Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Платонов, Инвариантные подпространства в некоторых функциональных пространствах на симметрических пространствах. II, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1998, том 62, выпуск 2, 131–168

DOI: <https://doi.org/10.4213/im178>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 14:11:47

УДК 517.954

С. С. Платонов

Инвариантные подпространства в некоторых функциональных пространствах на симметрических пространствах. II

Пусть G – полупростая связная группа Ли с конечным центром, K – максимальная компактная подгруппа в G , $M = G/K$ – риманово симметрическое пространство некомпактного типа. Изучается задача об описании строения линейных замкнутых подпространств в различных функциональных топологических векторных пространствах на M , инвариантных относительно квазирегулярного представления группы G . Рассмотрен случай, когда M – симплектическое симметрическое пространство ранга 1.

Библиография: 17 наименований.

§ 1. Введение и формулировка основных результатов

Пусть группа G транзитивно действует на гладком многообразии M . Для $g \in G$ и любой функции $f(x)$ на M положим

$$(\pi(g)f)(x) = f(g^{-1}x). \quad (1.1)$$

Локально выпуклое пространство (ЛВП) $\mathcal{F}$, состоящее из комплекснозначных функций на M (обычных или обобщенных), будем называть π -инвариантным, если из $f(x) \in \mathcal{F}$ и $g \in G$ следует, что $\pi(g)f \in \mathcal{F}$ и отображение $g \rightarrow \pi(g)f$ из G в $\mathcal{F}$ непрерывно. В этом случае операторы $\pi(g)|_{\mathcal{F}}$ (будем обозначать их просто через $\pi(g)$) определяют квазирегулярное представление группы G в топологическом векторном пространстве $\mathcal{F}$. Линейное подпространство $H \subseteq \mathcal{F}$ будем называть *инвариантным подпространством* (ИПП), если оно замкнуто и π -инвариантно. Одной из основных задач гармонического анализа на группах Ли является задача об описании всех ИПП для конкретных групп Ли и конкретных функциональных пространств, выделяемых некоторыми условиями гладкости и роста (см. [1], где перечислены некоторые результаты об описании ИПП).

Далее будем рассматривать случай, когда $M = G/K$ – риманово симметрическое пространство некомпактного типа, G – полупростая связная группа Ли с конечным центром, K – максимальная компактная подгруппа в группе G . Группа G транзитивно действует на M левыми сдвигами. Риманова метрика на $M = G/K$ индуцируется формой Киллинга на алгебре Ли $\mathfrak{g}_0$ группы G . В качестве

Работа поддержана РФФИ, проект 95-01-01391.

функциональных пространств $\mathcal{F}$ будем рассматривать пространства двух классов. Пространства одного класса состоят из “всех” функций на M , удовлетворяющих некоторым условиям гладкости. Этому классу принадлежат, например, пространства d раз непрерывно дифференцируемых функций $C^d(M)$ ($d = 0, 1, 2, \dots, \infty$), в частности пространства $C^0(M) = C(M)$ непрерывных функций и $C^\infty(M) = \mathcal{E}(M)$ бесконечно дифференцируемых функций (все пространства берутся с обычными топологиями). Более точно: пусть $\mathcal{D}$ – пространство бесконечно дифференцируемых функций на M с компактным носителем, $\mathcal{D}'$ – пространство обобщенных функций на M , тогда в качестве $\mathcal{F}$ можно взять любое полное ЛВП такое, что

$$\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{D}'$$

(вложения предполагаются непрерывными). Будем называть такие пространства $\mathcal{F}$ *пространствами типа 1*.

Другие функциональные пространства состоят из функций экспоненциального роста в некотором смысле, который нуждается в уточнении. Пусть $o = eK$ – фиксированная точка пространства $M = G/K$ (e – единичный элемент в группе G). Для $x \in M$ пусть $|x|$ – расстояние от точки x до точки o . Обозначим через C_k , $k \in \mathbb{R}$, пространство непрерывных функций $f(x)$ на M , для которых $|f(x)|e^{-k|x|} \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$. Пространство C_k является банаховым пространством (БП) относительно нормы

$$N_k(f) = \sup_{x \in M} |f(x)|e^{-k|x|}.$$

Пространство

$$C_* = \bigcup_{k>0} C_k$$

снабдим топологией индуктивного предела БП C_k .

Пусть $\mathfrak{g}_0$ – алгебра Ли группы G . Для $X \in \mathfrak{g}_0$ и функции $f(x)$ пусть

$$(Xf)(x) = \frac{d}{dt} f(\exp(-tX)x) \Big|_{t=0}, \quad (1.2)$$

т.е. действие Xf индуцировано действием (1.1) группы G . Выберем какой-нибудь базис $X_1, \dots, X_m$ в $\mathfrak{g}_0$. Через $\mathcal{E}_k$ обозначим множество функций $f(x) \in C^\infty(M)$, которые принадлежат пространству C_k вместе со всеми производными, т.е.

$$X_{i_1} \dots X_{i_r} f \in C_k$$

для любых векторов $X_{i_1}, \dots, X_{i_r}$ из базиса. Пространство $\mathcal{E}_k$ является локально выпуклым пространством с топологией, порожденной семейством полунорм $N_{k,d}$, $d \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$, где

$$N_{k,d}(f) = \sum N_k(X_{i_1} \dots X_{i_r} f),$$

суммирование происходит по всевозможным наборам $(i_1, \dots, i_r)$, $0 \leq r \leq d$, каждый индекс в наборе пробегает значения от 1 до m .

Пространство

$$\mathcal{E}_* = \bigcup_{k>0} \mathcal{E}_k$$

снабдим топологией индуктивного предела ЛВП $\mathcal{E}_k$.

Пусть

$$\mathcal{K} = \bigcap_{k>0} \mathcal{E}_{-k}.$$

Пространство $\mathcal{K}$ состоит из функций, которые стремятся к нулю со всеми производными быстрее, чем $e^{-k|x|}$ для любого $k > 0$. Пространство $\mathcal{K}$ является ЛВП с топологией, порожденной системой полунорм $N_{-k,d}$ для всех $k > 0$, $d \in \mathbb{Z}_+$. Пусть $\mathcal{K}'$ – сопряженное к $\mathcal{K}$ пространство, снабженное слабой топологией. $\mathcal{K}'$ естественно назвать *пространством обобщенных функций экспоненциального роста*.

Будем называть полное π -инвариантное пространство $\mathcal{F}$ *функциональным пространством экспоненциального роста* или *пространством типа 2*, если

$$\mathcal{E}_* \subseteq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{K}'$$

(вложения предполагаются непрерывными).

Примерами пространств типа 2 являются пространства C_* и $\mathcal{E}_*$. Другие примеры пространств типа 2 приведены в [1, § 2].

Задачи об описании строения ИПП в функциональных пространствах на симметрических пространствах (особенно в пространстве $C^\infty(M)$) тесно связаны с задачами о спектральном синтезе на симметрических пространствах, о структуре решений уравнений и систем уравнений в свертках и с проблемой Помпейю на симметрических пространствах (см. [2]–[5]). Для симметрических пространств ранга ≥ 2 пока нет подходов к описанию строения ВСЕХ ИПП и, по-видимому, эта задача очень сложная (см. [3]), хотя удастся получить описание строения некоторых важных ИПП в $C^\infty(M)$, которые являются пространствами решений инвариантных дифференциальных уравнений и уравнений в свертках на M (см. [6], [7]).

Настоящая работа является продолжением серии статей, в которых получено полное описание ИПП в функциональных пространствах типов 1 и 2 на симметрических пространствах ранга 1 некомпактного типа. Из классификации симметрических пространств (см. [8]) известно, что все римановы симметрические пространства G/K ранга 1 некомпактного типа исчерпываются тремя бесконечными сериями (всюду $n \geq 2$): $SO_0(n, 1)/SO(n)$, $SU(1, n)/U(n)$, $Sp(1, n)/Sp(1) \times Sp(n)$, и одним особым симметрическим пространством (пространством Кэли).

Пусть Λ – множество классов эквивалентности неприводимых конечномерных представлений группы K , или, эквивалентно, множество старших весов неприводимых представлений, так как любое неприводимое представление группы K задается своим старшим весом. Для $\lambda \in \Lambda$ пусть $T^\lambda(u)$ – соответствующее неприводимое представление группы K , E^λ – пространство представления, $\langle, \rangle$ – некоторая K -инвариантная эрмитова форма в E^λ .

Если $\mathcal{F}$ – произвольное ЛВП, состоящее из функций на M , E – конечномерное нормированное пространство над $\mathbb{C}$, то тензорное произведение векторных пространств $\mathcal{F} \otimes E$ естественным образом отождествляется с пространством функций на M со значениями в E и снабжается топологией тензорного произведения ЛВП [9]. Через $\mathcal{F}^{(\lambda)}$ обозначим множество функций $F \in \mathcal{F} \otimes E^\lambda$, удовлетворяющих условию

$$F(ux) = T^\lambda(u)F(x) \quad \forall u \in K. \quad (1.3)$$

Подпространство $\mathcal{F}^{(\lambda)}$ замкнуто в $\mathcal{F} \otimes E^\lambda$ и снабжается индуцированной топологией. В частности, возникают пространства $C^{d(\lambda)}$ и $\mathcal{E}^{(\lambda)} = C^\infty(\lambda)$. Пусть Λ_0 – множество тех $\lambda \in \Lambda$, для которых $\mathcal{F}^{(\lambda)} \neq \{0\}$.

Для любого ИПП $H \subset \mathcal{F}$ (везде будем считать, что $H \neq \mathcal{F}$) через $H^{(\lambda)}$ обозначим множество всех функций $F(x) \in \mathcal{F}^{(\lambda)}$ таких, что для всякого $\xi \in E^\lambda$ функция $f_\xi(x) = \langle F(x), \xi \rangle \in H$. Если $\mathcal{F}$ – полное ЛВП, то подпространство H однозначно восстанавливается по набору подпространств $H^{(\lambda)}$, а именно H совпадает с замыканием в $\mathcal{F}$ линейной оболочки функций $\langle F(x), \xi \rangle$ при $F \in H^{(\lambda)}$, $\xi \in E^\lambda$, $\lambda \in \Lambda$ (см. [1, § 3]). Будем называть подпространства $H^{(\lambda)}$ *ячейками ИПП H* или просто ячейками. Ненулевые ячейки могут быть только при $\lambda \in \Lambda_0$.

Общая схема описания ИПП следующая: описывается строение всевозможных ячеек и затем определяются условия, при которых набор ячеек соответствует одному ИПП. Для симметрических пространств $\mathrm{SO}_0(n, 1)/\mathrm{SO}(n)$ и $\mathrm{SU}(1, n)/\mathrm{U}(n)$ такое описание ИПП получено в [1], [10], [11]. В настоящей статье описаны ИПП для $M = \mathrm{Sp}(1, n)/\mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(n)$.

В дальнейшем, если не оговорено противное, будем предполагать, что $M = \mathrm{Sp}(1, n)/\mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(n)$, $G = \mathrm{Sp}(1, n)$, $K = \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(n)$. Пусть Δ – оператор Лапласа–Бельтрами на симметрическом пространстве M , $\tilde{\Delta} = 8(n+2)\Delta$. Для $\mu \in \mathbb{C}$ и натурального r через $V_{\mu, r}^{(\lambda)}$ обозначим подпространство в $\mathcal{E}^{(\lambda)}$, состоящее из всех функций $F(x)$, удовлетворяющих дифференциальному уравнению

$$(\tilde{\Delta} + \mu^2 + \rho^2)^r F = 0, \quad \rho = 2n + 1.$$

Далее будет показано, что при $\lambda \in \Lambda_0$ $\dim V_{\mu, r}^{(\lambda)} = r$ и в пространстве $V_{\mu, r}^{(\lambda)}$ можно выбрать жорданов базис, т.е. такой базис $F_1, \dots, F_r$, что $\tilde{\Delta}F_1 = -(\mu^2 + \rho^2)F_1$, $\tilde{\Delta}F_k = -(\mu^2 + \rho^2)F_k + F_{k-1}$ для $k \geq 2$.

Для всех рассматриваемых пространств $\mathcal{F}$ подпространство $V_{\mu, r}^{(\lambda)}$ содержится в $\mathcal{F}^{(\lambda)}$. Если обозначить

$$\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq 0 \text{ и при } \operatorname{Re} z = 0 \quad \operatorname{Im} z \geq 0\},$$

то без ограничения общности можно считать, что $\mu \in \mathbb{C}_+$.

Подпространство $V_{\mu, r}^{(\lambda)}$ является простейшей ячейкой в $\mathcal{F}^{(\lambda)}$. В общем случае строение ячеек в $\mathcal{F}^{(\lambda)}$ описывается следующей теоремой.

ТЕОРЕМА I. Для любой ячейки $H^{(\lambda)}$ в $\mathcal{F}^{(\lambda)}$ ($\lambda \in \Lambda_0$) существует единственный конечный или счетный набор комплексных чисел σ ($\sigma \subset \mathbb{C}_+$ и каждое число может входить в σ с конечной кратностью) такой, что $H^{(\lambda)}$ является замыканием в $\mathcal{F}^{(\lambda)}$ линейной оболочки подпространств $V_{\mu, r}^{(\lambda)}$, где μ пробегает набор σ , а r – кратность числа μ в этом наборе.

Естественно назвать набор σ спектром ячейки $H^{(\lambda)}$. Можно получить и описание спектров ячеек. Для пространства $\mathcal{F}$ типа 1 (типа 2) всевозможные спектры совпадают с наборами, удовлетворяющими следующему условию (A_1) (соответственно условию (A_2)).

(A_1) Существует целая ненулевая функция $\Phi(z)$, $z = \xi + i\eta$, для которой каждое число μ , входящее в набор σ с кратностью r , является корнем функции $\Phi(z)$ кратности r , причем

$$|\Phi(z)| \leq Ae^{B|\eta|}(1 + |z|)^C$$

для некоторых $A, B, C > 0$ (такие функции $\Phi(z)$ являются преобразованиями Фурье обобщенных функций с компактными носителями).

(A_2) При каждом $t > 0$ набор $\sigma_t = \{\mu \in \sigma: \operatorname{Re} \mu \leq t\}$ должен быть конечным или, после упорядочения чисел из σ_t в порядке возрастания $\operatorname{Im} \mu$ ($0 \leq \operatorname{Im} \mu_1 \leq \operatorname{Im} \mu_2 \leq \dots$), должно выполняться условие $\operatorname{Im} \mu_j/j \rightarrow \infty$.

Пусть $\mathfrak{k}_0$ – алгебра Ли группы K , $\mathfrak{k}$ – комплексификация алгебры $\mathfrak{k}_0$. В нашем случае группа K является полупростой и односвязной, поэтому неприводимые представления группы K отождествляются с конечномерными неприводимыми представлениями соответствующей полупростой алгебры $\mathfrak{k}$. Так как каждое неприводимое конечномерное представление алгебры Ли $\mathfrak{k}$ однозначно определяется своим старшим весом, то множество Λ отождествляется с множеством старших весов алгебры Ли $\mathfrak{k}$.

Пусть $\mathfrak{h}$ – произвольная полупростая алгебра Ли над $\mathbb{C}$, $\mathfrak{h}$ – ее подалгебра Картана. Если α – корень алгебры $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{k}(\alpha)$ – соответствующее ему корневое подпространство, то $[\mathfrak{k}(\alpha), \mathfrak{k}(-\alpha)]$ – одномерное подпространство в $\mathfrak{h}$. В этом подпространстве существует единственный вектор H_α такой, что $\alpha(H_\alpha) = 2$ (необходимые сведения из теории полупростых алгебр Ли см. в [12] или [13]). Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ – система простых корней алгебры $\mathfrak{k}$. Любое неприводимое конечномерное представление алгебры Ли $\mathfrak{k}$ задается старшим весом $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ ($\mathfrak{h}^*$ – множество линейных функционалов на $\mathfrak{h}$). При этом линейный функционал $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ является старшим весом некоторого неприводимого конечномерного представления алгебры Ли $\mathfrak{k}$ тогда и только тогда, когда все числа $\lambda_j = \lambda(H_{\alpha_j}) \in \mathbb{Z}_+$. Такие линейные функционалы называются *доминантными*. Поэтому будем отождествлять старший вес λ с набором неотрицательных целых чисел $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, где $\lambda_j = \lambda(H_{\alpha_j})$.

В нашем случае алгебра Ли $\mathfrak{k} = \mathfrak{sp}(1) \times \mathfrak{sp}(n)$, $n \geq 2$. Выберем простые корни $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ алгебры Ли $\mathfrak{k}$ так, что α_0 – корень подалгебры $\mathfrak{sp}(1)$, а $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ –

простые корни подалгебры $\mathfrak{sp}(1) = C_n$, взятые в обычном порядке, который определяется, например, диаграммой Дынкина

$$\begin{array}{ccccccc} \circ & - & \circ & - & \dots & - & \circ & \longleftarrow & \circ \\ \alpha_1 & & \alpha_2 & & & & \alpha_{n-1} & & \alpha_n \end{array}.$$

В этом случае множество Λ_0 состоит из старших весов $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ алгебры $\mathfrak{k}$, имеющих вид $\lambda = (k, k, l, 0, \dots, 0)$, где $k, l \in \mathbb{Z}_+$ (т.е. $\lambda_0 = \lambda_1 = k$, $\lambda_2 = l$, $\lambda_3 = \dots = \lambda_n = 0$).

Пусть в каждом пространстве $\mathcal{F}^{(\lambda)}$, $\lambda \in \Lambda_0$, зафиксирована ячейка $H^{(\lambda)}$ некоторого ИПП, вообще говоря, зависящего от λ , и пусть $\sigma(\lambda)$ – спектр ячейки $H^{(\lambda)}$. Следующая теорема дает необходимые и достаточные условия для того, чтобы ячейки $H^{(\lambda)}$ были ячейками одного ИПП. Предварительно введем целочисленные векторы $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{Z}^{n+1}$ и зависящие от λ числа $\mu_1(\lambda), \mu_2(\lambda) \in \mathbb{C}$. Пусть $\delta_1 = (1, 1, 0, \dots, 0)$, $\delta_2 = (-1, -1, 1, 0, \dots, 0)$, $\lambda = (k, k, l, 0, \dots, 0) \in \Lambda_0$, $\mu_1(\lambda) = i(2k + 2l + 2n + 1)$, $\mu_2(\lambda) = i(2l + 2n - 1)$, где $i = \sqrt{-1}$.

ТЕОРЕМА II. *Ячейки $H^{(\lambda)}$, $\lambda \in \Lambda_0$, соответствуют одному ИПП тогда и только тогда, когда выполняются условия:*

- 1) *для любого $\lambda \in \Lambda_0$ спектры $\sigma(\lambda)$ и $\sigma(\lambda + \delta_1)$ должны совпадать или спектр $\sigma(\lambda + \delta_1)$ получается из $\sigma(\lambda)$ уменьшением кратности числа $\mu_1(\lambda)$ на 1;*
- 2) *если $\lambda \in \Lambda_0$ и $\lambda + \delta_2 \in \Lambda_0$, то спектры $\sigma(\lambda)$ и $\sigma(\lambda + \delta_2)$ должны совпадать или спектр $\sigma(\lambda + \delta_2)$ получается из $\sigma(\lambda)$ уменьшением кратности числа $\mu_2(\lambda)$ на 1.*

В совокупности теоремы I и II дают полное описание инвариантных подпространств в $\mathcal{F}$, и их доказательство является основной целью настоящей работы. Используемые при этом методы близки к методам работ [1], [10], [11], но имеют существенные отличия. Основное отличие состоит в том, что для симметрических пространств $\mathrm{SO}_0(1, n)/\mathrm{SO}(n)$ и $\mathrm{SU}(1, n)/U(n)$ в процессе вычислений существенно использовались базис Гельфанда–Цетлина в пространствах E^λ неприводимых представлений группы K ($K = \mathrm{SO}(n)$ или $K = U(n)$) и явные формулы действия алгебры Ли группы K в этом базисе. Для симметрического пространства $\mathrm{Sp}(1, n)/\mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(n)$ в пространствах E^λ приходится использовать весовой базис, что значительно усложняет вычисления (см. §4).

Из теорем I и II легко получить описание неприводимых и неразложимых ИПП в $\mathcal{F}$, где ИПП H называется *неприводимым*, если в H нет собственных ИПП, и H называется *неразложимым*, если $H \neq H_1 + H_2$ для ненулевых ИПП H_1 и H_2 таких, что $H_1 \cap H_2 = \{0\}$ (здесь $H_1 + H_2$ – замыкание алгебраической суммы подпространств). Каждое неприводимое ИПП задается комплексным числом $\mu \in \mathbb{C}_+$. При $\mu \neq i(2d + 2n - 1)$, $d \in \mathbb{Z}_+$, все спектры $\sigma(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda_0$, должны состоять из одного числа μ с кратностью 1. Соответствующее ИПП (обозначим его через $\mathcal{F}(\mu)$) состоит из всех функций $f \in \mathcal{F} \cap C^\infty$, удовлетворяющих дифференциальному уравнению

$$(\tilde{\Delta} + \mu^2 + \rho^2)f = 0, \quad (1.4)$$

т.е. это ИПП является собственным подпространством оператора Лапласа–Бельтрами. Из того, что $\tilde{\Delta}$ – эллиптический оператор, легко получить, что это подпространство замкнуто в $\mathcal{F}$. Отметим, что неприводимость в $\mathcal{E}$ подпространства, состоящего из всех решений уравнения (1.4) при $\mu \neq i(2d + 2n - 1)$, и аналогичные результаты для других симметрических пространств ранга 1 установлены ранее С. Хелгасоном в [14].

Если $\mu = i(2d + 2n - 1)$ и $d \geq 1$, то спектры $\sigma(\lambda)$, $\lambda = (k, k, l, 0, \dots, 0) \in \Lambda_0$, должны состоять из числа μ с кратностью 1 при $l \leq d$ и $k + l + 1 \leq d$ и должны быть пустыми при остальных λ . Число весов $\lambda \in \Lambda_0$, удовлетворяющих условиям $l \leq d$ и $k + l + 1 \leq d$, конечно, поэтому соответствующее неприводимое ИПП конечномерно.

При $\mu = i(2d + 2n - 1)$ и $d = 0$ (т.е. $\mu = i(2n - 1)$) спектры $\sigma(\lambda)$, $\lambda = (k, k, l, 0, \dots, 0)$, должны состоять из числа μ с кратностью 1 при $l = 0$ и любом $k \in \mathbb{Z}_+$ и должны быть пустыми при $l \geq 1$. Соответствующее неприводимое ИПП будет бесконечномерным, но не совпадет с $\mathcal{F}(\mu)$. Отметим, что подобных неприводимых ИПП не существует на симметрических пространствах $\mathrm{SO}_0(n, 1)/\mathrm{SO}(n)$ и $\mathrm{SU}(1, n)/U(n)$, так как там любое ИПП либо является собственным подпространством оператора Лапласа–Бельтрами, либо конечномерно (см. [1]).

Подпространство H неразложимо тогда и только тогда, когда все спектры $\sigma(\lambda)$ состоят из одного числа μ (не зависящего от λ) с некоторой кратностью. При $\mu \neq i(2d + 2n - 1)$, $d \in \mathbb{Z}_+$, эта кратность должна быть одинакова при любых $\lambda \in \Lambda_0$, а при $\mu = i(2d + 2n - 1)$ кратность может меняться в зависимости от λ так, чтобы выполнялись условия теоремы II. Если все спектры $\sigma(\lambda)$ одинаковы и состоят из числа μ с кратностью r , то соответствующее неразложимое ИПП состоит из всех функций $f \in \mathcal{F} \cap C^\infty$, удовлетворяющих дифференциальному уравнению

$$(\tilde{\Delta} + \mu^2 + \rho^2)^r f = 0.$$

В общем случае произвольное ИПП является замыканием конечной или счетной прямой суммы неразложимых ИПП.

По терминологии Беренштейна [2] будем говорить, что ИПП $H \subseteq \mathcal{F}$ допускает *спектральный синтез*, если H совпадает с наименьшим ИПП, содержащим ячейку $H^{(0)}$, где $0 = (0, \dots, 0)$ – старший вес тривиального одномерного представления группы K (в этом случае H совпадает также с наименьшим ИПП, содержащим сферические функции $\Phi_\mu(x)$ и их производные $\partial_\mu^k \Phi_\mu(x)$, $k = 0, 1, \dots, r - 1$, где μ пробегает спектр $\sigma(0)$, r – кратность числа μ). Из теоремы II сразу следует, что ИПП H допускает спектральный синтез тогда и только тогда, когда спектры $\sigma(\lambda)$ удовлетворяют условию: спектр $\sigma(\lambda + \delta_\nu)$, $\nu = 1, 2$, получается из $\sigma(\lambda)$ уменьшением кратности числа μ_ν на 1 (если эта кратность равна 0, то предполагается, что $\sigma(\lambda + \delta_\nu) = \sigma(\lambda)$).

В частности, получаем теорему Ваврынчика [4]: если спектр $\sigma(0)$ не содержит чисел $\mu = i(2d + 2n - 1)$, $d \in \mathbb{Z}_+$, то подпространство H допускает спектральный синтез (в [4] рассматривалось пространство $\mathcal{F} = \mathcal{E}$).

Результаты настоящей работы частично анонсированы в [15].

§ 2. Переход к пространствам $\mathcal{F}^{(\lambda)}$

Пусть $M = G/K$ – произвольное риманово симметрическое пространство некомпактного типа, G – связная полупростая группа Ли с конечным центром, K – максимальная компактная подгруппа в G . Пусть $\mathfrak{g}_0$ и $\mathfrak{k}_0$ – алгебры Ли групп G и K соответственно. Если π – произвольное представление группы G в полном ЛВП $\mathcal{F}$, то вектор $\xi \in \mathcal{F}$ называется *гладким (аналитическим)*, когда отображение $g \rightarrow \pi(g)\xi$ бесконечно дифференцируемо (соответственно аналитическое). Вектор ξ называется *K -финитным*, если линейная оболочка векторов $\pi(u)\xi$ при $u \in K$ конечномерна. Пусть $\mathcal{F}_\sigma$ – множество всех гладких K -финитных векторов, а $\mathcal{F}_\#$ – множество аналитических K -финитных векторов пространства $\mathcal{F}$. Линейные подпространства $\mathcal{F}_\sigma$ и $\mathcal{F}_\#$ инвариантны относительно индуцированного представления алгебры Ли $\mathfrak{g}_0$.

Вернемся к случаю, когда $\mathcal{F}$ – функциональное пространство типа 1 или типа 2, π – квазирегулярное представление группы G . Для любого ИПП $H \subset \mathcal{F}$ пусть $H_\sigma = H \cap \mathcal{F}_\sigma$, $H_\# = H \cap \mathcal{F}_\#$. Обозначим через Λ множество старших весов неприводимых конечномерных представлений группы K , пусть E^λ – пространство неприводимого представления со старшим весом $\lambda \in \Lambda$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – инвариантная эрмитова форма в E^λ . Пространства $\mathcal{F}^{(\lambda)}$ определены в § 1. Через $\mathcal{F}_\sigma^{(\lambda)}$ (или $\mathcal{F}_\#^{(\lambda)}$) обозначим множество всех функций $F(x) \in \mathcal{F}^{(\lambda)}$, удовлетворяющих условию

$$f_\xi(x) = \langle F(x), \xi \rangle \in \mathcal{F}_\sigma \quad (\text{соответственно } f_\xi(x) \in \mathcal{F}_\#) \quad \forall \xi \in E^\lambda. \quad (2.1)$$

Если H – ИПП в $\mathcal{F}$, то ячейки $H^{(\lambda)}$ определены в § 1. Пусть $H_\sigma^{(\lambda)} = H^{(\lambda)} \cap \mathcal{F}_\sigma^{(\lambda)}$, $H_\#^{(\lambda)} = H^{(\lambda)} \cap \mathcal{F}_\#^{(\lambda)}$. Пусть $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0$ – разложение Картана алгебры Ли $\mathfrak{g}_0$; $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$ и $\mathfrak{p}$ – комплексификации пространств $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{k}_0$ и $\mathfrak{p}_0$ соответственно. Так как $[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{p}$, то $\mathfrak{p}$ является $\mathfrak{k}$ -модулем. Пусть $p_1, \dots, p_m$ – базис в $\mathfrak{p}$, причем пусть все $p_j \in \mathfrak{p}_0$; пусть $\mathfrak{p}^*$ – двойственный $\mathfrak{p}$ -модуль, а $p_1^*, \dots, p_m^*$ – двойственный базис в $\mathfrak{p}^*$.

Для $\lambda, \mu \in \Lambda$ обозначим через $\text{Hom}(E^\mu, E^\lambda)$ множество линейных операторов из E^μ в E^λ . Пространство $\text{Hom}(E^\mu, E^\mu)$ является $\mathfrak{k}$ -модулем (т.е. $(kA)\xi = k(A\xi) - A(k\xi)$ для любых $\xi \in E^\mu$, $k \in \mathfrak{k}$). Пусть

$$\varphi: \mathfrak{p}^* \rightarrow \text{Hom}(E^\mu, E^\lambda) \quad (2.2)$$

– произвольный гомоморфизм $\mathfrak{k}$ -модулей.

Положим $\alpha_j = \varphi(p_j) \in \text{Hom}(E^\mu, E^\lambda)$, и пусть $\alpha_j^* = \varphi(p_j^*) \in \text{Hom}(E^\lambda, E^\mu)$ – сопряженный оператор (т.е. $\langle \alpha_j \xi, \eta \rangle = \langle \xi, \alpha_j^* \eta \rangle \quad \forall \xi \in E^\mu, \forall \eta \in E^\lambda$).

Для функции $F(x) \in \mathcal{F}_\sigma^{(\lambda)}$ определим действие оператора $L(\varphi)$ формулой

$$(L(\varphi)F)(x) = - \sum_{j=1}^m \alpha_j^* (p_j F)(x), \quad (2.3)$$

где $p_j F$ – действие элемента из алгебры Ли на функцию, определенное формулой (1.2).

Известно (см. [1, § 3]), что оператор $L(\varphi)$ переводит пространство $\mathcal{F}_\sigma^{(\lambda)}$ в $\mathcal{F}_\sigma^{(\mu)}$ и пространство $\mathcal{F}_\#^{(\lambda)}$ в $\mathcal{F}_\#^{(\mu)}$. Более того, если $H^{(\lambda)}$ и $H^{(\mu)}$ – ячейки одного ИПП, то $L(\varphi)(H_\sigma^{(\lambda)}) \subseteq H_\sigma^{(\mu)}$ и $L(\varphi)(H_\#^{(\lambda)}) \subseteq H_\#^{(\mu)}$. Операторы $L(\varphi)$ служат основными инструментами для доказательства теорем I и II. Обозначим множество операторов $L(\varphi)$, построенных по всевозможным гомоморфизмам (2.2), через $P_0(\lambda, \mu)$.

При доказательствах будет часто использоваться следующая лемма.

ЛЕММА 2.1. Пусть $\mathfrak{k}$ – произвольная алгебра Ли, векторы X_α , $X_{-\alpha}$, H_α принадлежат $\mathfrak{k}$, причем

$$[H_\alpha, X_\alpha] = 2X_\alpha, \quad [H_\alpha, X_{-\alpha}] = -2X_{-\alpha}, \quad [X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha.$$

Пусть E – конечномерный $\mathfrak{k}$ -модуль, $0 \neq v \in E$ и $X_\alpha v = 0$.

Тогда:

- 1) $H_\alpha v = dv$, где $d \in \mathbb{Z}_+$;
- 2) векторы $X_{-\alpha}^r v \neq 0$ при $r = 0, 1, \dots, d$ и $X_{-\alpha}^{d+1} v = 0$;
- 3) $X_\alpha(X_{-\alpha}^r v) = r(d - r + 1)X_{-\alpha}^{r-1} v$.

Доказательство сразу следует из теории представлений алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ (см. [13, гл. VIII, § 1]).

Далее, пусть $M = \mathrm{Sp}(1, n) / \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(n)$. Тогда алгебра Ли $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sp}(1, n)$. Ее комплексификация $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(n + 1, \mathbb{C}) = \mathfrak{sp}(n + 1)$ состоит из матриц

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^t \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

где A, B, C – комплексные матрицы размера $(n + 1) \times (n + 1)$, причем $B^t = B$ и $C^t = C$. Будем считать, что индексы в матрицах A, B, C из (2.4) меняются от 0 до n . Подалгебра Ли $\mathfrak{k}$ и подпространство $\mathfrak{p}$ состоят соответственно из матриц

$$k = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & A_1 & 0 & B_1 \\ c & 0 & -a & 0 \\ 0 & C_1 & 0 & -A_1^t \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} 0 & z_1 & 0 & z_2 \\ -z_4^t & 0 & z_2^t & 0 \\ 0 & z_3 & 0 & z_4 \\ z_3^t & 0 & -z_1^t & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

где $a, b, c \in \mathbb{C}$, A_1, B_1, C_1 – комплексные матрицы размера $n \times n$, причем $B_1^t = B_1$ и $C_1^t = C_1$, z_1, z_2, z_3, z_4 – строки длины n . Подалгебра Ли $\mathfrak{k}_0$ состоит из пересечения $\mathfrak{k}$ с множеством косоэрмитовых матриц, подпространство $\mathfrak{p}_0$ равно пересечению $\mathfrak{p}$ с множеством эрмитовых матриц. При $A_1 = B_1 = C_1 = 0$ в $\mathfrak{k}$ возникает подалгебра Ли, изоморфная алгебре Ли $\mathfrak{sp}(1) = \mathfrak{sl}(2)$, а при $a = b = c = 0$ возникает подалгебра, изоморфная $\mathfrak{sp}(n)$. В целом $\mathfrak{k} \simeq \mathfrak{sp}(1) \times \mathfrak{sp}(n)$. Подалгебра Картана $\mathfrak{h}$ в алгебре $\mathfrak{g}$ (а также и в $\mathfrak{k}$) состоит из всех диагональных матриц

$$h = \mathrm{diag}(h_0, h_1, \dots, h_n, -h_0, -h_1, \dots, -h_n) = \gamma(h_0, h_1, \dots, h_n), \quad (2.6)$$

где $h_j \in \mathbb{C}$.

Линейный функционал $\varepsilon_j \in \mathfrak{h}^*$ ($j = 0, 1, \dots, n$) определим условием $\varepsilon_j(h) = h_j$. Тогда корнями алгебры Ли $\mathfrak{g}$ будут функционалы $(\varepsilon_j + \varepsilon_r)$ при $0 \leq j \leq r \leq n$, $(\varepsilon_j - \varepsilon_r)$ при $0 \leq j \neq r \leq n$ и $(-\varepsilon_j - \varepsilon_r)$ при $0 \leq j \leq r \leq n$. Будем обозначать эти корни соответственно ω_{jr} , $\omega_{jr'}$ и $\omega_{j'r'}$ (т. е. $\omega_{jr}(h) = h_j + h_r$, $\omega_{jr'}(h) = h_j - h_r$, $\omega_{j'r'}(h) = -h_j - h_r$).

Матрицы X_{jr} , $X_{jr'} = X_{r'j}$, $X_{j'r'} \in \mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(n+1)$ при $j, r = 0, 1, \dots, n$ определим через соответствующие им матрицы A , B и C из (2.4):

для X_{jr} пусть $A = C = 0$, $B = E_{jr} + E_{rj}$ при $r \neq j$ и $B = E_{jj}$ при $r = j$;

для $X_{j'r'}$ пусть $A = B = 0$, $C = E_{jr} + E_{rj}$ при $r \neq j$ и $C = E_{jj}$ при $r = j$;

для $X_{jr'}$ и $X_{r'j}$ пусть $B = C = 0$, $A = E_{jr}$, где E_{jr} – матрица с 1 на месте (j, r) и с нулями на остальных местах.

Тогда для любого $h \in \mathfrak{h}$

$$[h, X_{jr}] = \omega_{jr}(h)X_{jr}, \quad [h, X_{jr'}] = \omega_{jr'}(h)X_{jr'}, \quad [h, X_{j'r'}] = \omega_{j'r'}(h)X_{j'r'},$$

т. е. векторы X_{jr} , $X_{jr'}$ и $X_{j'r'}$ являются корневыми векторами для соответствующих корней. Отметим, что

$$X_{jr} = X_{rj}, \quad X_{j'r'} = X_{r'j'}, \quad X_{jr'} = X_{r'j}. \quad (2.7)$$

Удобно также считать, что $X_{jj'} = 0$.

Определим еще матрицы

$$H_{jr} = \gamma(e_j + e_r), \quad H_{jr'} = H_{r'j} = \gamma(e_j - e_r), \quad H_{j'r'} = \gamma(-e_j - e_r)$$

при $j \neq r$ и

$$H_{jj} = \gamma(e_j), \quad H_{j'j'} = \gamma(-e_j),$$

где e_j – строка длины $n+1$ с 1 на j -м месте и с нулями на остальных местах, γ определено формулой (2.6). Отметим, что $H_{j'r'} = -H_{jr}$ и $H_{jr'} = -H_{j'r'}$.

Если α – один из корней ω_{jr} , $\omega_{jr'}$, $\omega_{j'r'}$, то через X_α и H_α будем обозначать соответственно матрицы X_{jr} , $X_{jr'}$, $X_{j'r'}$ и H_{jr} , $H_{jr'}$, $H_{j'r'}$. Легко видеть, что при этом $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha$ и $\alpha(H_\alpha) = 2$. Напомним, что если α, β – произвольные корни полупростой алгебры Ли, причем $\alpha + \beta \neq 0$ и $\alpha + \beta$ не является корнем, X_α и X_β – корневые векторы, то $[X_\alpha, X_\beta] = 0$. В нашем случае ненулевыми будут только следующие коммутаторы:

$$\begin{aligned} [X_{sj'}, X_{jr}] &= X_{sr}, & [X_{s'j'}, X_{jr'}] &= X_{s'r'}, \\ [X_{sj}, X_{j'r'}] &= X_{sr'}, & [X_{sj'}, X_{jr'}] &= X_{sr'} \end{aligned} \quad (2.8)$$

при $j \neq r$ и

$$\begin{aligned} [X_{sj'}, X_{js}] &= 2X_{ss}, & [X_{s'j'}, X_{js'}] &= 2X_{s's'}, \\ [X_{sj}, X_{j's'}] &= 2H_{sj}, & [X_{sj'}, X_{js'}] &= 2H_{sj'}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где $j, r, s = 0, 1, \dots, n$, и коммутаторы, получающиеся из них изменением порядка матриц и порядка индексов по формулам (2.7).

Корнями подалгебры $\mathfrak{k}$ являются функционалы ω_{00} , $\omega_{0'0'}$ и функционалы ω_{jr} , $\omega_{jr'}$, $\omega_{j'r'}$ при $1 \leq j, r \leq n$. Из них положительными корнями будут ω_{00} , ω_{jr} при $0 \leq j, r \leq n$ и $\omega_{jr'}$ при $j < r$. Простыми корнями являются

$$\alpha_0 = \omega_{00}, \quad \alpha_1 = \omega_{12'}, \quad \alpha_2 = \omega_{23'}, \quad \dots, \quad \alpha_{n-1} = \omega_{n-1,n'}, \quad \alpha_n = \omega_{nn}. \quad (2.10)$$

Любой линейный функционал $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ будем часто отождествлять с набором чисел $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$, где $\lambda_j = \lambda(H_{\alpha_j})$. При этом λ является старшим весом некоторого неприводимого конечномерного $\mathfrak{k}$ -модуля тогда и только тогда, когда все числа $\lambda_j \in \mathbb{Z}_+$, т.е. вес λ доминантный.

Так как $[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{p}$, то $\mathfrak{p}$ является $\mathfrak{k}$ -модулем. Всевозможные веса этого модуля следующие:

$$\pm\omega_{01}, \quad \pm\omega_{02}, \quad \dots, \quad \pm\omega_{0n}; \quad \pm\omega_{01'}, \quad \pm\omega_{02'}, \quad \dots, \quad \pm\omega_{0n'}. \quad (2.11)$$

Модуль $\mathfrak{p}$ неприводим, и его старший вес равен ω_{01} . Пусть E^λ и E^μ – неприводимые $\mathfrak{k}$ -модули со старшими весами λ и μ , обозначим через $s(\mathfrak{p}^*, \text{Hom}(E^\mu, E^\lambda))$ множество гомоморфизмов $\mathfrak{k}$ -модулей (сплетающих операторов) из двойственного модуля $\mathfrak{p}^*$ в $\text{Hom}(E^\mu, E^\lambda)$. Заметим, что следующие множества сплетающих операторов изоморфны как векторные пространства:

$$s(\mathfrak{p}^*, \text{Hom}(E^\mu, E^\lambda)) \simeq s(E^\mu, E^\lambda \otimes \mathfrak{p}). \quad (2.12)$$

Из результатов работы [16] сразу следует, что

$$E^\lambda \otimes \mathfrak{p} = \oplus E^{\lambda+\omega}, \quad (2.13)$$

где ω пробегает все веса (2.11). Если $\lambda + \omega$ не является доминантным весом, то соответствующее слагаемое в (2.13) заменяется нулем.

Из соотношений (2.12) и (2.13) следует, что векторное пространство $s(\mathfrak{p}^*, \text{Hom}(E^\mu, E^\lambda))$ ненулевое тогда и только тогда, когда $\mu = \lambda + \omega$, где ω – один из весов (2.11), и при этом размерность этого пространства равна 1. В результате доказано следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. $\dim P_0(\lambda, \mu) \leq 1$ для любых $\lambda, \mu \in \Lambda$, при этом необходимым условием того, что $P_0(\lambda, \mu) \neq \{0\}$, является $\mu = \lambda + \omega$, где ω – один из весов (2.11).

Пусть

$$I_0 = X_{01'} + X_{10'}, \quad \alpha(t) = \exp(tI_0).$$

Тогда $I_0 \in \mathfrak{p}_0$, а $\alpha(t)$ – однопараметрическая подгруппа в группе G . Подалгебру Ли $\mathfrak{k}_1$ в $\mathfrak{k}$ определим условием

$$\mathfrak{k}_1 = \{k \in \mathfrak{k}: [k, I_0] = 0\},$$

и пусть K_1 – связная подгруппа Ли в группе K , соответствующая подалгебре Ли $\mathfrak{k}_1$. Тогда $u\alpha(t) = \alpha(t)u$ для $u \in K$. Как векторное пространство подалгебра $\mathfrak{k}_1$ порождается матрицами $H_{00} + H_{11}$, $X_{00} - X_{11}$, $X_{0'0'} - X_{1'1'}$ и матрицами H_{jj} , X_{jr} , $X_{jr'}$, $X_{j'r'}$ при $2 \leq j, r \leq n$.

Пусть Λ_0 – множество старших весов вида $\lambda = (k, k, l, 0, \dots, 0)$, т.е. $\lambda_0 = \lambda_1 = k$, $\lambda_2 = l$ и $\lambda_3 = \dots = \lambda_n = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Пусть $F(x)$ – ненулевая функция на M , принимающая значения в E^λ и удовлетворяющая условию

$$F(ux) = T^\lambda(u)F(x) \quad \forall u \in K. \quad (2.14)$$

Тогда $\lambda \in \Lambda_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $o = eK$ – фиксированная точка пространства $M = G/K$, e – единичный элемент группы G . Любая точка пространства M имеет вид $x = go$, где $g \in G$. Известно (см., например, [8]), что любой элемент из группы G можно представить в виде $g = u_1\alpha(t)u_2$, где $u_1, u_2 \in K$. Тогда

$$F(x) = F(u_1\alpha(t)u_2o) = T^\lambda(u_1)F(\alpha(t)o). \quad (2.15)$$

Следовательно, функция $F(\alpha(t)o)$ не равна тождественно нулю. Если вектор $\xi = F(\alpha(t)0) \neq 0$, $u \in K_1$, то

$$T^\lambda(u)\xi = F(u\alpha(t)o) = F(\alpha(t)uo) = F(\alpha(t)o) = \xi.$$

Следовательно, $k\xi = 0 \quad \forall k \in \mathfrak{k}_1$. В результате доказано, что в пространстве E^λ должен существовать вектор $\xi \neq 0$ такой, что $\mathfrak{k}_1\xi = 0$.

Подберем наибольшее число $k \in \mathbb{Z}_+$ такое, что $X_{00}^k\xi \neq 0$ (тогда $X_{00}^{k+1}\xi = 0$). Далее возьмем наибольшее $l \in \mathbb{Z}_+$ такое, что $v = X_{12}^l(X_{00}^k\xi) \neq 0$. Проверим, что v является старшим вектором пространства E^λ . Для этого достаточно проверить, что $X_{\alpha_j}v = 0$ для $j = 0, 1, \dots, n$.

При $j \geq 2$ векторы $X_{\alpha_j} \in \mathfrak{k}_1$ коммутируют с X_{12} и X_{00} , поэтому $X_{\alpha_j}v = X_{12}^l X_{00}^k X_{\alpha_j}\xi = 0$. Далее, $X_{\alpha_0}v = X_{00}v = X_{12}^l X_{00}^{k+1}\xi = 0$.

Заметим, что $X_{\alpha_1} = X_{12'} = [X_{12}, X_{2'2'}]$ и $X_{2'2'} \in \mathfrak{k}_1$. Кроме того, $X_{00} - X_{11} \in \mathfrak{k}_1$, следовательно, $X_{00}\xi = X_{11}\xi$ и $X_{11}X_{00}^k\xi = X_{00}^{k+1}\xi = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} X_{\alpha_1}v &= (X_{12}X_{2'2'} - X_{2'2'}X_{12})v = X_{12}X_{2'2'}X_{12}^lX_{00}^k\xi \\ &= X_{12}(X_{2'2'}X_{12}^l - X_{12}^lX_{2'2'})X_{00}^k\xi = -lX_{12'}X_{12}^lX_{00}^k\xi = -lX_{\alpha_1}v. \end{aligned}$$

Следовательно, $(l+1)X_{\alpha_1}v = 0$ и $X_{\alpha_1}v = 0$. Тем самым v будет старшим вектором, в частности весовым вектором веса λ .

Так как v – весовой вектор веса λ , то $H_{\alpha_j}v = \lambda_jv$. С другой стороны, заметим, что $H_{\alpha_j} \in \mathfrak{k}_1$ при $j \geq 2$, $[H_{\alpha_j}, X_{12}] = 0$ при $j \geq 3$ и $[H_{\alpha_2}, X_{12}] = X_{12}$. Тогда

$$\lambda_j v = H_{\alpha_j} X_{12}^l X_{00}^k \xi = X_{12}^l X_{00}^k H_{\alpha_j} \xi = 0 \text{ для } j \geq 3, \quad \lambda_2 v = H_{\alpha_2} X_{12}^l X_{00}^k \xi = (H_{\alpha_2} X_{12}^l - X_{12}^l H_{\alpha_2}) X_{00}^k \xi = l X_{12}^l X_{00}^k \xi = l v.$$

Заметим, что $H_{\alpha_0} = [X_{00}, X_{0'0'}]$. Тогда

$$\begin{aligned} \lambda_0 v &= (X_{00} X_{0'0'} - X_{0'0'} X_{00}) X_{12}^l X_{00}^k \xi = X_{12}^l X_{00} X_{0'0'} X_{00}^k \xi \\ &= -X_{12}^l X_{00} (H_{\alpha_0} X_{00}^{k-1} + X_{00} H_{\alpha_0} X_{00}^{k-2} + \dots + X_{00}^{k-1} H_{\alpha_0}) \xi \\ &\quad + X_{12}^l X_{00}^{k+1} X_{0'0'} \xi. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Последнее слагаемое в (2.16) равно нулю, так как $X_{0'0'} - X_{1'1'} \in \mathfrak{k}_1$ и $X_{00}^{k+1} X_{0'0'} \xi = X_{00}^{k+1} X_{1'1'} \xi = X_{1'1'} X_{00}^{k+1} \xi = 0$. Из равенства $[H_{\alpha_0}, X_{00}] = 2X_{00}$ следует, что $X_{00}^r H_{\alpha_0} = H_{\alpha_0} X_{00}^r - 2r X_{00}^r$, и из (2.16) получаем, что $\lambda_0 v = -k H_{\alpha_0} v + (2 + 4 + \dots + 2k) v$. Так как $H_{\alpha_0} v = \lambda_0 v$, то $(k+1) \lambda_0 v = k(k+1) v$ и, следовательно, $\lambda_0 = k$.

Пусть $H = H_{\alpha_0} + H_{\alpha_1} \in \mathfrak{k}_1$. Легко видеть, что $[H, X_{12}] = 0$ и $[H, X_{00}] = 2X_{00}$, откуда следует, что $(H X_{12}^l X_{00}^k - X_{12}^l X_{00}^k H) = 2k X_{12}^l X_{00}^k$. Так как $H \in \mathfrak{k}_1$, то $H \xi = 0$ и $(\lambda_0 + \lambda_1) v = H v = (H X_{12}^l X_{00}^k - X_{12}^l X_{00}^k H) \xi = 2k v$. Следовательно, и $\lambda_1 = k$. Окончательно $\lambda_0 = \lambda_1 = k$, $\lambda_2 = l$, $\lambda_3 = \dots = \lambda_n = 0$.

Операцию эрмитова сопряжения на алгебре $\mathfrak{k}$ продолжим до эрмитовой инволюции $a \rightarrow a^*$ универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{k})$. При этом $(ab)^* = b^* a^*$ для любых $a, b \in U(\mathfrak{k})$, $X_\alpha^* = X_{-\alpha}$ и $H_\alpha^* = H_\alpha$ для любого корня α . Если $\langle \xi, \eta \rangle$ — инвариантная эрмитова форма на пространстве E^λ , то

$$\langle a \xi, \eta \rangle = \langle \xi, a^* \eta \rangle \quad \forall a \in U(\mathfrak{k}). \quad (2.17)$$

Для любого $\mathfrak{k}$ -модуля E^λ пусть

$$E_0^\lambda = \{ \xi \in E^\lambda : \mathfrak{k}_1 \xi = 0 \}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Пусть E^λ — неприводимый $\mathfrak{k}$ -модуль со старшим весом λ . Подпространство $E_0^\lambda \neq \{0\}$ тогда и только тогда, когда $\lambda \in \Lambda_0$. Если $\lambda \in \Lambda_0$, то $\dim E_0^\lambda = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. А) В ходе доказательства предложения 2.3 уже было установлено, что из $E_0^\lambda \neq \{0\}$ следует $\lambda \in \Lambda_0$. Пусть $\lambda = (k, k, l, 0, \dots, 0)$. Проверим, что $\dim E_0^\lambda \leq 1$. Если $0 \neq \xi \in E_0^\lambda$, то при доказательстве предложения 2.3 было показано, что вектор $v = X_{12}^l X_{00}^k \xi \neq 0$ является старшим вектором пространства E^λ . Следовательно, отображение $\xi \rightarrow X_{12}^l X_{00}^k \xi$ инъективно и переводит E_0^λ в одномерное пространство векторов старшего веса λ . Поэтому $\dim E_0^\lambda \leq 1$.

Остается проверить, что в E_0^λ есть ненулевые векторы. Введем следующий элемент из $U(\mathfrak{k})$:

$$\mathcal{D} = X_{1'2'} H_{23'} + \sum_{d=3}^n X_{1'd'} X_{2'd} - \sum_{d=2}^n X_{1'd} X_{2'd'}. \quad (2.18)$$

Пусть v_0 – старший вектор пространства E^λ ,

$$w_0 = \mathcal{D}^l v_0, \quad (2.19)$$

$$\xi_0 = \sum_{r=0}^k X_{0'0'}^r X_{1'1'}^{k-r} w_0. \quad (2.20)$$

Далее будет показано, что $\xi_0 \neq 0$ и $\xi_0 \in E_0^\lambda$; это и завершит доказательство.

Пусть $\mu \in \mathfrak{h}^*$, $a \in U(\mathfrak{k})$. Будем говорить, что a – элемент веса μ , если

$$[h, a] = ha - ah = \mu(h)a \quad \forall h \in \mathfrak{h}. \quad (2.21)$$

Как и раньше, функционал μ отождествляется со строкой $\mu = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n)$, где $\mu_j = \mu(H_{\alpha_j})$. Тогда $\mathcal{D}$ – элемент веса $\omega_{1'2'} = (0, 0, -1, 0, \dots, 0)$.

Б) Пусть $v_r = \mathcal{D}^r v_0$. Индукцией по r проверим, что

$$X_{\alpha_j} v_r = 0 \quad \text{при } j = 0 \text{ и } j = 2, 3, \dots, n, \quad (2.22)$$

или, что эквивалентно,

$$X_{00} v_r = 0 \quad \text{и} \quad X_{js'} v_r = X_{js} v_r = 0 \quad \text{при } 2 \leq j \leq s \leq n. \quad (2.23)$$

При $r = 0$ это верно, так как v_0 – старший вектор. Пусть (2.22) верно для $r - 1$. Легко видеть, что

$$[X_{\alpha_j}, \mathcal{D}] = 0 \quad \text{при } j = 0 \text{ или } j \geq 4, \quad (2.24)$$

$$[X_{\alpha_3}, \mathcal{D}] = X_{1'2'} X_{\alpha_3}, \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} [X_{\alpha_2}, \mathcal{D}] &= -2X_{1'2'} X_{\alpha_2} - \sum_{d=4}^n X_{1'd'} X_{3'd} \\ &\quad + 2X_{1'3} X_{3'3'} + \sum_{d=4}^n X_{1'd} X_{3'd'}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Из (2.24) сразу следует, что $X_{\alpha_j} v_r = 0$ при $j = 0$ или $j \geq 4$. Из (2.25) и предположения индукции получаем, что

$$X_{\alpha_3} v_r = X_{\alpha_3} \mathcal{D} v_{r-1} = (\mathcal{D} + X_{1'2'}) X_{\alpha_3} v_{r-1} = 0.$$

Вектор v_{r-1} весовой веса $\lambda - (r-1)\omega_{12} = (k, k, l-r+1, 0, \dots, 0)$. Поэтому $H_{js} v_{r-1} = 0$ и $H_{js'} v_{r-1} = 0$ при $3 \leq j, s \leq n$. По предположению индукции $X_{js} v_{r-1} = 0$ и $X_{js'} v_{r-1} = 0$ при $3 \leq j \leq s \leq n$. Тогда из леммы 2.1 следует

(если взять $\alpha = \omega_{js}$ или $\alpha = \omega_{js'}$ и $d = 0$), что $X_{j's'}v_{r-1} = 0$ и $X_{j's}v_{r-1} = 0$ при $3 \leq j \leq s \leq n$. Используя (2.26), получаем

$$X_{\alpha_2}v_r = X_{\alpha_2}\mathcal{D}v_{r-1} = \mathcal{D}X_{\alpha_2}v_{r-1} + [X_{\alpha_2}, \mathcal{D}]v_{r-1} = 0.$$

В) Проверим, что $\xi_0 \in E_0^\lambda$.

Подалгебра $\mathfrak{k}_1$ порождается (как алгебра Ли) векторами $X_{00} - X_{11}$, $X_{0'0'} - X_{1'1'}$ и X_{α_j} , $X_{-\alpha_j}$ при $j = 2, 3, \dots, n$. Поэтому достаточно показать, что ξ_0 аннулируется этими векторами. Так как вектор $w_0 = \mathcal{D}^l v_0$ является вектором веса $(k, k, 0, \dots, 0)$, то $H_{\alpha_j}w_0 = 0$ при $j \geq 2$. Кроме того, $X_{\alpha_j}w_0 = 0$ и, следовательно, по лемме 2.1 $X_{-\alpha_j}w_0 = 0$ при $j \geq 2$. Отметим также, что тогда и $X_{2'2'}w_0 = 0$. Так как X_{α_j} и $X_{-\alpha_j}$ при $j \geq 2$ коммутируют с $X_{0'0'}$ и $X_{1'1'}$, то $X_{\alpha_j}\xi_0 = 0$, $X_{-\alpha_j}\xi_0 = 0$.

Из п. Б) следует, что $X_{00}w_0 = 0$. Проверим, что $X_{11}w_0 = 0$. Предположим противное, т.е. что $X_{11}w_0 \neq 0$. Подберем наибольшее $d \in \mathbb{Z}_+$, для которого $\tilde{w} = X_{11}^d w_0 \neq 0$. Затем подберем наибольшее $m \in \mathbb{Z}_+$ такое, что $X_{12}^m \tilde{w} \neq 0$. Дословно повторяя рассуждения из доказательства предложения 2.3, получим, что $X_{12}^m \tilde{w}$ является старшим вектором в E^λ . Но X_{11} – вектор веса $(0, 2, 0, \dots, 0)$ и X_{12} – вектор веса $(0, 0, 1, 0, \dots, 0)$; тогда $X_{12}^m \tilde{w}$ – вектор веса $\mu = (k, k + 2d, m, 0, \dots, 0)$, а старший вес $\lambda = (k, k, l, 0, \dots, 0) \neq \mu$. Следовательно, $X_{11}w_0 = 0$.

Заметим, что $H_{00}w_0 = H_{11}w_0 = kw_0$, поэтому из леммы 2.1 следует, что $X_{0'0'}^{k+1}w_0 = X_{1'1'}^{k+1}w_0 = 0$. Тогда

$$(X_{0'0'} - X_{1'1'})\xi_0 = \sum_{r=0}^{k-1} X_{0'0'}^{r+1} X_{1'1'}^{k-r} w_0 - \sum_{r=1}^k X_{0'0'}^r X_{1'1'}^{k-r+1} w_0 = 0.$$

Вектор $X_{0'0'}^r X_{1'1'}^{k-r} w_0$ является вектором веса $(k - 2r, 2r - k, 0, \dots, 0)$, следовательно, $(H_{00} + H_{11})X_{0'0'}^r X_{1'1'}^{k-r} w_0 = 0$ и $(H_{00} + H_{11})\xi_0 = 0$. Применяя лемму 2.1 при $X_\alpha = X_{00} - X_{11}$, $X_{-\alpha} = X_{0'0'} - X_{1'1'}$, $H_\alpha = H_{00} + H_{11}$, получаем, что $(X_{00} - X_{11})\xi_0 = 0$.

Г) Остается проверить, что $\xi_0 \neq 0$. Пользуясь леммой 2.1, получим

$$\langle X_{0'0'}^r X_{1'1'}^{k-r} w_0, X_{0'0'}^r X_{1'1'}^{k-r} w_0 \rangle = \langle X_{00}^r X_{0'0'}^r X_{11}^{k-r} X_{1'1'}^{k-r} w_0, w_0 \rangle = (k!)^2 \langle w_0, w_0 \rangle. \quad (2.27)$$

Слагаемые в (2.20) ортогональны (так как имеют различные веса), следовательно,

$$\langle \xi_0, \xi_0 \rangle = (k+1)(k!)^2 \langle w_0, w_0 \rangle = k!(k+1)! \langle w_0, w_0 \rangle. \quad (2.28)$$

Пусть $v_r = \mathcal{D}^r v_0$, $A_r = \langle v_r, X_{1'2'}^r v_0 \rangle$. Индукцией по r проверим, что числа $A_r \neq 0$ при $r \leq l$. Число $A_0 = \langle v_0, v_0 \rangle \neq 0$. Пользуясь (2.17), получаем

$$\langle v_r, X_{1'2'}^r v_0 \rangle = \langle \mathcal{D}v_{r-1}, X_{1'2'}^r v_0 \rangle = \langle v_{r-1}, \mathcal{D}^* X_{1'2'}^r v_0 \rangle,$$

где

$$\mathcal{D}^* = H_{23'} X_{12} + \sum_{d=3}^n X_{2d'} X_{1d} - \sum_{d=2}^n X_{2d} X_{1d'}. \quad (2.29)$$

Заметим, что (при $d \geq 3$)

$$X_{1d}X_{1'2'}^r v_0 = (X_{1d}X_{1'2'}^r - X_{1'2'}^r X_{1d})v_0 = [X_{1d}, X_{1'2'}^r]v_0 = rX_{2'd}X_{1'2'}^{r-1}v_0.$$

Далее,

$$\begin{aligned} X_{2d'}X_{1d}X_{1'2'}^r v_0 &= r[X_{2d'}, X_{1'2'}^{r-1}]v_0 \\ &= rH_{2d'}X_{1'2'}^{r-1}v_0 - r(r-1)X_{2'd}X_{1'd'}X_{1'2'}^{r-2}v_0 \\ &= r(l-r+1)X_{1'2'}^{r-1}v_0 - r(r-1)X_{2'd}X_{1'd'}X_{1'2'}^{r-2}v_0. \end{aligned}$$

Из (2.23) следует, что

$$\langle v_{r-1}, X_{2'd}X_{1'd'}X_{1'2'}^{r-2}v_0 \rangle = \langle X_{2d'}v_{r-1}, X_{1'd'}X_{1'2'}^{r-2}v_0 \rangle = 0.$$

Следовательно,

$$\langle v_{r-1}, X_{2d'}X_{1d}X_{1'2'}^r v_0 \rangle = r(l-r+1)\langle v_{r-1}, X_{1'2'}^{r-1}v_0 \rangle = r(l-r+1)A_{r-1}.$$

Аналогично, при $d \geq 3$

$$\langle v_{r-1}, X_{2d}X_{1d'}X_{1'2'}^r v_0 \rangle = -r(l-r+1)A_{r-1}$$

и

$$\langle v_{r-1}, X_{22}X_{12'}X_{1'2'}^r v_0 \rangle = -2r(l-r+1)A_{r-1}.$$

Кроме того,

$$H_{23'}X_{12}X_{1'2'}^r v_0 = r(k+2l-r+1)H_{23'}X_{1'2'}^{r-1}v_0 = r(l-r+1)(k+2l-r+1)X_{1'2'}^{r-1}v_0.$$

Окончательно получаем, что

$$A_r = \langle v_{r-1}, \mathcal{D}^* X_{1'2'}^r v_0 \rangle = r(l-r+1)(k+2l-r+2n-1)A_{r-1} \neq 0$$

при $r \leq l$. Следовательно, $A_l = \langle w_0, X_{1'2'}^r v_0 \rangle \neq 0$ и $w_0 \neq 0$. Тогда из (2.27) следует, что и вектор ξ_0 не равен нулю.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.5. В ходе доказательства получено, что $X_{11}w_0 = 0$, где $w_0 = \mathcal{D}^l v_0$, v_0 – старший вектор пространства E^λ , $\lambda = (k, k, l, 0, \dots, 0)$.

СЛЕДСТВИЕ 2.6. Пусть $0 \neq \xi_0 \in E_0^\lambda$, $F(x)$ – функция на M , принимающая значения в E^λ и удовлетворяющая условию (2.14). Тогда существует комплекснозначная функция $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, для которой $F(\alpha(t)o) = f(t)\xi_0$.

Действительно, в предложении 2.3 показано, что вектор $F(\alpha(t)o)$ принадлежит E_0^λ , следовательно, он коллинеарен вектору ξ_0 .

Пусть $\lambda = (k, k, l, 0, \dots, 0) \in \Lambda_0$, $\delta_1 = (1, 1, 0, \dots, 0)$, $\delta_2 = (-1, -1, 1, 0, \dots, 0)$. Если ω пробегает веса (2.11), то $\lambda + \omega$ может принадлежать Λ_0 только при $\omega = \pm\omega_{01} = \pm\delta_1$ и $\omega = \pm\omega_{02} = \mp\delta_2$. Из предложения 2.2 следует, что в пространстве $P_0(\lambda, \mu)$ ненулевые операторы могут быть только при $\mu = \lambda \pm \delta_1$ или $\mu = \lambda \pm \delta_2$, если при этом соответствующие веса $\lambda \pm \delta_1$ или $\lambda \pm \delta_2$ являются доминантными (если вес μ не является доминантным, то будем считать, что $P_0(\lambda, \mu) = 0$). Выберем какие-нибудь операторы (ненулевые, если соответствующее пространство $P_0(\lambda, \mu) \neq 0$):

$$\begin{aligned} X_+^{(\lambda)} &\in P_0(\lambda, \lambda + \delta_1), & X_-^{(\lambda)} &\in P_0(\lambda, \lambda - \delta_1), \\ Y_+^{(\lambda)} &\in P_0(\lambda, \lambda + \delta_2), & Y_-^{(\lambda)} &\in P_0(\lambda, \lambda - \delta_2). \end{aligned}$$

Из предложения 2.2 следует, что эти операторы определены с точностью до умножения на число. Тогда

$$\begin{aligned} X_\pm^{(\lambda)}(\mathcal{F}_\sigma^{(\lambda)}) &\subseteq \mathcal{F}_\sigma^{(\lambda \pm \delta_1)}, & Y_\pm^{(\lambda)}(\mathcal{F}_\sigma^{(\lambda)}) &\subseteq \mathcal{F}_\sigma^{(\lambda \pm \delta_2)}, \\ X_\pm^{(\lambda)}(\mathcal{F}_\#^{(\lambda)}) &\subseteq \mathcal{F}_\#^{(\lambda \pm \delta_1)}, & Y_\pm^{(\lambda)}(\mathcal{F}_\#^{(\lambda)}) &\subseteq \mathcal{F}_\#^{(\lambda \pm \delta_2)}. \end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.7. Пусть в каждом пространстве $\mathcal{F}_\#^{(\lambda)}$, $\lambda \in \Lambda_0$, выделено линейное подпространство $H_\#^{(\lambda)}$ так, что выполняются условия

$$X_\pm^{(\lambda)}(H_\#^{(\lambda)}) \subseteq H_\#^{(\lambda \pm \delta_1)}, \quad Y_\pm^{(\lambda)}(H_\#^{(\lambda)}) \subseteq H_\#^{(\lambda \pm \delta_2)}. \quad (2.30)$$

Пусть H – замыкание в $\mathcal{F}$ линейной оболочки всех функций $\langle F(x), \xi \rangle$ для $F \in H_\#^{(\lambda)}$, $\xi \in E^\lambda$, $\lambda \in \Lambda_0$.

Тогда H будет инвариантным подпространством и соответствующие ему ячейки $H^{(\lambda)}$ совпадают с замыканием $H_\#^{(\lambda)}$ в $\mathcal{F}^{(\lambda)}$.

Доказательство сразу следует из предложения 2.4 в [1].

§ 3. Вид оператора Δ в пространстве $\mathcal{F}^{(\lambda)}$

Пусть $F(x)$ – гладкая функция на M , принимающая значения в E^λ , $\lambda \in \Lambda_0$, и удовлетворяющая условию (2.14). Тогда по следствию 2.5 $F(\alpha(t)o) = f(t)\xi_0$, где $f(t)$ – комплекснозначная функция. Вектор ξ_0 можно выбрать так, чтобы $\|\xi_0\| = \langle \xi_0, \xi_0 \rangle^{1/2} = 1$. Введем отображение

$$D: F(x) \rightarrow f(t).$$

Из (2.15) следует, что $F(x)$ однозначно восстанавливается по $f(t)$. Если Δ – оператор Лапласа–Бельтрамина M , то функция $(\Delta F)(x)$ также удовлетворяет условию (2.14). Поэтому действие оператора Δ можно выразить через функцию $f(t)$, т.е. найти оператор $D\Delta D^{-1}$ (для краткости будем его обозначать просто Δ). Явный вид оператора Δf будет найден в этом параграфе. Очевидно, что

$$\Delta f(t) = \langle \Delta F(\alpha(t)o), \xi_0 \rangle. \quad (3.1)$$

Временно пусть M – произвольное симметрическое пространство ранга 1 некомпактного типа. Группы G и K определяются так же, как в § 1, $\mathfrak{g}_0$ и $\mathfrak{k}_0$ – соответствующие им алгебры Ли, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0$ – разложение Картана, $\mathfrak{a}_0$ – максимальное абелево подпространство в $\mathfrak{p}_0$ ($\dim \mathfrak{a}_0 = 1$). Через $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{a}$ обозначим комплексификации пространств $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{k}_0$, $\mathfrak{p}_0$ и $\mathfrak{a}_0$ соответственно. Пусть $\mathfrak{k}_1$ – централизатор подалгебры $\mathfrak{a}$ в $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{l}$ – ортогональное дополнение к $\mathfrak{k}_1$ в $\mathfrak{k}$ относительно формы Киллинга B (B – форма Киллинга на алгебре $\mathfrak{g}$).

Множество Π^+ ограниченных на $\mathfrak{a}$ положительных корней для симметрического пространства ранга 1 состоит из элементов β и 2β с некоторыми кратностями m_β и $m_{2\beta}$. Для $\gamma \in \Pi^+$ пусть

$$\mathfrak{k}_\gamma = \{T \in \mathfrak{k}: (\operatorname{ad} h)^2 T = \gamma^2(H)T \quad \forall H \in \mathfrak{g}\}.$$

Известно [17, с. 346], что $\dim \mathfrak{k}_\gamma = m_\gamma$, где m_γ – кратность корня γ , и что $\mathfrak{l} = \mathfrak{k}_\beta + \mathfrak{k}_{2\beta}$. Пусть $T_1^\gamma, \dots, T_{m_\gamma}^\gamma$ – базис в $\mathfrak{k}_\gamma$, ортонормированный относительно формы $(-B)$. Положим

$$\omega_\gamma = \sum_{j=1}^{m_\gamma} (T_j^\gamma)^2 \in U(\mathfrak{k}).$$

Выберем базисный вектор $I_0 \in \mathfrak{a}$ так, чтобы $\beta(I_0) = 1$. Тогда

$$\mathfrak{k}_\beta = \{T \in \mathfrak{k}: (\operatorname{ad} I_0)^2 T = T\}, \quad \mathfrak{k}_{2\beta} = \{T \in \mathfrak{k}: (\operatorname{ad} I_0)^2 T = 4T\}.$$

Положим $\alpha(t) = \exp(tI_0) \in G$. Пусть A_γ – корневой вектор, т.е. $A_\gamma \in \mathfrak{a}$ и $B(A_\gamma, H) = \gamma(H)$ при $H \in \mathfrak{a}$. В нашем случае $A_\beta = B(I_0, I_0)^{-1}I_0$, $A_{2\beta} = 2A_\beta$.

Пусть T^λ – произвольное конечномерное представление группы K в пространстве E^λ . Соответствующие представления алгебры Ли $\mathfrak{k}$ и универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{k})$ также будем обозначать T^λ . Пусть $F(x)$ – гладкая функция на M , принимающая значения в E^λ и удовлетворяющая условию (2.14). Из вида оператора Бельтрами–Лапласа в полярных координатах на симметрическом пространстве M [17, гл. 2, теорема 5.24] следует, что

$$\begin{aligned} \Delta F(\alpha(t)o) &= \frac{1}{B(I_0, I_0)} \left[\partial_t^2 F(\alpha(t)o) + m_\beta \operatorname{cth} t \partial_t F(\alpha(t)o) \right. \\ &\quad \left. + 2m_{2\beta} \operatorname{cth} 2t \partial_t F(\alpha(t)o) \right] \\ &\quad + \left[(\operatorname{sh} t)^{-2} T^\lambda(\omega_\beta) + (\operatorname{sh} 2t)^{-2} T^\lambda(\omega_{2\beta}) \right] F(\alpha(t)o), \end{aligned} \quad (3.2)$$

где ∂_t – дифференцирование по t .

Вернемся к случаю, когда $M = \mathrm{Sp}(1, n)/\mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(n)$. Тогда $m_\beta = 4(n-1)$, $m_{2\beta} = 3$. Отметим, что на алгебре Ли $\mathfrak{sp}(n)$ форма Киллинга имеет вид $B(X, Y) = 2(n+1) \mathrm{tr}(XY)$ [12, с. 88]. Соответственно на алгебре Ли $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sp}(1, n)$ и на ее комплексной оболочке $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(n+1)$ форма Киллинга имеет вид $B(X, Y) = 2(n+2) \mathrm{tr}(XY)$. Как и в § 2, в нашем случае $I_0 = X_{01'} + X_{10'}$. Тогда $B(I_0, I_0) = 8(n+2)$. Положим $\tilde{\Delta} = B(I_0, I_0)\Delta = 8(n+2)\Delta$.

Введем новый базис в алгебре $\mathfrak{g}$. Пусть $H_j = iH_{jj}$; $Y_{jr} = X_{jr} - X_{j'r'}$, $Z_{jr} = i(X_{jr} + X_{j'r'})$ при $0 \leq j \leq r \leq n$; $Y_{jr'} = X_{jr'} - X_{j'r}$, $Z_{jr'} = i(X_{jr'} + X_{j'r})$ при $0 \leq j < r \leq n$. Эти матрицы образуют ортогональный базис в $\mathfrak{g}$ (относительно формы Киллинга) и, кроме того, $B(H_j, H_j) = -4(n+2)$, $B(Y_{jr}, Y_{jr}) = B(Z_{jr}, Z_{jr}) = B(Y_{jr'}, Y_{jr'}) = B(Z_{jr'}, Z_{jr'}) = -8(n+2)$ при $j \neq r$ и $B(Y_{jj}, Y_{jj}) = B(Z_{jj}, Z_{jj}) = -4(n+2)$.

Легко видеть, что базис пространства $\mathfrak{k}_\beta$ образуют матрицы

$$Y_{1j}, \quad Z_{1j}, \quad Y_{1j'}, \quad Z_{1j'} \quad \text{при} \quad 2 \leq j \leq n. \quad (3.3)$$

Тогда

$$\omega_\beta = (8(n+2))^{-1} \left(\sum_{2 \leq j \leq n} Y_{1j}^2 + Z_{1j}^2 + Y_{1j'}^2 + Z_{1j'}^2 \right).$$

Ортогональный базис пространства $\mathfrak{k}_{2\beta}$ образуют матрицы

$$H_1 - H_0, \quad Y_{00} + Y_{11}, \quad Z_{00} + Z_{11}. \quad (3.4)$$

При этом

$$\omega_{2\beta} = (8(n+2))^{-1} ((H_0 - H_1)^2 + (Y_{00} + Y_{11})^2 + (Z_{00} + Z_{11})^2).$$

Напомним некоторые факты из теории полупростых алгебр Ли (см. [13]). Пусть $\mathfrak{g}$ – полупростая алгебра Ли, B – форма Киллинга; $X_1, \dots, X_N$ – базис в $\mathfrak{g}$, $X^1, \dots, X^N$ – двойственный базис в $\mathfrak{g}$, т.е. $B(X_j, X^r) = \delta_j^r$, где δ_j^r – символ Кронекера. Элемент $c = X_1 X^1 + \dots + X_N X^N \in U(\mathfrak{g})$ называется *элементом Казимира*. Пусть $\mathfrak{h}$ – подалгебра Картана в $\mathfrak{g}$, R – система корней алгебры $\mathfrak{g}$ относительно $\mathfrak{h}$, R_+ – множество положительных корней. Через $\langle, \rangle$ обозначим форму на $\mathfrak{h}^*$, являющуюся обратной формой для ограничения формы B на $\mathfrak{h}$. Пусть V – неприводимый конечномерный $\mathfrak{g}$ -модуль со старшим весом λ . Тогда для любого $\xi \in V$

$$c\xi = \langle \lambda, \lambda + 2\rho \rangle \xi, \quad (3.5)$$

где

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R_+} \alpha.$$

Вернемся к нашему случаю: E^λ – неприводимый $\mathfrak{k}$ -модуль со старшим весом $\lambda = (k, k, l, 0, \dots, 0) \in \Lambda_0$. Вектор $\xi_0 \in E^\lambda$ определяется условиями $\mathfrak{k}_1 \xi_0 = 0$ и

$\|\xi_0\| = 1$. Как и в §2, будем отождествлять $\mathfrak{sp}(1)$ с подалгеброй в $\mathfrak{k}$, состоящей из матриц (2.5) при $A_1 = B_1 = C_1 = 0$, а $\mathfrak{sp}(n)$ с подалгеброй в $\mathfrak{k}$, состоящей из матриц (2.5) при $a = b = c = 0$. Пусть c_1 – элемент Казимира алгебры $\mathfrak{sp}(1)$, а c_2 – элемент Казимира алгебры $\mathfrak{sp}(n)$. Заметим, что $\mathfrak{k}$ -модуль E^λ изоморфен тензорному произведению $E^{\lambda_1} \otimes E^{\lambda_2}$, где E^{λ_1} – неприводимый $\mathfrak{sp}(1)$ -модуль со старшим весом $\lambda_1 = (k)$, а E^{λ_2} – неприводимый $\mathfrak{sp}(n)$ -модуль со старшим весом $\lambda_2 = (k, l, 0, \dots, 0)$. Следовательно, для любого $\xi \in E^\lambda$ имеем $c_1\xi = \langle \lambda_1, \lambda_1 + 2\rho_1 \rangle \xi$ и $c_2\xi = \langle \lambda_2, \lambda_2 + 2\rho_2 \rangle \xi$, где ρ_1 и ρ_2 – полусуммы положительных корней алгебр Ли $\mathfrak{sp}(1)$ и $\mathfrak{sp}(n)$ соответственно. Нетрудно видеть, что в явном виде

$$\langle \lambda_1, \lambda_1 + 2\rho_1 \rangle = 8^{-1}k(k+2), \quad (3.6)$$

$$\langle \lambda_2, \lambda_2 + 2\rho_2 \rangle = (4(n+1))^{-1}[(k+l)(k+l+2n) + l(l+2n-2)]. \quad (3.7)$$

В алгебре Ли $\mathfrak{sp}(1)$ базис образуют матрицы H_0, Y_{00}, Z_{00} , элемент Казимира равен $c_1 = -8^{-1}(H_0^2 + Y_{00}^2 + Z_{00}^2)$. Так как векторы $H_0 + H_1, Y_{00} - Y_{11}, Z_{00} - Z_{11}$ принадлежат $\mathfrak{k}_1$, то

$$[(H_0 - H_1)^2 + (Y_{00} + Y_{11})^2 + (Z_{00} + Z_{11})^2]\xi_0 = 4(H_0^2 + Y_{00}^2 + Z_{00}^2)\xi_0$$

и, следовательно,

$$\omega_{2\beta}\xi_0 = -4(n+2)^{-1}c_1\xi_0 = -(2(n+2))^{-1}k(k+2). \quad (3.8)$$

В алгебре Ли $\mathfrak{sp}(n)$ базис образуют матрицы H_j ($1 \leq j \leq n$), Y_{jr}, Z_{jr} ($1 \leq j \leq r \leq n$) и $Y_{jr'}, Z_{jr'}$ ($1 \leq j < r \leq n$). Из этих матриц не принадлежат подалгебре $\mathfrak{k}_1$ только матрицы $H_1, Y_{1r}, Z_{1r}, Y_{1r'}, Z_{1r'}$. Элемент Казимира на алгебре Ли $\mathfrak{sp}(n)$ имеет вид

$$c_2 = -\frac{1}{8(n+1)} \left[2 \sum_{1 \leq j \leq n} (H_j^2 + Y_{jj}^2 + Z_{jj}^2) + \sum_{1 \leq j < r \leq n} (Y_{jr}^2 + Z_{jr}^2 + Y_{jr'}^2 + Z_{jr'}^2) \right].$$

Тогда

$$c_2\xi_0 = -\frac{1}{8(n+1)} \left[2(H_1^2 + Y_{11}^2 + Z_{11}^2) + \sum_{2 \leq r \leq n} (Y_{1r}^2 + Z_{1r}^2 + Y_{1r'}^2 + Z_{1r'}^2) \right] \xi_0. \quad (3.9)$$

Заметим еще, что из $H_0 + H_1, Y_{00} - Y_{11}, Z_{00} - Z_{11} \in \mathfrak{k}_1$ следует

$$(H_1^2 + Y_{11}^2 + Z_{11}^2)\xi_0 = (H_0^2 + Y_{00}^2 + Z_{00}^2)\xi_0. \quad (3.10)$$

Из (3.9), (3.10) и (3.8) получим, что

$$c_2\xi_0 = -\frac{(n+2)}{(n+1)} \left[\frac{1}{2}\omega_{2\beta} + \omega_\beta \right] \xi_0,$$

следовательно,

$$\begin{aligned}\omega_\beta \xi_0 &= -\frac{(n+1)}{(n+2)} c_2 \xi_0 - \frac{1}{2} \omega_{2\beta} \xi_0 \\ &= -(4(n+2))^{-1} [(k+l)(k+l+2n) + l(l+2n-2) - k(k+2)] \xi_0.\end{aligned}\quad (3.11)$$

Из (3.2), (3.8) и (3.11) с учетом того, что

$$F(\alpha(t)o) = f(t)\xi_0, \quad \tilde{\Delta} = B(I_0, I_0)\Delta = 8(n+2)\Delta,$$

получаем окончательный ответ

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta} f(t) &= \frac{d^2 f}{dt^2}(t) + 4(n-1) \operatorname{cth} t \frac{df}{dt}(t) + 6 \operatorname{cth} 2t \frac{df}{dt}(t) - 4k(k+2)(\operatorname{sh} 2t)^{-2} f(t) \\ &\quad - 2[(k+l)(k+l+2n) + l(l+2n-2) - k(k+2)](\operatorname{sh} t)^{-2} f(t).\end{aligned}\quad (3.12)$$

§ 4. Вычисление операторов $X_\pm^{(\lambda)}, Y_\pm^{(\lambda)}$ и доказательство теорем I, II

Пусть $F(x) \in \mathcal{F}_\sigma^{(\lambda)}$, $\lambda \in \Lambda_0$. Как и в § 3, определим отображение

$$D = D^\lambda: F(x) \rightarrow f(t),$$

где

$$F(\alpha(t)o) = f(t)\xi_0.$$

Если оператор X принадлежит $P_0(\lambda, \mu)$, $\mu \in \Lambda_0$, то X переводит пространство $\mathcal{F}_\sigma^{(\lambda)}$ в $\mathcal{F}_\sigma^{(\mu)}$, поэтому его действие можно выразить через функцию $f(t)$, т.е. найти $D^\mu X(D^\lambda)^{-1}$. Для краткости этот оператор будем обозначать просто через X . В этом параграфе будет найден явный вид таких операторов.

В качестве базиса пространства $\mathfrak{p}$ возьмем матрицы $p_1, p_2, \dots, p_{4n}$, определенные следующим образом:

$$\begin{aligned}p_{4j-3} &= X_{0j'} + X_{0'j}, & p_{4j-2} &= i(X_{0j'} - X_{0'j}), \\ p_{4j-1} &= X_{0j} + X_{0'j'}, & p_{4j} &= i(X_{0j} - X_{0'j'}), \quad j = 1, 2, \dots, n.\end{aligned}$$

Матрицы p_j образуют ортогональный базис (относительно формы Киллинга) в $\mathfrak{p}$ и $B(p_j, p_j) = 8(n+2)$. Отметим также, что все $p_j \in \mathfrak{p}_0$ и $p_1 = I_0$.

Рассуждая как в § 5 работы [1], получаем, что для любых матриц p_j и p_r найдется элемент $u \in K$ такой, что $p_r = up_j u^{-1}$, а также, что матрица оператора $\operatorname{ad} k|_{\mathfrak{k}}$ в базисе $p_1, \dots, p_{4n}$ вещественна и кососимметрична для любого $k \in \mathfrak{k}_0$. При $k \in \mathfrak{k}$ матрица оператора $\operatorname{ad} k|_{\mathfrak{k}}$ в базисе $p_1, \dots, p_{4n}$ также будет кососимметричной, следовательно, $\mathfrak{k}$ -модуль $\mathfrak{p}$ изоморфен своему двойственному модулю $\mathfrak{p}^*$, а

базис $p_1, \dots, p_{4n}$ совпадает со своим двойственным базисом. Отметим также, что матрицы операторов $\text{Ad}(u)|_{\mathfrak{k}}$ в базисе $p_1, \dots, p_{4n}$ вещественны и ортогональны при $u \in K$.

Пусть E^λ и E^μ – неприводимые $\mathfrak{k}$ -модули со старшими весами λ и μ , T^λ и T^μ – возникающие в E^λ и E^μ представления группы K . Пусть $\varphi: \mathfrak{p} \rightarrow \text{Hom}(E^\mu, E^\lambda)$ – гомоморфизм $\mathfrak{k}$ -модулей, $\alpha_j = \varphi(p_j)$, α_j^* – сопряженный оператор. Тогда $\alpha_j^* \in \text{Hom}(E^\lambda, E^\mu)$. Оператор $X = L(\varphi)$ задается формулой (2.3) и действует из пространства $\mathcal{F}_\sigma^{(\lambda)}$ в $\mathcal{F}_\sigma^{(\mu)}$.

Гомоморфизм $\mathfrak{k}$ -модулей φ индуцирует сплетающий оператор для соответствующих представлений группы K . Тогда если

$$\text{Ad}(u)p_j = up_ju^{-1} = \sum c_{jr}(u)p_r, \quad (4.1)$$

то

$$T^\lambda(u)\alpha_j T^\mu(u^{-1}) = \sum c_{jr}(u)\alpha_r,$$

а так как операторы $T^\lambda(u)$ и $T^\mu(u)$ унитарны и числа $c_{jr}(u)$ принадлежат $\mathbb{R}$, то и

$$T^\mu(u)\alpha_j^* T^\lambda(u^{-1}) = \sum c_{jr}(u)\alpha_r^*. \quad (4.2)$$

Повторяя рассуждения леммы 5.2 в [1], получаем, что при $F \in \mathcal{F}_\sigma^{(\lambda)}$

$$(XF)(x) = 4n \frac{d}{ds} \left(\int T^\mu(u)\alpha_1^* T^\lambda(u^{-1}) F(u\alpha(s)u^{-1}x) du \right) \Big|_{s=0}. \quad (4.3)$$

Здесь и в дальнейших формулах du – элемент меры Хаара на группе K и интегралы по du берутся по группе K .

Напомним, что $\mathfrak{l} = \mathfrak{k}_1^\perp$ – ортогональное дополнение к $\mathfrak{k}_1$ в $\mathfrak{k}$ относительно формы Киллинга. Пусть $\mathfrak{l}_0 = \mathfrak{l} \cap \mathfrak{k}_0$. Отображение $\tau: \mathfrak{k}_0 \times \mathbb{R} \times \mathfrak{l}_0 \rightarrow G$ определим формулой

$$\tau(k, t, q) = (\exp k)\alpha(t)(\exp q),$$

где $q \in \mathfrak{l}_0$, $t \in \mathbb{R}$, $k \in \mathfrak{k}_0$. Пусть $t \neq 0$. Нетрудно найти дифференциал отображения τ в точке $(0, t, 0)$ и показать, что он невырожден. Следовательно, отображение τ является диффеоморфизмом некоторой окрестности точки $(0, t, 0)$ в $\mathfrak{k}_0 \times \mathbb{R} \times \mathfrak{l}_0$ на окрестность точки $\alpha(t)$ в G . Тогда при s , достаточно близких к нулю,

$$u\alpha(s)u^{-1}\alpha(t) = v\alpha(\tilde{t})w, \quad (4.4)$$

где $v = \exp p$, $w = \exp q$, $\tau^{-1}(u\alpha(s)u^{-1}\alpha(t)) = (k, \tilde{t}, q)$. При этом $v, \tilde{t}, w$ гладко зависят от s и $\tilde{t}(0) = t$. Пусть

$$t_1 = \frac{d\tilde{t}}{ds} \Big|_{s=0}, \quad v_1 = \frac{dv}{ds} \Big|_{s=0}, \quad w_1 = \frac{dw}{ds} \Big|_{s=0}. \quad (4.5)$$

Тогда $v_1 \in \mathfrak{k}_0$, $w_1 \in \mathfrak{l}_0$. Проинтегрируем равенство (4.4) по s и положим $s = 0$. Получим

$$uI_0u^{-1}\alpha(t) = v_1\alpha(t) + t_1I_0\alpha(t) + \alpha(t)w_1,$$

или, эквивалентно,

$$uI_0u^{-1} = v_1 + t_1I_0 + \alpha(t)w_1\alpha(-t). \quad (4.6)$$

В пространстве $\mathfrak{l}$ базис образуют матрицы (3.3) и (3.4). Будем обозначать эти базисные векторы $q_2, q_3, \dots, q_{4n}$, причем пусть

$$q_2 = H_1 - H_0, \quad q_3 = Y_{00} + Y_{11}, \quad q_4 = Z_{00} + Z_{11},$$

а при $r \geq 2$

$$q_{4r-3} = Y_{1r'}, \quad q_{4r-2} = Z_{1r'}, \quad q_{4r-1} = Y_{1r}, \quad q_{4r} = Z_{1r}.$$

Легко видеть, что $\alpha(t)q_j\alpha(-t) = (\operatorname{ch} 2t)q_j + (\operatorname{sh} 2t)p_j$ при $j = 2, 3, 4$ и $\alpha(t)q_j\alpha(-t) = (\operatorname{ch} t)q_j + (\operatorname{sh} t)p_j$ при $j \geq 5$.

Так как $I_0 = p_1$, то

$$uI_0u^{-1} = \operatorname{Ad}(u)p_1 = \sum_{1 \leq j \leq 4n} c_{1j}(u)p_j. \quad (4.7)$$

Матрицу $w_1 \in \mathfrak{l}_0$ можно разложить по базису q_j :

$$w_1 = \sum_{2 \leq j \leq 4n} x_j q_j,$$

где $x_j \in \mathbb{R}$. Тогда из (4.6) получаем, что

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq j \leq 4n} c_{1j}(u)p_j &= \left(v_1 + (x_2 \operatorname{ch} 2t)q_2 + (x_3 \operatorname{ch} 2t)q_3 + (x_4 \operatorname{ch} 2t)q_4 + \sum_{5 \leq j \leq 4n} (x_j \operatorname{ch} t)q_j \right) \\ &+ \left(t_1 p_1 + (x_2 \operatorname{sh} 2t)p_2 + (x_3 \operatorname{sh} 2t)p_3 + (x_4 \operatorname{sh} 2t)p_4 + \sum_{5 \leq j \leq 4n} (x_j \operatorname{sh} t)p_j \right). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Из (4.8) получаем (приравнивая коэффициенты при p_j), что $t_1 = c_{11}$, $x_j = (\operatorname{sh} t)^{-1}c_{1j}$ при $j = 2, 3, 4$ и $x_j = (\operatorname{sh} t)^{-1}c_{1j}$ при $j \geq 5$. Тогда

$$v_1 = -(\operatorname{cth} 2t)(c_{12}q_2 + c_{13}q_3 + c_{14}q_4) - (\operatorname{cth} t) \sum_{5 \leq j \leq 4n} c_{1j}q_j, \quad (4.9)$$

$$w_1 = (\operatorname{sh} 2t)^{-1}(c_{12}q_2 + c_{13}q_3 + c_{14}q_4) + (\operatorname{sh} t)^{-1} \sum_{5 \leq j \leq 4n} c_{1j}q_j. \quad (4.10)$$

Напомним, что для функции $F \in \mathcal{F}_\sigma^{(\lambda)}$ комплекснозначные функции $f(t)$ и $(Xf)(t)$ определяются из соотношений

$$F(\alpha(t)o) = f(t)\xi_0, \quad (XF)(\alpha(t)o) = (Xf)(t)\tilde{\xi}_0,$$

где вектор $\xi_0 \in E^\lambda$ удовлетворяет условиям $\mathfrak{k}_1\xi_0 = 0$ и $\|\xi_0\| = 1$, а $\tilde{\xi}_0$ — аналогичный вектор пространства E^μ , т.е. $\mathfrak{k}_1\tilde{\xi}_0 = 0$ и $\|\tilde{\xi}_0\| = 1$. Отметим, что

$$f(t) = \langle F(\alpha(t)o), \xi_0 \rangle, \quad (Xf)(t) = \langle XF(\alpha(t)o), \tilde{\xi}_0 \rangle. \quad (4.11)$$

ЛЕММА 4.1. *Имеем*

$$(Xf)(t) = A \frac{df}{dt} f(t) - 3B(\operatorname{cth} 2t)f(t) - 4(n-1)C(\operatorname{cth} t)f(t), \quad (4.12)$$

где

$$A = \langle \alpha_1^* \xi_0, \tilde{\xi}_0 \rangle, \quad B = \langle \alpha_2^*(q_2 \xi_0), \tilde{\xi}_0 \rangle, \quad C = \langle \alpha_5^*(q_5 \xi_0), \tilde{\xi}_0 \rangle.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (4.4) следует, что

$$F(u\alpha(s)u^{-1}\alpha(t)o) = T^\lambda(v)F(\alpha(\tilde{t})o) = T^\lambda(v)(f(\tilde{t})\xi_0).$$

Тогда

$$\left. \frac{dF}{ds}(u\alpha(s)u^{-1}\alpha(t)o) \right|_{s=0} = t_1 \frac{df}{dt}(t) \cdot \xi_0 + f(t)(v_1 \xi_0). \quad (4.13)$$

Из (4.2) следует, что

$$T^\mu(u)\alpha_1^*T^\lambda(u^{-1}) = \sum c_{1j}(u)\alpha_j^*. \quad (4.14)$$

Так как функции $c_{1j}(u)$ являются матричными элементами неприводимого унитарного представления группы K в пространстве $\mathfrak{p}$ и $c_{1j} \in \mathbb{R}$, то из соотношений ортогональности следует, что

$$\int c_{1j}(u)c_{1r}(u) du = (4n)^{-1}\delta_{jr},$$

где δ_{jr} — символ Кронекера. Умножим (4.14) на (4.13) и проинтегрируем по u , пользуясь соотношениями ортогональности. Тогда с учетом (4.3)

$$\begin{aligned} (XF)(\alpha(t)o) &= \frac{df}{dt}(t) \cdot \alpha_1^* \xi_0 - f(t)(\operatorname{cth} 2t)(\alpha_2^* q_2 \xi_0 + \alpha_3^* q_3 \xi_0 + \alpha_4^* q_4 \xi_0) \\ &\quad - f(t)(\operatorname{cth} t) \sum_{5 \leq j \leq 4n} \alpha_j^* q_j \xi_0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Докажем, что

$$\langle \alpha_2^* q_2 \xi_0, \tilde{\xi}_0 \rangle = \langle \alpha_3^* q_3 \xi_0, \tilde{\xi}_0 \rangle = \langle \alpha_4^* q_4 \xi_0, \tilde{\xi}_0 \rangle$$

и

$$\langle \alpha_j^* q_j \xi_0, \tilde{\xi}_0 \rangle = \langle \alpha_5^* q_5 \xi_0, \tilde{\xi}_0 \rangle \quad \text{при} \quad j \geq 5.$$

Определим элементы k_3, k_4 и $k_6, k_7, \dots, k_{4n}$ из алгебры Ли $\mathfrak{k}_1$ следующим образом:

$$\begin{aligned} k_3 &= \frac{1}{2}(Z_{11} - Z_{00}), & k_4 &= \frac{1}{2}(Y_{00} - Y_{11}), \\ k_6 &= H_0 + H_1, & k_7 &= -Y_{22}, & k_8 &= -Z_{22}, \end{aligned}$$

а при $j \geq 3$

$$k_{4j-3} = -Y_{2j'}, \quad k_{4j-2} = -Z_{2j'}, \quad k_{4j-1} = -Y_{2j}, \quad k_{4j} = -Z_{2j}.$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} [k_r, p_2] &= p_r, & [k_r, q_r] &= -q_2 & \text{при} & \quad r = 3, 4, \\ [k_r, p_5] &= p_r, & [k_r, q_r] &= -q_5 & \text{при} & \quad r = 6, 7, \dots, 4n. \end{aligned}$$

По определению гомоморфизма φ

$$\varphi([k, p])\xi = k(\varphi(p)\xi) - \varphi(p)(k\xi) \quad (4.16)$$

для любых $k \in \mathfrak{k}$, $p \in \mathfrak{p}$, $\xi \in E^\mu$. Для краткости формулу (4.16) будем также записывать как

$$\varphi([k, p]) = [k, \varphi(p)].$$

Отметим также, что $k_j \xi_0 = 0$, $k_j \tilde{\xi}_0 = 0$ и $k_j^* = -k_j$. Пусть $j = 3$ или $j = 4$; тогда

$$\begin{aligned} \langle \alpha_j^* q_j \xi_0, \tilde{\xi}_0 \rangle &= \langle q_j \xi_0, \alpha_j \tilde{\xi}_0 \rangle = \langle q_j \xi_0, \varphi(p_j) \tilde{\xi}_0 \rangle \\ &= \langle q_j \xi_0, (k_j \varphi(p_2) - \varphi(p_2) k_j) \tilde{\xi}_0 \rangle = \langle q_j \xi_0, k_j \alpha_2 \tilde{\xi}_0 \rangle \\ &= -\langle k_j q_j \xi_0, \alpha_2 \tilde{\xi}_0 \rangle = -\langle [k_j, q_j] \xi_0, \alpha_2 \tilde{\xi}_0 \rangle = \langle q_2 \xi_0, \alpha_2 \tilde{\xi}_0 \rangle = \langle \alpha_2^* q_2 \xi_0, \tilde{\xi}_0 \rangle. \end{aligned}$$

Аналогично проверяется, что $\langle \alpha_j^* q_j \xi_0, \tilde{\xi}_0 \rangle = \langle \alpha_5^* q_5 \xi_0, \tilde{\xi}_0 \rangle$ при $j \geq 5$. Умножив (4.15) скалярно на $\tilde{\xi}_0$, получим (4.12).

По лемме 4.1 для нахождения явного вида оператора $X \in P_0(\lambda, \mu)$ необходимо найти три коэффициента: A, B, C . Следующая лемма упрощает нахождение этих коэффициентов. Напомним, что $p_1 = X_{01'} + X_{0'1}$, $p_2 = i(X_{01'} - X_{0'1})$, $p_5 = X_{02'} + X_{0'2}$, $q_2 = i(H_{11} - H_{00})$, $q_5 = X_{12'} - X_{1'2}$ и $\alpha_j = \varphi(p_j)$.

ЛЕММА 4.2. *Имеем*

$$\begin{aligned} A &= 2\langle \xi_0, \varphi(X_{01'}) \tilde{\xi}_0 \rangle, \\ B &= 4\langle H_{11} \xi_0, \varphi(X_{01'}) \tilde{\xi}_0 \rangle, \\ C &= 2\langle X_{12'} \xi_0, \varphi(X_{02'}) \tilde{\xi}_0 \rangle. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Основным элементом следующих преобразований является тождество (4.16), которое можно переписать также в виде

$$k(\varphi(p)\xi) = \varphi([k, p])\xi + \varphi(p)(k\xi). \quad (4.17)$$

А) Напомним, что

$$A = \langle \xi_0, \alpha_1 \tilde{\xi}_0 \rangle = \langle \xi_0, \varphi(p_1) \tilde{\xi}_0 \rangle = \langle \xi_0, \varphi(X_{01'}) \tilde{\xi}_0 \rangle + \langle \xi_0, \varphi(X_{0'1}) \tilde{\xi}_0 \rangle.$$

Заметим, что

$$X_{00} - X_{11}, X_{0'0'} - X_{1'1'} \in \mathfrak{k}_1, \quad (4.18)$$

следовательно, $X_{0'0'}\xi_0 = X_{1'1'}\xi_0$ и $X_{00}\tilde{\xi}_0 = X_{11}\tilde{\xi}_0$. Тогда, пользуясь (4.16), получим

$$\begin{aligned} \langle \xi_0, \varphi(X_{01'}) \tilde{\xi}_0 \rangle &= \langle \xi_0, (X_{00}\varphi(X_{0'1'}) - \varphi(X_{0'1'})X_{00}) \tilde{\xi}_0 \rangle \\ &= \langle \xi_0, X_{00}\varphi(X_{0'1'}) \tilde{\xi}_0 \rangle - \langle \xi_0, \varphi(X_{0'1'})X_{00}\tilde{\xi}_0 \rangle \\ &= \langle X_{0'0'}\xi_0, \varphi(X_{0'1'}) \tilde{\xi}_0 \rangle - \langle \xi_0, \varphi(X_{0'1'})X_{00}\tilde{\xi}_0 \rangle \\ &= \langle X_{1'1'}\xi_0, \varphi(X_{0'1'}) \tilde{\xi}_0 \rangle - \langle \xi_0, \varphi(X_{0'1'})X_{11}\tilde{\xi}_0 \rangle \\ &= \langle \xi_0, (X_{11}\varphi(X_{0'1'}) - \varphi(X_{0'1'})X_{11}) \tilde{\xi}_0 \rangle = \langle \xi_0, \varphi(X_{0'1}) \tilde{\xi}_0 \rangle. \end{aligned}$$

Следовательно, $A = 2\langle \xi_0, \varphi(X_{01'}) \tilde{\xi}_0 \rangle$.

Б) Так как $H_{11} + H_{00} \in \mathfrak{k}_1$, то $q_2\xi_0 = i(H_{11} - H_{00})\xi_0 = 2iH_{11}\xi_0 = -2iH_{00}\xi_0$. Тогда

$$\begin{aligned} B &= \langle q_2\xi_0, \alpha_2 \tilde{\xi}_0 \rangle = \langle q_2\xi_0, i\varphi(X_{01'} - X_{0'1}) \tilde{\xi}_0 \rangle \\ &= 2\langle H_{11}\xi_0, \varphi(X_{01'}) \tilde{\xi}_0 \rangle + 2\langle H_{00}\xi_0, \varphi(X_{0'1}) \tilde{\xi}_0 \rangle. \end{aligned}$$

Заметим, что $[X_{00} - X_{11}, X_{0'0'} + X_{1'1'}] = H_{00} - H_{11}$. Тогда с учетом (4.18)

$$\begin{aligned} 2\langle H_{00}\xi_0, \varphi(X_{0'1}) \tilde{\xi}_0 \rangle &= \langle (H_{00} - H_{11})\xi_0, \varphi(X_{0'1}) \tilde{\xi}_0 \rangle \\ &= \langle (X_{00} - X_{11})(X_{0'0'} + X_{1'1'})\xi_0, \varphi(X_{0'1}) \tilde{\xi}_0 \rangle \\ &= \langle 2X_{1'1'}\xi_0, (X_{0'0'} - X_{1'1'})\varphi(X_{0'1}) \tilde{\xi}_0 \rangle \\ &= -2\langle X_{1'1'}\xi_0, \varphi(X_{0'1'}) \tilde{\xi}_0 \rangle. \end{aligned}$$

Аналогично проверяется, что

$$2\langle H_{11}\xi_0, \varphi(X_{01'}) \tilde{\xi}_0 \rangle = -2\langle X_{1'1'}\xi_0, \varphi(X_{0'1'}) \tilde{\xi}_0 \rangle.$$

Следовательно, $B = 4\langle H_{11}\xi_0, \varphi(X_{01'}) \tilde{\xi}_0 \rangle$.

В) По определению

$$C = \langle q_5 \xi_0, \alpha_5 \tilde{\xi}_0 \rangle = \langle X_{12'} \xi_0, \varphi(X_{02'}) \tilde{\xi}_0 \rangle + \langle X_{12'} \xi_0, \varphi(X_{0'2}) \tilde{\xi}_0 \rangle - \langle X_{1'2} \xi_0, \varphi(X_{02'}) \tilde{\xi}_0 \rangle - \langle X_{1'2} \xi_0, \varphi(X_{0'2}) \tilde{\xi}_0 \rangle.$$

Отметим, что элементы $X_{22}, X_{2'2'}$ принадлежат $\mathfrak{k}_1$, следовательно, $X_{2'2'} \xi_0 = 0$ и $X_{22} \tilde{\xi}_0 = 0$. С учетом этого получим

$$\begin{aligned} \langle X_{12'} \xi_0, \varphi(X_{02'}) \tilde{\xi}_0 \rangle &= -\langle [X_{2'2'}, X_{12}] \xi_0, \varphi(X_{02'}) \tilde{\xi}_0 \rangle \\ &= -\langle X_{2'2'} X_{12} \xi_0, \varphi(X_{02'}) \tilde{\xi}_0 \rangle = -\langle X_{12} \xi_0, X_{22} \varphi(X_{02'}) \tilde{\xi}_0 \rangle \\ &= \langle X_{12} \xi_0, \varphi(X_{02}) \tilde{\xi}_0 \rangle = \langle [X_{1'2}, X_{11}] \xi_0, \varphi(X_{02}) \tilde{\xi}_0 \rangle \\ &= \langle X_{1'2} X_{11} \xi_0, \varphi(X_{02}) \tilde{\xi}_0 \rangle - \langle X_{1'2} \xi_0, X_{1'1'} \varphi(X_{02}) \tilde{\xi}_0 \rangle \\ &= \langle X_{1'2} X_{00} \xi_0, \varphi(X_{02}) \tilde{\xi}_0 \rangle - \langle X_{1'2} \xi_0, \varphi(X_{02}) X_{1'1'} \tilde{\xi}_0 \rangle \\ &= \langle X_{1'2} \xi_0, (X_{0'0'} \varphi(X_{02}) - \varphi(X_{02}) X_{0'0'}) \tilde{\xi}_0 \rangle \\ &= -\langle X_{1'2} \xi_0, \varphi(X_{0'2}) \tilde{\xi}_0 \rangle. \end{aligned}$$

Далее заметим, что

$$\begin{aligned} \langle X_{12'} \xi_0, \varphi(X_{02'}) \tilde{\xi}_0 \rangle &= -\langle [X_{2'2'}, X_{12}] \xi_0, \varphi(X_{0'2}) \tilde{\xi}_0 \rangle \\ &= -\langle X_{12} \xi_0, X_{22} \varphi(X_{0'2}) \tilde{\xi}_0 \rangle = -\langle X_{12} \xi_0, \varphi(X_{0'2}) X_{22} \tilde{\xi}_0 \rangle = 0. \end{aligned}$$

Аналогично $\langle X_{1'2} \xi_0, \varphi(X_{02'}) \tilde{\xi}_0 \rangle = 0$. Следовательно,

$$C = 2\langle X_{12'} \xi_0, \varphi(X_{02'}) \tilde{\xi}_0 \rangle.$$

Пусть $\lambda = (k, k, l, 0, \dots, 0) \in \Lambda_0$, $\delta_1 = (1, 1, 0, \dots, 0)$, $\delta_2 = (-1, -1, 1, 0, \dots, 0)$. Ненулевые операторы $X \in P_0(\lambda, \mu)$ могут быть только при $\mu = \lambda \pm \delta_1$ или $\mu = \lambda \pm \delta_2$, причем эти операторы определены с точностью до умножения на ненулевое число. Далее мы найдем явный вид этих операторов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. Пусть $\lambda = (k, k, l, 0, \dots, 0)$, $\mu = \lambda + \delta_1$. Существует оператор $X_+^{(\lambda)} \in P_0(\lambda, \mu)$, имеющий вид

$$(X_+^{(\lambda)} f)(t) = \frac{df}{dt}(t) - 2k(\operatorname{cth} 2t)f(t) - 2l(\operatorname{cth} t)f(t). \quad (4.19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. А) Пусть v_0 – старший вектор пространства E^λ . Напомним (см. § 2), как строится вектор ξ_0 . Элемент $\mathcal{D} \in U(\mathfrak{k})$ определяется формулой (2.18). Пусть

$$w_0 = \mathcal{D}^l v_0, \quad \xi_0 = \sum_{0 \leq r \leq k} X_{0'0'}^r X_{1'1'}^{k-r} w_0. \quad (4.20)$$

Тогда $\mathfrak{k}_1 \xi_0 = 0$ и $\xi_0 \neq 0$. Можно считать, что вектор v_0 выбран так, чтобы $\langle \xi_0, \xi_0 \rangle = 1$. Тогда по (2.28)

$$\langle w_0, w_0 \rangle = (k! (k+1)!)^{-1}.$$

Аналогично, пусть $\tilde{v}_0$ – старший вектор пространства E^μ , $\mu = (k+1, k+1, l, 0, \dots, 0)$. Тогда $\tilde{w}_0 = \mathcal{D}^l \tilde{v}_0$ и

$$\tilde{\xi}_0 = \sum_{0 \leq r \leq k+1} X_{0'0'}^r X_{1'1'}^{k-r+1} \tilde{w}_0,$$

при этом можно считать, что $\langle \tilde{\xi}_0, \tilde{\xi}_0 \rangle = 1$.

Пусть $\varphi: \mathfrak{p} \rightarrow \text{Hom}(E^\mu, E^\lambda)$ – ненулевой гомоморфизм $\mathfrak{k}$ -модулей. Для любого $\mathfrak{k}$ -модуля V через $V(\delta)$ обозначим весовое пространство веса δ , т.е.

$$V(\delta) = \{ \xi \in V : h\xi = \delta(h)\xi \quad \forall h \in \mathfrak{h} \}.$$

Будем также говорить, что векторы из $V(\delta)$ имеют вес δ .

Пусть ω – произвольный вес $\mathfrak{k}$ -модуля $\mathfrak{p}$, $p \in \mathfrak{p}(\omega)$. Тогда $\varphi(p)(E^\mu(\delta)) \subseteq E^\lambda(\delta + \omega)$. Действительно, для $\xi \in E^\mu(\delta)$, $h \in \mathfrak{h}$ из (4.17) следует, что

$$h(\varphi(p)\xi) = \varphi([h, p])\xi + \varphi(p)(h\xi) = (\omega(h) + \delta(h))(\varphi(p)\xi).$$

Вектор $X_{0'1'}$ является вектором младшего веса $\omega_{0'1'} = -\delta_1$ в $\mathfrak{p}$. Тогда $[X_\alpha, X_{0'1'}] = 0$ для любого $\alpha \in R_-$ (R_- – множество отрицательных корней алгебры $\mathfrak{k}$) и соответственно

$$\varphi(X_{0'1'})X_\alpha\xi = X_\alpha\varphi(X_{0'1'}\xi) \quad \forall \xi \in E^\mu, \quad \forall \alpha \in R_-. \quad (4.21)$$

Если $\tilde{v}_0$ – старший вектор пространства E^μ , то

$$\varphi(X_{0'1'})\tilde{v}_0 \in E^\lambda(\mu - \delta_1) = E^\lambda(\lambda).$$

Если $\varphi(X_{0'1'})\tilde{v}_0 = 0$, то из (4.21) получим, что $\varphi(X_{0'1'})(X_\alpha\tilde{v}_0) = 0$ для любого $\alpha \in R_-$ и, следовательно, $\varphi(X_{0'1'}) = 0$. Тогда из (4.16) следует, что $\varphi([k, X_{0'1'}]) = 0$ для любого $k \in \mathfrak{k}$, а так как $\mathfrak{k}$ -модуль E неприводим, то и весь гомоморфизм φ равен нулю. Так как $\varphi \neq 0$, то $\varphi(X_{0'1'})\tilde{v}_0 \neq 0$, и, умножив φ на подходящее число, можно считать, что

$$\varphi(X_{0'1'})\tilde{v}_0 = v_0. \quad (4.22)$$

Так как $[H_{23'}, X_{0'1'}] = 0$, то $\varphi(X_{0'1'})(H_{23'}\xi) = H_{23'}(\varphi(X_{0'1'})\xi)$. Тогда из (4.21) и (2.18) следует, что

$$\varphi(X_{0'1'}) (\mathcal{D}\xi) = \mathcal{D}(\varphi(X_{0'1'})\xi), \quad (4.23)$$

и, следовательно,

$$\varphi(X_{0'1'})\tilde{w}_0 = \varphi(X_{0'1'})\mathcal{D}^l\tilde{v}_0 = \mathcal{D}^l v_0 = w_0. \quad (4.24)$$

Б) Заметим, что $H_{00}w_0 = kw_0$, $H_{00}\tilde{w}_0 = (k+1)\tilde{w}_0$. Тогда, используя (4.24) и лемму 2.1, получим

$$\varphi(X_{01'})X_{0'0'}^r\tilde{w}_0 = (X_{00}\varphi(X_{0'1'}) - \varphi(X_{0'1'})X_{00})X_{0'0'}^r\tilde{w}_0 = -rX_{0'0'}^{r-1}w_0.$$

Следовательно,

$$\varphi(X_{01'})\tilde{\xi}_0 = - \sum_{0 \leq r \leq k+1} rX_{0'0'}^{r-1}X_{1'1'}^{k-r+1}w_0 = - \sum_{0 \leq r \leq k} (r+1)X_{0'0'}^rX_{1'1'}^{k-r}w_0. \quad (4.25)$$

Найдем скалярное произведение $\langle \xi_0, \varphi(X_{01'})\tilde{\xi}_0 \rangle$, учитывая, что векторы, имеющие различные веса, ортогональны. Воспользовавшись (2.27) и (2.28), получим

$$\begin{aligned} A = 2\langle \xi_0, \varphi(X_{01'})\tilde{\xi}_0 \rangle &= -2 \sum_{0 \leq r \leq k} \langle X_{0'0'}^rX_{1'1'}^{k-r}w_0, X_{0'0'}^rX_{1'1'}^{k-r}w_0 \rangle \\ &= -(k!)^2 2\langle w_0, w_0 \rangle \sum_{0 \leq r \leq k} (r+1) = -k!(k+2)!\langle w_0, w_0 \rangle = -(k+2). \end{aligned}$$

В) Легко видеть, что $H_{11}X_{0'0'}^rX_{1'1'}^{k-r}w_0 = (2r-k)X_{0'0'}^rX_{1'1'}^{k-r}w_0$. Тогда

$$H_{11}\xi_0 = \sum_{0 \leq r \leq k} (2r-k)X_{0'0'}^rX_{1'1'}^{k-r}w_0.$$

Используя (4.25) (а также (2.27) и (2.28)), получим

$$\begin{aligned} B = 4\langle H_{11}\xi_0, \varphi(X_{01'})\tilde{\xi}_0 \rangle &= 4(k!)^2\langle w_0, w_0 \rangle \sum_{0 \leq r \leq k} (r+1)(k-2r) \\ &= -\frac{2}{3}k(k+1)(k+2)(k!)^2\langle w_0, w_0 \rangle = -\frac{2}{3}k(k+2). \end{aligned}$$

Г) Индукцией по r проверим, что

$$\varphi(X_{02'})X_{0'0'}^r\tilde{w}_0 = -rX_{0'0'}^{r-1}\varphi(X_{0'2'})\tilde{w}_0 \quad (4.26)$$

(при $r = 0$ считаем, что правая часть равна нулю).

Пусть $r = 0$. Вектор $\varphi(X_{02'})\tilde{w}_0$ должен иметь вес $\mu + \omega_{02'} = \lambda + \omega_{01} + \omega_{02'} = \lambda + \omega_{00} + \omega_{12'}$. Но ненулевых векторов с таким весом не может быть в пространстве E^λ со старшим весом λ .

Пусть (4.26) справедливо для $r - 1$. Так как $[X_{0'0'}, X_{02'}] = X_{0'2'}$ и $[X_{0'0'}, X_{0'2'}] = 0$, то

$$\begin{aligned}\varphi(X_{02'})X_{0'0'}^r\tilde{w}_0 &= X_{0'0'}\varphi(X_{02'})X_{0'0'}^{r-1}\tilde{w}_0 - \varphi(X_{0'2'})X_{0'0'}^{r-1}\tilde{w}_0 \\ &= -(r-1)X_{0'0'}^{r-1}\varphi(X_{0'2'})\tilde{w}_0 - X_{0'0'}^{r-1}\varphi(X_{0'2'})\tilde{w}_0 \\ &= -rX_{0'0'}^{r-1}\varphi(X_{0'2'})\tilde{w}_0.\end{aligned}$$

Д) По лемме 4.2 $C = 2\langle X_{12'}\xi_0, \varphi(X_{02'})\tilde{\xi}_0 \rangle = 2\langle \xi_0, X_{1'2}\varphi(X_{02'})\tilde{\xi}_0 \rangle$. Из п. Г) следует, что

$$\begin{aligned}X_{02'}\tilde{\xi}_0 &= -\sum_{0 \leq r \leq k+1} rX_{0'0'}^{r-1}X_{1'1'}^{k-r+1}\varphi(X_{0'2'})\tilde{w}_0 \\ &= -\sum_{0 \leq r \leq k} (r+1)X_{0'0'}^rX_{1'1'}^{k-r}\varphi(X_{0'2'})\tilde{w}_0.\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}C &= 2\langle \xi_0, X_{1'2}\varphi(X_{02'})\tilde{\xi}_0 \rangle \\ &= -2\sum_{0 \leq r \leq k} (r+1)\langle X_{0'0'}^rX_{1'1'}^{k-r}w_0, X_{0'0'}^rX_{1'1'}^{k-r}X_{1'2}\varphi(X_{0'2'})\tilde{w}_0 \rangle. \quad (4.27)\end{aligned}$$

С учетом (2.27) заметим, что

$$\begin{aligned}\langle X_{0'0'}^rX_{1'1'}^{k-r}w_0, X_{0'0'}^rX_{1'1'}^{k-r}X_{1'2}\varphi(X_{0'2'})\tilde{w}_0 \rangle \\ = \langle X_{00}^rX_{0'0'}^rX_{11}^{k-r}X_{1'1'}^{k-r}w_0, X_{1'2}\varphi(X_{0'2'})\tilde{w}_0 \rangle = (k!)^2\langle w_0, X_{1'2}\varphi(X_{0'2'})\tilde{w}_0 \rangle.\end{aligned}$$

Тогда из (4.27) получаем, что

$$C = -k!(k+2)!\langle w_0, X_{1'2}\varphi(X_{0'2'})\tilde{w}_0 \rangle. \quad (4.28)$$

Е) Напомним, что $w_0 = \mathcal{D}^l v_0$, $\tilde{w}_0 = \mathcal{D}^l \tilde{v}_0$, где $v_0, \tilde{v}_0$ – старшие векторы в E^λ и E^μ , а $\mathcal{D}$ определено в (2.18). Непосредственно проверяются соотношения

$$[X_{12'}, \mathcal{D}] = -X_{2'2'}(H_{12'} + 2H_{23'} + 2n - 2) + X_{1'2'}X_{12'}, \quad (4.29)$$

$$[X_{2'2'}, \mathcal{D}] = X_{1'2'}X_{2'2'}. \quad (4.30)$$

Временно пусть $H = H_{12'} + 2H_{23'}$; тогда из (4.29) следует, что

$$X_{12'}\mathcal{D} = (\mathcal{D} + X_{1'2'})X_{12'} - X_{2'2'}(H + 2n - 2). \quad (4.31)$$

Так как $X_{12'}v_0 = 0$, то из (4.31) получаем, что

$$X_{12'}\mathcal{D}^l v_0 = - \sum_{1 \leq r \leq l} (\mathcal{D} + X_{1'2'})^{r-1} X_{2'2'}(H + 2n - 2)\mathcal{D}^{l-r} v_0. \quad (4.32)$$

Заметим, что $(H + 2n - 2)\mathcal{D}^{l-r} v_0 = (k + 2r + 2n - 2)\mathcal{D}^{l-r} v_0$ и $(\mathcal{D} + X_{1'2'})X_{2'2'} = X_{2'2'}\mathcal{D}$ (следует из (4.30)). Тогда из (4.32) получаем

$$\begin{aligned} X_{12'}w_0 = X_{12'}\mathcal{D}^l v_0 &= -X_{2'2'}\mathcal{D}^{l-1} v_0 \sum_{1 \leq r \leq l} (k + 2r + 2n - 2) \\ &= -l(k + l + 2n - 1)X_{2'2'}\mathcal{D}^{l-1} v_0. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Аналогично,

$$X_{12'}\tilde{w}_0 = -l(k + l + 2n)X_{2'2'}\mathcal{D}^{l-1}\tilde{v}_0. \quad (4.34)$$

Так как $X_{0'2'} = -[X_{12'}, X_{0'1'}]$, то

$$\begin{aligned} \varphi(X_{0'2'})\tilde{w}_0 &= -(X_{12'}\varphi(X_{0'1'}) - \varphi(X_{0'1'})X_{12'})\tilde{w}_0 \\ &= -X_{12'}w_0 + \varphi(X_{0'1'})X_{12'}\tilde{w}_0 = -lX_{2'2'}\mathcal{D}^{l-1}v_0. \end{aligned}$$

Далее заметим, что

$$X_{1'2}X_{2'2'}\mathcal{D}^{l-1}v_0 = -X_{1'2'}\mathcal{D}^{l-1}v_0 + X_{2'2'}X_{1'2}\mathcal{D}^{l-1}v_0$$

и

$$\langle w_0, X_{2'2'}X_{1'2}\mathcal{D}^{l-1}v_0 \rangle = \langle X_{22}w_0, X_{1'2}\mathcal{D}^{l-1}v_0 \rangle = 0.$$

Следовательно,

$$\langle w_0, X_{1'2}\varphi(X_{0'2'})\tilde{w}_0 \rangle = l\langle w_0, X_{1'2'}\mathcal{D}^{l-1}v_0 \rangle. \quad (4.35)$$

Ж) Докажем, что

$$\langle w_0, X_{1'2'}\mathcal{D}^{l-1}v_0 \rangle = (2n - 2)^{-1}\langle w_0, w_0 \rangle. \quad (4.36)$$

Для этого заметим, что

$$\langle w_0, w_0 \rangle = \langle w_0, \mathcal{D}^l v_0 \rangle = \langle \mathcal{D}^* w_0, \mathcal{D}^{l-1} v_0 \rangle,$$

где $\mathcal{D}^*$ задается формулой (2.29), или, после тождественного преобразования,

$$\mathcal{D}^* = (H_{23'} + 2n - 3)X_{12} + \sum_{d=3}^n X_{1d}X_{2d'} - \sum_{d=2}^n X_{1d'}X_{2d}.$$

Так как $X_{2d'}w_0 = 0$, $X_{2d}w_0 = 0$ при $d \geq 2$ и $H_{23'}X_{12}w_0 = X_{12}w_0$, то $\mathcal{D}^*w_0 = (2n - 2)X_{12}w_0$. Тогда

$$\begin{aligned} \langle w_0, w_0 \rangle &= \langle \mathcal{D}^*w_0, \mathcal{D}^{l-1}v_0 \rangle = (2n - 2)\langle X_{12}w_0, \mathcal{D}^{l-1}v_0 \rangle \\ &= (2n - 2)\langle w_0, X_{1'2'}\mathcal{D}^{l-1}v_0 \rangle. \end{aligned}$$

3) Из (4.28), (4.35) и (4.36) следует, что

$$C = -k!(k + 2)!l(2n - 2)^{-1}\langle w_0, w_0 \rangle = -(k + 2)l(2n - 2)^{-1}.$$

По гомоморфизму φ строится оператор $X \in P_0(\lambda, \mu)$, явный вид которого находится из леммы 4.1 по найденным коэффициентам A , B , C . Тогда оператор $X_+^{(\lambda)} = \frac{1}{A}X$ имеет вид (4.19), что и доказывает предложение 4.3.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. Пусть $\lambda = (k, k, l, 0, \dots, 0)$, $k \geq 1$. Тогда существует оператор $X_-^{(\lambda)} \in P_0(\lambda, \lambda - \delta_1)$, имеющий вид

$$(X_-^{(\lambda)} f)(t) = \frac{df}{dt}(t) + 2(k+2)(\operatorname{cth} 2t) \cdot f(t) + 2(l+2n-2)(\operatorname{cth} t) \cdot f(t). \quad (4.37)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. А) Напомним, что через $E^\lambda(\delta)$ обозначается весовое подпространство веса δ в E^λ . Через L обозначим линейное подпространство, состоящее из векторов $v \in E^\lambda(\lambda - \omega_{00} - \omega_{11})$, удовлетворяющих условиям $X_{\alpha_j} v = 0$ при $j = 2, 3, \dots, n$ и $X_{-\alpha_1}^k v = 0$, где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – простые корни алгебры $\mathfrak{k}$ (см. (2.10)). Докажем, что $\dim L \leq 1$.

Рассмотрим линейное подпространство $L_1 := X_{1n}(L)$. Тогда $L_1 \subseteq E^\lambda(\lambda - \omega_{00} - \omega_{1n'})$. Пусть $v \in L$, $w = X_{1n}v \in L_1$; тогда $X_{-\alpha_1} w = X_{1'2} X_{1n} v = (X_{1n} X_{1'2} - X_{2n})v = X_{1n} X_{1'2} v$. Следовательно, $X_{1'2}^k w = X_{1n} X_{1'2}^k v = 0$. Любой вектор $\xi \in E^\lambda$ может быть представлен в виде $\xi = P(X)v_0$, где $P(X)$ – некоторый полином от векторов X_α , $\alpha \in R_-$ (R_- – множество отрицательных корней алгебры $\mathfrak{k}$), v_0 – старший вектор. В частности, так как $X_{j'r} v_0 = 0$ при $3 \leq j < r \leq n$, пространство $E^\lambda(\lambda - \omega_{00} - \omega_{1n'})$ натягивается на векторы $w_1 = X_{0'0'} X_{1'n} v_0$ и $w_2 = X_{0'0'} X_{1'2} X_{2'n} v_0$. При $k = 0$ вектор $X_{0'0'} v_0 = 0$, следовательно, $w_1 = w_2 = 0$; при $l = 0$ вектор $X_{2'n} v_0 = 0$, следовательно, $w_2 = 0$. В этих случаях $\dim L_1 \leq 1$. Пусть $k \geq 1$ и $l \geq 1$. Заметим, что $X_{1'2}^k w_1 \neq 0$, так как

$$\begin{aligned} \langle X_{1'2}^k w_1, X_{1'2}^k w_1 \rangle &= \langle X_{0'0'} X_{1'n} X_{1'2}^k v_0, X_{0'0'} X_{1'n} X_{1'2}^k v_0 \rangle \\ &= \langle X_{00} X_{0'0'} X_{12'}^k X_{1n'} X_{1'n} X_{1'2}^k v_0, v_0 \rangle = kl(k!)^2 \langle v_0, v_0 \rangle \neq 0. \end{aligned}$$

Следовательно, условие $X_{1'2}^k w = 0$ выделяет в $E^\lambda(\lambda - \omega_{00} - \omega_{1n'})$ линейное подпространство размерности ≤ 1 и $\dim L_1 \leq 1$.

Предположим, что $\dim L \geq 2$. Пусть v_1 и v_2 – линейно независимые векторы из L . Так как $\dim L_1 \leq 1$, то можно подобрать такую линейную комбинацию $v \neq 0$ этих векторов, что $X_{1n} v = 0$. Заметим, что $X_{3n} v = 0$ и $H_{3n} v = 0$, следовательно, и $X_{3'n'} v = 0$. Тогда $X_{\alpha_1 + \alpha_2} v = X_{13'} v = [X_{1n}, X_{3'n'}] v = 0$.

Подберем наибольшее число $d_1 \in \mathbb{Z}_+$ так, чтобы $X_{\alpha_1}^{d_1} v \neq 0$; затем возьмем наибольшее $d_0 \in \mathbb{Z}_+$ так, что $\xi = X_{\alpha_0}^{d_0} X_{\alpha_1}^{d_1} v \neq 0$. Тогда $X_{\alpha_j} \xi = 0$ при $j = 0, 1, 2, \dots, n$, следовательно, ξ является старшим вектором. Но вес вектора ξ равен

$$\lambda - \omega_{00} - \omega_{11} + d_1 \omega_{12'} + d_0 \omega_{00} \neq \lambda,$$

что противоречит единственности старшего веса. Следовательно, $v = 0$ и $\dim L \leq 1$.

Б) Пусть $\varphi: \mathfrak{p} \rightarrow \operatorname{Hom}(E^\mu, E^\lambda)$ – гомоморфизм $\mathfrak{k}$ -модулей, $\mu = \lambda - \delta_1 = (k-1, k-1, l, 0, \dots, 0)$, $k \geq 1$, v_0 и $\tilde{v}_0$ – старшие векторы в E^λ и E^μ соответственно. Докажем, что для некоторого ненулевого гомоморфизма φ

$$\varphi(X_{0'1'}) \tilde{v}_0 = X_{0'0'} \tilde{\mathcal{D}} v_0, \quad (4.38)$$

где $\tilde{\mathcal{D}} = (k+1)(k+2l+2n-2)X_{1'1'} + X_{1'2}\mathcal{D}$, $\mathcal{D}$ определено в (2.18).

Пусть $\varphi(X_{0'1'})\tilde{v}_0 = v$. Повторяя рассуждения п. А) предложения 4.3, получим, что $v \neq 0$. Вектор v имеет вес $\mu - \delta_1 = \lambda - \omega_{00} - \omega_{11}$. Так как $[X_{\alpha_j}, X_{0'1'}] = 0$ для $j \geq 2$, $[X_{-\alpha_1}, X_{0'1'}] = 0$ и $X_{-\alpha_1}^k \tilde{v}_0$, то $X_{\alpha_j} v = 0$ для $j \geq 2$ и $X_{-\alpha_1}^k v = 0$. Следовательно, вектор v принадлежит подпространству L из п. А). Далее будет показано, что $X_{0'0'}\tilde{\mathcal{D}}v_0 \in L$ и $X_{0'0'}\tilde{\mathcal{D}}v_0 \neq 0$. Так как $\dim L \leq 1$, то можно считать, что выполняется (4.38).

Проверим, что $X_{0'0'}\tilde{\mathcal{D}}v_0 \in L$. При $j \geq 2$ $[X_{\alpha_j}, X_{1'1'}] = 0$ и $X_{\alpha_j}\mathcal{D}v_0 = 0$ (см. (2.22)), следовательно, и $X_{\alpha_j}X_{0'0'}\tilde{\mathcal{D}}v_0 = 0$. Легко видеть, что

$$[X_{-\alpha_1}, \mathcal{D}] = [X_{1'2}, \mathcal{D}] = -2X_{1'1'}(H_{23'} + n - 1). \quad (4.39)$$

Отметим также, что $X_{-\alpha_1}^{k+1}v_0 = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} X_{-\alpha_1}^{k+1}\mathcal{D}v_0 &= -2 \sum_{0 \leq r \leq k} X_{-\alpha_1}^r X_{1'1'}(H_{23'} + n - 1) X_{-\alpha_1}^{k-r} v_0 \\ &= -(k+1)(k+2l+2n-2)X_{1'1'}X_{-\alpha_1}^k v_0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$X_{-\alpha_1}^k X_{0'0'}\tilde{\mathcal{D}}v_0 = X_{0'0'}((k+1)(k+2l+2n-2)X_{1'1'}X_{1'2}^k v_0 + X_{1'2}^{k+1}\mathcal{D}v_0) = 0.$$

Нетрудно вычислить, что

$$\begin{aligned} \langle X_{0'0'}\tilde{\mathcal{D}}v_0, X_{0'0'}X_{1'1'}v_0 \rangle &= \langle X_{00}X_{0'0'}X_{1'1'}\tilde{\mathcal{D}}v_0, v_0 \rangle \\ &= k^2(k+2l+2n-2)(k+l+1)\langle v_0, v_0 \rangle \neq 0, \end{aligned}$$

так как $k \geq 1$. Следовательно, $X_{0'0'}\tilde{\mathcal{D}}v_0 \neq 0$.

В) Пусть v_0 и $\tilde{v}_0$ – старшие векторы пространств E^λ и E^μ . Векторы w_0 и ξ_0 определяются формулами (4.20). Пусть $\tilde{w}_0 = \mathcal{D}^l v_0$ и

$$\tilde{\xi}_0 = \sum_{0 \leq r \leq k-1} X_{0'0'}^r X_{1'1'}^{k-r-1} \tilde{w}_0.$$

Можно считать, что векторы v_0 и $\tilde{v}_0$ выбраны так, чтобы $\langle \xi_0, \xi_0 \rangle = 1$ и $\langle \tilde{\xi}_0, \tilde{\xi}_0 \rangle = 1$. Тогда (см. (2.28)) $\langle w_0, w_0 \rangle = (k!(k+1)!)^{-1}$. Проводим вычисления аналогично вычислениям из п. Б) предложения 4.3. Получим

$$\begin{aligned} \varphi(X_{01'})\tilde{\xi}_0 &= X_{00}\varphi(X_{0'1'})\tilde{\xi}_0 - \varphi(X_{0'1'})(X_{00}\tilde{\xi}_0) \\ &= \sum_{0 \leq r \leq k-1} (k-r)X_{0'0'}^r X_{1'1'}^{k-r-1} \mathcal{D}^l \tilde{\mathcal{D}}v_0. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Далее,

$$\begin{aligned}
A &= 2\langle \xi_0, \varphi(X_{01'})\tilde{\xi}_0 \rangle \\
&= 2 \sum_{0 \leq r \leq k-1} (k-r) \langle X_{0'0'}^r X_{1'1'}^{k-r} w_0, X_{0'0'}^r X_{1'1'}^{k-r-1} \mathcal{D}^l \tilde{\mathcal{D}} v_0 \rangle \\
&= 2 \sum_{0 \leq r \leq k-1} (k-r) \langle X_{00}^r X_{0'0'}^r X_{11}^{k-r-1} X_{1'1'}^{k-r} w_0, \mathcal{D}^l \tilde{\mathcal{D}} v_0 \rangle \\
&= k!(k+1)! \langle X_{1'1'} w_0, \mathcal{D}^l \tilde{\mathcal{D}} v_0 \rangle.
\end{aligned} \tag{4.41}$$

Так как вектор w_0 имеет вес $(k, k, 0, \dots, 0)$ и $X_{\alpha_j} w_0 = 0$ при $j \geq 2$, то и $X_{-\alpha_j} w_0 = 0$ при $j \geq 2$. Тогда $X_{2'r} w_0 = 0$, $X_{2'r'} w_0 = 0$ при $r \geq 2$ и $H_{23'} w_0 = 0$, а следовательно, и $\mathcal{D}^{l+1} v_0 = \mathcal{D} w_0 = 0$. Заметим, что

$$[X_{1'1'}, \mathcal{D}] = 0, \quad [X_{1'2}, \mathcal{D}] = -X_{1'1'}(H_{23'} + n - 1). \tag{4.42}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^l X_{1'2} \mathcal{D} v_0 &= [\mathcal{D}^l, X_{1'2}] \mathcal{D} v_0 \\
&= 2X_{1'1'} \left(\sum_{0 \leq r \leq l-1} \mathcal{D}^{l-r-1} (H_{23'} + n - 1) \mathcal{D}^{r+1} v_0 \right) \\
&= l(l+2n-3)X_{1'1'} \mathcal{D}^l v_0 = l(l+2n-3)X_{1'1'} w_0
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^l \tilde{\mathcal{D}} v_0 &= (k+1)(k+2l+2n-2)X_{1'1'} w_0 + l(l+2n-3)X_{1'1'} w_0 \\
&= (k+l+1)(k+l+2n-2)X_{1'1'} w_0.
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Следовательно,

$$\langle X_{1'1'} w_0, \mathcal{D}^l \tilde{\mathcal{D}} v_0 \rangle = \langle w_0, X_{11} \mathcal{D}^l \tilde{\mathcal{D}} v_0 \rangle = k(k+l+1)(k+l+2n-2) \langle w_0, w_0 \rangle. \tag{4.44}$$

Из (4.41) и (4.44) получим, что

$$A = k(k+l+1)(k+l+2n-2).$$

Далее, вычисляя, как в п. В) предложения 4.3, с учетом (4.40) и (4.44) находим, что

$$B = 4\langle H_{11} \xi_0, \varphi(X_{01'})\tilde{\xi}_0 \rangle = -\frac{2}{3}(k+2)A.$$

Г) Заметим, что

$$\begin{aligned}
C &= 2\langle \xi_0, X_{1'2} \varphi(X_{02'})\tilde{\xi}_0 \rangle = 2\langle \xi_0, X_{1'2} (X_{00} \varphi(X_{0'2'}) - \varphi(X_{0'2'}) X_{00}) \tilde{\xi}_0 \rangle \\
&= 2\langle \xi_0, X_{1'2} X_{00} \varphi(X_{0'2'}) \tilde{\xi}_0 \rangle - 2\langle \xi_0, \varphi(X_{0'2'}) X_{00} \tilde{\xi}_0 \rangle.
\end{aligned}$$

Используя лемму 2.1, получим, что

$$\begin{aligned}
\langle \xi_0, X_{1'2} X_{00} \varphi(X_{0'2'}) \tilde{\xi}_0 \rangle &= \langle X_{0'0'} \xi_0, X_{1'2} \varphi(X_{0'2'}) \tilde{\xi}_0 \rangle \\
&= \sum_{0 \leq r \leq k-1} \langle X_{0'0'}^{r+1} X_{1'1'}^{k-r} w_0, X_{1'2} X_{0'0'}^r X_{1'1'}^{k-r-1} \varphi(X_{0'2'}) \tilde{w}_0 \rangle \\
&= \sum_{0 \leq r \leq k-1} \langle X_{00}^r X_{0'0'}^{r+1} X_{11}^{k-r-1} X_{1'1'}^{k-r} w_0, X_{1'2} \varphi(X_{0'2'}) \tilde{w}_0 \rangle \\
&= ((k-1)!)^2 \langle X_{0'0'} X_{1'1'} w_0, X_{1'2} \varphi(X_{0'2'}) \tilde{w}_0 \rangle \sum_{0 \leq r \leq k-1} (r+1)(k-r).
\end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}
\langle \xi_0, X_{1'2} \varphi(X_{0'2'}) X_{00} \tilde{\xi}_0 \rangle \\
= ((k-1)!)^2 \langle X_{0'0'} X_{1'1'} w_0, X_{1'2} \varphi(X_{0'2'}) \tilde{w}_0 \rangle \sum_{0 \leq r \leq k-1} r(k-r).
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
C &= 2((k-1)!)^2 \langle X_{0'0'} X_{1'1'} w_0, X_{1'2} \varphi(X_{0'2'}) \tilde{w}_0 \rangle \sum_{0 \leq r \leq k-1} (k-r) \\
&= (k-1)! (k+1)! \langle X_{0'0'} X_{1'1'} w_0, X_{1'2} \varphi(X_{0'2'}) \tilde{w}_0 \rangle. \tag{4.45}
\end{aligned}$$

Так как $X_{0'2'} = -[X_{12'}, X_{0'1'}]$, то

$$\begin{aligned}
\langle X_{0'0'} X_{1'1'} w_0, X_{1'2} \varphi(X_{0'2'}) \tilde{w}_0 \rangle &= \langle X_{0'0'} X_{1'1'} w_0, X_{1'2} \varphi(X_{0'1'}) X_{12'} \tilde{w}_0 \rangle \\
&\quad - \langle X_{0'0'} X_{1'1'} w_0, X_{1'2} X_{12'} \varphi(X_{0'1'}) \tilde{w}_0 \rangle. \tag{4.46}
\end{aligned}$$

Используя (4.38), (4.43) и (4.33), получим, что

$$\begin{aligned}
\varphi(X_{0'1'}) \tilde{w}_0 &= \varphi(X_{0'1'}) \mathcal{D}^l \tilde{v}_0 = X_{0'0'} \mathcal{D}^l \tilde{\mathcal{D}} v_0 \\
&= (k+l+1)(k+l+2n-2) X_{0'0'} X_{1'1'} w_0, \tag{4.47}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_{12'} X_{1'1'} w_0 &= -X_{1'2} w_0 + X_{1'1'} X_{12'} w_0 \\
&= -X_{12'} w_0 - l(k+l+2n-1) X_{2'2'} \mathcal{D}^{l-1} v_0 \tag{4.48}
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
\varphi(X_{0'1'}) X_{12'} \tilde{w}_0 &= -l(k+l+2n-2) \varphi(X_{0'1'}) X_{2'2'} \mathcal{D}^{l-1} \tilde{v}_0 \\
&= -l(k+l+2n-2) X_{2'2'} \mathcal{D}^{l-1} \tilde{\mathcal{D}} v_0. \tag{4.49}
\end{aligned}$$

Из (4.47)–(4.49) после несложных преобразований с использованием формулы (4.36) вычисляются слагаемые в правой части (4.46). Окончательно получаем

$$C = -k(k+l+1)(k+l+2n-2)(l+2n-2)(2n-2)^{-1} = -(l+2n-2)(2n-2)^{-1} A.$$

По гомоморфизму φ строится оператор $X \in P_0(\lambda, \mu)$, явный вид которого находится по лемме 4.1 и найденным коэффициентам A, B, C . Тогда оператор $X_-^{(\lambda)} = \frac{1}{A} X$ имеет вид (4.37).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.5. Пусть $\lambda = (k, k, l, 0, \dots, 0)$, $l \geq 1$. Тогда существует оператор $Y_-^{(\lambda)} \in P_0(\lambda, \lambda - \delta_2)$, имеющий вид

$$(Y_-^{(\lambda)} f)(t) = \frac{df}{dt}(t) - 2k(\operatorname{cth} 2t)f(t) + 2(k + l + 2n - 1)(\operatorname{cth} t)f(t). \quad (4.50)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. А) В нашем случае $\mu = \lambda - \delta_2 = \lambda + \omega_{02'} = (k + 1, k + 1, l - 1, 0, \dots, 0)$. Как и в предыдущих предложениях, пусть v_0 и $\tilde{v}_0$ — старшие векторы в E^λ и E^μ , векторы w_0 и ξ_0 определяются формулами (4.20),

$$\tilde{w}_0 = \mathcal{D}^{l-1}\tilde{v}_0, \quad \tilde{\xi}_0 = \sum_{0 \leq r \leq k+1} X_{0'0'}^r X_{1'1'}^{k-r+1} \tilde{w}_0.$$

Докажем, что для некоторого ненулевого гомоморфизма φ

$$\varphi(X_{0'1'})\tilde{v}_0 = \mathcal{D}v_0. \quad (4.51)$$

Пусть $v = \varphi(X_{0'1'})\tilde{v}_0$. Повторяя рассуждения п. А) доказательства предложения 4.3, получим, что $v \neq 0$. Вектор $v \in E^\lambda(\lambda - \omega_{12})$, и очевидно, что $X_{\alpha_j}v = 0$ для $j = 2, 3, \dots, n$. Временно обозначим через L подпространство, состоящее из всех векторов $v \in E^\lambda(\lambda - \omega_{12})$, удовлетворяющих условиям $X_{\alpha_j}v = 0$ при $j = 2, 3, \dots, n$. Тогда вектор $\mathcal{D}v_0 \in L$ и $\mathcal{D}v_0 \neq 0$, так как $w_0 = \mathcal{D}^l v_0 \neq 0$. Если доказать, что $\dim L \leq 1$, то, умножив φ на подходящее число, можно добиться выполнения равенства (4.51).

Пусть $L_1 = X_{1n}(L)$; тогда $L_1 \subseteq E^\lambda(\lambda - \omega_{2n'})$ и, следовательно, $\dim L_1 \leq \dim E^\lambda(\lambda - \omega_{2n'}) = 1$. Далее доказательство неравенства $\dim L \leq 1$ получается повторением рассуждений из п. А) предложения 4.4.

Б) Из (4.51) следует, что

$$\varphi(X_{0'1'})\tilde{w}_0 = \varphi(X_{0'1'})\mathcal{D}^{l-1}\tilde{v}_0 = \mathcal{D}^{l-1}\varphi(X_{0'1'})\tilde{v}_0 = \mathcal{D}^l v_0 = w_0. \quad (4.52)$$

Почти дословно повторяя вычисления пп. Б) и В) предложения 4.3, получаем, что $A = -(k + 2)$, $B = -\frac{2}{3}k(k + 2)$. Вычисление коэффициента C проводится, как в п. Г) предложения 4.4, и не содержит принципиальных трудностей. Получаем, что

$$C = (k + 2)(k + l + 2n - 1)(2n - 2)^{-1}.$$

По гомоморфизму φ строим оператор $X \in P_0(\lambda, \mu)$; тогда оператор $Y_+^{(\lambda)} = \frac{1}{A}X$ имеет вид (4.50).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.6. Пусть $\lambda = (k, k, l, 0, \dots, 0)$, $k \geq 1$. Тогда существует оператор $Y_+^{(\lambda)} \in P_0(\lambda, \lambda + \delta_2)$, имеющий вид

$$(Y_+^{(\lambda)} f)(t) = \frac{df}{dt}(t) + 2(k + 2)(\operatorname{cth} 2t)f(t) - 2(k + l + 1)(\operatorname{cth} t)f(t). \quad (4.53)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. А) В рассматриваемом случае $\mu = \lambda + \delta_2 = (k-1, k-1, l+1, 0, \dots, 0)$. Векторы $v_0, w_0, \xi_0 \in E^\lambda$ те же, что и в предыдущих предложениях, $\tilde{v}_0$ – старший вектор в E^μ , $\tilde{w}_0 = \mathcal{D}^{l+1}v_0$,

$$\tilde{\xi}_0 = \sum_{0 \leq r \leq k-1} X_{0'0'}^r X_{1'1'}^{k-r-1} \tilde{w}_0.$$

Если φ – ненулевой гомоморфизм $\mathfrak{k}$ -модулей из $\mathfrak{p}$ в $\text{Hom}(E^\mu, E^\lambda)$, то вектор $\varphi(X_{0'1'})\tilde{v}_0$ не равен нулю и имеет вес $\mu - \omega_{01} = \lambda - \omega_{00} - \omega_{12'}$. Но пространство $E^\lambda(\lambda - \omega_{00} - \omega_{12'})$ одномерно и порождается вектором $X_{0'0'}X_{1'2}v_0$. Поэтому, умножив φ на подходящее число, можно считать, что

$$\varphi(X_{0'1'})\tilde{v}_0 = X_{0'0'}X_{1'2}v_0.$$

Б) Напомним, что $\mathcal{D}^{l+1}v_0 = 0$ (см. п.В) предложения 4.4) и $[X_{1'2}, \mathcal{D}] = -2X_{1'1'}(H_{23'} + n - 1)$. Тогда

$$\mathcal{D}^{l+1}X_{1'2}v_0 = 2X_{1'1'} \sum_{0 \leq r \leq l} \mathcal{D}^r(H_{23'} + n - 1)\mathcal{D}^{l-r}v_0 = (l+1)(l+2n-2)X_{1'1'}\mathcal{D}^l v_0.$$

Следовательно,

$$\varphi(X_{0'1'})\tilde{w}_0 = \varphi(X_{0'1'})\mathcal{D}^{l+1}\tilde{v}_0 = X_{0'0'}\mathcal{D}^{l+1}X_{1'2}v_0 = (l+1)(l+2n-2)X_{0'0'}X_{1'1'}w_0.$$

Дальнейшее вычисление коэффициентов A, B, C проводится так же, как в предложении 4.4, и не содержит принципиальных трудностей. Получаем

$$A = k(l+1)(l+2n-2), \quad B = -\frac{2}{3}(k+2)A, \quad C = (k+l+1)(2n-2)^{-1}A.$$

По гомоморфизму φ строится оператор $X \in P_0(\lambda, \mu)$, тогда оператор $Y_-^{(\lambda)} = \frac{1}{A}X$ имеет вид (4.53).

Пользуясь явным видом операторов $\tilde{\Delta}, X_\pm^{(\lambda)}, Y_\pm^{(\lambda)}$ (см. (3.12), (4.19), (4.37), (4.50), (4.53)), непосредственным вычислением проверяются соотношения

$$X_-^{(\lambda+\delta_1)}X_+^{(\lambda)}f = \tilde{\Delta}f - 4(k+l)(k+l+2n+1)f, \quad (4.54)$$

$$X_+^{(\lambda-\delta_1)}X_-^{(\lambda)}f = \tilde{\Delta}f - 4(k+l-1)(k+l+2n)f, \quad (4.55)$$

$$Y_+^{(\lambda-\delta_2)}Y_-^{(\lambda)}f = \tilde{\Delta}f - 4(l-2)(l+2n-1)f, \quad (4.56)$$

$$Y_-^{(\lambda+\delta_2)}Y_+^{(\lambda)}f = \tilde{\Delta}f - 4(l-1)(l+2n)f. \quad (4.57)$$

Доказательство теорем I и II проводится аналогично доказательству соответствующих теорем в [1], поэтому отметим только основные моменты доказательств. Доказательство теоремы I отдельно проводится для случая $\lambda = (0, \dots, 0)$ и затем

уже в общем случае. Заметим, что при $\lambda = 0$ оператор $\tilde{\Delta}$ совпадает с дифференциальным оператором

$$\Delta_{d,r} = \frac{d^2}{t^2} + (2k + 2r + 1) \operatorname{cth} t \frac{d}{dt} + (2r + 1) \operatorname{th} t \frac{d}{dt}$$

при $d = 2n - 2, r = 1$, который рассматривался в [1, § 6]. Дальнейшие шаги доказательства теоремы I при $\lambda = 0$ проходят и для нашего случая $M = \operatorname{Sp}(1, n) / \operatorname{Sp}(1) \times \operatorname{Sp}(n)$, если при этом считать, что $\Phi = \Phi_{2n-2,1}$ ($\Phi_{d,r}$ — преобразование из леммы 5.2 в [1]).

В общем случае, при $\lambda = (k, k, l, 0, \dots, 0)$, $k, l \geq 0$, доказательство теоремы I проводится индукцией по $p = k + 2l$. При $p = 0$ (тогда $\lambda = 0$) теорема доказана. Используя явный вид операторов $X_{\pm}^{(\lambda)}, Y_{\pm}^{(\lambda)}$ и соотношения (4.54)–(4.57) и рассуждая, как при доказательстве леммы 6.12 в [1], доказываем следующую лемму.

ЛЕММА 4.7. *Справедливы следующие утверждения:*

- 1) $\dim V_{\mu,r}^{(\lambda)} = r$;
- 2) $\operatorname{Ker} X_{-}^{(\lambda)} = \{0\}$, $\operatorname{Ker} Y_{-}^{(\lambda)} = \{0\}$;
- 3) $\operatorname{Ker} X_{+}^{(\lambda)} = V_{i(2k+2l+2n+1),1}^{(\lambda)}$, $\operatorname{Ker} Y_{+}^{(\lambda)} = V_{i(2l+2n-1),1}^{(\lambda)}$;
- 4) $X_{-}^{(\lambda)}(V_{\mu,r}^{(\lambda)}) = V_{\mu,r}^{(\lambda-\delta_1)}$, $Y_{-}^{(\lambda)}(V_{\mu,r}^{(\lambda)}) = V_{\mu,r}^{(\lambda-\delta_2)}$;
- 5) $X_{+}^{(\lambda)}(V_{\mu,r}^{(\lambda)}) = V_{\mu,r_1}^{(\lambda+\delta_1)}$, где $r_1 = r$ при $\mu \neq i(2k + 2l + 2n + 1)$ и $r_1 = r - 1$ при $\mu = i(2k + 2l + 2n + 1)$;
- 6) $Y_{+}^{(\lambda)}(V_{\mu,r}^{(\lambda)}) = V_{\mu,r_2}^{(\lambda+\delta_2)}$, где $r_2 = r$ при $\mu \neq i(2l + 2n - 1)$ и $r_2 = r - 1$ при $\mu = i(2l + 2n - 1)$.

С использованием этой леммы оставшаяся часть доказательства теоремы I проводится так же, как при доказательстве соответствующей теоремы в [1]. Доказательство теоремы II проводится так же, как в [1], без существенных отличий.

Список литературы

1. Платонов С. С. Инвариантные подпространства в некоторых функциональных пространствах на симметрических пространствах // Изв. АН. Сер. матем. 1995. Т. 59. № 5. С. 127–172.
2. Berenstein C. A. Spectral synthesis on symmetric spaces // Contemp. Math. 1987. V. 63. P. 1–25.
3. Berenstein C. A., Gay R. Sur la synthèse spectrale dans les espaces symétriques // J. Math. Pure et Appl. 1986. V. 65. P. 323–334.
4. Wawrzynczyk A. Spectral analysis and synthesis on symmetric spaces // J. Math. Ann. and Appl. 1987. V. 127. P. 1–17.
5. Кучимент П. А. О спектральном синтезе в пространствах решений дифференциальных уравнений, инвариантных относительно групп преобразований // Применение топологии в современном анализе. Воронеж: Изд-во ВГУ, 1985. С. 87–105.
6. Кучимент П. А. Сферическое представление решений инвариантных дифференциальных уравнений на римановом симметрическом пространстве некомпактного типа // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1985. Т. 49. № 4. С. 1260–1273.

7. *Кучмент П. А.* О периодических в среднем функциях на симметрических пространствах // Функцион. анализ и его прилож. 1982. Т. 16. № 3. С. 68–69.
8. *Хелгасон С.* Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. М.: Мир, 1964.
9. *Робертсон А., Робертсон Б.* Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1967.
10. *Платонов С. С.* Инвариантные подпространства в некоторых функциональных пространствах на n -мерном пространстве Лобачевского // Матем. сб. 1988. Т. 137. № 12. С. 435–461.
11. *Платонов С. С.* О спектральном синтезе на симметрических пространствах ранга 1 // Алгебра и анализ. 1992. Т. 4. № 4. С. 174–187.
12. *Гото М., Гростанс Ф.* Полупростые алгебры Ли. М.: Мир, 1981.
13. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. Гл. VII, VIII. М.: Мир, 1978.
14. *Helgason S.* A duality for symmetric spaces with applications to group representations. I // Adv. Math. 1970. V. 5. P. 1–154.
15. *Платонов С. С.* Инвариантные подпространства в некоторых функциональных пространствах на симметрических пространствах ранга 1 (симплектический и особый случаи) // ДАН СССР. 1992. Т. 322. № 2. С. 243–247.
16. *Kass N.* Explicit decompositions of some tensor products of modules for semisimple Lie algebras // Commun. Algebra. 1987. V. 15. P. 2251 – 2261.
17. *Хелгасон С.* Группы и геометрический анализ. М.: Мир, 1987.

Петрозаводский государственный университет.
E-mail: platonov@mainpgu.karelia.ru

Поступило в редакцию
25.I.1996