(xM, \mu + xy)}{\mu + xy} - 1 \right) (|\delta - \varepsilon| + xy + MN + NM) + xy \frac{l - s}{l} \\ &\leq \left(\frac{\Phi(xM, \mu + xy)}{\mu + xy} - 1 \right) (|\delta - \varepsilon| + 2xy + MN + NM). \end{aligned}$$

Здесь мы еще раз воспользовались соотношением (3.14), а затем (3.3). В результате, как легко видеть, снова приходим к оценке (3.16).

СЛУЧАЙ 2. $yM + MN \geq \delta + yN$ и $yM \leq NM$. Тогда

$$\begin{aligned} x_M^\mu y_N^\delta &\leq x_M^\mu y + y y_N^\delta \leq x_M^\mu y + yN \leq x_M^\mu x + xy + yN \\ &\leq xM + \mu + xy + yN \leq xy + yM + \mu + xy + yN \leq \mu + 2xy + NM + yN. \end{aligned}$$

Но

$$\mu \leq \delta + |\varepsilon - \delta| \leq yM + MN - yN + |\varepsilon - \delta| \leq NM + MN - yN + |\varepsilon - \delta|,$$

следовательно,

$$\begin{aligned} x_M^\mu y_N^\delta &\leq NM + MN + |\varepsilon - \delta| + 2xy + NM \\ &\leq MN + \left(\frac{\Phi(xM, t)}{t} - 1 \right) (|\delta - \varepsilon| + 2xy + 2MN) \end{aligned}$$

при любом $t > 0$, в частности при $t = \mu$.

СЛУЧАЙ 3. $yM + MN \geq \delta + yN$ и $yM > NM$. Положим

$$Q = \bigcup \{B(z, NM) : z \in M\}$$

– расширение множества M . Следующие факты проверяются элементарно: Q выпукло; $N \subset Q$; $yQ = yM - NM > 0$;

$$\begin{aligned} x_M^\mu &\subset Q \cap B(y, yx + xM + \mu); \\ y_N^t &\subset Q \cap B(y, yN + t) \quad \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

Обозначим

$$T = \chi(Q \cap B(y, yx + xM + \mu), Q \cap B(y, yN + 0)).$$

Тогда для любого $\delta \geq 0$

$$x_M^\mu y_N^\delta \leq \chi(x_M^\mu, y_N^{+0}) \leq T,$$

и задача состоит в том, чтобы соответствующим образом оценить величину T . Рассмотрим 4 подслучая.

СЛУЧАЙ 3.1. $yN < yx + xM + \mu$, $xM \geq yM - NM$. Применяя к величине T оценку (2.24) и учитывая при этом первое из двух сделанных предположений, получаем

$$T \leq \Phi(yQ, yx + xM + \mu - yQ) - (yx + xM + \mu - yN) \leq \Phi(yQ, p) - q,$$

где $p = yx + xM + \mu - yQ$, $q = yx + xM + \mu - yN$.

По условию $yQ = yM - NM \leq xM$, значит,

$$T \leq \Phi(xM, p) - q.$$

Но

$$\begin{aligned} \Phi(xM, p) - q &= MN + \Phi(xM, p) - p + p - q - MN \\ &\leq MN + \left(\frac{\Phi(xM, p)}{p} - 1 \right) p + p - q - MN \\ &\leq MN + \left(\frac{\Phi(xM, p)}{p} - 1 \right) (2p - q - MN). \end{aligned}$$

При этом

$$p = yx + xM + \mu - yM + NM \geq \mu + NM.$$

А так как $yM + MN \geq \delta + yN$, то

$$2p - q - MN = yx + xM + \mu - yM + 2NM + yN - (yM + MN) \leq |\varepsilon - \delta| + 2xy + 2NM.$$

Таким образом,

$$x_M^\mu y_N^\delta \leq T \leq MN + \left(\frac{\Phi(xM, \mu + NM)}{\mu + NM} - 1 \right) (|\delta - \varepsilon| + 2xy + 2NM).$$

СЛУЧАЙ 3.2. $yN \leq yx + xM + \mu$, $xM < yM - NM$. Как и в предыдущем случае, получаем

$$T \leq \Phi(yQ, p) - q$$

с теми же p и q . Поскольку $yQ = yM - NM > xM$, то по лемме 9, а) имеем

$$\Phi(yQ, p) \leq \Phi(xM, h),$$

где $h = p + yQ - xM$. По аналогии с тем, как это проделано в предыдущем случае, можно получить следующую оценку:

$$\Phi(xM, h) - q = MN + \left(\frac{\Phi(xM, h)}{h} - 1 \right) (2h - q - MN),$$

где

$$h = p + yQ - xM \geq p \geq \mu + NM,$$

а так как $yN \leq yM + MN - \delta$, то еще и оценку

$$\begin{aligned} 2h - q - MN &= yx + \mu + yN - MN - xM \\ &\leq yx + \mu + yM + MN - \delta - MN - xM \leq |\varepsilon - \delta| + 2xy. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$x_M^\mu y_N^\delta \leq MN + \left(\frac{\Phi(xM, \mu + NM)}{\mu + NM} - 1 \right) (|\delta - \varepsilon| + 2xy).$$

СЛУЧАЙ 3.3. $yN \geq yx + xM + \mu$, $xM < yM - NM$. Первое условие с учетом неравенства (2.24) дает оценку

$$T \leq \Phi(yQ, yN - yQ + 0) - (yN - yx - xM - \mu),$$

причем символ $+0$ можно убрать вследствие непрерывности Φ . Так как $yQ = yM - NM > xM$, то по лемме 9, а) имеем

$$\Phi(yQ, yN - yQ) \leq \Phi(xM, yN - xM).$$

Тогда, полагая $p = yN - xM$, $q = yN - yx - xM - \mu$, получаем

$$T \leq \Phi(xM, p) - q \leq MN + \left(\frac{\Phi(xM, p)}{p} - 1 \right) (2p - q - MN). \quad (3.17)$$

Поскольку

$$p = yN - xM \geq xy + xM + \mu - xM = xy + \mu,$$

а с учетом условия $yN \leq yM + MN - \delta$ еще и

$$\begin{aligned} 2p - q - MN &= yN - xM + yx + \mu - MN \\ &\leq yM + MN - \delta - xM + yx + \mu - MN \leq |\varepsilon - \delta| + 2xy, \end{aligned}$$

то

$$x_M^\mu y_N^\delta \leq MN + \left(\frac{\Phi(xM, \mu + xy)}{\mu + xy} - 1 \right) (|\delta - \varepsilon| + 2xy).$$

СЛУЧАЙ 3.4. $yN \geqslant yx + xM + \mu$, $xM \geqslant yM - NM$. Имеем

$$T \leqslant \Phi(yQ, yN - yQ) - (yN - yx - xM - \mu).$$

Обозначим $p = yN - yQ$, $q = yN - yx - xM - \mu$. Так как $\Phi(yQ, p) \leqslant \Phi(xM, p)$, то для этих p, q выполняется соотношение (3.17). При этом

$$p = yN - yM + NM \geqslant yx + xM + \mu - yM + NM \geqslant \mu + NM.$$

Кроме того, вследствие неравенства

$$\mu \leqslant |\varepsilon - \delta| + \delta \leqslant |\varepsilon - \delta| + yM + MN - yN$$

получаем

$$2p - q - MN = yN - 2yM + 2NM + yx + xM + \mu - MN \leqslant |\varepsilon - \delta| + 2xy + 2NM.$$

Следовательно,

$$x_M^\mu y_N^\delta \leqslant MN + \left(\frac{\Phi(xM, \mu + NM)}{\mu + NM} - 1 \right) (|\delta - \varepsilon| + 2xy + 2NM).$$

Итак, если учесть свойство монотонности отношения $\Phi(a, t)/t$, то в каждом из рассмотренных случаев получена оценка, уточняющая (3.2). Значит, теорема 3, а вместе с ней и теорема 1 полностью доказаны.

Безусловно, представляют интерес оценки τ -устойчивости оператора P , не использующие информацию о геометрии единичной сферы пространства X . При этом можно ожидать, что их доказательство будет более простым, нежели доказательство теоремы 3, а сами оценки – более сильными, по сравнению с оценками, вытекающими из этой теоремы. Так, например, из теоремы 3 и соотношения $\Phi(a, t) - t \leqslant 2a + t$ получаем неравенство

$$\alpha(y_N^\delta, x_M^\varepsilon) \leqslant \alpha(N, M) + \left(\frac{2xM}{\mu} + 1 \right) (|\delta - \varepsilon| + 2xy + 2\alpha(M, N)).$$

Его можно уточнить следующим образом.

ТЕОРЕМА 4. Пусть M – выпуклое подмножество из X , $N \subset X$, $x, y \in X$, $\varepsilon, \delta \geqslant 0$, $\mu + xy > 0$, где $\mu = \max(\varepsilon, \delta)$. Тогда

$$\alpha(y_N^\delta, x_M^\varepsilon) \leqslant \alpha(N, M) + \left(\frac{2xM}{\mu + xy} + 1 \right) (|\delta - \varepsilon| + 2xy + MN + NM). \quad (3.18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала оценим величину $x_M^\varepsilon y_N^\delta$ через правую часть (3.18). При $yM + MN < \delta + yN$ эта оценка следует из неравенства (3.16), полученного при доказательстве теоремы 3 в случае 1. Пусть $yM + MN \geq yN + \delta$. Так как $yN - xM \leq xy + MN$, то

$$\begin{aligned} x_M^\mu y_N^\delta &\leq x_M^\mu y + y y_N^\delta \leq yx + xM + \mu + yN = yx + 2xM + \mu + (yN - xM) \\ &\leq 2xy + 2xM + \mu + MN = MN + \left(\frac{2xM}{\mu + 2xy} + 1 \right) (\mu + 2xy), \end{aligned}$$

и нужная оценка вытекает из соотношений

$$\mu \leq |\varepsilon - \delta| + \delta \leq |\varepsilon - \delta| + yM + MN - yN \leq |\varepsilon - \delta| + NM + MN.$$

Перейдем к оценке для $y_N^\delta x_M^\varepsilon$. В лемме 1 из [1] установлено неравенство

$$y_N^\delta x_M^\varepsilon \leq NM + x_M^{\delta_1+0} x_M^\varepsilon,$$

где $\delta_1 = \delta + xy + yN + NM - xM$. Отсюда получаем

$$y_N^\delta x_M^\varepsilon \leq NM + x_M^{t+0} x_M^\varepsilon$$

при $t = \mu + 2xy + MN + NM$. Поскольку $t > 0$, то, как следует из [2, лемма 5], знак $+0$ в этом неравенстве можно опустить. Ввиду (2.9) имеем

$$x_M^t x_M^\varepsilon \leq \frac{x_M^t x_M^{+0}}{t} (t - \varepsilon),$$

и остается воспользоваться неравенством $x_M^t x_M^{+0} \leq 2xM + t$ (заметим, что это же неравенство справедливо и для величины $x_M^{t+0} x_M^{+0}$, т.е. можно было бы обойтись и без леммы 5 из [2]). Теорема доказана.

Закончим параграф поточечным вариантом оценки (1.8). Для $x \in X$, $M \in \text{Cv}(X)$, $\varepsilon > 0$ и $v = (x, M, \varepsilon)$ выполняются неравенства

$$K_\alpha(v) \leq \frac{\Phi(xM, \varepsilon)}{\varepsilon} - 1 \leq \frac{2xM}{\varepsilon} + 1. \quad (3.19)$$

§ 4. Случай выпуклого множества N

Нередко (например, в приложениях к теории экстремальных задач [9], [10]) выпуклыми являются оба множества M и N . Естественно попытаться воспользоваться этой дополнительной информацией для уточнения полученных оценок устойчивости оператора P .

Обозначим $E = \min(xM, yN)$. Из теоремы 3 вытекает такое

СЛЕДСТВИЕ 5. Если в теореме 3 дополнительно предположить выпуклость множества N , то будет выполняться неравенство

$$\alpha(y_N^\delta, x_M^\varepsilon) \leq \alpha(N, M) + \left(\frac{\Phi(E, \mu)}{\mu} - 1 \right) (|\delta - \varepsilon| + 2xy + 2\alpha(M, N)). \quad (4.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что ввиду сделанного предположения точки (x, M, ε) и (y, N, δ) в теореме 3 можно поменять местами, получая таким образом еще одну оценку для $\alpha(y_N^\delta, x_M^\varepsilon)$, в которой величина $\Phi(xM, \mu)$ заменена на $\Phi(yN, \mu)$. Значит, в (3.2) при $\tau = \alpha$ вместо $\Phi(xM, \mu)$ можно поставить $\min[\Phi(xM, \mu), \Phi(yN, \mu)]$, причем вследствие монотонности функции $\Phi(a, t)$ по a этот минимум равен $\Phi(E, \mu)$, что и требовалось.

Оценка (4.1) уточняет соответствующие результаты из [1], [9], [10], в которых не использовалась информация о геометрии единичной сферы пространства X . Более того, в отличие от оценки

$$\alpha(P(v), P(w)) \leq \left(\frac{\Phi(E, \mu)}{\mu} - 1 \right) \varrho(v, w), \quad (4.2)$$

вытекающей из (3.19), и ее следствия – неравенства

$$\alpha(P(v), P(w)) \leq \left(\frac{2E}{\mu} + 1 \right) \varrho(v, w), \quad (4.3)$$

оценки из [9], [10] имеют качественно иной характер зависимости от входящих в них параметров: вместо E стоит $\max(xM, yN)$, а вместо μ – величина $\min(\varepsilon, \delta)$.

Представляется естественным рассмотреть при $\tau = \alpha, \beta, \gamma$ следующие константы Липшица. Понимая, как и выше, под E и μ соответственно $\min(xM, yN)$ и $\max(\varepsilon, \delta)$, положим

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{V}}(a, s) &= \left\{ (v, w) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V} : v = (x, M, \varepsilon), w = (y, N, \delta), \right. \\ &\quad \left. M, N \in \text{Cv}(X), E \leq a, \mu \geq s, \varrho(v, w) \neq 0 \right\}, \\ \tilde{\mathcal{V}}'(a, s) &= \{ (v, w) \in \tilde{\mathcal{V}} : E = a, \mu = s \}, \\ \tilde{K}_\tau(a, s) &= \sup \left\{ \frac{\tau(P(w), P(v))}{\varrho(v, w)} : (v, w) \in \tilde{\mathcal{V}}(a, s) \right\}, \\ \tilde{K}'_\tau(a, s) &= \sup \left\{ \frac{\tau(P(w), P(v))}{\varrho(v, w)} : (v, w) \in \tilde{\mathcal{V}}'(a, s) \right\}. \end{aligned}$$

Ввиду симметрии очевидны равенства

$$\begin{aligned} \tilde{K}_\alpha(a, s) &= \tilde{K}_\beta(a, s) = \tilde{K}_\gamma(a, s), \\ \tilde{K}'_\alpha(a, s) &= \tilde{K}'_\beta(a, s) = \tilde{K}'_\gamma(a, s). \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \tilde{K}'_\tau(a, s) &\leq \tilde{K}_\tau(a, s), \\ \tilde{K}_\tau(a, s) &= \sup \{ \tilde{K}'_\tau(b, t) : b \leq a, t \geq s \}. \end{aligned}$$

Из оценок (4.2), (4.3) и примера 1 § 3 из [2] вытекает следующая

ТЕОРЕМА 5. При $a \geq 0$, $s > 0$ имеем

$$\tilde{K}_\alpha(a, s) \leq \frac{\Phi(a, s)}{s} - 1 \leq \frac{2a}{s} + 1.$$

А если дополнительно предположить, что единичная сфера пространства X содержит отрезок длины 2, то

$$\tilde{K}'_\alpha(a, s) = \tilde{K}_\alpha(a, s) = \frac{2a}{s} + 1.$$

В заключение сделаем одно общее замечание. Нетрудно показать, что в теоремах 1–4 множество M , а в теореме 5 и множество N можно считать “относительно выпуклыми”, т.е. такими, замыкание которых в X выпукло.

§ 5. Приложения к оценкам устойчивости непрерывного селектора оператора P

Селектором многозначного отображения $F(x)$ называется такое однозначное отображение $s(x)$, для которого $s(x) \in F(x)$ при любом x . В последнее время большое внимание уделяется вопросам существования непрерывного и липшицева селектора оператора метрического проектирования $x \mapsto x_M$ (см., например, [13], [19], [20] и библиографию к ним). В [21]–[23] изучался непрерывный селектор оператора $x \mapsto x_M^\varepsilon$ как для выпуклых, так и для невыпуклых M . В [24] получены оценки устойчивости непрерывного селектора оператора $P: (x, M, \varepsilon) \mapsto x_M^\varepsilon$ с $M \in \text{Cv}(X)$.

В настоящем параграфе уточняются оценки работы [24]. Пусть Y – банахово подпространство из X . Положим

$$\mathcal{V}_Y = \{(x, M, \varepsilon) \in \mathcal{V}(X): M \in \text{Clv}(Y), \varepsilon > 0\},$$

где $\text{Clv}(Y)$ – множество всех непустых замкнутых выпуклых подмножеств из Y . Далее $\mathcal{V}_Y$ рассматривается как метрическое пространство $(\mathcal{V}_Y, \varrho)$ с метрикой ϱ , индуцированной из $\mathcal{V}$.

Рассмотрим P_Y – сужение P на $\mathcal{V}_Y$. Как отмечено в [24], из α -непрерывности оператора P_Y и теоремы Майкла [25] немедленно следует существование непрерывного селектора $s(v)$ оператора P_Y . Кроме того, в [24] показано, что характер непрерывности селектора $s(v)$ зависит от выбора подпространства Y . Так, если Y – конечномерное подпространство, то с помощью точек Штейнера и оценки (4.3) строится поточечно липшицев селектор, а если Y – банахово подпространство, допускающее перенормировку в равномерно выпуклое пространство $(Y, \|\cdot\|_0)$, то опять же с использованием (4.3) выписывается оценка устойчивости селектора через модуль выпуклости пространства $(Y, \|\cdot\|_0)$. Естественно теперь воспользоваться более точной оценкой (4.2).

Сначала предположим, что банахово подпространство Y из X имеет эквивалентную норму $\|\cdot\|_0$ с модулем выпуклости $\varphi_0(t)$. Пусть ν – мера перенормировки

пространства Y , т.е. такое минимальное число $\nu \geq 1$, для которого выполняются неравенства

$$\nu^{-1} \|y\|_0 \leq \|y\| \leq \nu \|y\|_0$$

при любом $y \in Y$. Для $a, t \geq 0$, $a + t > 0$, положим

$$\Lambda[a, t] = (a + t) \varphi_0^{-1} \left(\frac{2t}{a + t} \right).$$

В [24] доказано, что $\Lambda[a, t]$ не убывает по каждой из переменных.

ТЕОРЕМА 6. Пусть Y – банахово подпространство из X (возможно, совпадающее с самим X), допускающее эквивалентную перенормировку в равномерно выпуклом пространстве $(Y, \|\cdot\|_0)$ с модулем выпуклости $\varphi_0(t)$ и мерой перенормировки ν . Тогда оператор P_Y обладает на множестве $\mathcal{V}_Y$ непрерывным селектором $s(v)$, удовлетворяющим при любых $v = (x, M, \varepsilon)$, $w = (y, N, \delta) \in \mathcal{V}_Y$ следующим неравенствам:

$$\|s(v) - s(w)\| \leq \nu^2 \Lambda[G, \alpha(x_M^\varepsilon, y_N^\delta)] \leq \nu^2 \Lambda \left[G, \left(\frac{\Phi(E, \mu)}{\mu} - 1 \right) \varrho(v, w) \right], \quad (5.1)$$

где

$$G = \min(\|x\| + xM, \|y\| + yN), \\ E = \min(xM, yN), \quad \mu = \max(\varepsilon, \delta).$$

Здесь и далее, как обычно, функция $\Phi(a, s)$ определяется через модуль выпуклости φ пространства X .

Первое неравенство в (5.1) фактически доказано в [24], а второе является следствием (4.2) и свойства монотонности функции $\Lambda[a, t]$ по t . При этом имеется в виду то, что, как и в [24], в качестве $s(v)$ берется проекция нуля на множество x_M^ε в пространстве $(Y, \|\cdot\|_0)$. Отметим, что в качестве G можно взять величину $2 \min(\|x\|, \|y\|)$, которая, очевидно, не меньше, чем G .

Рассмотрим теперь случай конечномерного подпространства $Y \subset X$, $\dim Y = n$. Селектор $s(v)$ назовем *однородным*, если для любого $t \in \mathbb{R}$ выполняется равенство $s(tv) = ts(v)$, где для $v = (x, M, \varepsilon)$ произведение tv определяется как точка $(tx, tM, |t|\varepsilon)$. Согласно теореме Джона (см., например, [26]) пространство $(Y, \|\cdot\|)$ можно перенормировать в евклидово $(Y, \|\cdot\|_2)$ так, чтобы при любых $x \in Y$ выполнялись неравенства

$$\|x\| \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|. \quad (5.2)$$

Известно [27], что точки Штейнера $s(A)$ выпуклых ограниченных множеств $A \subset Y$ удовлетворяют условию Липшица относительно хаусдорфовой метрики $\alpha_2(A, B)$ в пространстве $(Y, \|\cdot\|_2)$ с константой Липшица, равной $2\omega_{n-1}/\omega_n$, где ω_n – объем единичного шара в n -мерном пространстве $(Y, \|\cdot\|_2)$, $n \geq 2$.

ЛЕММА 11. $2\omega_{n-1}/\omega_n < \sqrt{n}$ при $n \geq 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся формулами $\omega_n = \pi^{n/2}/\Gamma(1 + n/2)$, $\Gamma(n + 1) = n!$, $\Gamma(n + 1/2) = \sqrt{\pi} (2n)!/4^n n!$. Рассмотрим случай $n = 2k$. По формуле Стирлинга получаем

$$\frac{2\omega_{2k-1}}{\omega_{2k}} = \frac{2k! 4^k k!}{\pi(2k)!} = 2\sqrt{\frac{k}{\pi}} e^{\theta_k/(6k) - \theta'_k/(24k)},$$

где $0 < \theta_k, \theta'_k < 1$. Следовательно,

$$\frac{2\omega_{2k-1}}{\omega_{2k}} < 2\sqrt{\frac{k}{\pi}} e^{1/6} < \sqrt{n}.$$

Аналогично, при $n = 2k + 1$ имеем

$$\frac{2\omega_{2k}}{\omega_{2k+1}} < 2\sqrt{\frac{k}{\pi}} e^{1/24} < \sqrt{n}.$$

Лемма доказана.

Итак, константа Липшица проектора Штейнера меньше $\sqrt{n}$ при $n \geq 2$ и, очевидно, равна 1 при $n = 1$. Таким образом, для любых выпуклых ограниченных множеств $A, B \subset Y$ справедливо неравенство

$$\|s(A) - s(B)\|_2 \leq \sqrt{n} \alpha_2(A, B).$$

Отсюда и из (5.2) получаем

$$\|s(A) - s(B)\| \leq \|s(A) - s(B)\|_2 \leq n\alpha(A, B),$$

где $\alpha(A, B)$ – хаусдорфово расстояние в $(Y, \|\cdot\|)$. Если теперь при доказательстве теоремы 4 из [24] воспользоваться этой оценкой, а также неравенством (4.2) вместо (4.3), то придем к такому результату.

ТЕОРЕМА 7. Пусть Y – n -мерное подпространство из X ; тогда для оператора P_Y существует однородный селектор s , удовлетворяющий неравенствам

$$\|s(v) - s(w)\| \leq n\alpha(x_M^\varepsilon, y_N^\delta) \leq n \left(\frac{\Phi(E, \mu)}{\mu} - 1 \right) \varrho(v, w), \quad (5.3)$$

где v, w, E, μ – те же, что и в теореме 6.

Как и в [24], в качестве значения $s(v)$ берется точка Штейнера множества x_M^ε в пространстве $(Y, \|\cdot\|_2)$. Определение и свойства точек Штейнера можно найти в [26], [28].

Заметим, что оценка (5.3) отличается от соответствующей оценки теоремы 4 из [24] еще и тем, что вместо множителя $n\nu^2$ удалось поставить n .

Из теоремы 7 немедленно вытекают оценки для констант Липшица селектора $s(v)$. Положим

$$\begin{aligned} k(v) &= \sup \left\{ \frac{\|s(v) - s(w)\|}{\varrho(v, w)} : w \in \mathcal{V}_Y, \varrho(v, w) \neq 0 \right\}; \\ \tilde{\mathcal{V}}_Y(a, s) &= \left\{ (v, w) \in \mathcal{V}_Y \times \mathcal{V}_Y : v = (x, M, \varepsilon), w = (y, N, \delta), \right. \\ &\quad \left. E \leq a, \mu \geq s, \varrho(v, w) \neq 0 \right\}; \\ \tilde{k}(a, s) &= \sup \left\{ \frac{\|s(v) - s(w)\|}{\varrho(v, w)} : (v, w) \in \tilde{\mathcal{V}}_Y(a, s) \right\}. \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 6. Для $v = (x, M, \varepsilon) \in \mathcal{V}_Y$ и $a \geq 0, s > 0$ имеем

$$k(v) \leq n \left(\frac{\Phi(xM, \varepsilon)}{\varepsilon} - 1 \right), \quad \tilde{k}(a, s) \leq n \left(\frac{\Phi(a, s)}{s} - 1 \right).$$

§ 6. Константы Липшица по отдельным переменным

При доказательстве равенств (1.9) из теоремы 1 фактически было показано (см. конец § 1), что оценки τ -констант Липшица оператора $P(x, M, \varepsilon)$ по совокупности трех переменных являются в общем случае неулучшаемыми оценками и для τ -констант Липшица оператора P при вариации одной переменной ε . Естественно поставить вопрос о неулучшаемых оценках τ -констант Липшица по двум другим переменным x и M . Оказывается, что оценки устойчивости оператора P по совокупности трех переменных, полученные в § 2, 3, приводят к неулучшаемым оценкам τ -констант Липшица не только по переменной ε , но и по x и M . Определим τ -константы Липшица, $\tau = \alpha, \beta, \gamma$, в точке $v = (x, M, \varepsilon)$ по каждой из переменных в отдельности следующим образом:

$$\begin{aligned} K_\tau^1(v) &= \sup \left\{ \frac{\tau(y_M^\varepsilon, x_M^\varepsilon)}{xy} : y \in X, y \neq x \right\}, \\ K_\tau^2(v) &= \sup \left\{ \frac{\tau(x_N^\varepsilon, x_M^\varepsilon)}{\alpha(M, N)} : \emptyset \neq N \subset X, \alpha(M, N) \neq 0 \right\}, \\ K_\tau^3(v) &= \sup \left\{ \frac{\tau(x_M^\delta, x_M^\varepsilon)}{|\delta - \varepsilon|} : \delta \geq 0, \delta \neq \varepsilon \right\}. \end{aligned}$$

Для $a, s \geq 0, i = 1, 2, 3$, обозначим

$$K_\tau^i(a, s) = \sup \{ K_\tau^i(v) : v = (x, M, \varepsilon) \in \mathcal{V}, M \in \text{Cv}(X), xM \leq a, \varepsilon \geq s \}.$$

Ясно, что при $i = 1, 2, 3$ выполняются соотношения

$$K_\alpha^i(v) = \max(K_\beta^i(v), K_\gamma^i(v)), \quad K_\alpha^i(a, s) = \max(K_\beta^i(a, s), K_\gamma^i(a, s)).$$

Через l_∞^n обозначим пространство векторов $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_\infty = \max |x_i|$. Заметим, что единичная сфера S пространства X содержит отрезок длины 2 тогда и только тогда, когда пространство l_∞^2 изометрично и изоморфно вкладывается в X .

ТЕОРЕМА 8. 1) При $a \geq 0, s > 0$ имеем

$$K_\alpha^1(a, s) \leq 2 \left(\frac{\Phi(a, s)}{s} - 1 \right) \leq \frac{4a}{s} + 2, \quad (6.1)$$

$$K_\alpha^2(a, s) \leq 2 \left(\frac{\Phi(a, s)}{s} - 1 \right) + 1 \leq \frac{4a}{s} + 3, \quad (6.2)$$

$$K_\alpha^3(a, s) \leq \frac{\Psi(a, s)}{s} \leq \frac{2a}{s} + 1. \quad (6.3)$$

2) Если дополнительно предположить, что единичная сфера S пространства X содержит отрезок длины 2, то при $\tau = \alpha, \beta, \gamma$ справедливы равенства

$$K_\tau^2(a, s) = \frac{4a}{s} + 3, \quad (6.4)$$

$$K_\tau^3(a, s) = \frac{2a}{s} + 1. \quad (6.5)$$

3) Если же в пространство X изометрично и изоморфно вкладывается пространство l_∞^3 , то при $\tau = \alpha, \beta, \gamma$

$$K_\tau^1(a, s) = \frac{4a}{s} + 2. \quad (6.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценки (6.1) сразу следуют из (1.8) – нужно только учесть, что величина xy входит в формулу для расстояния $\varrho(v, w)$ с коэффициентом 2. Оценки (6.2) вытекают из неравенства

$$\alpha(x_N^s, x_M^s) \leq \left[2 \left(\frac{\Phi(xM, s)}{s} - 1 \right) + 1 \right] \alpha(M, N),$$

которое, в свою очередь, является частным случаем оценки (3.2). Из (2.9) с учетом (2.3) и теоремы 2 без труда получаем неравенство (6.3). По поводу равенства (6.5) см. конец § 1. Доказательство (6.4), очевидно, достаточно провести только в случае $X = l_\infty^2$, чем мы и воспользуемся.

Пусть x – начало координат $(0, 0)$ и $t > 0$. За множество M возьмем отрезок с концами $p = (-a - s, a + s + 2t)$, $q = (a, a)$, а за N – отрезок с концами $k = (-a - s - t, a + s + t)$, $l = (a + t, a + t)$. Ясно, что $xM = xq = a$, а так как $pk = ql = t$, то $\alpha(M, N) = t$. Кроме того, $x_N^s = N$. Обозначим через z точку пересечения $M \cap S(x, xM + s)$; тогда $x_M^s = [z, q]$. Поэтому при $\tau = \alpha, \beta$ имеем

$$\tau(x_N^s, x_M^s) = kz.$$

Положим $c = (-a - s, a + s)$, $d = (-a - s, a)$. Тогда можно записать $kz = kc + cz = t + cz$. Но по построению $cz/dq = pc/pd$, где $dq = 2a + s$, $pc = 2t$, $pd = s + 2t$. Значит,

$$kz = t + \frac{2a + s}{s + 2t} 2t.$$

Отсюда для $\tau = \alpha, \beta$ получаем

$$K_{\tau}^2(a, s) \geq \sup_{t>0} \frac{\tau(x_N^s, x_M^s)}{t} = 1 + \sup_{t>0} \frac{4a + 2s}{s + 2t} = \frac{4a}{s} + 3,$$

что и доказывает (6.4) при $\tau = \alpha, \beta$. Рассмотрим случай $\tau = \gamma$.

Поменяем местами множества M и N : $M = [k, l]$, $N = [p, q]$. Затем во всех координатах построенных выше точек заменим параметр a на $a - t$. Тогда будем иметь $xM = a$, $dq = 2a + s - 2t$, pc, pd – те же, что и раньше. По аналогии с предыдущим случаем получаем

$$\gamma(x_N^s, x_M^s) = kz = t + \frac{2a + s - 2t}{s + 2t} 2t,$$

откуда

$$K_{\gamma}^2(a, s) \geq \sup_{t>0} \frac{\gamma(x_N^s, x_M^s)}{t} = \frac{4a}{s} + 3.$$

Осталось доказать равенство (6.6). Опять замечаем, что его достаточно установить только в случае $X = l_{\infty}^3$. Пусть $x = (0, 0, 0)$, $t > 0$, $p = (-a, a, a)$, $q = (a + s + 2t, a + s + 2t, a)$, $M = \text{span}\{p, q\}$ – прямая, проходящая через точки p и q . Имеем $xM = xp = a$. Через z обозначим точку пересечения $[p, q] \cap S(x, a + s)$. Понятно, что $x_M^s = [p, z]$. Положим $y = (t, t, -t)$. Нетрудно проверить, что $yM = a + t$, а так как $yq = yM + s$ и $yp = yM$, то $y_M^s = [p, q]$. Таким образом,

$$y_M^s x_M^s = qz.$$

Пусть $c = (a + s + 2t, a + s, a)$, $d = (a + s + 2t, a, a)$. Тогда по построению $qz/qp = qc/qd$, причем $qp = 2xM + s + 2t$, $qc = 2t$, $qd = s + 2t$. Значит,

$$K_{\beta}^1(a, s) \geq \sup_{t>0} \frac{y_M^s x_M^s}{t} = 2 \sup_{t>0} \frac{2a + s + 2t}{s + 2t} = \frac{4a}{s} + 2,$$

что и доказывает равенство (6.6) при $\tau = \beta$.

Для его доказательства при $\tau = \gamma$ нужно в построенном примере поменять местами точки x и y , считая при этом, что $xM = a$, т.е., другими словами, производя всюду замену $a + t$ на t . Тогда $yM = a - t$, $pq = 2yM + s + 2t = 2a + s$, qc, qd – те же, что и выше. А так как

$$\gamma(y_M^s, x_M^s) = x_M^s y_M^s = qz = qp \cdot qc/qd,$$

то

$$K_{\gamma}^1(a, s) \geq \sup_{t>0} \frac{4a + 2s}{s + 2t} = \frac{4a}{s} + 2.$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Используя (2.22) можно выписать более точные, чем (6.1), (6.2), оценки для $K_{\beta}^i(a, s)$, заменяя величину $\Phi(a, s)/s - 1$ на $\Psi(a, s)/s$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. По аналогии с константами $\tilde{K}_{\tau}(a, s)$ можно ввести (с соответствующими упрощениями в определениях) константы $\tilde{K}_{\tau}^i(a, s)$, $i = 1, 2, 3$, для которых также будут выполняться соотношения (6.1)–(6.6) теоремы 8. Это становится вполне очевидным, если учесть, что во всех примерах, построенных при доказательстве теоремы 8, фигурируют только выпуклые аппроксимирующие множества. Не менее очевиден и другой вариант теоремы 8, когда константы $K_{\tau}^i(a, s)$ заменяются на $K'_{\tau}{}^i(a, s)$, аналогичные константам $K'_{\tau}(a, s)$; при этом все утверждения теоремы переносятся в полной мере.

Список литературы

1. Маринов А. В. Устойчивость ε -квазирешений операторных уравнений I рода // Приближение функций полиномами и сплайнами: Сб. ст. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1985. С. 105–117.
2. Маринов А. В. Оценки устойчивости метрической ε -проекции через модуль выпуклости пространства // Тр. ИММ УрО РАН. 1992. Т. 2. С. 85–109.
3. Wulbert D. E. Continuity of metric projections. Approximation theory in a normed linear lattice: Thes. Univ. Texas Comp. Center. Austin, 1966. P. 105.
4. Лисковец О. А. Метод ε -квазирешений для уравнений I рода // Дифференц. уравн. 1973. Т. 9. № 10. С. 1851–1861.
5. Лисковец О. А. Вариационные методы решения неустойчивых задач. Минск: Наука и техника, 1981.
6. Бердышев В. И. Варьирование нормы в задаче о наилучшем приближении // Матем. заметки. 1981. Т. 29. № 2. С. 181–196.
7. Бердышев В. И. Непрерывность многозначного отображения, связанного с задачей минимизации функционала // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1980. Т. 44. № 3. С. 483–509.
8. Маринов А. В. Непрерывность и связность метрической δ -проекции // Аппроксимация в конкретных и абстрактных банаховых пространствах: Сб. ст. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1987. С. 82–95.
9. Attouch H., Wets R. J.-B. Lipschitzian stability of ε -approximate solutions in convex optimisation. Laxenburg, 1987. 31 p. (WP-87-25, IIASA).
10. Attouch H., Wets R. J.-B. Quantitative stability of variational systems. I. The epigraphical distance. Laxenburg, 1988. 41 p. (WP-88-8, IIASA).
11. Гаркави А. Л. Теория наилучшего приближения в линейных нормированных пространствах // Итоги науки и техники. Матем. анализ. М.: ВИНТИ, 1969. С. 75–132.
12. Власов Л. П. Аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах // УМН. 1973. Т. 28. № 6. С. 3–66.
13. Deutsch F. A survey of metric selections // Contemporary Math. 1983. V. 18. P. 49–71.
14. Figiel T. On the moduli of convexity and smoothness // Studia Math. 1976. V. LVI. № 2. P. 121–155.
15. Гуларий В. И. О дифференциальных свойствах модулей выпуклости банаховых пространств // Математические исследования. Т. II. Вып. 1. Кишинев: РИО АН МССР, 1966. С. 141–148.
16. Дистель Дж. Геометрия банаховых пространств. Киев: Вища шк., 1980.
17. Björnestål B. O. Local Lipschitz continuity of the metric projection operator // Banach Center Publications. 1979. V. 4. P. 43–54.

18. *Кадец М.И.* О топологической эквивалентности равномерно выпуклых пространств // УМН. 1955. Т. 10. №4. С. 137–141.
19. *Deutsch F., Li W., Park S.-H.* Characterization of continuous and Lipschitz continuous metric selections in normed linear spaces // J. Approxim. Theory. 1989. V. 58. № 3. P. 297–314.
20. *Brown A. L.* Set valued mappings, continuous selections, and metric projections // J. Approxim. Theory. 1989. V. 57. № 1. P. 48–68.
21. *Конягин С.В.* О непрерывных операторах обобщенного рационального приближения // Матем. заметки. 1988. Т. 44. №3. С. 404.
22. *Царьков И.Г.* Свойства множеств, обладающих непрерывной выборкой из оператора P^δ // Матем. заметки. 1990. Т. 48. №4. С. 122–131.
23. *Альбрехт П.В.* Порядки модулей непрерывности операторов почти наилучшего приближения // Матем. сб. 1994. Т. 185. №9. С. 3–28.
24. *Маринов А.В.* Оценки устойчивости непрерывной селекции для метрической почти-проекции // Матем. заметки. 1994. Т. 55. №4. С. 47–53.
25. *Michael E.* Continuous selections // J. Ann. Math. Ser. 2. 1956. V. 63. № 2. P. 361–381.
26. *Грюнбаум Б.* Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел. М.: Наука, 1971.
27. *Посицельский Е.Д.* О липшицевых отображениях в пространстве выпуклых тел // Оптимизация. Сб. трудов. 1971. №4 (21). С. 83–89.
28. *Shepard G. C.* The Steiner point of a convex polytope // Canad. J. Math. 1966. V. 18. № 6. P. 1294–1300.

E-mail: marinov@apprecat.imm.intec.ru

Поступило в редакцию
30.VIII.1995