Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Д. Троицкая, Об одной краевой задаче для гиперболических уравнений, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1998, том 62, выпуск 2, 193–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/im180>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 12:40:34

УДК 517.956.32

С. Д. Троицкая

Об одной краевой задаче для гиперболических уравнений

Целью данной работы является изучение краевой задачи для гиперболического уравнения с двумя независимыми переменными, состоящей в нахождении его решения, удовлетворяющего граничным условиям, которые заданы на двух гладких кривых. Кривые выходят из одной точки и расположены внутри характеристического угла с вершиной в этой точке.

Библиография: 23 наименования.

Введение

Пусть в плоскости Oxy задана область

$$D = \{(x, y): x_* < x < 0, 0 < l_2(x) < y < l_1(x)\},$$

где функции $l_i(x) \in C^2[x_*, 0]$, $i = 1, 2$, такие, что

$$l'_i(x) < 0 \quad \forall x \in (x_*, 0), \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

$$l_1(0) = l_2(0) = 0, \quad 0 < \lim_{x \rightarrow -0} |l'_2(x)| < \lim_{x \rightarrow -0} |l'_1(x)|. \quad (2)$$

В области D рассмотрим гиперболическое уравнение

$$Lu := \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u = f(x, y), \quad (3)$$

коэффициенты которого $a(x, y)$, $b(x, y)$ будем считать принадлежащими классу $C^1(D_0)$, а $c(x, y)$ принадлежащим $C(D_0)$, где $D_0 \supset \overline{D}$.

Часть I работы посвящена изучению краевой задачи, заключающейся в нахождении регулярного решения уравнения (3), удовлетворяющего краевым условиям вида

$$\mu_{i1}(x) \frac{\partial u}{\partial x} + \mu_{i2}(x) \frac{\partial u}{\partial y} + \beta_i(x)u \Big|_{y=l_i(x)} = \varphi_i(x), \quad x \in (x_*, 0), \quad i = 1, 2, \quad (4)$$

а также условию (см. замечание 5)

$$u(0, 0) = u_0. \quad (5)$$

Работа частично поддержана РФФИ (грант 96-01-01292) и Программой поддержки ведущих научных школ (грант 96-15-96091).

Ранее задачи вида (3), (4) изучались в работах [1]–[10]. Наиболее близкой к настоящей работе является работа [10], в которой, однако, такие задачи изучались при других условиях относительно расположения кривых – носителей граничных условий. Под регулярными решениями в ней понимались решения, принадлежащие классам C^k ($k \geq 2$). Оказалось, что, вообще говоря, для разрешимости этих задач в указанных классах необходимы условия согласования функций f , φ_1 , φ_2 , а также их производных до порядка k включительно в точке $O(0, 0)$. При выполнении этих условий, а также некоторых условий на коэффициенты уравнений (4) в [10] доказано, что число линейно независимых регулярных класса C^k решений соответствующих однородных задач совпадает с числом линейно независимых решений некоторой системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $\frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial y^j}(0, 0)$, $0 \leq i + j \leq k$. Кроме того, в [10] показано что, вообще говоря, в задачах такого вида наличие младших членов в основном уравнении и в краевых условиях может оказать влияние на их корректность, что не характерно для основных классических краевых задач.

В части I настоящей работы доказано, что, в отличие от других задач такого вида, задача (3)–(5), условия расположения кривых в которой описаны выше (см. (1), (2)), имеет все свойства классических краевых задач. Эта задача изучается нами в более широком, чем в [10], классе функций: доказано, что она является корректно поставленной в классе непрерывно дифференцируемых функций $u(x, y)$, имеющих непрерывную смешанную производную $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$. Как видно из формулировки основной теоремы, наличие младших членов в уравнении не влияет на корректность задачи. Отметим, что в нашем случае никаких условий согласования данных задачи в точке $O(0, 0)$ не нужно даже для ее разрешимости в классах C^k ($k \geq 1$). При этом вне зависимости от k ядро оператора, соответствующего задаче (3), (4) (при подходящей гладкости данных), всегда одномерно, поэтому условие (5) является необходимым и достаточным для однозначного выбора ее решения.

В части II работы доказано, что так поставленная задача (при естественном изменении ее условий) является корректной и в пространстве С. Л. Соболева $W_2^1(D)$, что делает ее интересной для приложений, в частности в гидромеханике (см. [11]–[14]). В этой части, если не оговорено противное, предполагается, что в уравнении (3) $f \in L_2(D)$, и изучаются его обобщенные решения, принадлежащие пространству С. Л. Соболева $W_2^1(D)$ и удовлетворяющие граничным условиям (4), где $\varphi_i \in L_2(x_*, 0)$, $i = 1, 2$. (Правомерность постановки такой задачи следует из результатов § 6, 7.)

Пусть $\Omega \subset Oxy$ – плоская область с кусочно гладкой границей. Обозначим через $W_2^{nh}(\Omega)$ гильбертовы пространства функций из $L_2(\Omega)$, имеющих суммируемые с квадратом на Ω обобщенные производные:

$$\|f\|_{W_2^{nh}(\Omega)}^2 = \sum_{i,j=0}^n \iint_{\Omega} \left\{ \left| \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j} \right|^2 \right\} dx dy. \quad (6)$$

Функция $u(x, y) \in W_2^1(D)$ называется *обобщенным решением уравнения (3)*,

если для всех $g \in C_0^\infty(D)$

$$\iint_D f g \, dx \, dy = \iint_D u M g \, dx \, dy,$$

где M – дифференциальный оператор, формально сопряженный L .

Оказывается, что всякое такое решение уравнения (3) почти всюду в D совпадает с функцией $u_c(x, y)$ (называемой *непрерывным представителем решения*), непрерывной на множестве $D \setminus \{(0, 0), (x_*, l_1(x_*))\}$ (см. § 6). Более того, почти всюду на кривых $y = l_i(x)$ определены значения $\frac{\partial u_c}{\partial x}$ и $\frac{\partial u_c}{\partial y}$, принадлежащие $L_2(x_*, \varepsilon) \quad \forall \varepsilon > 0$; поэтому обоснованна задача отыскания среди всех решений $u(x, y) \in W_2^1(D)$ уравнения (3) таких, чьи непрерывные представители $u_c(x, y)$ удовлетворяют граничным условиям (4) (почти всюду по линейной мере на этих кривых). При этом оказывается, что если такие функции $u_c(x, y)$, удовлетворяющие всем этим условиям, существуют, то они обязательно имеют конечный предел в нуле (см. § 7), и поэтому мы можем выбрать среди них те, которые удовлетворяют условию

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ (x, y) \in D}} u_c(x, y) = u_0 < \infty. \quad (7)$$

Возникает вопрос: сколько их и существуют ли такие вообще? Ответ на него дает основная теорема § 7, в которой указаны условия на коэффициенты граничных условий, при которых для любых $f \in L_2(D)$, $\varphi_i \in L_2(x_*, 0)$, $i = 1, 2$, $u_0 \in \mathbb{C}$ в пространстве $W_2^1(D)$ обязательно существует и единственно решение $u(x, y)$ сформулированной задачи; при этом оказывается, что это решение принадлежит пространству $W_2^{1h}(D)$ и справедлива оценка

$$\|u\|_{W_2^{1h}(D)}^2 \leq c \{ \|f\|_{L_2(D)}^2 + \|\varphi_1\|_{L_2(x_*, 0)}^2 + \|\varphi_2\|_{L_2(x_*, 0)}^2 + |u_0|^2 \}, \quad (8)$$

где c не зависит от f , φ_i , u_0 . В § 9 приведены примеры, доказывающие необходимость сформулированных в указанной теореме условий.

Пусть $\varphi_i = 0$, $i = 1, 2$, $u_0 = 0$. В пространстве $L_2(D)$ определим оператор L_0 , ставящий в соответствие всякой функции $f(x, y)$ решение нашей задачи. Из полученных в работе результатов следует, что этот оператор вольтерров, т.е. является компактным и имеет единственную точку непрерывного спектра в нуле. Кроме того, если $f \in W_2^{nh}(D)$, то $L_0(f) \in W_2^{(n+1)h}(D)$, т.е. сужение $L_0: W_2^{nh}(D) \rightarrow W_2^{(n+1)h}(D)$ является ограниченным оператором.

В заключение отметим, что исследование спектральных свойств задачи Пуанкаре–Соболева о малых колебаниях вращающейся жидкости в некоторых трехмерных областях с ребрами (например, в конусе) приводит к необходимости изучения нетривиальных обобщенных решений уравнения Эйлера–Дарбу в плоских областях вида D , принадлежащих $W_2^1(D)$ и удовлетворяющих на границе условиям вида (4) (см. [11]–[17]), т.е. приводит к необходимости изучения задачи (3)–(5).

Предлагаемый способ доказательства основной теоремы в регулярном случае выбран так, чтобы он с минимальными изменениями проходил и для обобщенных решений.

Часть результатов настоящей работы анонсирована в [15].

Автор благодарит участников научных семинаров под руководством профессоров А.Г. Костюченко и А.А. Шкаликава, а также профессоров А.К. Гушина, А.А. Дезина и В.П. Михайлова за ценные замечания.

1. Случай регулярного решения

§ 1. Формулировка основной теоремы

Обозначим через $C^{1h}(D)$ множество всех функций $u(x, y)$, принадлежащих классу $C^1(\overline{D})$ и имеющих непрерывную на $\overline{D}$ смешанную производную $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

Регулярным решением задачи (3)–(5) будем называть всякую функцию $u(x, y) \in C^{1h}(D)$, удовлетворяющую в области D уравнению (3) и условиям (4), (5) (см. замечания 1, 2 ч. I).

ТЕОРЕМА. Пусть функции $\beta_i(x)$, $\varphi_i(x)$ принадлежат $C[x_*, 0]$, $i = 1, 2$, $f(x, y) \in C(\overline{D})$, а функции $\mu_{ij}(x) \in C^1[x_0, 0]$, $i, j = 1, 2$, такие, что:

а) $\mu_{12}(x) - l'_i(x)\mu_{i1}(x) \neq 0 \quad \forall x \in [x_*, 0]$, $i = 1, 2$;

б) $\left| \frac{\mu_{11}(0)\mu_{22}(0)}{\mu_{12}(0)\mu_{21}(0)} \right| < 1$;

с) $\mu_{12}(x) \neq 0$, $\mu_{21}(x) \neq 0 \quad \forall x \in [x_*, 0]$.

Тогда регулярное решение задачи (3)–(5) существует, единственно и непрерывно зависит от данных задачи.

Иными словами, задача (3)–(5) является корректно поставленной. Доказательство этого факта следует из нижеследующих теорем 1–4. В § 5 приведены примеры, показывающие, что сформулированные в теореме условия являются существенными.

§ 2. Теорема единственности

Обозначим через $\psi_i(x)$ функции, обратные к функциям $y = l_i(x)$, $i = 1, 2$. Как и в работе [12], для любой точки $x \in [x_*, 0)$ определим отображение

$$\Lambda: x \mapsto \psi_1(l_2(x)), \quad \Lambda(0) = 0.$$

Некоторые его свойства отражены в леммах 2.3–2.5 указанной работы. В частности, определена любая степень Λ^n этого отображения (см. рис. 1, а).

В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $u(x, y)$ – регулярное решение задачи (3), (4). Тогда функция $\theta_1(x) := u(x, l_1(x))$ для всех $x_0 \in (x_*, 0)$ удовлетворяет функционально-интегральному уравнению вида

$$\begin{aligned} \alpha_2(x_0)\theta_1(\Lambda(x_0)) &= \alpha_1(x_0)\theta_1(x_0) + \alpha_3(x_0)\theta_1(\Lambda^2(x_0)) \\ &+ \int_{\Lambda(x_0)}^{x_0} K_1(x, x_0)\theta_1(x) dx + \int_{\Lambda^2(x_0)}^{\Lambda(x_0)} K_2(x, x_0)\theta_1(x) dx \\ &+ \int_{\Lambda(x_0)}^{x_0} \Phi_1(x, x_0) dx + \int_{\Lambda^2(x_0)}^{\Lambda(x_0)} \Phi_2(x, x_0) dx, \end{aligned} \quad (9)$$

Рис. 1

$$\begin{aligned}
\Phi_1(x, x_0) &= P_1(x, x_0)\varphi_1(x) + P_2(x, x_0)\varphi_2(x) \\
&+ \int_{l_2(x_0)}^{l_1(x)} Q_1(x, x_0, y)f(x, y) dy \\
&+ \int_{\Lambda(x)}^x P_3(x, x_0, z)\varphi_1(z) dz \\
&+ \int_{\Lambda(x)}^x dz \int_{l_2(x)}^{l_1(x)} Q_2(x, x_0, z, y)f(z, y) dy, \\
\Phi_2(x, x_0) &= P_4(x, x_0)\varphi_1(x) + \int_{l_2(\Lambda(x_0))}^{l_1(x)} Q_3(x, x_0, y)f(x, y) dy, \quad (10)
\end{aligned}$$

где функции α_i , K_i , P_i , Q_i однозначно определяются коэффициентами уравнения (3) и граничных условий (4) и не зависят от f и φ_i . При этом функции K_i , P_i , Q_i непрерывны, а $\alpha_i(x_0) \in C^1[x_*, 0]$, $i = 1, 2, 3$; $\alpha_1(x_0) \neq 0$ для всех $x_0 \in [x_*, 0]$ и справедливы равенства

$$\alpha_2(0) = \alpha_1(0) + \alpha_3(0), \quad (11)$$

$$\frac{\alpha_3(0)}{\alpha_1(0)} = \frac{\mu_{11}(0)\mu_{22}(0)l'_1(0)}{\mu_{12}(0)\mu_{21}(0)l'_2(0)}. \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A_0(x_0, y_0)$ – произвольная точка области D . Через эту точку проведем две характеристики, $x = x_0$ и $y = y_0$, уравнения (3) до пересечения с кривой $y = l_1(x)$, и полученные точки пересечения обозначим C_0 и B_0 соответственно. Обозначим через $R(x, y; x_0, y_0)$ функцию Римана уравнения (3) (см., например, [21]). При указанных условиях на коэффициенты уравнения она существует и является непрерывной вместе со своими производными $\frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial R}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y}$. Используя известную формулу Римана для решения гиперболического уравнения

в треугольной области $A_0B_0C_0$, условие (4) и условие а) теоремы § 1, обеспечивающее трансверсальность к кривой $y = l_1(x)$ направления, по которому в (4) задается производная решения, несложно получить следующее выражение для $u(x, y)$:

$$\begin{aligned} u(x_0, y_0) = & \theta_1(\cdot)R(\cdot, l_1(\cdot); x_0, y_0) \frac{\mu_{12}(\cdot)}{\mu_{12}(\cdot) - l'_1(\cdot)\mu_{11}(\cdot)} \Big|_{x_0} \\ & + \theta_1(\cdot)R(\cdot, l_1(\cdot); x_0, y_0) \frac{-l'_1(\cdot)\mu_{11}(\cdot)}{\mu_{12}(\cdot) - l'_1(\cdot)\mu_{11}(\cdot)} \Big|_{\psi_1(y_0)} \\ & - \int_{\psi_1(y_0)}^{x_0} \theta_1(x)K_1^*(x, x_0, y_0) dx + \int_{\psi_1(y_0)}^{x_0} V_1^*(x, x_0, y_0) dx, \quad (13) \end{aligned}$$

где через $K_i^*(x, x_0, y_0)$ и $V_i^*(x, x_0, y_0)$ обозначены соответственно выражения

$$\begin{aligned} K_i^*(x, x_0, y_0) := & \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial x}(x, l_i(x); x_0, y_0) - \frac{l'_i(x)}{2} \frac{\partial R}{\partial y}(x, l_i(x); x_0, y_0) \\ & - \left(b(x, l_i(x)) - l'_i(x)a(x, l_i(x)) \right. \\ & + \left. \frac{l'_i(x)\beta_i(x)}{\mu_{i2}(x) - l'_i(x)\mu_{i1}(x)} \right) R(x, l_i(x); x_0, y_0) \\ & + \frac{1}{2} \left[R(x, l_i(x); x_0, y_0) \frac{\mu_{i2}(x) + l'_i(x)\mu_{i1}(x)}{\mu_{i2}(x) - l'_i(x)\mu_{i1}(x)} \right]_x', \quad (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_1^*(x, x_0, y_0) := & - \frac{R(x, l_i(x); x_0, y_0)l'_i(x)\varphi_i(x)}{\mu_{i2}(x) - l'_i(x)\mu_{i1}(x)} \\ & - \int_{y_0}^{l_i(x)} R(x, y; x_0, y_0)f(x, y) dy. \quad (15) \end{aligned}$$

В частности, при $y_0 = l_2(x_0)$, $x_0 \in (x_*, 0)$ (когда точка A_0 лежит на кривой $y = l_2(x)$) имеем

$$\begin{aligned} \theta_2(x_0) := u(x_0, l_2(x_0)) = & R(\psi_1(l_2(x_0)), l_2(x_0); x_0, l_2(x_0)) \frac{-l_1(\cdot)\mu_{11}(\cdot)\theta_1(\cdot)}{\mu_{12}(\cdot) - l'_1(\cdot)\mu_{11}(\cdot)} \Big|_{\Lambda(x_0)} \\ & + R(x_0, l_1(x_0); x_0, l_2(x_0)) \frac{\mu_{12}(x_0)\theta_1(x_0)}{\mu_{12}(x_0) - l'_1(x_0)\mu_{11}(x_0)} \\ & - \int_{\Lambda(x_0)}^{x_0} \theta_1(x)\tilde{K}_1(x, x_0)dx + \int_{\Lambda(x_0)}^{x_0} V_1(x, x_0) dx, \quad (16) \end{aligned}$$

где $\tilde{K}_1(x, x_0) = K_1^*(x, x_0, l_2(x_0))$, $V_1(x, x_0) = V_1^*(x, x_0, l_2(x_0))$.

Пусть $A_1(x_1, y_1)$ – произвольная точка области D , лежащая ниже прямой $y = l_2(x_*)$. Через эту точку проведем две характеристики, $x = x_1$ и $y = y_1$, до пересечения с кривой $y = l_2(x)$, полученные точки пересечения обозначим через B_1

и C_1 соответственно. Применяя теперь формулу Римана к треугольнику $A_1B_1C_1$, получаем равенство, аналогичное равенству (13):

$$\begin{aligned} u(x_1, y_1) = & R(\cdot, l_2(\cdot); x_1, y_1) \frac{\mu_{22}(\cdot)\theta_2(\cdot)}{\mu_{22}(\cdot) - l'_2(\cdot)\mu_{21}(\cdot)} \Big|_{x_1} \\ & + R(\cdot, l_2(\cdot); x_1, y_1) \frac{-l'_2(\cdot)\mu_{21}(\cdot)\theta_2(\cdot)}{\mu_{22}(\cdot) - l'_2(\cdot)\mu_{21}(\cdot)} \Big|_{\psi_2(y_1)} \\ & - \int_{\psi_2(y_1)}^{x_1} \theta_2(x) K_2^*(x, x_1, y_1) dx + \int_{\psi_2(y_1)}^{x_1} V_2^*(x, x_1, y_1) dx. \end{aligned} \quad (17)$$

В частности, если точка A_1 лежит на кривой $y = l_1(x)$ и ее координаты $(x_1, y_1) = (\psi_1(l_2(x_0)), l_2(x_0))$, имеем

$$\begin{aligned} \theta_1(\Lambda(x_0)) = & R(\cdot, l_2(\cdot); \Lambda(x_0), l_2(x_0)) \frac{\mu_{22}(\cdot)\theta_2(\cdot)}{\mu_{22}(\cdot) - l'_2(\cdot)\mu_{21}(\cdot)} \Big|_{\Lambda(x_0)} \\ & + R(x_0, l_2(x_0); \psi_1(l_2(x_0)), l_2(x_0)) \frac{-l'_2(x_0)\mu_{21}(x_0)\theta_2(x_0)}{\mu_{22}(x_0) - l'_2(x_0)\mu_{21}(x_0)} \\ & + \int_{\Lambda(x_0)}^{x_0} \theta_2(x) \tilde{K}_2(x, \Lambda(x_0)) dx - \int_{\Lambda(x_0)}^{x_0} V_2(x, \Lambda(x_0)) dx, \end{aligned} \quad (18)$$

где $\tilde{K}_2(x, \Lambda(x_0)) = K_2^*(x, \Lambda(x_0), l_2(x_0))$, $V_2(x, \Lambda(x_0)) = V_2^*(x, \Lambda(x_0), l_2(x_0))$.

Подставляя выражения для $\theta_2(x_0)$ и $\theta_2(\Lambda(x_0))$ в (18), после несложных преобразований (см. [12]) получаем функционально-интегральное уравнение (9) для функции θ_1 , в котором

$$\begin{aligned} \Phi_1(x, x_0) := & R(x_0, l_2(x_0); \Lambda(x_0), l_2(x_0)) \frac{-l'_2(x_0)\mu_{12}(x_0)}{\mu_{22}(x_0) - l'_2(x_0)\mu_{21}(x_0)} V_1(x, x_0) \\ & - V_2(x, \Lambda(x_0)) + \int_{\Lambda(x)}^x V_1(z, x) K_2(x, \Lambda(x_0)) dz, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \Phi_2(x, x_0) := & R(\Lambda(x_0), l_2(\Lambda(x_0)); \Lambda(x_0), l_2(x_0)) \\ & \times \frac{\mu_{22}(\Lambda(x_0))V_1(x, \Lambda(x_0))}{\mu_{22}(\Lambda(x_0)) - l'_2(\Lambda(x_0))\mu_{21}(\Lambda(x_0))}, \end{aligned} \quad (20)$$

а остальные функции однозначно определяются коэффициентами уравнения (3) и граничных условий (4) и не зависят от f и φ_i . В справедливости остальных утверждений теоремы, в частности равенств (11), (12), также несложно убедиться, если воспользоваться известными свойствами функции Римана (см. [21]).

ТЕОРЕМА 2. *Если регулярное решение задачи (3)–(5) существует, то оно единственно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 1 следует, что функционально-интегральному уравнению (9) должен удовлетворять след $\theta_1(x)$ на кривой $y = l_1(x)$ произвольного регулярного решения $u(x, y)$ задачи (3)–(5). Докажем, что существует значение x_5 ($x_* \leq x_5 < 0$) такое, что функция $\theta_1(x)$ является неподвижной точкой некоторого сжимающего отображения $\mathcal{A}_0: C[x_5, 0] \rightarrow C[x_5, 0]$, однозначно определяемого данными задачи.

Вычитая из обеих частей равенства (9) выражение $\alpha_1(x_0)\theta_1(\Lambda(x_0))$, а затем деля на $\alpha_1(x_0)$, запишем результат в виде

$$\begin{aligned} \alpha(x_0)F(\Lambda(x_0)) &= F(x_0) + \gamma(x_0)\theta_1(\Lambda(x_0)) + \int_{\Lambda(x_0)}^{x_0} K_3(x, x_0)\theta_1(x) dx \\ &\quad + \int_{\Lambda^2(x_0)}^{\Lambda(x_0)} K_4(x, x_0)\theta_1(x) dx + \int_{\Lambda(x_0)}^{x_0} \Phi_3(x, x_0) dx \\ &\quad + \int_{\Lambda^2(x_0)}^{\Lambda(x_0)} \Phi_4(x, x_0) dx, \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$F(x_0) := \theta_1(x_0) - \theta_1(\Lambda(x_0)), \quad x_0 \in [x_*, 0], \quad (22)$$

$$\gamma(x_0) := \frac{\alpha_1(x_0) + \alpha_3(x_0) - \alpha_2(x_0)}{\alpha_1(x_0)} \sim Cx_0^\varepsilon \quad (x_0 \rightarrow 0), \quad \varepsilon \geq 1, \quad (23)$$

а функции α , K_3 , K_4 , Φ_3 , Φ_4 получены соответственно из α_3 , K_1 , K_2 , Φ_1 , Φ_2 делением на $\alpha_1(x_0)$. Запишем цепочку из n равенств, эквивалентных (21), где i -е равенство есть результат замены в (21) x_0 на $\Lambda^i(x_0)$ и умножения полученного на

$$\prod_{j=0}^{i-1} \alpha(\Lambda^j(x_0)) := \alpha(x_0)\alpha(\Lambda(x_0))\alpha(\Lambda^2(x_0)) \cdots \alpha(\Lambda^{i-1}(x_0)).$$

Теперь сложим все $n + 1$ таких равенств. Получим

$$\begin{aligned} \prod_{j=0}^n \alpha(\Lambda^j(x_0))F(\Lambda^{n+1}(x_0)) - F(x_0) &= \sum_{i=1}^n \theta_1(\Lambda^{i+1}(x_0))\gamma(\Lambda^i(x_0)) \prod_{j=0}^{i-1} \alpha(\Lambda^j(x_0)) \\ &\quad + \theta_1(\Lambda(x_0))\gamma(x_0) + \sum_{i=1}^n \int_{\Lambda^{i+1}(x_0)}^{\Lambda^i(x_0)} K_3(x, \Lambda^i(x_0)) \prod_{j=0}^{i-1} \alpha(\Lambda^j(x_0))\theta_1(x) dx \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \int_{\Lambda^{i+2}(x_0)}^{\Lambda^{i+1}(x_0)} K_4(x, \Lambda^i(x_0)) \prod_{j=0}^{i-1} \alpha(\Lambda^j(x_0))\theta_1(x) dx \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \int_{\Lambda^{i+1}(x_0)}^{\Lambda^i(x_0)} \Phi_3(x, \Lambda^i(x_0)) \prod_{j=0}^{i-1} \alpha(\Lambda^j(x_0)) dx \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \int_{\Lambda^{i+2}(x_0)}^{\Lambda^{i+1}(x_0)} \Phi_4(x, \Lambda^i(x_0)) \prod_{j=0}^{i-1} \alpha(\Lambda^j(x_0)) dx \\ &\quad + \int_{\Lambda(x_0)}^{x_0} K_3(x, x_0)\theta_1(x) dx + \int_{\Lambda^2(x_0)}^{\Lambda(x_0)} K_4(x, x_0)\theta_1(x) dx \\ &\quad + \int_{\Lambda(x_0)}^{x_0} \Phi_3(x, x_0) dx + \int_{\Lambda^2(x_0)}^{\Lambda(x_0)} \Phi_4(x, x_0) dx. \end{aligned} \quad (24)$$

Докажем, что в силу условия b) теоремы § 1 в последнем равенстве можно перейти к пределу при $n \rightarrow \infty$. Имеем

$$k := |\alpha(0)| = \left| \frac{\alpha_3(0)}{\alpha_1(0)} \right| = \left| \frac{\mu_{11}(0)\mu_{22}(0)l'_1(0)}{\mu_{12}(0)\mu_{21}(0)l'_2(0)} \right| < \left| \frac{l'_1(0)}{l'_2(0)} \right|, \quad (25)$$

поэтому существуют значения x_2 ($x_* \leq x_2 < 0$) и k_1 ($k \leq k_1 < \left| \frac{l'_1(0)}{l'_2(0)} \right|$) такие, что $|\alpha(x_0)| < k_1$ для всех $x_0 \in [x_2, 0]$. В свою очередь существуют значение x_3 ($x_* \leq x_3 < 0$) и константа C_2 такие, что

$$|F(x_0)| < C_2 x_0 \quad \forall x \in [x_3, 0]. \quad (26)$$

Несложно доказать (см. [12, лемма 2.5]), что $\forall \varepsilon > 0$ существует такой номер N , что для любой точки $x_0 \in [x_*, 0]$, для всех $m \in \mathbb{N}$ и всех $N_1 \geq N$

$$|\Lambda^{m+N_1}(x_0)| \leq \left(\frac{l'_2(0)}{l'_1(0)} + \varepsilon \right)^m |\Lambda^{N_1}(x_0)|. \quad (27)$$

Выберем ε таким, чтобы были справедливы неравенства

$$q := \frac{l'_2(0)}{l'_1(0)} + \varepsilon < 1, \quad (28)$$

$$k_2 := k_1 \left(\frac{l'_2(0)}{l'_1(0)} + \varepsilon \right) < 1. \quad (29)$$

Обозначим $x_4 := \max\{x_2, x_3\}$. Пусть номер $N_1 \geq N$ такой, что для всех $n \geq N_1$ точки $(\Lambda^n(x_*))$ попадают в отрезок $[x_4, 0]$. Тогда для $n \geq N_1$

$$\begin{aligned} & \left| \prod_{j=0}^n \alpha(\Lambda^j(x_0)) F(\Lambda^{n+1}(x_0)) \right| \\ &= \left| \prod_{j=0}^{N_1-1} \alpha(\Lambda^j(x_0)) \right| \cdot \left| \prod_{j=N_1}^n \alpha(\Lambda^j(x_0)) F(\Lambda^{n+1}(x_0)) \right| \\ &\leq C_3 k_1^{n-N_1+1} C_2 |\Lambda^{n+1}(x_0)| \\ &\leq C_2 C_3 k_1^{n-N_1+1} \left(\frac{l'_2(0)}{l'_1(0)} + \varepsilon \right)^{n+1-N_1} |\Lambda^{N_1}(x_0)| \\ &\leq C_2 C_3 k_1^{1-N_1} \left(\frac{l'_2(0)}{l'_1(0)} + \varepsilon \right)^{1-N_1} |\Lambda^{N_1}(x_0)| k_2^n \leq C_4 |x_0| k_2^n. \end{aligned} \quad (30)$$

Поэтому у этой функциональной последовательности существует предел при $n \rightarrow \infty$ – функция, тождественно равная нулю на $[x_*, 0]$.

Аналогичные рассуждения позволяют утверждать, что для достаточно больших i существует константа C_5 , не зависящая от x_0 , такая, что

$$\left| \theta_1(\Lambda^{i+1}(x_0)) \gamma(\Lambda^i(x_0)) \prod_{j=0}^{i-1} \alpha(\Lambda^j(x_0)) \right| \leq C_5 k_2^i |x_0| \quad (31)$$

– непрерывная на $[x_*, 0]$ функция.

Рассмотрим отображение $\mathcal{A}: C[x_*, 0] \rightarrow C[x_*, 0]$ такое, что $\mathcal{A}[\theta_1]$ совпадает с правой частью равенства (35). Если обозначить

$$M := \max_{x_0 \in [x_*, 0]} |f_1(x_0) - f_2(x_0)|,$$

то

$$\begin{aligned} & \max_{x_0 \in [x_*, 0]} |\mathcal{A}[f_1](x_0) - \mathcal{A}[f_2](x_0)| \\ & \leq M \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \gamma(\Lambda^k(x_0)) + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \gamma(\Lambda^{i+k}(x_0)) \prod_{j=0}^{i-1} \alpha(\Lambda^{j+k}(x_0)) \right) \right. \\ & \quad \left. + \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\Lambda^k(x_0)} K_5(x, \Lambda^k(x_0)) dx \right\} \leq MC_9 |x_0|, \end{aligned} \quad (37)$$

где C_9 не зависит от x_0 . Отсюда следует существование значения $x_5 \geq x_4$ такого, что отображение $\mathcal{A}_0: C[x_5, 0] \rightarrow C[x_5, 0]$, определяемое той же формулой (35), что и отображение $\mathcal{A}$, является сжимающим. Обозначим через $\theta_1^*(x_0) \in C[x_5, 0]$ его (единственную) неподвижную точку. Поскольку уравнению (9) должны удовлетворять следы на кривой $y = l_1(x)$ всех решений задачи (3)–(5) (если такие существуют), то очевидно, что на отрезке $[x_5, 0]$ все они равны функции $\theta_1^*(x_0)$.

Для завершения доказательства теоремы единственности остается заметить, что из предыдущих рассуждений следует, что все решения нашей краевой задачи совпадают друг с другом на множестве

$$T_1 := \{(x, y): x_5 \leq x \leq 0, l_2(x) \leq y \leq l_1(x)\}$$

и совпадают с функцией $u^*(x_0, y_0)$, определяемой формулой (13). Записывая теперь равенство (17) при фиксированном x_1 , равном x_5 , получаем, что след на кривой $y = l_2(x)$ всякого решения задачи (3)–(5) – функция $\theta_2(z)$ ($z := \psi_2(y_1)$) – на отрезке $lx_5 \leq z \leq x_5$ является решением уравнения Вольтерра

$$\theta_2(z) = \int_{x_5}^z \theta_2(x) K_6(x, z) dx + \Phi_7(z), \quad (38)$$

где

$$\begin{aligned} K_6(x, z) &:= \frac{K_2^*(x, x_5, l_2(z)) \{ \mu_{22}(z) - l_2'(z) \mu_{21}(z) \}}{R(z, l_2(z); x_5, l_2(z)) l_2'(z) \mu_{21}(z)}, \\ \Phi_7(z) &:= \frac{\{ \mu_{22}(z) - l_2'(z) \mu_{21}(z) \}}{R(z, l_2(z); x_5, l_2(z)) l_2'(z) \mu_{21}(z)} \\ &\quad \times \left\{ u^*(x_5, l_2(z)) - u^*(x_5, l_2(x_5)) R(x_5, l_2(x_5); x_5, l_2(z)) \right. \\ &\quad \left. \times \frac{\mu_{22}(x_5)}{\mu_{22}(x_5) - l_2'(x_5) \mu_{21}(x_5)} + \int_{x_5}^z V_2^*(x, x_5, y_1) dx \right\}; \end{aligned}$$

поэтому все решения нашей краевой задачи совпадают друг с другом на множестве $T_1 \cup T_2$, где

$$T_2 := \{(x, y): \Lambda^{-1}(x_5) \leq x \leq x_5, l_2(x) \leq y \leq l_1(x_5)\}.$$

Очевидно, что аналогичные рассуждения, основанные теперь на равенстве (13), приводят к заключению, что все решения задачи (3)–(5) совпадают друг с другом и на множестве $T_1 \cup T_2 \cup T_3$, где

$$T_3 := \{(x, y): \Lambda^{-1}(x_5) \leq x \leq x_5, l_1(x_5) \leq y \leq l_1(x)\};$$

и так далее до тех пор, пока такими треугольниками не будет исчерпано все множество $\overline{D}$ (см. рис. 1, б). Теорема единственности доказана.

§ 3. Теорема существования

ТЕОРЕМА 3. *Регулярное решение задачи (3)–(5) существует.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Пусть $\theta_1^*(x) \in C[x_5, 0]$ – неподвижная точка сжимающего отображения $\mathcal{A}_0: C[x_5, 0] \rightarrow C[x_5, 0]$. Докажем, что на самом деле она принадлежит классу $C^1[x_5, 0]$. Действительно, функция $\theta_1^*(x)$ равна пределу сходящейся по норме пространства $C[x_5, 0]$ последовательности функций $\{\theta_{(n)}(x_0)\}_{n=0}^\infty$:

$$\theta_{(0)}(x_0) := 0, \quad \theta_{(1)}(x_0) := -\Phi_6(x_0), \quad \dots, \quad \theta_{(n+1)}(x_0) := \mathcal{A}_0[\theta_{(n)}](x_0), \quad \dots \quad (39)$$

Если обозначить

$$m_{n+1} := \max_{x_0 \in [x_5, 0]} |\theta_{(n+1)}(x_0) - \theta_{(n)}(x_0)|,$$

то в силу (37) для всех $n = 0, 1, 2, \dots$ справедлива оценка

$$m_{n+1} < q m_n, \quad 0 < q < 1, \quad (40)$$

и поэтому члены ряда

$$\theta_1^*(x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} [\theta_{(n+1)}(x_0) - \theta_{(n)}(x_0)] \quad (41)$$

мажорируются сходящейся геометрической прогрессией. Используя неравенство (25), несложно показать, что $\Phi_6(x_0) \in C^1[x_5, 0]$, так как из условий непрерывности функций $f(x, y)$, $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2$, следует, что функции $\Phi_3(x, x_0)$, $\Phi_4(x, x_0)$, $\frac{\partial \Phi_3}{\partial x_0}(x, x_0)$, $\frac{\partial \Phi_4}{\partial x_0}(x, x_0)$ принадлежат $C(\overline{T_0})$, где $T_0 := \{(x_0, x): x_* < x_0 < 0, x_0 < x < \Lambda(x_0)\}$. Поэтому $\theta_{(n)}(x_0) \in C^1[x_5, 0]$ для всех $n = 0, 1, 2, \dots$. Пусть

$$m_{n+1}^{(1)} := \max_{x_0 \in [x_5, 0]} |\theta'_{(n+1)}(x_0) - \theta'_{(n)}(x_0)|.$$

Пользуясь оценками (32), (37), а также принимая во внимание тот факт, что функции $K_3(x, x_0)$, $K_4(x, x_0)$, $K_3(x, x_0)'_{x_0}$, $K_4(x, x_0)'_{x_0}$ принадлежат $C(\overline{T_0})$ (см. доказательство теоремы 1), а функция $\gamma(x_0)$ принадлежит $C^1[x_*, 0]$, несложно доказать существование постоянной $C_{10} > 0$, не зависящей от $x_0 \in [x_5, 0]$ и от номера n , такой, что для всех $n = 1, 2, \dots$ выполняется неравенство

$$m_{n+1}^{(1)} \leq q m_n^{(1)} + C_{10} m_n. \quad (42)$$

Легко убедиться в справедливости следующего утверждения.

ЛЕММА 1. Пусть даны два числовых ряда, $\sum_{n=0}^{\infty} m_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} m_n^{(1)}$, с неотрицательными членами, удовлетворяющими неравенствам (40), (42) при всех $n = 0, 1, 2, \dots$, где $0 < q < 1$, $C_{10} > 0$ – некоторые константы, не зависящие от номера n . Тогда ряд $\sum_{n=0}^{\infty} m_n^{(1)}$ сходится и его члены мажорируются сходящейся геометрической прогрессией.

Отсюда следует, что на отрезке $[x_5, 0]$ равномерно сходится ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} [\theta_{(n+1)}(x_0) - \theta_{(n)}(x_0)]', \quad (43)$$

и поэтому функция $\theta_1^*(x)$ является непрерывно дифференцируемой на этом отрезке.

2. С помощью формулы Римана по функции $\theta_1^*(x)$ построим функцию $u_1^*(x, y) \in C^*(T_1)$, являющуюся решением уравнения (3) в T_1 и удовлетворяющую условиям

$$u_1^*(x, y)|_{y=l_1(x)} = \theta_1^*(x), \quad (44)$$

$$\frac{\partial u_1^*}{\partial x} \mu_{11}(x) + \frac{\partial u_1^*}{\partial y} \mu_{22}(x) + \beta_1(x) u_1^* \Big|_{y=l_1(x)} = \varphi_1(x). \quad (45)$$

При этом функция $u_1^*(x, y)$ удовлетворяет нужному граничному условию (4) и на кривой $y = l_2(x)$ при всех $x \in [x_5, 0]$, в чем легко убедиться, выполняя обратные преобразования (см. равенства (35), (33), (24), (21)), и поэтому является решением нашей задачи (3)–(5) в T_1 .

3. Докажем, что это решение можно продолжить до решения задачи в $T_1 \cup T_2$ (для простоты предполагаем, что $x_* \leq \Lambda^{-1}(x_5)$). Действительно, взяв в качестве следа искомого решения на участке кривой $y = l_2(x)$, $\Lambda^{-1}(x_5) \leq x \leq x_5$, решение $\theta_2^*(x)$ уравнения Вольтерра (38), построим по формуле Римана (17) функцию $u_2^*(x, y)$ в характеристическом треугольнике T_2 , опирающемся на этот участок границы. Несложно показать, что при указанных в формулировке теоремы условиях гладкости данных задачи (3)–(5) функция $\theta_2^*(x)$ принадлежит $C^1[\Lambda^{-1}(x_5), x_5]$, а функция $u_2^*(x, y)$ принадлежит $C^{1h}(T_2)$. Поэтому для того, чтобы доказать, что построенное таким образом решение является не только непрерывным на $T_1 \cup T_2$, но и принадлежит $C^{1h}(T_1 \cup T_2)$, нужно лишь доказать, что склейка двух его частей вдоль характеристики $x = x_5$ гладкая.

Пусть $P(x_5, y_P)$, $y_P < l_1(x_5)$, – произвольная точка, лежащая внутри характеристического отрезка $[A, B] := \{(x, y): x = x_5, l_2(x_5) \leq y \leq l_1(x_5)\}$ (A лежит на кривой $y = l_1(x)$, а B на $y = l_2(x)$), и пусть $\varepsilon > 0$ таково, что прямая $x = x_5 + \varepsilon$ пересекает кривую $y = l_1(x)$ в точке A_ε , расположенной ниже точки A , но выше точки P , т.е. $y_P < l_1(x_5 + \varepsilon) < l_1(x_5)$. Через точку A_ε проведем вертикальную и горизонтальную характеристики до пересечения с кривой $y = l_2(x)$ и полученные точки пересечения обозначим B_ε и C_ε соответственно. При этом, очевидно, $P \in A_\varepsilon B_\varepsilon C_\varepsilon$. В треугольнике $A_\varepsilon B_\varepsilon C_\varepsilon$ построим вспомогательную функцию $u_v^*(x, y)$ таким же способом, каким была построена $u_2^*(x, y)$. Тогда функция $u_v^*(x, y)$ принадлежит $C^{1h}(A_\varepsilon B_\varepsilon C_\varepsilon)$, является решением уравнения в этом треугольнике и удовлетворяет нужному граничному условию на $y = l_2(x)$. При этом

на множестве $A_\varepsilon B_\varepsilon BN$, $N := (x_5, l_1(x_5 + \varepsilon))$, являющемся пересечением треугольников $A_\varepsilon B_\varepsilon C_\varepsilon$ и T_1 , имеет место равенство $u_v^*(x, y) = u_1^*(x, y)$. Действительно, в треугольнике $BM B_\varepsilon$, где $M := (x_5 + \varepsilon, l_2(x_5))$, эти решения совпадают, поскольку они совпадают на отрезке MB_ε , и оба удовлетворяют нашему граничному условию (4) на участке BB_ε кривой $y = l_2(x)$. А в прямоугольнике $A_\varepsilon MBN$ совпадение этих решений следует из того, что они совпадают на его сторонах MB и MA_ε , и из единственности решения задачи Гурса. С другой стороны, в треугольнике BNC_ε $u_v^*(x, y)$ совпадает с $u_2^*(x, y)$, поскольку они совпадают на отрезке NB и удовлетворяют одному и тому же граничному условию (4). Это означает, что склеенное решение является гладким в некоторой окрестности точки P , а поскольку P — произвольная внутренняя точка рассматриваемого характеристического отрезка, то и вся склейка гладкая.

Таким образом, мы построили решение задачи (3)–(5) в области $T_1 \cup T_2$. Ясно, что аналогичные рассуждения позволяют продолжить его с сохранением гладкости и на треугольник T_3 , и так далее до тех пор, пока такими треугольниками не будет исчерпана область D . Теорема существования доказана.

§ 4. Теорема о непрерывной зависимости решения от данных задачи

ТЕОРЕМА 4. *Регулярное решение задачи непрерывно зависит от данных задачи.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В вопросе о непрерывной зависимости полученного выше решения от данных задачи наиболее интересным, конечно же, является доказательство непрерывной зависимости его от f , φ_1 , φ_2 и u_0 , которую мы понимаем здесь в обычном смысле. А именно, пусть $u(x, y)$ — регулярное решение задачи (3)–(5) в D , а $\tilde{u}(x, y)$ — решение задачи, в которой вместо f , φ_1 , φ_2 , u_0 в (3)–(5) стоят соответственно $\tilde{f}$, $\tilde{\varphi}_1$, $\tilde{\varphi}_2$, $\tilde{u}_0$. Говоря о том, что решение непрерывно зависит от f , φ_1 , φ_2 , u_0 , мы подразумеваем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое значение $\delta > 0$, что при

$$\|f - \tilde{f}\|_{C(\overline{D})} < \delta, \quad \|\varphi_1 - \tilde{\varphi}_1\|_{C[x_*, 0]} < \delta, \quad \|\varphi_2 - \tilde{\varphi}_2\|_{C[x_*, 0]} < \delta, \quad |u_0 - \tilde{u}_0| < \delta$$

выполняются неравенства

$$\|u - \tilde{u}\|_{C^1(\overline{D})} < \varepsilon, \quad \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x \partial y} \right\|_{C(\overline{D})} < \varepsilon.$$

Последнее непосредственно следует из способа построения решения задачи, поскольку:

- а) каждый член равномерно сходящегося ряда (41), а следовательно, и его сумма — функция $\theta_1^*(x)$ — непрерывно зависят от f , φ_1 , φ_2 , u_0 ;
- б) решение задачи в треугольнике T_1 — функция $u^*(x, y)$, построенная по формуле Римана, — непрерывно зависит от $\theta_1^*(x)$ и f , φ_1 , φ_2 , u_0 ;
- в) решение уравнения Вольтерра (38) — функция $\theta_2^*(x)$ — непрерывно зависит от $u^*(x_5, y)$ и f , φ_1 , φ_2 , u_0 ;

г) решение задачи в треугольнике T_2 непрерывно зависит от $\theta_2^*(x)$ и $f, \varphi_1, \varphi_2, u_0$;
 д) глобальное решение задачи $u(x, y)$ в области D получается из $u^*(x, y)$ в результате конечного числа процедур достраивания его внутри треугольников вида T_2 и T_3 .

Очевидно, что непрерывная зависимость решения от других данных задачи – коэффициентов уравнения $a(x, y), b(x, y), c(x, y)$, коэффициентов $\mu_{ij}(x), \beta_i(x)$, $i, j = 1, 2$, граничных условий – также имеет место. Это следует из предыдущего замечания, а также из того, что функция Римана, являясь решением корректно поставленной задачи Гурса, непрерывно зависит от коэффициентов уравнения, сопряженного (3).

§ 5. Замечания. Примеры

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Существенным отличием задачи (3)–(5) от задач, изученных прежде многими авторами (см. обзор [8]), является то, что ее регулярное решение должно удовлетворять уравнению (3) лишь в области D , а не во всем характеристическом прямоугольнике вида $R = \{(x, y): x_* < x < 0, 0 < y < y_*\}$, и быть непрерывным вместе с производными u_x, u_y, u_{xy} на множестве $\bar{D}$, а не на $\bar{R}$, как это предполагается во многих работах. Следующий пример показывает необходимость условия (1) расположения кривых для корректности нашей задачи и иллюстрирует указанное различие.

ПРИМЕР 1. Пусть в области $D_{bad} := \{(x, y): -2 < x < 0, -x^2 - 2x < y < -3x\}$ (нарушено условие (1)) задано уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \quad (46)$$

и требуется найти решение класса $C^{1h}(D_{bad})$, удовлетворяющее граничным условиям

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{y=-x^2-2x} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=-3x} = \begin{cases} -2(3x+1) & \text{при } -2 \leq x \leq -\frac{1}{3}, \\ 0 & \text{при } -\frac{1}{3} \leq x \leq 0, \end{cases} \quad (47)$$

и условию

$$u(0, 0) = 0. \quad (48)$$

Таких решений по крайней мере два:

$$u_1(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) \in S_1 \cup S_3, \\ (y-1)^2, & (x, y) \in S_2, \end{cases}$$

$$u_2(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) \in S_1, \\ (y-1)^2, & (x, y) \in S_2 \cup S_3. \end{cases}$$

Рис. 2

С другой стороны, если бы мы требовали, чтобы решение удовлетворяло уравнению (46) в прямоугольнике $R = \{(x, y): -2 < x < 0, 0 < y < 6\}$, удовлетворяло условиям (47), (48) и принадлежало классу $C^{1h}(R)$, то согласно теореме 2.1, b работы [8] такая задача была бы корректна и функция u_2 не являлась бы решением (см. рис. 2).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для доказательства теоремы единственности регулярного решения достаточно того, что оно должно принадлежать $C^1(D)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Из теорем 2 и 3 следует существование и единственность решения задачи (3)–(5) и в случае $x_* = -\infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Если повысить гладкость всех данных задачи (3)–(5), то повысится и гладкость решения (см. теорему 9 ч. II).

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Задача вида (3)–(5) возникает, например, при изучении колебаний струны, находящейся внутри цилиндра, заполненного вязкой жидкостью. На струну нанизаны два легких поршня, которые могут перемещаться вдоль нее. В начальный момент времени $t = 0$ поршни находятся в одной точке, а затем они начинают двигаться в разные стороны под воздействием внешних сил. Тогда граничные условия на концах участка струны, заключенного между поршнями, принимают вид (4), где μ_{ij} линейно выражаются через коэффициенты упругости и вязкого трения¹. Доказанная теорема описывает условия, при которых положение рассматриваемого участка струны однозначно определяется в любой момент времени $t > 0$ (см. также замечание 13 ч. II).

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Условие а) в задаче (3)–(5) обеспечивает трансверсальность границе области направления, по которому в (4) задается производная решения. Необходимость условий б) и с) следует из приведенных ниже примеров, в которых

¹ Автор благодарит Ю. Я. Аграновича, рассказавшего ей об этой задаче.

показано, как нарушение любого из них отражается на корректности рассматриваемой задачи (см. также [9]).

ПРИМЕР 2. Пусть в задаче (3)–(5) требуется найти регулярное в области $D := \{(x, y): x_* < x < 0, -l_2x < y < -l_1x\}$, $0 < l_2 < l_1 < \infty$, решение уравнения (46), удовлетворяющее граничным условиям

$$\mu_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + \mu_{12} \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=-l_1x} = 0, \quad \mu_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + \mu_{22} \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=-l_2x} = 0, \quad (49)$$

где $\mu_{ij} \neq 0$, $i, j = 1, 2$, – некоторые константы, а также условию (48). Очевидно, что функция $u(x, y) \equiv 0$ является решением задачи (46), (49), (48). Покажем, что если μ_{ij} удовлетворяют условиям а), с), но не удовлетворяют условию б), то такая задача имеет решения, отличные от тривиального. Ясно, что без ограничения общности решение нашей задачи представимо в виде

$$u(x, y) = \int_0^x f(z) dz + \int_0^y g(z) dz, \quad (50)$$

где $f(z)$ и $g(z)$ – некоторые функции, непрерывные на $[x_*, 0]$ и $[0, -l_1x_*]$ соответственно. Подставляя его в (49), получаем

$$g\left(\frac{z}{l}\right) = \frac{1}{k} g(z), \quad z \in [0, d], \quad (51)$$

где $z := -l_1x$, $d := -l_1x_*$, $l := l_1/l_2$, $k = \mu_{11}\mu_{22}/(\mu_{12}\mu_{21}) \neq 0$.

Таким образом, вопрос о единственности решения нашей задачи сводится к тому, имеет ли уравнение (51) непрерывные на $[0, -l_1x_*]$ решения, отличные от тождественного нуля. Заметим, что достаточно задать функцию $g(z)$ на отрезке $[d/l, d]$, ибо из уравнения (51) она восстанавливается однозначно сначала на $[d/l^2, d/l]$, потом на $[d/l^3, d/l^2]$ и так далее на всем $[0, d]$.

Пусть $|k| < 1$ (т.е. условие б) выполнено); тогда если есть хотя бы одна точка z_* , принадлежащая $[d/l, d]$, в которой $g(z_*) \neq 0$, то в силу (51) $|g(\frac{z_*}{l^n})| \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow \infty$); поэтому (51) имеет единственное непрерывное на всем $[0, d]$ решение $g(z) \equiv 0$.

Если же $|k| > 1$, то всякая непрерывная на отрезке $[d/l, d]$ функция $g(z)$, удовлетворяющая, например, условию $g(d/l) = g(d) = 0$, порождает непрерывное на всем отрезке $[0, d]$ решение уравнения (51). Если $k = 1$, то, очевидно, все постоянные функции удовлетворяют уравнению (51). Таким образом, в этих двух случаях наша однородная краевая задача имеет ненулевые решения, и поэтому не является корректной.

ПРИМЕР 3. Пусть теперь $x_* = -3.5$, $l_1 = 2$, $l_2 = 1$, и требуется найти регулярное в соответствующей этим значениям параметров области D (см. предыдущий пример) решение уравнения (46), удовлетворяющее условиям

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=-2x} = 0, \quad (x+3) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} - 4u \Big|_{y=-x} = 0, \quad (52)$$

а также условию (48). Тогда в области D выполнены все условия теоремы § 1, кроме условия с). Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что наряду с тождественным нулем функция

$$u(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{при } -3 \leq x \leq 0, \\ (x+3)^4 & \text{при } -3.5 \leq x < -3 \end{cases}$$

также является решением такой задачи. Таким образом, в области D эта задача некорректна. Заметим, что в меньшей области D_1 , ограниченной прямыми $y = -2x$, $y = -x$, $x = -3 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, задача корректна, и здесь единственным решением является $u \equiv 0$. Единственность пропадает после того как в точке $x = -3$ нарушается условие с).

ПРИМЕР 4. Покажем, что нарушение условия с) теоремы § 1 может привести и к отсутствию решения вообще. Пусть в той же области D , что и в примере 3, требуется найти регулярное решение уравнения (46), удовлетворяющее условиям

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=-2x} = 0, \quad (x+3) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + u \Big|_{y=-x} = 0, \quad u(0, 0) = \frac{1}{3}. \quad (53)$$

Легко проверить, что для любого $\varepsilon > 0$ в области D_1 (см. пример 3) такая задача корректна (ибо выполнены все условия нашей теоремы), и поэтому единственным ее решением в D_1 является функция $u(x, y) = 1/(x+3)$, имеющая разрыв в точке $x = -3$. Отсюда становится ясно, что регулярного решения рассматриваемой задачи в области D не существует.

II. Случай обобщенного решения

§ 6. Свойства обобщенных решений гиперболических уравнений

1. Существование непрерывного представителя обобщенного решения. В дальнейшем нам понадобится следующая теорема (см. [12]).

ТЕОРЕМА 5. Пусть S – область в плоскости Oxy , имеющая вид

$$\begin{aligned} S &= \{(x, y): x_0 < x < x_1, \quad y_0 < y < \varphi(x)\} \\ &= \{(x, y): y_0 < y < y_1, \quad x_0 < x < \psi(y)\}, \end{aligned}$$

где $\varphi(x)$ непрерывна на $[x_0, x_1]$, а $\psi(y)$ непрерывна на $[y_0, y_1]$, и пусть функция $u \in W_2^1(S)$ является обобщенным решением уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f(x, y), \quad (54)$$

где $f(x, y) \in L_2(S)$. Тогда функция $u(x, y)$ почти всюду в S совпадает с функцией $u_c(x, y)$, непрерывной на множестве $\bar{S} \setminus \{(x_0, y_1), (x_1, y_0)\}$ и абсолютно непрерывной на принадлежащих этому множеству отрезках, параллельных координатным осям.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (см. [12]) следует из того, что почти везде в S справедливо равенство $u(x, y) = u_c(x, y)$, где

$$u_c(x, y) = \int_{x_0}^x \left(\int_{y_0}^y f(\tilde{x}, \tilde{y}) d\tilde{y} \right) d\tilde{x} + F(x) + G(y), \quad (55)$$

$F(x)$ абсолютно непрерывна на $[x_0, x_1 - \varepsilon]$, а $G(y)$ абсолютно непрерывна на $[y_0, y_1 - \varepsilon]$ для $\forall \varepsilon > 0$. В дальнейшем будем называть функцию $u_c(x, y)$ *непрерывным представителем* элемента $u(x, y)$ пространства $W_2^{1h}(S)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Если $\varphi(x_1) \neq y_0$, то в равенстве (55) функцию $F(x)$ можно считать абсолютно непрерывной на всем отрезке $[x_0, x_1]$. В свою очередь если $\psi(y_1) \neq x_0$, то функцию $G(y)$ можно считать абсолютно непрерывной на $[y_0, y_1]$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть S_c – область в плоскости Oxy такая, что

$$S_c = \{(x, y): x_0 < x < x_1, y_0 < y < \varphi(x)\},$$

где $\varphi(x)$ – гладкая строго убывающая на $[x_0, x_1]$ функция, причем $\varphi(x_0) = y_1$, $\varphi(x_1) = y_0$, и пусть выполнены все остальные условия теоремы 5. Тогда на кривой $y = \varphi(x)$ существуют

$$\frac{\partial u_c}{\partial x} \Big|_{y=\varphi(x)}, \quad \frac{\partial u_c}{\partial y} \Big|_{y=\varphi(x)}$$

почти везде по линейной мере на этой кривой.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть выполнены все условия предыдущего следствия. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ функция $u_c(x, \varphi(x))$ принадлежит $W_2^1(x_0 + \varepsilon, x_1 - \varepsilon)$.

2. Формула Римана для обобщенного решения. Пусть точка $A(x_2, y_2)$ лежит строго внутри области вида S_c . Через эту точку проведем две характеристики, $x = x_2$, $y = y_2$, уравнения (3) до пересечения с кривой $y = \varphi(x)$; полученные точки пересечения обозначим $C(x_2, y_3)$ и $B(x_3, y_2)$ соответственно. Заметим, что область $ABC \subset S_c$ имеет такой же вид, как S_c . Пусть функция $u(x, y) \in W_2^1(S_c)$ является обобщенным решением уравнения (3) в области S_c . Тогда для любой функции $g \in C_0^\infty(ABC)$

$$\iint_{ABC} u \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} dx dy = \iint_{ABC} f^* g dx dy,$$

где

$$f^*(x, y) := - \left[a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y) u \right] + f(x, y)$$

принадлежит $L_2(ABC)$, и поэтому в области ABC выполнены все условия теоремы 5 и следствия 1. Следовательно, функцию $u(x, y)$ можно при необходимости изменить на множестве нулевой меры так, что она станет непрерывной на $\overline{ABC}$: $u(x, y) = u_c(x, y)$ почти всюду на ABC , где $u_c(x, y) \in C(\overline{ABC})$.

ТЕОРЕМА 6. Для $u_c(x, y)$ справедлива формула Римана:

$$\begin{aligned} u_c|_A = & \frac{1}{2}u_c R \Big|_B + \frac{1}{2}u_c R \Big|_C + \iint_{ABC} f R dx dy \\ & - \int_{BC} \left[\frac{1}{2} \left(u_c \frac{\partial R}{\partial x} - R \frac{\partial u_c}{\partial x} \right) - b u_c R \right] dx \\ & - \left[\frac{1}{2} \left(u_c \frac{\partial R}{\partial y} - R \frac{\partial u_c}{\partial y} \right) - a u_c R \right] dy, \end{aligned} \quad (56)$$

где $R = R(x, y; x_2, y_2)$ – функция Римана уравнения (3).

Доказательство почти полностью повторяет обычные рассуждения при выводе формулы Римана (см., например, [21]). Это оказывается возможным, потому что в силу теоремы 5, замечания 7 и следствия 2 функция $u_c(x_2, y)$ абсолютно непрерывна на $[y_2, y_3]$, а функции $u_c(x, \varphi(x))$ и $u_c(x, y_2)$ абсолютно непрерывны на $[x_2, x_3]$.

Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что справедлива и обратная теорема.

Обозначим через $C^{nh}(S_0)$, где S_0 – некоторая область плоскости Oxy , множество всех функций $r(x, y)$, непрерывных на $\overline{S_0}$ и имеющих непрерывные на $\overline{S_0}$ смешанные производные

$$\frac{\partial^{i+j} r(x, y)}{\partial x^i \partial y^j}, \quad i, j = 0, 1, \dots, n. \quad (57)$$

В нижеследующей теореме 7 мы предполагаем, что коэффициенты уравнения (3) $a(x, y), b(x, y)$ принадлежат $C^{nh}(S_0)$, а $c(x, y)$ принадлежит $C^{(n-1)h}(S_0)$ ($n \geq 1$), где $S_0 \supset \overline{S_c}$. Можно доказать, что тогда функция Римана $R(x, y; x_2, y_2)$ этого уравнения принадлежит $C^{nh}(S_c)$ по каждой паре переменных (x, y) и (x_2, y_2) .

ТЕОРЕМА 7. Пусть $f(x, y) \in W_2^{(n-1)h}(S_c)$, $\varphi(x) \in C^n[x_0, x_1]$, $\theta(x) \in W_2^n(x_0, x_1)$ и $\tilde{\theta}(x) \in W_2^{n-1}(x_0, x_1)$, $n = 1, 2, \dots$. Тогда функция $u(x, y)$, задаваемая формулой (см. (56))

$$\begin{aligned} u(x_2, y_2) = & \frac{1}{2}\theta(\psi(y_2))R(\psi(y_2), y_2; x_2, y_2) + \frac{1}{2}\theta(x_2)R(x_2, \varphi(x_2); x_2, y_2) \\ & + \int_{\psi(y_2)}^{x_2} \frac{1}{2}R(x, \varphi(x); x_2, y_2)\tilde{\theta}(x) dx \\ & - \int_{\psi(y_2)}^{x_2} \theta(x) \left[\frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial x}(x, \varphi(x); x_2, y_2) - \frac{\varphi'(x)}{2} \frac{\partial R}{\partial y}(x, \varphi(x); x_2, y_2) \right. \\ & \left. - (b(x, \varphi(x)) - \varphi'(x)a(x, \varphi(x)))R(x, \varphi(x); x_2, y_2) \right] dx \\ & + \int_{x_2}^{\psi(y_2)} dx \int_{y_2}^{\varphi(x)} R(x, y; x_2, y_2)f(x, y) dy, \end{aligned} \quad (58)$$

где $\psi(\varphi(x)) \equiv x$, принадлежит пространству $W_2^{nh}(S_c)$ и является обобщенным решением уравнения (3) в области S_c таким, что

$$u(x, y)|_{y=\varphi(x)} = \theta(x), \quad \left[\frac{\partial u}{\partial x} - \varphi'(x) \frac{\partial u}{\partial y} \right] \Big|_{y=\varphi(x)} = \tilde{\theta}(x);$$

при этом

$$\|u\|_{W_2^{nh}(S_c)}^2 \leq c \left\{ \|\theta\|_{W_2^n(x_0, x_1)}^2 + \|\tilde{\theta}\|_{W_2^{n-1}(x_0, x_1)}^2 + \|f\|_{W_2^{(n-1)h}(S_c)}^2 \right\}, \quad (59)$$

где c не зависит от $f, \theta, \tilde{\theta}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Ясно, что все рассуждения, приведенные выше, касающиеся свойств решений гиперболических уравнений, остаются справедливыми и для областей, получающихся из S поворотом вокруг точки (x_0, y_0) на углы $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$, а также для областей, являющихся объединением конечного числа областей такого вида. Но, как легко заметить, существует широкий класс областей, которые не могут быть представлены в виде конечного объединения областей вида S . Примером такой области является наша область D .

3. Свойства следов обобщенного решения на границе области D . Пусть теперь функция $u \in W_2^1(D)$ является обобщенным решением уравнения (3) в области D . Обозначим через $\theta_i(x)$ его следы на кривых $y = l_i(x)$: $\theta_i(x) := u_c(x, l_i(x))$, $i = 1, 2$. Поскольку кривые $y = l_i(x)$ трансверсальны характеристикам уравнения (3) в каждой точке, то почти всюду существуют $\frac{\partial u_c}{\partial x} \Big|_{y=l_i(x)}$ и $\frac{\partial u_c}{\partial y} \Big|_{y=l_i(x)}$, $i = 1, 2$.

ЛЕММА 2. *Имеют место следующие неравенства:*

$$\int_{x_*}^0 \left[\frac{\partial u_c}{\partial x} \Big|_{y=l_i(x)} \right]^2 |x| dx < \infty, \quad \int_{x_*}^0 \left[\frac{\partial u_c}{\partial y} \Big|_{y=l_i(x)} \right]^2 |x| dx < \infty, \quad i = 1, 2. \quad (60)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что область D такова, что оператор следа $\gamma: W_2^1(D) \rightarrow L_2(\partial D)$ существует и компактен. Учитывая установленные выше свойства решения $u(x, y)$, а также представление его в виде (56), несложно убедиться в том, что функция $\frac{\partial u_c}{\partial x}(x, l_1(x))$ должна принадлежать $L_2(D)$, поэтому

$$\int_{x_*}^0 dx \int_{l_2(x)}^{l_1(x)} \left| \frac{\partial u_c}{\partial x}(x, l_1(x)) \right|^2 dy = \int_{x_*}^0 \left| \frac{\partial u_c}{\partial x}(x, l_1(x)) \right|^2 (l_1(x) - l_2(x)) dx < \infty.$$

В силу свойств (1), (2) функций $l_i(x)$ последнее неравенство эквивалентно (60). Остальные неравенства доказываются аналогично.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Из леммы 2 получаем*

$$\int_{x_*}^0 |\theta'_i(x)|^2 |x| dx \leq c \|u\|_{W_2^{1h}(D)}^2 < \infty, \quad i = 1, 2. \quad (61)$$

§ 7. Теорема единственности

Из результатов предыдущего параграфа следует, что мы вправе рассматривать следующую задачу: из множества всех обобщенных решений $u(x, y) \in W_2^1(D)$ в области D уравнения (3), где $f(x, y) \in L_2(D)$, найти решения, удовлетворяющие условиям (4) при почти всех $x \in (x_*, 0)$.

ТЕОРЕМА 8. Пусть $\beta_i(x) \in C[x_*, 0]$, $\varphi_i(x) \in L_2(x_*, 0)$, $i = 1, 2$, а функции $\mu_{ij}(x)$, принадлежащие $C^1[x_*, 0]$, $i, j = 1, 2$, такие, что:

$$\text{а) } \mu_{i2}(x) - l'_i(x)\mu_{i1}(x) \neq 0 \quad \forall x \in [x_*, 0], \quad i = 1, 2;$$

$$\text{б) } \left| \frac{\mu_{11}(0)\mu_{22}(0)}{\mu_{12}(0)\mu_{21}(0)} \right| \leq \left| \frac{l'_2(0)}{l'_1(0)} \right|;$$

$$\text{с) } \mu_{12}(x) \neq 0, \quad \mu_{21}(x) \neq 0 \quad \forall x \in [x_*, 0].$$

Тогда непрерывный представитель $u_c(x, y)$ всякого обобщенного из $W_2^1(D)$ решения уравнения (3), удовлетворяющего граничным условиям (4) (если такое решение существует), имеет предел:

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in D}} u_c(x, y) = u_0 < \infty. \quad (62)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой теоремы, а также последующей теоремы единственности обобщенного решения задачи во многом совпадает с доказательством теорем 1 и 2 ч. I. В дальнейших рассуждениях будем использовать прежние обозначения.

Изложенные в предыдущем параграфе дифференциальные свойства функции $u_c(x, y)$ позволяют получить для ее следа $\theta_1(x)$ на кривой $y = l_1(x)$ такое же функционально-интегральное уравнение (9), как и для регулярного решения задачи. Только теперь нам нужно показать одномерность пространства решений соответствующего ему однородного уравнения в гораздо более широком классе функций – функций, удовлетворяющих лишь условию (61) и не имеющих, вообще говоря, предела в нуле. В этом нам поможет усиленное по сравнению с регулярным случаем условие б) теоремы 8. В дальнейших рассуждениях нам понадобятся следующие леммы.

ЛЕММА 3. Существует

$$\lim_{x \rightarrow -0} (\theta_1(\Lambda(x)) - \theta_1(x)) = 0. \quad (63)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя свойства отображения Λ , несложно доказать существование постоянной² C_1 такой, что для всех достаточно близких к нулю x

²Константы C_i , фигурирующие в ч. II, не связаны с одноименными константами из ч. I.

$|\Lambda(x) - x| \leq C_1 |\Lambda(x)|$, поэтому

$$\begin{aligned}
 |\theta_1(\Lambda(x)) - \theta_1(x)| &= \left| \int_x^{\Lambda(x)} \theta'_1(t) dt \right| \leq \int_x^{\Lambda(x)} |\theta'_1(t)| dt \\
 &\leq \sqrt{\int_x^{\Lambda(x)} |\theta'_1(t)|^2 dt \cdot \int_x^{\Lambda(x)} 1 dt} \\
 &= \sqrt{(\Lambda(x) - x) \cdot \int_x^{\Lambda(x)} |\theta'_1(t)|^2 dt} \\
 &\leq \sqrt{C_1 |\Lambda(x)| \int_x^{\Lambda(x)} |\theta'_1(t)|^2 dt} \\
 &\leq \sqrt{C_2 \int_x^{\Lambda(x)} |\theta'_1(t)|^2 |t| dt} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow -0. \tag{64}
 \end{aligned}$$

ЛЕММА 4. *Существует*

$$\lim_{x \rightarrow -0} [\theta_1(x) \sqrt{x}] < \infty. \tag{65}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку для $x_* < x_0 < 0$

$$\int_{\varepsilon}^{x_0} \theta'_1(x) \theta_1(x) x dx = \theta_1^2(x) x \Big|_{\varepsilon}^{x_0} - \int_{\varepsilon}^{x_0} \theta_1(x) (\theta'_1(x) x + \theta_1(x)) dx,$$

то, переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ в этом равенстве, получаем утверждение леммы, ибо в силу того, что $\theta_1(x) \in L_2(x_*, 0)$ и $\theta'_1(x) \sqrt{x} \in L_2(x_*, 0)$ (см. следствие 3), все интегральные члены в нем имеют конечные пределы.

ЛЕММА 5. *Пусть на $[x_*, 0]$ задана бесконечно малая при $x \rightarrow 0$ функция $\gamma(x) \sim Cx^{0,5+\varepsilon}$, $C = \text{const}$, $\varepsilon > 0$. Тогда функциональный ряд*

$$\theta_1(x) \gamma(x) + \theta_1(\Lambda(x)) \gamma(\Lambda(x)) + \theta_1(\Lambda^2(x)) \gamma(\Lambda^2(x)) + \dots$$

сходится равномерно на $[x_*, 0]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Несложно доказать, что существуют постоянная $0 < q < 1$ и номер N такие, что для всех $n \geq N$ справедливо неравенство

$$|\Lambda^{n+1}(x)| \leq q |\Lambda^n(x)| \quad \forall x \in [x_*, 0],$$

причем q и N не зависят от x . Поэтому, начиная с некоторого номера $N_1 \geq N$, имеем

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=N_1}^{\infty} |\theta_1(\Lambda^k(x)) \gamma(\Lambda^k(x))| &\leq \sum_{k=N_1}^{\infty} C_2 |\theta_1(\Lambda^k(x)) [\Lambda^k(x)]^{0,5+\varepsilon}| \\
 &\leq \sum_{k=N_1}^{\infty} C_3 |\Lambda^k(x)|^{\varepsilon} \leq \sum_{k=N_1}^{\infty} C_3 |q^k x|^{\varepsilon} \leq C_4 |x|^{\varepsilon}. \tag{66}
 \end{aligned}$$

В силу условия b) теоремы 8

$$k := |\alpha(0)| = \left| \frac{\alpha_3(0)}{\alpha_1(0)} \right| = \left| \frac{\mu_{11}(0) \mu_{22}(0) l'_1(0)}{\mu_{12}(0) \mu_{21}(0) l'_2(0)} \right| \leq 1, \tag{67}$$

поэтому справедлива

ЛЕММА 6. Последовательность $f_n(x_0) := \prod_{j=0}^n \alpha(\Lambda^j(x_0))$ ограничена в совокупности, т.е. существует постоянная $M_1 > 0$ такая, что

$$|f_n(x_0)| \leq M_1 \quad \forall n, \quad \forall x_0 \in [x_*, 0]. \quad (68)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы опускаем ввиду его простоты.

Вернемся к исследованию функционально-интегрального уравнения (9), а также вытекающего из него равенства (24). Из леммы 6 следует, что последовательность $\left\{ \prod_{j=0}^n \alpha(\Lambda^j(x_0)) F(\Lambda^{n+1}(x_0)) \right\}_{n=0}^{\infty}$ равномерно сходится на отрезке $[x_*, 0]$ к функции, тождественно равной нулю. В силу лемм 3 и 5 для достаточно больших номеров i имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Lambda^{i+1}(x_0)}^{\Lambda^i(x_0)} K_3(x, \Lambda^i(x_0)) \prod_{j=0}^{i-1} \alpha(\Lambda^j(x_0)) \theta_1(x) dx \right| &\leq C_5 \int_{\Lambda^{i+1}(x_0)}^{\Lambda^i(x_0)} \left| \frac{1}{\sqrt{x}} \right| \cdot |\theta_1(x) \sqrt{x}| dx \\ &\leq C_6 \sqrt{x} \Big|_{\Lambda^{i+1}(x_0)}^{\Lambda^i(x_0)} \leq 2C_6 \sqrt{\Lambda^i(x_0)} \leq C_6 |x|^{0,5} (\sqrt{q})^i, \end{aligned} \quad (69)$$

поэтому в (24) равномерно на отрезке $[x_*, 0]$ сходится ряд, составленный из этих функций. Более того, существует постоянная $C_7 > 0$ такая, что для его суммы справедлива оценка

$$\left| \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\Lambda^{i+1}(x_0)}^{\Lambda^i(x_0)} K_3(x, \Lambda^i(x_0)) \prod_{j=0}^{i-1} \alpha(\Lambda^j(x_0)) \theta_1(x) dx \right| < C_7 |x_0|^{0,5}. \quad (70)$$

Ясно, что остальные ряды, частичные суммы которых присутствуют в (24), также равномерно сходятся на $[x_*, 0]$, и для их сумм справедливы оценки, аналогичные (70).

Таким образом, в рассматриваемом случае обобщенного решения задачи также возможны переход к пределу в равенстве (24) и получение равенства (35). Поэтому для любого $x_0 \in [x_*, 0)$ существует

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \theta_1(\Lambda^m(x_0)) = B(x_0). \quad (71)$$

Зафиксируем некоторое x_0 из этого интервала. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in [x_*, 0)$, $n = 1, 2, \dots$, — произвольная строго монотонно возрастающая последовательность такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, и пусть $\varepsilon > 0$ — некоторое положительное число. В силу (61) и (71) существует номер N_1 такой, что для всех $i \geq N_1$

$$\begin{aligned} \int_{\Lambda^{i-1}(x_0)}^{\Lambda^i(x_0)} \left| \theta_1'(x) \right|^2 |x| dx &\leq \frac{\varepsilon^2}{4}, \\ |\theta_1(\Lambda^i(x_0)) - B(x_0)| &\leq \frac{\varepsilon}{4}. \end{aligned}$$

Пусть номер N_2 такой, что для всех $n \geq N_2$ выполнено неравенство $\Lambda^{N_1}(x_0) < x_n < 0$. Для любого x_n ($n > N_2$) существует единственный номер $i(n)$ такой, что

$$\Lambda^{i(n)}(x_0) \leq x_n < \Lambda^{i(n)+1}(x_0).$$

При этом $i(n) > N_1$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} i(n) = \infty$. Поэтому

$$\begin{aligned} |\theta_1(x_n) - B(x_0)| &\leq |\theta_1(x_n) - \theta_1(\Lambda^{i(n)+1}(x_0))| + |\theta_1(\Lambda^{i(n)+1}(x_0)) - B(x_0)| \\ &\leq \left| \int_{x_n}^{\Lambda^{i(n)+1}(x_0)} \theta'_1(x) dx \right| + \frac{\varepsilon}{4} \leq \int_{x_n}^{\Lambda^{i(n)+1}(x_0)} |\theta'_1(x)| dx + \frac{\varepsilon}{4} \\ &\leq \int_{\Lambda^{i(n)}(x_0)}^{\Lambda^{i(n)+1}(x_0)} |\theta'_1(x)| dx + \frac{\varepsilon}{4}. \end{aligned}$$

Из доказательства леммы 3 следует, что существует не зависящая от x_0 постоянная $C_8 > 0$ такая, что

$$\int_{\Lambda^{i(n)}(x_0)}^{\Lambda^{i(n)+1}(x_0)} |\theta'_1(x)| dx \leq C_8 \sqrt{\int_{\Lambda^{i-1}(x_0)}^{\Lambda^i(x_0)} |\theta'_1(x)|^2 |x| dx},$$

поэтому

$$|\theta_1(x_n) - B(x_0)| \leq C_8 \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Поскольку ε произвольно, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_1(x_n) = B(x_0) =: u_0$. А так как решение $u_c(x, y)$ (если оно существует) восстанавливается по своему следу $\theta_1(x)$ с помощью формулы (13), то теорема 8 доказана.

Теперь может быть сформулирована

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. Пусть выполнены все требования теоремы 8. Тогда для любой функции $f(x, y) \in L_2(D)$, для любых $\varphi_i(x) \in L_2(x_*, 0)$, $i = 1, 2$, и для любого числа $u_0 \in \mathbb{C}$ в пространстве $W_2^1(D)$ всегда существует, и притом единственное (обобщенное) решение $u(x, y)$ уравнения (3), непрерывный представитель $u_c(x, y)$ которого при почти всех $x \in (x_*, 0)$ удовлетворяет граничным условиям (4), а также условию

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ (x, y) \in D}} u_c(x, y) = u_0, \quad (72)$$

и для него справедлива оценка (8).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если решения такой задачи существуют, то установленные выше свойства, которыми должны обладать их непрерывные представители, позволяют без изменений повторить все рассуждения оставшейся части доказательства теоремы 2 ч. I, и поэтому единственность обобщенного решения задачи доказана.

§ 8. Теорема существования

Справедлива более общая теорема, из которой следует и существование указанного в предыдущей теореме решения задачи. Будем предполагать, что коэффициенты уравнения (3) $a(x, y)$, $b(x, y)$ принадлежат $C^{nh}(D_0)$, а $c(x, y)$ принадлежит $C^{(n-1)h}(D_0)$ ($n \geq 1$), где $D_0 \supset \overline{D}$.

ТЕОРЕМА 9. Пусть в выражении (4), задающем граничные условия, функции $l_i(x)$ принадлежат $C^{n+1}[x_*, 0]$, $\beta_i(x)$ принадлежат $C^{n-1}[x_*, 0]$, $i = 1, 2$, $\mu_{ij}(x)$ принадлежат $C^n[x_*, 0]$, $i, j = 1, 2$, и выполнены условия а), б), с) теоремы 8. Тогда для любой функции $f(x, y) \in W_2^{(n-1)h}(D)$, для любых $\varphi_i(x) \in W_2^{n-1}(x_*, 0)$, $i = 1, 2$, $n \geq 1$, и для любого числа $u_0 \in \mathbb{C}$ в пространстве $W_2^{nh}(D)$ всегда существует и единственно (обобщенное) решение $u(x, y)$ уравнения (3), непрерывный представитель $u_c(x, y)$ которого удовлетворяет граничным условиям (4), а также условию (72), причем

$$\|u\|_{W_2^{nh}(D)}^2 \leq c \left\{ \|f\|_{W_2^{(n-1)h}(D)}^2 + \|\varphi_1\|_{W_2^{n-1}(x_*, 0)}^2 + \|\varphi_2\|_{W_2^{n-1}(x_*, 0)}^2 + |u_0|^2 \right\}, \quad (73)$$

где c не зависит от f , φ_i , u_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству существования регулярного решения. Взяв за основу последнее, остановимся на отличиях.

1. Пусть функция $\theta_{1*}(x)$ является неподвижной точкой отображения $\mathcal{A}_0: C[x_5, 0] \rightarrow C[x_5, 0]$. Из (34) следует, что $\Phi_6(x) \in W_2^n(x_*, 0)$, поскольку в силу леммы 4 и свойств отображения Λ ряд (36) сходится по норме этого пространства (нормы его членов мажорируются сходящейся геометрической прогрессией). Докажем, что существует значение x_{5*} , $x_5 \leq x_{5*} < 0$, такое, что $\theta_{1*}(x) \in W_2^n(x_{5*}, 0)$. Так как $\Phi_6(x) \in W_2^n(x_*, 0)$, то все члены последовательности (39) также принадлежат $W_2^n(x_*, 0)$. Пусть $x_{5?}$ — произвольная точка из отрезка $[x_5, 0]$. Обозначим

$$m_n := \|\theta_{(n)} - \theta_{(n-1)}\|_{L_2(x_{5?}, 0)}. \quad (74)$$

Имеем

$$\begin{aligned} & - \left(\theta_{(n+1)}(x_0) - \theta_{(n)}(x_0) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \theta_{(n)}(\Lambda^{k+1}(x_0)) - \theta_{(n-1)}(\Lambda^{k+1}(x_0)) \right\} \gamma(\Lambda^k(x_0)) \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \theta_{(n)}(\Lambda^{i+k+1}(x_0)) - \theta_{(n-1)}(\Lambda^{i+k+1}(x_0)) \right\} \right. \\ &\quad \left. \times \gamma(\Lambda^{i+k}(x_0)) \prod_{j=0}^{i-1} \alpha(\Lambda^{j+k}(x_0)) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \int_{\Lambda^{i+k+1}(x_0)}^{\Lambda^{i+k}(x_0)} K_3(x, \Lambda^{i+k}(x_0)) \right. \\
& \quad \times \prod_{j=0}^{i-1} \alpha(\Lambda^{j+k}(x_0)) \{ \theta_{(n)}(x) - \theta_{(n-1)}(x) \} dx \Big) \\
& + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \int_{\Lambda^{i+k+2}(x_0)}^{\Lambda^{i+k+1}(x_0)} K_4(x, \Lambda^{i+k}(x_0)) \right. \\
& \quad \times \prod_{j=0}^{i-1} \alpha(\Lambda^{j+k}(x_0)) \{ \theta_{(n)}(x) - \theta_{(n-1)}(x) \} dx \Big) \\
& + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\Lambda^{k+1}(x_0)}^{\Lambda^k(x_0)} K_3(x, \Lambda^k(x_0)) \{ \theta_{(n)}(x) - \theta_{(n-1)}(x) \} dx \\
& + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\Lambda^{k+2}(x_0)}^{\Lambda^{k+1}(x_0)} K_4(x, \Lambda^k(x_0)) \{ \theta_{(n)}(x) - \theta_{(n-1)}(x) \} dx. \tag{75}
\end{aligned}$$

Несложно убедиться в том, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \{ \theta_{(n)}(\Lambda^{k+1}(x_0)) - \theta_{(n-1)}(\Lambda^{k+1}(x_0)) \} \gamma(\Lambda^k(x_0)) \right\|_{L_2(x_{5?}, 0)} \leq C_9 \sqrt{x_{5?}} m_n. \tag{76}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_{\Lambda^{i+k+1}(x_0)}^{\Lambda^{i+k}(x_0)} K_3(x, \Lambda^{i+k}(x_0)) \prod_{j=0}^{i-1} \alpha(\Lambda^{j+k}(x_0)) \{ \theta_{(n)}(x) - \theta_{(n-1)}(x) \} dx \right\|_{L_2(x_{5?}, 0)}^2 \\
& \leq 2K_3^2 M_1^2 \Lambda^{i+k}(x_{5?}) x_{5?} m_n^2,
\end{aligned}$$

где константа K_3 оценивает сверху функцию $K_3(x, x_0)$ на множестве $\{x_5 \leq x_0 \leq 0, x_0 \leq x \leq \Lambda(x_0)\}$, а константа M_1 определена в (68). Поэтому существует постоянная C_{10} , не зависящая от $x_{5?}$ и номера n , такая, что справедлива оценка $m_{n+1} \leq C_{10} \sqrt{x_{5?}} m_n$. Ясно теперь, что при достаточно малом $x_{5?} = x_{5*}$ существует число $q < 1$ такое, что для всех $n = 1, 2, \dots$ выполняется неравенство $m_{n+1} \leq q m_n$. Обозначим $m_n^{(1)} := \|\theta'_{(n)} - \theta'_{(n-1)}\|_{L_2(x_{5?}, 0)}$. Продифференцировав (75), легко проверить, что для этого значения x_{5*} при всех $n = 1, 2, \dots$

$$m_{n+1}^{(1)} \leq q m_n^{(1)} + C_{11} m_n,$$

где C_{11} не зависит от n . Поэтому в силу леммы 1 сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} m_n^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \|\theta'_{(n)} - \theta'_{(n-1)}\|_{L_2(x_{5*}, 0)}.$$

Кроме того, его члены мажорируются сходящейся геометрической прогрессией, т. е. существуют постоянная C_{12} и число $q_1 < 1$ ($q_1 > q$) такие, что $\forall n = 1, 2, \dots$ выполняется неравенство $m_n^{(1)} \leq C_{12} q_1^n$. Обозначим $m_n^{(2)} := \|\theta''_{(n)} - \theta''_{(n-1)}\|_{L_2(x_{5*}, 0)}$. Дифференцируя (75) еще раз, убеждаемся в том, что справедлива оценка

$$m_{n+1}^{(2)} \leq q m_n^{(2)} + C_{13} m_n^{(1)} + C_{14} m_n \leq q_1 m_n^{(2)} + C_{15} q_1^n,$$

где C_{13}, C_{14}, C_{15} не зависят от n . Мы снова оказались в условиях леммы 1, поэтому сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\theta''_{(n)} - \theta''_{(n-1)}\|_{L_2(x_{5*}, 0)}$$

и т.д. В силу очевидного неравенства

$$\|g\|_{W_2^n(x_{5*}, 0)} \leq \sum_{i=0}^n \|g^{(i)}\|_{L_2(x_{5*}, 0)}$$

ряд (41) сходится по норме пространства $W_2^n(x_{5*}, 0)$. Таким образом, является ограниченным линейный оператор $\mathcal{A}_1: W_2^n(x_{5*}, 0) \rightarrow W_2^n(x_{5*}, 0)$, который всякой функции $\Phi_6 \in W_2^n(x_{5*}, 0)$ ставит в соответствие функцию $\theta_{1*} \in W_2^n(x_{5*}, 0)$ — неподвижную точку отображения $\mathcal{A}_0$; поэтому

$$\begin{aligned} \|\theta_{1*}\|_{W_2^n(x_{5*}, 0)} &\leq C_{16} \|\Phi_6\|_{W_2^n(x_{5*}, 0)} \leq C_{17} \left\{ \|f\|_{W_2^{(n-1)h}(D)} \right. \\ &\quad \left. + \|\varphi_1\|_{W_2^{n-1}(x_*, 0)} + \|\varphi_2\|_{W_2^{n-1}(x_*, 0)} + |u_0| \right\}. \end{aligned} \quad (77)$$

2. С помощью формулы Римана (13) по функции θ_{1*} в области $T_{1*} = \{(x, y): 0 \leq x \leq x_{5*}, l_2(x) \leq y \leq l_1(x)\}$ построим функцию $u_1^*(x, y)$. Согласно теореме 7 $u_1^*(x, y) \in W_2^{nh}(T_1)$, кроме того, $u_1^*(x_{5*}, y) \in W_2^n(l_2(x_{5*}), l_1(x_{5*}))$, и их нормы в этих пространствах также оцениваются сверху выражением, стоящим в левой части неравенства (77), с некоторыми константами C_{18} и C_{19} соответственно. Ясно, что $u_1^*(x, y)$ удовлетворяет граничному условию на кривой $y = l_2(x)$, и поэтому является решением задачи в T_{1*} .

3. Пусть функция $\theta_2^* \in C[\Lambda^{-1}(x_{5*}), x_{5*}]$ является решением уравнения Вольтерра (38). Поскольку $\Phi_7 \in W_2^n(\Lambda^{-1}(x_{5*}), x_{5*})$, а ядро $K_6(x, z)$ имеет нужную гладкость, то и θ_2^* принадлежит этому пространству и

$$\begin{aligned} \|\theta_2^*\|_{W_2^n} &\leq C_{21} \|\Phi_7\|_{W_2^n} \leq C_{22} \left\{ \|f\|_{W_2^{(n-1)h}(D)} \right. \\ &\quad \left. + \|\varphi_1\|_{W_2^{n-1}(x_*, 0)} + \|\varphi_2\|_{W_2^{n-1}(x_*, 0)} + |u_0| \right\}. \end{aligned}$$

Взяв теперь θ_2^* в качестве следа искомого решения, по формуле Римана (17) строим функцию $u_2^*(x, y)$ в характеристическом треугольнике $T_2 := \{(x, y): \Lambda^{-1}(x_{5*}) \leq x \leq x_{5*}, l_2(x) \leq y \leq l_1(x_{5*})\}$. То, что склеенное решение

$$u^*(x, y) = \begin{cases} u_1^*(x, y) & \text{при } (x, y) \in T_1, \\ u_2^*(x, y) & \text{при } (x, y) \in T_2 \end{cases}$$

принадлежит $W_2^{nh}(T_1 \cup T_2)$, доказывается так же, как и в регулярном случае.

Поскольку область D исчерпывается конечным числом треугольников вида $T_1, T_2, \dots$, полученное в результате такого последовательного достраивания решение нашей задачи $u^*(x, y)$ принадлежит $W_2^{nh}(D)$ и справедлива оценка (73). Теорема существования доказана.

§ 9. Замечания. Примеры

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Пусть $\varphi_i = 0$, $i = 1, 2$, $u_0 = 0$. В пространстве $L_2(D)$ определим оператор L_0 , ставящий в соответствие всякой функции $f(x, y)$ решение нашей задачи. Из доказанных выше теорем следует, что:

- 1) оператор L_0 является вполне непрерывным, поскольку вложение $W_2^{1h}(D) \subset L_2(D)$ компактно;
- 2) его спектр состоит из единственной точки $\lambda = 0$, не являющейся собственным значением;
- 3) оператор $L_n: W_2^{nh}(D) \rightarrow W_2^{(n+1)h}(D)$ – сужение оператора L_0 на $W_2^{nh}(D)$ – является ограниченным оператором.

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Предложенный метод исследования задачи позволяет рассматривать ее и в весовых пространствах С. Л. Соболева, подобных пространствам $\overset{\circ}{W}_\alpha^k$ в [22].

ЗАМЕЧАНИЕ 11. Для доказательства единственности решения задачи (как регулярного, так и обобщенного) достаточно, чтобы кривые, ограничивающие область D , были кусочно гладкими.

ЗАМЕЧАНИЕ 12. Ясно, что если в краевых условиях (4) функции $l_i(x)$ заданы на отрезках $[x_{i*}, 0]$, где $x_{2*} < x_{1*} < \Lambda(x_{2*})$, то рассматриваемая задача остается корректной и в области D' , ограниченной кривыми $y = l_i(x)$ и характеристиками $x = x_{2*}$, $y = l_1(x_{1*})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 13. Из теорем 8 и 9 для решения $u(x, t)$ задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= f(x, t), \\ a_{i1} \frac{\partial u}{\partial t} + a_{i2} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=c_i t} &= 0, \quad i = 1, 2, \\ u(0, 0) &= 0 \end{aligned}$$

($c_1 > 0$, $c_2 < 0$, $|c_i| < 1$, $i = 1, 2$), описывающей колебания участка струны между поршнями в цилиндре с вязкой жидкостью (см. замечание 5), легко следует энергетическое неравенство

$$\int_{c_2 T}^{c_1 T} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \Big|_{t=T} dx \leq C(T) \int \int_{\Delta} |f|^2 dx dt,$$

где $\Delta := \{(x, t): 0 < t < T, c_2 t < x < c_1 t\}$.

ПРИМЕР 5. Покажем, что условие (2), требующее, в частности, чтобы кривые $y = l_i(x)$ не касались характеристик уравнения (3), необходимо для корректности нашей задачи. Пусть уравнение (46) задано в области D_{bad} , ограниченной кривыми $y = -x$, $y = x^2$, $x_* = -0.5$; пусть $\beta_i = 0$, $\varphi_i = 0$, $i = 1, 2$, $\mu_{11} = \mu_{12} = \mu_{21} = 1$, $\mu_{22} = -2x$. Таким образом, выполнены все условия теоремы 8, кроме условия (2), поскольку $l'_2(0) = 0$. Для произвольной непрерывно дифференцируемой функции $g(y)$, заданной на интервале $(0, |x_*|)$, удовлетворяющей условию $g(y) = g(y^2)$, $y \in (0, |x_*|)$ и не равной тождественно нулю, имеем $g'(y) = g'(y^2)2y$; поэтому для всех $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} a_k &:= \int_{|x_*|^{2^{k+1}}}^{|x_*|^{2^k}} [g'(y)]^2 y dy = \int_{|x_*|^{2^{k+1}}}^{|x_*|^{2^k}} [g'(y^2)]^2 \cdot 4y^2 \cdot y dy \\ &= \int_{|x_*|^{2^{k+2}}}^{|x_*|^{2^{k+1}}} [g'(z)]^2 \cdot 2z dz = 2a_{k+1}. \end{aligned}$$

В силу σ -аддитивности интеграла Лебега отсюда следует, что

$$\int_0^{|x_*|} [g'(y)]^2 y dy = \sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty.$$

Пусть $f(x) := g(-x)$, $x \in (x_*, 0)$. Тогда функция $u(x, y) := f(x) + g(y)$ принадлежит $W_2^1(D_{bad})$, является решением уравнения (46) и удовлетворяет граничным условиям (4), но при этом она не имеет предела при $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

Следующий пример доказывает необходимость (измененного по сравнению с регулярным случаем) условия b) теоремы 8 для корректности рассматриваемой задачи.

ПРИМЕР 6. Пусть в области $D = \{(x, y): x_* < x < 0, -l_2x < y < -l_1x\}$, $0 < l_2 < l_1 < \infty$, задано уравнение (46), пусть $u_0 = 0$, $\beta_i(x) = \varphi_i(x) = 0$, $i = 1, 2$, μ_{ij} – константы, не равные нулю, и выполнены все условия теоремы 8, кроме условия b). На интервале $(0, l_1|x_*|)$ рассмотрим непрерывно дифференцируемую функцию $g(z)$, удовлетворяющую условию

$$g(z) = k \cdot g\left(\frac{z}{l}\right), \quad k := \left| \frac{\mu_{11}\mu_{22}}{\mu_{12}\mu_{21}} \right|, \quad l := \frac{l_1}{l_2},$$

и не равную тождественно нулю.

Пусть $k > 1/l$ (условие b) нарушено). Поскольку

$$\begin{aligned} a_k &:= \int_{\frac{l_1|x_*|}{l^{k+1}}}^{\frac{l_1|x_*|}{l^k}} [g'(z)]^2 z dz = k^2 \int_{\frac{l_1|x_*|}{l^{k+1}}}^{\frac{l_1|x_*|}{l^k}} \left[g'\left(\frac{z}{l}\right) \right]^2 z dz \\ &= k^2 l^2 \int_{\frac{l_1|x_*|}{l^{k+2}}}^{\frac{l_1|x_*|}{l^{k+1}}} [g'(t)]^2 t dt = k^2 l^2 a_{k+1}, \end{aligned}$$

то сходится интеграл

$$\int_0^{l_1|x_*|} [g'(z)]^2 z dz = \sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty.$$

Пусть $f(\tilde{x}) := -\frac{\mu_{22}}{\mu_{21}} g(-l_2 \tilde{x})$, $\tilde{x} \in (x_*, 0)$. Тогда, как легко проверить, кроме тождественного нуля, функция

$$u(x, y) := \int_0^x f(\tilde{x}) d\tilde{x} + \int_0^y g(z) dz \neq 0$$

также принадлежит $W_2^1(D)$, является решением уравнения (46) и удовлетворяет условиям (4), (48). Таким образом, без условия b) такая задача некорректна, ибо нет единственности решения.

Список литературы

1. *Picard E.* Lecons sur quelques types simples d'equations aux dérivés partielles avec des applications a la physique mathématique. Paris: Gauthier-Villars, 1950.
2. *Szmydt Z.* Sur un nouveau type de problèmes pour un système d'équations différentielles hyperboliques du second ordre à deux variables indépendantes // Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Math. Astronom. Phys. 1956. V. 4. № 2. P. 67–72.
3. *Szmydt Z.* Sur une généralisation des problèmes classiques concernant un système d'équations différentielles hyperboliques du second ordre à deux variables indépendantes // Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Math. Astronom. Phys. 1956. V. 4. № 9. P. 579–584.
4. *Szmydt Z.* Sur le problème concernant les équations différentielles hyperboliques du second ordre // Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Math. Astronom. Phys. 1957. V. 5. № 2. P. 571–575.
5. *Szmydt Z.* Sur l'existence de solutions de certains nouveaux problèmes pour un système d'équations différentielles hyperboliques du second ordre à deux variables indépendantes // Ann. Polon. Math. 1957. V. 4. P. 40–60.
6. *Szmydt Z.* Sur l'existence d'une solution unique de certains problèmes pour un système d'équations différentielles hyperboliques du second ordre à deux variables indépendantes // Ann. Polon. Math. 1958. V. 5. P. 165–182.
7. *Lasota A.* Sur une généralisation d'un problème de Z. Szmydt pour l'équation $u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$ // Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Math. Astronom. Phys. 1957. V. 5. № 1. P. 15–18.
8. *Aziz A. K., Diaz J. B.* On a Mixed Boundary-Value Problem for Linear Hyperbolic Partial Differential Equations in Two Independent Variables // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1962. V. 10. № 1. P. 1–28.
9. *Мельник З. О.* Пример неклассической граничной задачи для уравнения колебаний струны // Укр. матем. журн. 1980. Т. 32. № 5. С. 671–674.
10. *Харибегашвили С. С.* Об одной граничной задаче для гиперболического уравнения второго порядка // ДАН СССР. 1985. Т. 280. № 6. С. 1313–1316.
11. *Соболев С. Л.* Об одной новой задаче математической физики // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1954. Т. 18. № 1. С. 3–50.
12. *Троицкая С. Д.* О не почти периодичности решений задачи С. Л. Соболева в областях с ребрами // Изв. АН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 4. С. 97–124.

13. *Lee Da-Tsin, Yu-Wen-Tzu.* Boundary value problems for the first-order quasi linear hyperbolic systems // J. of Differential Equations. 1981. V. 41. № 1. P. 1–26.
14. *Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуи Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике. М.: Наука, 1989.
15. *Троицкая С. Д.* Об одной корректной краевой задаче для гиперболических уравнений с двумя независимыми переменными // УМН. 1995. Т. 50. № 4. С. 124–125.
16. *Троицкая С. Д.* О зависимости спектра задачи С. Л. Соболева от геометрии области // Избранные вопросы алгебры, геометрии и дискретной математики. М.: Изд-во МГУ, 1992. С. 138–147.
17. *Троицкая С. Д.* О спектре одной задачи С. Л. Соболева // УМН. 1992. Т. 47. № 5. С. 191–192.
18. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наук. думка, 1965.
19. *Ralston J. V.* On stationary models in inviscid rotating fluids // J. of Math. Anal and Appl. 1973. V. 44. № 2. P. 366–383.
20. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.
21. *Соболев С. Л.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.
22. *Кондратьев В. А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Моск. матем. об-ва. 1967. Т. 16. С. 209–292.

Поступило в редакцию
24.XI.1995