Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Н. Кудрявцев, Наилучшая точность восстановления функций конечной гладкости по их значениям в заданном числе точек, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1998, том 62, выпуск 1, 21–58

DOI: <https://doi.org/10.4213/im182>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 05:39:51

УДК 517.5

С. Н. Кудрявцев

**Наилучшая точность восстановления
функций конечной гладкости
по их значениям в заданном числе точек**

В работе найден порядок наилучшей точности восстановления функций классов Никольского и Бесова вместе с их производными до определенного порядка по значениям функций в заданном числе точек.

Библиография: 4 наименования.

Введение

В статье описана слабая асимптотика поведения в зависимости от n величины наилучшей точности восстановления по норме пространства Соболева функций классов Никольского и Бесова с помощью алгоритмов, восстанавливающих функции по их значениям в n точках.

Для классов функций на кубе I^d с заданной мажорантой модулей непрерывности в метрике $L_p(I^d)$ производных старших порядков, в частности классов Никольского дробной гладкости, в [1] была установлена слабая асимптотика поведения в зависимости от n величины наилучшей точности восстановления по норме пространства Соболева $W_q^m(I^d)$ с помощью алгоритмов, восстанавливающих функции по их значениям в n точках. Без затруднений эти результаты распространяются на функциональные классы Бесова дробной гладкости.

Однако применявшиеся в [1] для вывода соответствующих оценок технические средства не позволяют получить описание упомянутой величины для классов Никольского и Бесова целой гладкости. Используемые в настоящей работе технические средства дают возможность найти слабую асимптотику интересующей нас величины для функциональных классов Никольского и Бесова как целой, так и дробной гладкости, причем при несколько более слабых условиях на гладкость в случае $q > p$, чем в [1].

Работа состоит из введения и двух параграфов, в первом из которых содержатся вспомогательные утверждения, а во втором – основные результаты.

§ 1. Вспомогательные утверждения

1.1. В этом пункте введем обозначения и приведем факты, которые понадобятся в дальнейшем.

Для $d \in \mathbb{N}$ в пространстве $\mathbb{R}^d$ фиксируем норму

$$\|x\| = \max_{j=1,\dots,d} |x_j|, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

и через B^d обозначим куб

$$B^d = \{x \in \mathbb{R}^d: \|x\| \leq 1\},$$

а через I^d – куб

$$I^d = \{x \in \mathbb{R}^d: 0 < x_j < 1, j = 1, \dots, d\}.$$

Как обычно, через $\mathbb{Z}_+^d$ будем обозначать множество

$$\{\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in \mathbb{Z}^d: \lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, d\},$$

через $\mathbb{Z}_{+l}^d$, $l \in \mathbb{Z}_+$, обозначим множество

$$\{\lambda \in \mathbb{Z}_+^d: |\lambda| \leq l\},$$

где $|\lambda| = \sum_{j=1}^d \lambda_j$, а через $\mathbb{Z}_{+l}^{'d}$ – множество

$$\{\lambda \in \mathbb{Z}_+^d: |\lambda| = l\}.$$

Для $l \in \mathbb{Z}_+$, $d \in \mathbb{N}$ через $\mathcal{P}^{l,d}$ обозначим пространство вещественных полиномов степени не выше l от d переменных, т.е. пространство всех функций $f: \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ вида

$$f(x) = \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}_{+l}^d} a_\lambda x^\lambda,$$

где $a_\lambda \in \mathbb{R}$, $x^\lambda = x_1^{\lambda_1} \dots x_d^{\lambda_d}$, $\lambda \in \mathbb{Z}_{+l}^d$, а для области $D \subset \mathbb{R}^d$ через $\mathcal{P}^{l,d}(D)$ обозначим пространство функций f , определенных на D , для каждой из которых существует $g \in \mathcal{P}^{l,d}$ такой, что $f = g|_D$.

Для измеримого по Лебегу множества $D \subset \mathbb{R}^d$ при $1 \leq p \leq \infty$ через $L_p(D)$, как обычно, обозначается пространство всех вещественных измеримых на D функций f , для которых определена норма

$$\|f\|_{L_p(D)} = \begin{cases} \left(\int_D |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \sup_{x \in D} |f(x)|, & p = \infty. \end{cases}$$

Для области $D \subset \mathbb{R}^d$ при $1 \leq p \leq \infty$, $l \in \mathbb{Z}_+$ через $W_p^l(D)$ обозначается пространство всех функций $f \in L_p(D)$, для которых для каждого $\lambda \in \mathbb{Z}_{+l}^d$ обобщенная производная $\mathcal{D}^\lambda f = \frac{\mathcal{D}^{|\lambda|} f}{\mathcal{D}x_1^{\lambda_1} \dots \mathcal{D}x_d^{\lambda_d}}$ принадлежит $L_p(D)$, с нормой

$$\|f\|_{W_p^l(D)} = \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}_{+l}^d} \|\mathcal{D}^\lambda f\|_{L_p(D)}.$$

Для области $D \subset \mathbb{R}^d$ и вектора $h \in \mathbb{R}^d$, как обычно, через D_h обозначим множество

$$D_h = \{x \in D: x + th \in D \quad \forall t \in [0, 1]\}.$$

Для функции f , заданной в области $D \subset \mathbb{R}^d$, определим в D_h ее разность $\Delta_h f$ с шагом $h \in \mathbb{R}^d$ равенством

$$(\Delta_h f)(x) = f(x + h) - f(x), \quad x \in D_h,$$

а при $m \in \mathbb{N}$: $m > 1$, определим в D_{mh} ее m -ю разность $\Delta_h^m f$ с шагом h , полагая

$$(\Delta_h^m f)(x) = (\Delta_h(\Delta_h^{m-1} f))(x), \quad x \in D_{mh},$$

при этом $\Delta_h^0 f = f$. Как известно (см. [2]),

$$(\Delta_h^m f)(\cdot) = \sum_{j=0}^m C_m^j (-1)^{m-j} f(\cdot + jh).$$

Отметим, что для $l \in \mathbb{Z}_+$, $d \in \mathbb{N}$ для $f \in \mathcal{P}^{l,d}$ и $h \in \mathbb{R}^d$ справедливо включение $\Delta_h f \in \mathcal{P}^{l-1,d}$, где $\mathcal{P}^{l-1,d}$ – множество, состоящее из единственного элемента – функции, тождественно равной нулю в $\mathbb{R}^d$. Отсюда вытекает, что при $l, d \in \mathbb{N}$ для любой области $D \subset \mathbb{R}^d$ для $f \in \mathcal{P}^{l-1,d}(D)$ и $h \in \mathbb{R}^d$ верно равенство

$$(\Delta_h^l f)(x) = 0 \quad \text{при } x \in D_{lh}. \quad (1.1.1)$$

Пусть D – область в $\mathbb{R}^d$ и $1 \leq p \leq \infty$. Для $f \in L_p(D)$, $t > 0$ при $m \in \mathbb{N}$ обозначим через

$$\Omega^m(f, t)_{L_p(D)} = \sup_{h \in tB^d} \|\Delta_h^m f\|_{L_p(D_{mh})}.$$

Для области $D \subset \mathbb{R}^d$ при $\alpha > 0$ и $1 \leq p \leq \infty$, полагая $l = [\alpha]$ (целая часть α), если $\alpha \notin \mathbb{Z}$, и $l = \alpha - 1$, если $\alpha \in \mathbb{Z}$, обозначим через $\mathcal{H}_p^\alpha(D)$ множество функций $f \in W_p^l(D)$, для которых выполняется неравенство

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{Z}_{+l}^d} \sup_{t > 0} t^{-(\alpha-l)} \Omega^m(\mathcal{D}^\lambda f, t)_{L_p(D)} \leq 1,$$

где $m = 1$, если $\alpha \notin \mathbb{Z}$, $m = 2$, если $\alpha \in \mathbb{Z}$.

Для области $D \subset \mathbb{R}^d$ при $\alpha > 0$, $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq \theta < \infty$, полагая $l = [\alpha]$, если $\alpha \notin \mathbb{Z}$, и $l = \alpha - 1$, если $\alpha \in \mathbb{Z}$, через $\mathcal{B}_{p,\theta}^\alpha(D)$ обозначим множество всех функций $f \in W_p^l(D)$, для которых соблюдается неравенство

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{Z}_{+l}^d} \left(\int_0^\infty t^{-1-\theta(\alpha-l)} (\Omega^m(\mathcal{D}^\lambda f, t)_{L_p(D)})^\theta dt \right)^{1/\theta} \leq 1,$$

где $m = 1$, если $\alpha \notin \mathbb{Z}$, и $m = 2$, если $\alpha \in \mathbb{Z}$.

В этих обозначениях, принимая во внимание то обстоятельство, что для $f \in \mathcal{B}_{p,\theta}^\alpha(D)$ при $\lambda \in \mathbb{Z}_{+l}^d$, $m = 1$, если $\alpha \notin \mathbb{Z}$, $m = 2$, если $\alpha \in \mathbb{Z}$, при $t > 0$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} t^{-(\alpha-l)} \Omega^m(\mathcal{D}^\lambda f, t)_{L_p(D)} &= (t^{-1-\theta(\alpha-l)} (\Omega^m(\mathcal{D}^\lambda f, t)_{L_p(D)})^\theta t)^{1/\theta} \\ &\leq \left(2^{1+\theta(\alpha-l)} \int_t^{2t} \tau^{-1-\theta(\alpha-l)} (\Omega^m(\mathcal{D}^\lambda f, \tau)_{L_p(D)})^\theta d\tau \right)^{1/\theta} \\ &\leq 2^{1/\theta+\alpha-l} \left(\int_0^\infty \tau^{-1-\theta(\alpha-l)} (\Omega^m(\mathcal{D}^\lambda f, \tau)_{L_p(D)})^\theta d\tau \right)^{1/\theta}, \end{aligned}$$

закключаем, что

$$\mathcal{B}_{p,\theta}^\alpha(D) \subset 2^{1/\theta+\alpha-l} \mathcal{H}_p^\alpha(D). \quad (1.1.2)$$

В завершение этого пункта приведем лемму 1.1.1, доказательство которой можно найти в [1].

ЛЕММА 1.1.1. Пусть $l \in \mathbb{Z}_+$, $d \in \mathbb{N}$, $1 \leq p, q \leq \infty$, $\lambda \in \mathbb{Z}_{+l}^d$ и $\rho, \sigma > 0$. Тогда существует константа $c_1(l, d, \lambda, \rho, \sigma) > 0$ такая, что для любых измеримых по Лебегу множеств $D, Q \subset \mathbb{R}^d$, для которых можно найти $\delta > 0$ и $x^0 \in \mathbb{R}^d$ такие, что $\sup_{x \in D} \|x - x^0\| \leq \rho\delta$ и $x^0 + \sigma\delta I^d \subset Q$, для любого полинома $f \in \mathcal{P}^{l,d}$ выполняется неравенство

$$\|\mathcal{D}^\lambda f\|_{L_q(D)} \leq c_1 \delta^{-|\lambda|-d/p+d/q} \|f\|_{L_p(Q)}. \quad (1.1.3)$$

1.2. В этом пункте мы введем некоторую естественную норму в факторпространстве пространства $L_p(D)$ по подпространству $\mathcal{P}^{l-1,d}(D)$ в ограниченной области D и покажем, что при некоторых условиях на область D полученное нормированное пространство является полным, что приводит к нужному для нас следствию.

Но прежде обозначим через $C^\infty(D)$ пространство вещественных бесконечно дифференцируемых функций в области $D \subset \mathbb{R}^d$, а через $C_0^\infty(D)$ – пространство функций $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, для которых $\text{supp } \phi \subset D$, и докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1.2.1. Пусть $l, d \in \mathbb{N}$, D – ограниченная область в $\mathbb{R}^d$ и $f \in L_1(D)$. Тогда если для любой функции $\phi \in C_0^\infty(D)$ почти для всех $x \in B^d$ выполняется равенство

$$\int_{D_{lx}} \Delta_x^l f(y) \phi(y) dy = 0,$$

то $f \in \mathcal{D}^{l-1,d}(D)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем функцию $\phi \in C_0^\infty(D)$. Тогда поскольку носитель $\text{supp } \phi$ суть компакт, лежащий в области D , то существует $\delta > 0$ такое, что для любого $y \in \text{supp } \phi$ будет $y + l\delta B^d \subset D$, а значит, для $x \in \delta B^d$ и $y \in \text{supp } \phi$ при $t \in [0, 1]$ имеем $y + tlx \in y + l\delta B^d \subset D$, т.е. $y \in D_{lx}$.

Отсюда вытекает, что для $x \in \delta B^d$ при $k = 0, \dots, l$ справедливы включения $kx + \text{supp } \phi \subset kx + D_{lx} \subset D$.

Из условий теоремы, принимая во внимание приведенные включения, получаем, что почти для всех $x \in \delta B^d$ соблюдаются равенства

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{D_{lx}} \Delta_x^l f(y) \phi(y) dy = \int_{\text{supp } \phi} \Delta_x^l f(y) \phi(y) dy \\ &= \sum_{k=0}^l C_l^k (-1)^{l-k} \int_{\text{supp } \phi} f(y + kx) \phi(y) dy \\ &= \sum_{k=0}^l C_l^k (-1)^{l-k} \int_{kx + \text{supp } \phi} f(z) \phi(z - kx) dz \\ &= \sum_{k=0}^l C_l^k (-1)^{l-k} \int_D f(z) \phi(z - kx) dz \\ &= \int_D f(z) \Delta_{-x}^l \phi(z) dz. \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

А так как $\int_D f(z) \Delta_{-x}^l \phi(z) dz \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, то равенства (1.2.1) имеют место для любого $x \in \delta B^d$. Поэтому, дифференцируя (1.2.1) в точке $x = 0$, находим, что для $\lambda \in \mathbb{Z}_{+l}^d$ справедливо равенство

$$0 = \int_D f(z) \frac{\mathcal{D}^{|\lambda|}}{\mathcal{D}x^\lambda} (\Delta_{-x}^l \phi(z)) \Big|_{x=0} dz. \tag{1.2.2}$$

Пользуясь формулой Ньютона–Лейбница, индукцией относительно l нетрудно показать, что для $\phi \in C_0^\infty(D)$ при $x, y \in \mathbb{R}^d$ выполняется равенство

$$(\Delta_x^l \phi)(y) = \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_{+l}^d} \left(\frac{l!}{\kappa!} \right) x^\kappa \int_{I^l} \mathcal{D}^\kappa \phi(y + (t_1 + \dots + t_l)x) dt. \tag{1.2.3}$$

Применяя (1.2.3), легко вычислить, что при $\lambda \in \mathbb{Z}'_{+l}{}^d$ имеет место равенство

$$\left. \frac{\mathcal{D}^{|\lambda|}}{\mathcal{D}x^\lambda} (\Delta_{-x}^l \phi(z)) \right|_{x=0} = (-1)^l l! \mathcal{D}^\lambda \phi(z). \quad (1.2.4)$$

Соединяя (1.2.2) с (1.2.4), заключаем, что для $\phi \in C_0^\infty(D)$ при $\lambda \in \mathbb{Z}'_{+l}{}^d$ соблюдается равенство

$$\int_D f(x) \mathcal{D}^\lambda \phi(x) dx = 0. \quad (1.2.5)$$

Теперь фиксируем неотрицательную функцию $w \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, для которой $\text{supp } w \subset B^d$ и $\int_{\mathbb{R}^d} w(x) dx = 1$, и построим последовательность функций $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$, полагая для $x \in \mathbb{R}^d$

$$f_n(x) = \int_D f(y) w_n(x-y) dy,$$

где $w_n(z) = n^d w(nz)$.

Как показано в [2], последовательность $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ сходится в $L_1(D)$ к f , и при $\lambda \in \mathbb{Z}'_{+l}{}^d$ для $n \in \mathbb{N}$ и $x \in \mathbb{R}^d$ имеют место равенства

$$\mathcal{D}^\lambda f_n(x) = \int_D f(y) \frac{\mathcal{D}^{|\lambda|}}{\mathcal{D}x^\lambda} w_n(x-y) dy = (-1)^{|\lambda|} \int_D f(y) \frac{\mathcal{D}^{|\lambda|}}{\mathcal{D}y^\lambda} w_n(x-y) dy. \quad (1.2.6)$$

Учитывая, что носитель $w_n(x-\cdot)$ лежит в $x+n^{-1}B^d$, нетрудно видеть, что для любой области G , замыкание которой лежит в D , при достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ для $x \in G$ $\text{supp } w_n(x-\cdot) \subset D$, т.е. $w_n(x-\cdot) \in C_0^\infty(D)$.

Поэтому в силу (1.2.5) и (1.2.6) заключаем, что для любой области G , замыкание которой лежит в D , при достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ для $x \in G$ и $\lambda \in \mathbb{Z}'_{+l}{}^d$ выполняется равенство

$$\mathcal{D}^\lambda f_n(x) = 0. \quad (1.2.7)$$

Принимая во внимание, что для $n \in \mathbb{N}$ функция f_n принадлежит $C^\infty(\mathbb{R}^d)$, в силу формулы Тейлора и связности G из (1.2.7) вытекает, что для любой области G , замыкание которой лежит в D , при достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ справедливо включение $f_n|_G \in \mathcal{P}^{l-1,d}(G)$, что в силу замкнутости $\mathcal{P}^{l-1,d}(G)$ в $L_1(G)$ и сходимости $f_n|_G$ к $f|_G$ в $L_1(G)$ влечет включение $f|_G \in \mathcal{P}^{l-1,d}(G)$. Отсюда нетрудно понять, что на самом деле $f \in \mathcal{P}^{l-1,d}(D)$.

Теперь для $l, d \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$ и ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^d$ рассмотрим факторпространство $L_p(D)/\mathcal{P}^{l-1,d}(D)$ пространства $L_p(D)$ по подпространству $\mathcal{P}^{l-1,d}(D)$, т.е. линейное пространство, элементами которого являются множества $\tilde{f}$ вида $\tilde{f} = f + \mathcal{P}^{l-1,d}(D)$, где $f \in L_p(D)$, с операциями

$$\begin{aligned} \tilde{f} + \tilde{g} &= f + g + \mathcal{P}^{l-1,d}(D), & f &\in \tilde{f}, & g &\in \tilde{g}, \\ \alpha \tilde{f} &= \alpha f + \mathcal{P}^{l-1,d}(D), & \alpha &\in \mathbb{R}, & f &\in \tilde{f}. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 1.2.2. Пусть $l, d \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$ и D – ограниченная область в $\mathbb{R}^d$. Тогда функционал

$$N_p^{l,D}(\tilde{f}) = \left(\int_{B^d} \int_{D_{l\xi}} |\Delta_\xi^l f(\eta)|^p d\eta d\xi \right)^{1/p},$$

где $f \in \tilde{f} \in L_p(D)/\mathcal{D}^{l-1,d}(D)$, является нормой на пространстве $L_p(D)/\mathcal{D}^{l-1,d}(D)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала проверим корректность определения функционала $N_p^{l,D}$. Для этого заметим, что для $f \in L_p(D)$ при $k = 0, \dots, l$ функция $f(\eta + k\xi)$, а следовательно, и $(\Delta_\xi^l f)(\eta)$, принадлежит $L_p(E^l(D))$, где

$$E^l(D) = \{(\xi, \eta) : \xi \in B^d, \eta \in D_{l\xi}\}.$$

Поэтому в силу теоремы Фубини правая часть равенства, задающего функционал $N_p^{l,D}$, определена.

Чтобы убедиться в том, что значение $N_p^{l,D}(\tilde{f})$ не зависит от выбора $f \in \tilde{f}$, достаточно обратиться к (1.1.1).

Свойства нормы $N_p^{l,D}(\alpha\tilde{f}) = |\alpha|N_p^{l,D}(\tilde{f})$ и $N_p^{l,D}(\tilde{f} + \tilde{g}) \leq N_p^{l,D}(\tilde{f}) + N_p^{l,D}(\tilde{g})$ являются следствием линейности оператора l -й разности и соответствующих свойств нормы в пространстве $L_p(E^l(D))$.

Ясно, что $N_p^{l,D}(\tilde{f}) \geq 0$. Если же $N_p^{l,D}(\tilde{f}) = 0$, то для $f \in \tilde{f}$ имеем

$$\int_{E^l(D)} |\Delta_\xi^l f(\eta)|^p d\xi d\eta = 0.$$

Поэтому почти для всех $(\xi, \eta) \in E^l(D)$ будет $\Delta_\xi^l f(\eta) = 0$, и, следовательно, почти для всех $\xi \in B^d$ для почти всех $\eta \in D_{l\xi}$ верно равенство $\Delta_\xi^l f(\eta) = 0$. Но тогда для любой функции $\phi \in C_0^\infty(D)$ почти для всех $\xi \in B^d$ выполняется равенство

$$\int_{D_{l\xi}} \Delta_\xi^l f(\eta) \phi(\eta) d\eta = 0.$$

Отсюда на основании теоремы 1.2.1 заключаем, что $f \in \mathcal{D}^{l-1,d}(D)$, т.е. $\tilde{f} = \mathcal{D}^{l-1,d}(D)$.

Прежде чем формулировать теорему 1.2.3, введем следующие обозначения. Для области $D \subset \mathbb{R}^d$ и $x \in D$ обозначим

$$G(D, x) = \{y \in \mathbb{R}^d : x + ty \in D \quad \forall t \in [0, 1]\},$$

а при $l \in \mathbb{N}$ положим

$$E^l(D, x) = \{y \in B^d : x + tly \in D \quad \forall t \in [0, 1]\}.$$

Легко понять, что для ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^d$ при $l \in \mathbb{N}$ существует константа $\tau^l(D) > 0$ такая, что для $x \in D$ верно включение

$$\tau^l(D)G(D, x) \subset E^l(D, x). \quad (1.2.8)$$

Обозначим еще для области $D \subset \mathbb{R}^d$ и $x \in D$ при $l \in \mathbb{N}$ и $k = 1, \dots, l$

$$F_k^l(D, x) = \{y \in \mathbb{R}^d : (x - y)/k \in B^d, y + tl(x - y)/k \in D \quad \forall t \in [0, 1]\}.$$

Теперь мы можем сформулировать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1.2.3. Пусть $l, d \in \mathbb{N}$, $1 < p < \infty$ и D – ограниченная область в $\mathbb{R}^d$, обладающая следующими свойствами:

1) существует константа $\sigma > 0$ такая, что для любого $x \in D$ имеет место неравенство

$$\text{mes } G(D, x) \geq \sigma; \quad (1.2.9)$$

2) при $k = 1, \dots, l$ отображение $F_k^l(D, \cdot)$, которое каждой точке $x \in D$ ставит в соответствие измеримое множество $F_k^l(D, x)$, равномерно непрерывно на D в том смысле, что для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для $x, x' \in D$ таких, что $\|x - x'\| < \delta$, выполняется неравенство

$$\text{mes}(F_k^l(D, x) \Delta F_k^l(D, x')) < \epsilon. \quad (1.2.10)$$

Тогда пространство $L_p(D)/\mathcal{P}^{l-1,d}(D)$ с фиксированной в нем нормой $N_p^{l,D}$ является полным нормированным пространством.

Для доказательства теоремы 1.2.3 понадобится ряд приводимых ниже фактов.

ЛЕММА 1.2.4. Пусть $l, d \in \mathbb{N}$ и D – ограниченная область в $\mathbb{R}^d$, для которой соблюдается условие п. 1) теоремы 1.2.3. Пусть еще функция $g \in C(B^d)$ такова, что $g(x) \neq 0$ для $x \in B^d$. Тогда оператор $T_{g,0}^{l,D}$, определяемый при $g \in C(B^d)$ для $h \in L_1(D)$ равенством

$$(T_{g,0}^{l,D}h)(x) = h(x) \int_{E^l(D,x)} g(y) dy,$$

при $1 \leq q \leq \infty$ является линейным гомеоморфизмом пространства $L_q(D)$ на себя.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства достаточно заметить, что функция $\psi(x) = \int_{E^l(D,x)} g(y) dy$ вследствие непрерывности g на компакте B^d измерима и ограничена в D , а в силу (1.2.9) и (1.2.8) для $x \in D$

$$|\psi(x)| \geq \sigma(\tau^l(D))^d \min_{y \in B^d} |g(y)| > 0.$$

ЛЕММА 1.2.5. Пусть $l, d \in \mathbb{N}$ и D – ограниченная область в $\mathbb{R}^d$, для которой выполняются условия п. 2) теоремы 1.2.3. Пусть еще $g \in C(B^d)$. Тогда для $k = 1, \dots, l$ отображение $T_{g,k}^{l,D}$, определяемое для $h \in L_1(D)$ равенством

$$(T_{g,k}^{l,D}h)(x) = \int_{F_k^l(D,x)} g\left(\frac{x-y}{k}\right) h(y) dy,$$

при $1 < q \leq \infty$ является компактным линейным оператором в пространстве $L_q(D)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего для $h \in L_q(D)$, $\|h\|_{L_q(D)} \leq 1$, и $x \in D$ имеем

$$\begin{aligned} |(T_{g,k}^{l,D}h)(x)| &\leq \int_{F_k^l(D,x)} \left| g\left(\frac{x-y}{k}\right) \right| |h(y)| dy \\ &\leq \|g\|_{C(B^d)} \int_{F_k^l(D,x)} |h(y)| dy \leq \|g\|_{C(B^d)} \int_D |h(y)| dy \\ &\leq \|g\|_{C(B^d)} \|h\|_{L_q(D)} (\text{mes } D)^{1/q'} \leq \|g\|_{C(B^d)} (\text{mes } D)^{1/q'}, \end{aligned}$$

где $q' = q/(q-1)$.

Далее, пусть $\epsilon > 0$. В силу равномерной непрерывности g на B^d выберем $\delta > 0$ так, чтобы для $z, z' \in B^d$ таких, что $\|z - z'\| < \delta$, выполнялось неравенство $|g(z) - g(z')| < \epsilon$. Тогда для $x, x' \in D$ таких, что $\|x - x'\| < \delta$, и $y \in F_k^l(D, x) \cap F_k^l(D, x')$ будет $(x-y)/k \in B^d$, $(x'-y)/k \in B^d$ и $\|(x-y)/k - (x'-y)/k\| = k^{-1}\|x - x'\| < \delta$, а следовательно,

$$|g((x-y)/k) - g((x'-y)/k)| \leq \epsilon. \quad (1.2.11)$$

Возьмем $\delta' > 0$, для которого при $x, x' \in D$ таких, что $\|x - x'\| < \delta'$, соблюдается (1.2.10), и положим $\delta_0 = \min(\delta, \delta')$. Тогда для $x, x' \in D$ таких, что $\|x - x'\| < \delta_0$, для $h \in L_q(D)$, $\|h\|_{L_q(D)} \leq 1$, получаем

$$\begin{aligned} |(T_{g,k}^{l,D}h)(x) - (T_{g,k}^{l,D}h)(x')| &= \left| \int_{F_k^l(D,x) \cap F_k^l(D,x')} g\left(\frac{x-y}{k}\right) h(y) dy \right. \\ &\quad + \int_{F_k^l(D,x) \setminus F_k^l(D,x')} g\left(\frac{x-y}{k}\right) h(y) dy \\ &\quad - \int_{F_k^l(D,x) \cap F_k^l(D,x')} g\left(\frac{x'-y}{k}\right) h(y) dy \\ &\quad \left. - \int_{F_k^l(D,x') \setminus F_k^l(D,x)} g\left(\frac{x'-y}{k}\right) h(y) dy \right| \\ &\leq \left| \int_{F_k^l(D,x) \cap F_k^l(D,x')} \left(g\left(\frac{x-y}{k}\right) - g\left(\frac{x'-y}{k}\right) \right) h(y) dy \right| \\ &\quad + \left| \int_{F_k^l(D,x) \setminus F_k^l(D,x')} g\left(\frac{x-y}{k}\right) h(y) dy \right| \\ &\quad + \left| \int_{F_k^l(D,x') \setminus F_k^l(D,x)} g\left(\frac{x'-y}{k}\right) h(y) dy \right|. \end{aligned} \quad (1.2.12)$$

Оценивая первое слагаемое в правой части (1.2.12), ввиду (1.2.11) находим, что

$$\begin{aligned} &\left| \int_{F_k^l(D,x) \cap F_k^l(D,x')} \left(g\left(\frac{x-y}{k}\right) - g\left(\frac{x'-y}{k}\right) \right) h(y) dy \right| \\ &\leq \int_{F_k^l(D,x) \cap F_k^l(D,x')} \left| g\left(\frac{x-y}{k}\right) - g\left(\frac{x'-y}{k}\right) \right| |h(y)| dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \epsilon \int_D |h(y)| dy \leq \epsilon \|h\|_{L_q(D)} (\text{mes } D)^{1/q'} \\
&\leq \epsilon (\text{mes } D)^{1/q'}.
\end{aligned} \tag{1.2.13}$$

Для оценки второго слагаемого в правой части (1.2.12) воспользуемся соотношением (1.2.10); получим

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{F_k^l(D, x) \setminus F_k^l(D, x')} g\left(\frac{x-y}{k}\right) h(y) dy \right| \\
&\leq \|g\|_{C(B^d)} \int_{F_k^l(D, x) \setminus F_k^l(D, x')} |h(y)| dy \\
&\leq \|g\|_{C(B^d)} \|h\|_{L_q(F_k^l(D, x) \setminus F_k^l(D, x'))} (\text{mes}(F_k^l(D, x) \setminus F_k^l(D, x')))^{1/q'} \\
&\leq \|g\|_{C(B^d)} \|h\|_{L_q(D)} (\text{mes}(F_k^l(D, x) \triangle F_k^l(D, x')))^{1/q'} \\
&< \|g\|_{C(B^d)} \epsilon^{1/q'}.
\end{aligned} \tag{1.2.14}$$

Меняя местами x и x' в (1.2.14), получаем оценку третьего слагаемого в правой части (1.2.12).

Соединяя (1.2.12)–(1.2.14), видим, что для $x, x' \in D$, $\|x - x'\| < \delta_0$, для $h \in L_q(D)$, $\|h\|_{L_q(D)} \leq 1$, выполняется неравенство

$$|(T_{g,k}^{l,D}h)(x) - (T_{g,k}^{l,D}h)(x')| < \epsilon (\text{mes } D)^{1/q'} + 2\|g\|_{C(B^d)} \epsilon^{1/q'}.$$

Таким образом, заключаем, что $\{T_{g,k}^{l,D}h : h \in L_q(D), \|h\|_{L_q(D)} \leq 1\}$ – равномерно ограниченное равностепенно непрерывное семейство функций в ограниченной области D , и, значит, вполне ограниченное подмножество пространства $L_\infty(D)$, а в силу непрерывности вложения $L_\infty(D) \hookrightarrow L_q(D)$ – вполне ограниченное подмножество $L_q(D)$.

Для дальнейшего изложения напомним некоторые факты из функционального анализа и получим необходимые нам следствия.

Для банахова пространства X над $\mathbb{R}$ через X^* , как обычно, обозначается пространство непрерывных линейных функционалов на X . Для линейного подпространства M банахова пространства X через $M^\perp$ обозначается множество

$$M^\perp = \{x^* \in X^* : \langle x^*, x \rangle = 0 \quad \forall x \in M\}.$$

Для замкнутого подпространства M банахова пространства X его коразмерностью $\text{codim } M$ называется величина $\text{codim } M = \dim M^\perp$.

Как известно (см., например, [3]), справедлива

ЛЕММА 1.2.6. Пусть X – банахово пространство, $A : X \rightarrow X$ – линейный гомеоморфизм и $B : X \rightarrow X$ – компактный оператор. Тогда образ $\text{Im}(A+B)$ – замкнутое подпространство в X и его коразмерность конечна.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $l, d \in \mathbb{N}$, $1 < q \leq \infty$ и D – ограниченная область в $\mathbb{R}^d$, удовлетворяющая условиям пп. 1) и 2) теоремы 1.2.3. Пусть еще функция $g \in C(B^d)$ такова, что $g(x) \neq 0$ при $x \in B^d$. Тогда для оператора $T_g^{l,D}: L_q(D) \mapsto L_q(D)$, определяемого при $g \in C(B^d)$ равенством

$$T_g^{l,D} = (-1)^l T_{g,0}^{l,D} + \sum_{k=1}^l C_l^k (-1)^{l-k} k^{-d} T_{g,k}^{l,D},$$

его образ $T_g^{l,D}(L_q(D))$ суть замкнутое подпространство в $L_q(D)$ и коразмерность $T_g^{l,D}(L_q(D))$ конечна. Это утверждение является непосредственным следствием лемм 1.2.4–1.2.6.

ЛЕММА 1.2.7. Пусть X – банахово пространство, M – замкнутое подпространство в X конечной коразмерности и L – подпространство в X (вообще говоря, незамкнутое), для которого $L \setminus M \neq \emptyset$. Тогда $M + L$ – замкнутое подпространство в X и $\text{codim}(M + L) < \text{codim } M$.

Справедливость леммы 1.2.7 можно установить с помощью рассуждений, подобных тем, что проведены при доказательстве леммы 8.1 в [3].

Опираясь на лемму 1.2.7, нетрудно убедиться в том, что верна

ЛЕММА 1.2.8. Пусть X – банахово пространство и $\{M_\alpha \subset X: \alpha \in A\}$ – семейство подпространств, для которого существует $\alpha \in A$ такое, что M_α – замкнутое подпространство в X конечной коразмерности. Тогда существует конечная последовательность $\{\alpha_j \in A: j = 1, \dots, k\}$ такая, что $M = \sum_{j=1}^k M_{\alpha_j}$ – замкнутое подпространство в X конечной коразмерности и для каждого $\alpha \in A$ справедливо включение $M_\alpha \subset M$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $l, d \in \mathbb{N}$, $1 < q \leq \infty$ и D – ограниченная область в $\mathbb{R}^d$, удовлетворяющая условиям пп. 1), 2) теоремы 1.2.3. Тогда существует конечная система функций $\{g_i \in C(B^d): i = 1, \dots, k\}$ такая, что

$$M_q^{l,D} = \sum_{i=1}^k T_{g_i}^{l,D}(L_q(D))$$

суть замкнутое подпространство конечной коразмерности в $L_q(D)$, и для $g \in C(B^d)$ имеет место включение

$$T_g^{l,D}(L_q(D)) \subset M_q^{l,D}.$$

Чтобы проверить правильность этого утверждения, достаточно сопоставить лемму 1.2.8 и следствие из леммы 1.2.6.

ЛЕММА 1.2.9. Пусть X – банахово пространство и $M \subset X$ – замкнутое подпространство конечной коразмерности. Тогда существует конечномерное подпространство $Y \subset X$ такое, что $M + Y = X$, $M \cap Y = 0$, и для каждого $x^* \in X^*$ существует $y^* \in M^\perp$, для которого $\langle x^*, x \rangle = \langle y^*, x \rangle$ при $x \in Y$.

В справедливости леммы легко убедиться, снова обратившись к доказательству леммы 8.1 из [3].

ЛЕММА 1.2.10. Пусть $l, d \in \mathbb{N}$, $1 < q < \infty$ и D – ограниченная область в $\mathbb{R}^d$, для которой соблюдаются условия пп. 1), 2) теоремы 1.2.3. Тогда

$$(M_q^{l,D})^\perp \subset \mathcal{D}^{l-1,d}(D).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала пусть $f \in L_{q'}(D)$. Тогда, как отмечалось выше, при $k = 0, \dots, l$ каждая функция $f(\eta + k\xi)$ такова, что $\Delta_\xi^l f(\eta) \in L_{q'}(E^l(D))$. Поэтому, учитывая, что для $g \in C(B^d)$ и $h \in L_q(D)$ функция $g(\xi)h(\eta)$ принадлежит $L_q(E^l(D))$, делая при $k = 0$ замену переменных $\xi = y$, $\eta = x$, а при $k = 1, \dots, l$ – замену переменных $\xi = (x - y)/k$, $\eta = y$, пользуясь теоремой Фубини, получаем

$$\begin{aligned} \int_{B^d} \int_{D|_t \xi} \Delta_\xi^l f(\eta) g(\xi) h(\eta) d\eta d\xi &= \int_{E^l(D)} \Delta_\xi^l f(\eta) g(\xi) h(\eta) d\xi d\eta \\ &= \sum_{k=0}^l C_l^k (-1)^{l-k} \int \left\{ \begin{array}{c} (\xi, \eta): \xi \in B^d \\ \eta + t\xi \in D \forall t \in [0, 1] \end{array} \right\} f(\eta + k\xi) g(\xi) h(\eta) d\xi d\eta \\ &= (-1)^l \int \left\{ \begin{array}{c} (x, y): y \in B^d \\ x + tl y \in D \forall t \in [0, 1] \end{array} \right\} f(x) g(y) h(x) dx dy \\ &\quad + \sum_{k=1}^l C_l^k (-1)^{l-k} k^{-d} \\ &\quad \times \int \left\{ \begin{array}{c} (x, y): (x-y)/k \in B^d \\ y + tl(x-y)/k \in D \forall t \in [0, 1] \end{array} \right\} f(x) g\left(\frac{x-y}{k}\right) h(y) dx dy \\ &= \int_D f(x) (-1)^l h(x) \int_{E^l(D, x)} g(y) dy dx \\ &\quad + \sum_{k=1}^l \int_D f(x) C_l^k (-1)^{l-k} k^{-d} \int_{F_k^l(D, x)} g\left(\frac{x-y}{k}\right) h(y) dy dx \\ &= \int_D f(x) (T_g^{l,D} h)(x) dx. \end{aligned} \tag{1.2.15}$$

Пусть теперь $f \in (M_q^{l,D})^\perp$. Тогда $f \in L_{q'}(D)$ и для любой функции $\phi \in M_q^{l,D}$ выполняется равенство

$$\int_D f(x) \phi(x) dx = 0.$$

Отсюда в силу следствия из леммы 1.2.8 и равенства (1.2.15) заключаем, что для $g \in C(B^d)$ и $h \in C_0^\infty(D)$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} 0 &= \int_D f(x)(T_g^{l,D}h)(x) dx = \int_{B^d} \int_{D_{l\xi}} \Delta_\xi^l f(\eta) g(\xi) h(\eta) d\eta d\xi \\ &= \int_{B^d} g(\xi) \int_{D_{l\xi}} \Delta_\xi^l f(\eta) h(\eta) d\eta d\xi. \end{aligned}$$

Из последнего равенства ввиду произвольности $g \in C(B^d)$ вытекает, что для $h \in C_0^\infty(D)$ почти для всех $\xi \in B^d$ справедливо равенство

$$\int_{D_{l\xi}} \Delta_\xi^l f(\eta) h(\eta) d\eta = 0.$$

Отсюда на основании теоремы 1.2.1 заключаем, что $f \in \mathcal{D}^{l-1,d}(D)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.2.3. Пусть $\{\tilde{f}_n \in L_p(D)/\mathcal{D}^{l-1,d}(D): n \in \mathbb{N}\}$ – фундаментальная последовательность относительно нормы $N_p^{l,D}$. Тогда, выбирая для каждого $n \in \mathbb{N}$ функцию $f_n \in \tilde{f}_n \subset L_p(D)$, легко видеть, что последовательность функций $\{\Delta_\xi^l f_n(\eta): n \in \mathbb{N}\}$ фундаментальна в $L_p(E^l(D))$, а следовательно, слабо сходится в $L_p(E^l(D))$. Поэтому для любой функции $g \in C(B^d)$ и любой функции $h \in L_{p'}(D)$ существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E^l(D)} \Delta_\xi^l f_n(\eta) g(\xi) h(\eta) d\xi d\eta.$$

Отсюда, принимая во внимание (1.2.15) и следствие из леммы 1.2.8, приходим к выводу, что для любой функции $\phi \in M_{p'}^{l,D}$ существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_D f_n(y) \phi(y) dy$. Учитывая следствие из леммы 1.2.8, в соответствии с леммой 1.2.9 разложим пространство $L_{p'}(D)$ в прямую сумму подпространств $L_{p'}(D) = M_{p'}^{l,D} + Y_{p'}^{l,D}$ и для каждого $n \in \mathbb{N}$ выберем $\pi_n \in (M_{p'}^{l,D})^\perp$ так, чтобы для $\phi \in Y_{p'}^{l,D}$ выполнялось равенство

$$\int_D f_n(y) \phi(y) dy = \int_D \pi_n(y) \phi(y) dy.$$

Тогда в силу леммы 1.2.10 для $F_n = f_n - \pi_n$ верно включение $F_n \in \tilde{f}_n$, и для $\phi \in Y_{p'}^{l,D}$ выполняется равенство $\int_D F_n(y) \phi(y) dy = 0$, а для $\phi \in M_{p'}^{l,D}$ – равенство $\int_D F_n(y) \phi(y) dy = \int_D f_n(y) \phi(y) dy$.

В итоге заключаем, что для каждой функции $\phi \in L_{p'}(D)$ существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_D F_n(y) \phi(y) dy.$$

Отсюда по теореме Банаха–Штейнгауза с учетом отождествления пространства $L_p(D)$ с пространством, сопряженным к $L_{p'}(D)$, существуют $C > 0$ и $f \in L_p(D)$ такие, что

$$\|F_n\|_{L_p(D)} \leq C, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.2.16)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_D F_n(y) \phi(y) dy = \int_D f(y) \phi(y) dy, \quad \phi \in L_{p'}(D).$$

Из последнего равенства вытекает, что для любого измеримого по Лебегу множества $E \subset D$ и любой функции $\phi \in L_{p'}(E)$ имеет место равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E F_n(y) \phi(y) dy = \int_E f(y) \phi(y) dy. \quad (1.2.17)$$

Пусть $\epsilon > 0$. Выберем $n_0 \in \mathbb{N}$ так, чтобы для $n, m > n_0$ соблюдалось неравенство $N_p^{l,D}(\tilde{f}_n - \tilde{f}_m) < \epsilon$, и фиксируем произвольную функцию $g(\xi, \eta) \in L_{p'}(E^l(D))$. Тогда для $n, m > n_0$ будем иметь

$$\begin{aligned} & \int_{E^l(D)} \Delta_\xi^l(F_n - F_m)(\eta) g(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ & \leq \|\Delta_\xi^l(F_n - F_m)(\eta)\|_{L_p(E^l(D))} \|g\|_{L_{p'}(E^l(D))} \\ & = N_p^{l,D}(\tilde{f}_n - \tilde{f}_m) \|g\|_{L_{p'}(E^l(D))} < \epsilon \|g\|_{L_{p'}(E^l(D))}. \end{aligned} \quad (1.2.18)$$

Но

$$\begin{aligned} & \int_{E^l(D)} \Delta_\xi^l(F_n - F_m)(\eta) g(\xi, \eta) d\xi d\eta = \int_{E^l(D)} \Delta_\xi^l F_n(\eta) g(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ & \quad - \int_{E^l(D)} \Delta_\xi^l F_m(\eta) g(\xi, \eta) d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (1.2.19)$$

$$\begin{aligned} & \int_{E^l(D)} \Delta_\xi^l F_n(\eta) g(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ & = \sum_{k=0}^l C_l^k (-1)^{l-k} \int_{B^d} \int_{D_{l\xi}} F_n(\eta + k\xi) g(\xi, \eta) d\eta d\xi \\ & = \sum_{k=0}^l C_l^k (-1)^{l-k} \int_{B^d} \int_{k\xi + D_{l\xi}} F_n(y) g(\xi, y - k\xi) dy d\xi. \end{aligned} \quad (1.2.20)$$

Поскольку для $g(\xi, \eta) \in L_{p'}(E^l(D))$ при $k = 0, \dots, l$ почти для всех $\xi \in B^d$ функция $g(\xi, \cdot - k\xi)$ принадлежит $L_{p'}(k\xi + D_{l\xi})$, то в силу (1.2.17) при $k = 0, \dots, l$ почти для всех $\xi \in B^d$ имеет место равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{k\xi + D_{l\xi}} F_n(y) g(\xi, y - k\xi) dy = \int_{k\xi + D_{l\xi}} f(y) g(\xi, y - k\xi) dy.$$

Кроме того, из неравенства Гёльдера и (1.2.16) вытекает, что при $k = 0, \dots, l$ почти для всех $\xi \in B^d$ верна оценка

$$\begin{aligned} & \left| \int_{k\xi + D_{l\xi}} F_n(y) g(\xi, y - k\xi) dy \right| \\ & \leq \|F_n\|_{L_p(k\xi + D_{l\xi})} \|g(\xi, \cdot - k\xi)\|_{L_{p'}(k\xi + D_{l\xi})} \\ & \leq \|F_n\|_{L_p(D)} \|g(\xi, \cdot)\|_{L_{p'}(D_{l\xi})} \\ & \leq C \left(\int_{D_{l\xi}} |g(\xi, \eta)|^{p'} d\eta \right)^{1/p'} \in L_{p'}(B^d) \subset L_1(B^d), \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Поэтому по теореме Лебега о предельном переходе при $k = 0, \dots, l$ справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B^d} \int_{k\xi + D_{l\xi}} F_n(y) g(\xi, y - k\xi) dy d\xi = \int_{B^d} \int_{k\xi + D_{l\xi}} f(y) g(\xi, y - k\xi) dy d\xi.$$

Отсюда и из (1.2.20) с учетом того, что в (1.2.20) F_n можно заменить на f , вытекает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E^l(D)} \Delta_\xi^l F_n(\eta) g(\xi, \eta) d\xi d\eta = \int_{E^l(D)} \Delta_\xi^l f(\eta) g(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (1.2.21)$$

Принимая во внимание (1.2.21), (1.2.19) и переходя к пределу в (1.2.18) при $n \rightarrow \infty$ в (1.2.18), получим, что при $m > n_0$ для $g \in L_{p'}(E^l(D))$ соблюдается неравенство

$$\int_{E^l(D)} \Delta_\xi^l (f - F_m)(\eta) g(\xi, \eta) d\xi d\eta \leq \epsilon \|g\|_{L_{p'}(E^l(D))},$$

из которого следует, что

$$N_p^{l,D}(\tilde{f} - \tilde{f}_m) = \|\Delta_\xi^l (f - F_m)(\eta)\|_{L_p(E^l(D))} \leq \epsilon,$$

где $f \in \tilde{f} \in L_p(D)/\mathcal{D}^{l-1,d}(D)$.

ТЕОРЕМА 1.2.11. *В условиях теоремы 1.2.3 существует константа $c_2(l, d, p, D) > 0$ такая, что для любой функции $f \in L_p(D)$ существует полином $g \in \mathcal{D}^{l-1,d}$ такой, что*

$$\|f - g\|_{L_p(D)} \leq c_2 \left(\int_{B^d} \int_{D_{l\xi}} |\Delta_\xi^l f(\eta)|^p d\eta d\xi \right)^{1/p}. \quad (1.2.22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема 1.2.11 является следствием теоремы Банаха об обратном операторе, теоремы 1.2.3, а также полноты пространства $L_p(D)/\mathcal{P}^{l-1,d}(D)$ с нормой

$$\|\tilde{f}\|_p^{l,D} = \inf_{g \in \mathcal{P}^{l-1,d}(D)} \|f - g\|_{L_p(D)}, \quad f \in \tilde{f} \in L_p(D)/\mathcal{P}^{l-1,d}(D),$$

и того факта, что $N_p^{l,D}(\tilde{f}) \leq c_3 \|\tilde{f}\|_p^{l,D}$ для $\tilde{f} \in L_p(D)/\mathcal{P}^{l-1,d}(D)$ с некоторой константой $c_3(l, d, p, D) > 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Несложно проверить, что куб I^d удовлетворяет условиям шп. 1), 2) теоремы 1.2.3. Тем самым в (1.2.22) в качестве D можно положить I^d .

Теперь установим некоторые следствия из теоремы 1.2.11.

ТЕОРЕМА 1.2.12. Пусть $l, d \in \mathbb{N}$, $1 < p < \infty$. Тогда существует константа $c_4(l, d, p) > 0$ такая, что для любых $x^0 \in \mathbb{R}^d$ и $\delta > 0$, $Q = x^0 + \delta I^d$, для любой функции $f \in L_p(Q)$ существует полином $g \in \mathcal{P}^{l-1,d}$, для которого выполняется неравенство

$$\|f - g\|_{L_p(Q)} \leq c_4 \delta^{-d/p} \left(\int_{\delta B^d} \int_{Q_{l\xi}} |\Delta_\xi^l f(\eta)|^p d\eta d\xi \right)^{1/p}. \quad (1.2.23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $f \in L_p(Q)$ положим $\phi(x) = f(x^0 + \delta x) \in L_p(I^d)$ и выберем $\psi \in \mathcal{P}^{l-1,d}$, для которого согласно (1.2.22) (см. замечание после теоремы 1.2.11) соблюдается неравенство

$$\|\phi - \psi\|_{L_p(I^d)} \leq c_4 \left(\int_{B^d} \int_{I_{lx}^d} |\Delta_x^l \phi(y)|^p dy dx \right)^{1/p}.$$

Тогда отсюда, учитывая, что

$$\begin{aligned} \|\phi - \psi\|_{L_p(I^d)} &= \delta^{-d/p} \|f(\cdot) - \psi((\cdot - x^0)/\delta)\|_{L_p(Q)}, \\ \left(\int_{B^d} \int_{I_{lx}^d} |\Delta_x^l \phi(y)|^p dy dx \right)^{1/p} &= \delta^{-2d/p} \left(\int_{\delta B^d} \int_{Q_{l\xi}} |\Delta_\xi^l f(\eta)|^p d\eta d\xi \right)^{1/p}, \end{aligned}$$

а также то обстоятельство, что

$$\psi((\cdot - x^0)/\delta) \in \mathcal{P}^{l-1,d},$$

приходим к (1.2.23).

Для доказательства теоремы 1.2.14 понадобится

ЛЕММА 1.2.13. Пусть $l, m \in \mathbb{Z}_+$, $d \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$ и D – ограниченная область в $\mathbb{R}^d$. Тогда для $f \in W_p^l(D)$ при $h \in \mathbb{R}^d$ справедлива оценка

$$\|\Delta_h^{l+m} f\|_{L_p(D_{(l+m)h})} \leq l! \|h\|^l \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}_{+l}^d} \|\Delta_h^m \mathcal{D}^\lambda f\|_{L_p(D_{mh})}. \quad (1.2.24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь равенством (1.2.3), с помощью выкладок нетрудно убедиться в справедливости (1.2.24) для $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Далее, беря при $1 \leq p < \infty$ для $f \in W_p^l(D)$ последовательность функций $\{f_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d): n \in \mathbb{N}\}$, обладающую тем свойством, что для любой области G , замыкание которой лежит в D , при $\lambda \in \mathbb{Z}_{+l}^d$ последовательность $\{\mathcal{D}^\lambda f_n: n \in \mathbb{N}\}$ сходится к $\mathcal{D}^\lambda f$ в $L_p(G)$, и применяя (1.2.24) к каждой функции f_n , $n \in \mathbb{N}$, и области G вместо D , а затем переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, можно показать, что при $1 \leq p < \infty$ для $f \in W_p^l(D)$ для любой области G , замыкание которой лежит в D , имеет место (1.2.24) с заменой D на G . Наконец, беря последовательность областей $\{G_n: n \in \mathbb{N}\}$ со следующими свойствами: $\bigcup_{n=1}^\infty G_n = D$, $G_n \subset G_{n+1}$, замыкание G_n лежит в D , $n \in \mathbb{N}$, и применяя (1.2.24) к $f \in W_p^l(D)$ при $1 \leq p < \infty$ с G_n вместо D , а затем переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, приходим к (1.2.24) при $1 \leq p < \infty$.

Для получения (1.2.24), когда $p = \infty$, достаточно в (1.2.24) при $p < \infty$ перейти к пределу при $p \rightarrow \infty$ (см. [2]).

ТЕОРЕМА 1.2.14. Пусть $l, m \in \mathbb{Z}_+$: $l + m > 0$, $d \in \mathbb{N}$, $1 < p < \infty$. Тогда существует константа $c_5(l, m, d, p) > 0$ такая, что для любых $x^0 \in \mathbb{R}^d$ и $\delta > 0$, $Q = x^0 + \delta I^d$, для любой функции $f \in W_p^l(Q)$ существует полином $g \in \mathcal{P}^{l+m-1, d}$, для которого

$$\|f - g\|_{L_p(Q)} \leq c_5 \delta^{l-d/p} \left(\int_{\delta B^d} \int_{Q_{m\xi}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}_{+l}^d} |\Delta_\xi^m \mathcal{D}^\lambda f(\eta)|^p d\eta d\xi \right)^{1/p}. \quad (1.2.25)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно для $f \in W_p^l(Q)$ выбрать $g \in \mathcal{P}^{l+m-1, d}$ так, чтобы соблюдалось (1.2.23) с $l + m$ вместо l , а затем применить (1.2.24) и неравенство Гёльдера.

1.3. В этом пункте мы определим специальные операторы проектирования на пространства полиномов, с помощью которых будут получены основные результаты настоящей работы, и построим кусочно полиномиальные приближения функций конечной гладкости, необходимые нам в дальнейшем.

ТЕОРЕМА 1.3.1. Пусть $l \in \mathbb{Z}_+$, $d \in \mathbb{N}$, $\rho > 0$, $1 \leq p, q \leq \infty$. Тогда существует семейство констант $\{c_6(l, d, \rho) > 0: l \in \mathbb{Z}_+, d \in \mathbb{N}, \rho > 0\}$ такое, что для любого $\delta > 0$ и любого $x^0 \in \mathbb{R}^d$, $Q = x^0 + \delta I^d$, можно построить систему линейных операторов

$$P_{\delta, x^0}^{l, d, \lambda}: L_1(Q) \mapsto \mathcal{P}^{l, d}, \quad \lambda \in \mathbb{Z}_{+l}^d,$$

обладающих следующими свойствами:

1) для любого измеримого по Лебегу множества $D \subset \mathbb{R}^d$ такого, что $\sup_{x \in D} \|x - x^0\| \leq \rho\delta$, для $f \in L_p(Q)$ при $\kappa, \lambda \in \mathbb{Z}_{+l}^d$ справедливо неравенство

$$\|\mathcal{D}^\kappa P_{\delta, x^0}^{l, d, \lambda} f\|_{L_q(D)} \leq c_6 \delta^{-|\kappa| - d/p + d/q} \|f\|_{L_p(Q)}; \quad (1.3.1)$$

2) для $f \in \mathcal{D}^{l, d}$ при $\lambda \in \mathbb{Z}_{+l}^d$ имеет место равенство

$$P_{\delta, x^0}^{l, d, \lambda}(f|_Q) = f; \quad (1.3.2)$$

3) если для функции $f \in L_1(Q)$ при $\lambda \in \mathbb{Z}_{+l}^d$ ее обобщенная производная $\mathcal{D}^\lambda f$ принадлежит $L_1(Q)$, то

$$\mathcal{D}^\lambda P_{\delta, x^0}^{l, d, \lambda} f = P_{\delta, x^0}^{l - |\lambda|, d, 0} \mathcal{D}^\lambda f. \quad (1.3.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку при $l \in \mathbb{Z}_+$, $d \in \mathbb{N}$ система полиномов $\{(1/\lambda!)x^\lambda: \lambda \in \mathbb{Z}_{+l}^d\}$ линейно независима как система обобщенных функций в области I^d , то существует система функций $\{\phi_\kappa^{l, d, 0} \in C_0^\infty(I^d): \kappa \in \mathbb{Z}_{+l}^d\}$ такая, что при $\kappa, \lambda \in \mathbb{Z}_{+l}^d$ выполняются равенства

$$\int_{I^d} \frac{1}{\lambda!} x^\lambda \phi_\kappa^{l, d, 0}(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } \kappa \neq \lambda, \\ 1 & \text{при } \kappa = \lambda. \end{cases} \quad (1.3.4)$$

Построим при $\lambda \in \mathbb{Z}_{+l}^d$ систему функций $\{\phi_\kappa^{l, d, \lambda} \in C_0^\infty(I^d): \kappa \in \mathbb{Z}_{+l}^d\}$, полагая

$$\phi_\kappa^{l, d, \lambda} = \begin{cases} \phi_\kappa^{l, d, 0}, & \text{если для } \kappa \text{ существует } j = 1, \dots, d: \kappa_j < \lambda_j; \\ (-1)^{|\lambda|} \mathcal{D}^\lambda \phi_{\kappa - \lambda}^{l - |\lambda|, d, 0}, & \text{если для } \kappa \text{ при } j = 1, \dots, d \text{ верно, что } \kappa_j \geq \lambda_j. \end{cases} \quad (1.3.5)$$

Пользуясь (1.3.4) и (1.3.5), легко проверить, что для $\lambda \in \mathbb{Z}_{+l}^d$ при $\kappa, \mu \in \mathbb{Z}_{+l}^d$ имеют место равенства

$$\int_{I^d} \frac{1}{\mu!} x^\mu \phi_\kappa^{l, d, \lambda}(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } \kappa \neq \mu, \\ 1 & \text{при } \kappa = \mu. \end{cases}$$

Определим при $\lambda \in \mathbb{Z}_{+l}^d$ для $\delta > 0$ и $x^0 \in \mathbb{R}^d$ для $Q = x^0 + \delta I^d$ систему линейных операторов $P_{\delta, x^0}^{l, d, \lambda}: L_1(Q) \mapsto \mathcal{D}^{l, d}$, полагая для $f \in L_1(Q)$

$$(P_{\delta, x^0}^{l, d, \lambda} f)(x) = \delta^{-d} \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_{+l}^d} \int_Q \phi_\kappa^{l, d, \lambda} \left(\frac{y - x^0}{\delta} \right) f(y) dy \frac{1}{\kappa!} \left(\frac{x - x^0}{\delta} \right)^\kappa.$$

Проверка соотношений (1.3.1) и (1.3.2) проводится так же, как при доказательстве теоремы 3.1 в [1]. Непосредственные вычисления с применением (1.3.5) и интегрирования по частям показывают справедливость (1.3.3).

ТЕОРЕМА 1.3.2. Пусть $l, m \in \mathbb{Z}_+$, $l + m > 0$, $d \in \mathbb{N}$, $1 < p < \infty$, $\lambda \in \mathbb{Z}_{+l+m-1}^d$. Тогда существует константа $c_7(l, m, d, p) > 0$ такая, что для любого $\delta > 0$ и любого $x^0 \in \mathbb{R}^d$, $Q = x^0 + \delta I^d$, для $f \in W_p^l(Q)$, выполняется неравенство

$$\begin{aligned} & \|f - P_{\delta, x^0}^{l+m-1, d, \lambda} f\|_{L_p(Q)} \\ & \leq c_7 \delta^{l-d/p} \left(\int_{\delta B^d} \int_{Q_{m\xi}} \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_{+l}^d} |\Delta_\xi^m \mathcal{D}^\kappa f(\eta)|^p d\eta d\xi \right)^{1/p}. \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выбирая для функции $f \in W_p^l(Q)$ полином $g \in \mathcal{P}^{l+m-1, d}$, для которого соблюдается (1.2.25), и применяя (1.3.2), (1.3.1), имеем

$$\begin{aligned} \|f - P_{\delta, x^0}^{l+m-1, d, \lambda} f\|_{L_p(Q)} & \leq \|f - g\|_{L_p(Q)} + \|P_{\delta, x^0}^{l+m-1, d, \lambda}(g - f)\|_{L_p(Q)} \\ & \leq (1 + c_6) \|f - g\|_{L_p(Q)}. \end{aligned}$$

Подставляя сюда (1.2.25), получаем (1.3.6).

В дальнейшем будут использоваться следующие обозначения.

Для $r, d \in \mathbb{N}$ через N_r^d обозначим множество мультииндексов

$$N_r^d = \{\nu \in \mathbb{Z}^d: 0 \leq \nu_j \leq r - 1, j = 1, \dots, d\}.$$

Для $k \in \mathbb{Z}_+$, $d \in \mathbb{N}$, $\nu \in N_{2^k}^d$ определим куб

$$Q_{k, \nu}^d = 2^{-k} \nu + 2^{-k} I^d,$$

а через $\chi_{k, \nu}^d$ обозначим характеристическую функцию множества $Q_{k, \nu}^d$.

Для $l \in \mathbb{Z}_+$, $d \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{Z}_{+l}^d$ при $k \in \mathbb{Z}_+$, $\nu \in N_{2^k}^d$ положим

$$\mathfrak{S}_{k, \nu}^{l, d, \lambda} = P_{\delta, x^0}^{l, d, \lambda}$$

при $\delta = 2^{-k}$, $x^0 = 2^{-k} \nu$ и определим операторы $\mathcal{U}_k^{l, d, \lambda}: L_1(I^d) \mapsto L_\infty(I^d)$, полагая для $f \in L_1(I^d)$ значение

$$\mathcal{U}_k^{l, d, \lambda} f = \sum_{\nu \in N_{2^k}^d} \mathfrak{S}_{k, \nu}^{l, d, \lambda} (f|_{Q_{k, \nu}^d}) \chi_{k, \nu}^d.$$

ТЕОРЕМА 1.3.3. Пусть $l, m \in \mathbb{Z}_+$, $l + m > 0$, $d \in \mathbb{N}$, $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq p$, $\lambda \in \mathbb{Z}_{+l+m-1}^d$. Тогда существует константа $c_8(l, m, d, p) > 0$ такая, что для $f \in W_p^l(I^d)$ при $k \in \mathbb{Z}_+$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \|f - \mathcal{U}_k^{l+m-1, d, \lambda} f\|_{L_q(I^d)} \leq \\ & \leq c_8 2^{-kl+kd/p} \left(\int_{2^{-k}B^d} \int_{I_{m\xi}^d} \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_{+l}^d} |\Delta_\xi^m \mathcal{D}^\kappa f(\eta)|^p d\eta d\xi \right)^{1/p}. \end{aligned} \quad (1.3.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка (1.3.7) при $q = p$ устанавливается непосредственным вычислением с применением (1.3.6). Оценка (1.3.7) при $q < p$ вытекает из оценки (1.3.7) при $q = p$ ввиду того, что для $g \in L_p(I^d)$ при $q < p$ имеет место неравенство $\|g\|_{L_q(I^d)} \leq \|g\|_{L_p(I^d)}$.

ТЕОРЕМА 1.3.4. Пусть $l, m \in \mathbb{Z}_+$, $l + m > 0$, $d \in \mathbb{N}$, $1 < p < q \leq \infty$, $\lambda \in \mathbb{Z}_{+l+m-1}^d$. Тогда существует константа $c_9(l, m, d, p, q) > 0$ такая, что если для $f \in W_p^l(I^d)$ функция $t^{l-2d/p+d/q-1} \left(\int_{2tB^d} \int_{I_{m\xi}^d} \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_{+l}^d} |\Delta_\xi^m \mathcal{D}^\kappa f(\eta)|^p d\eta d\xi \right)^{1/p}$ принадлежит $L_1((0, 1))$, то при $k \in \mathbb{Z}_+$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} & \|f - \mathcal{U}_k^{l+m-1, d, \lambda} f\|_{L_q(I^d)} \\ & \leq c_9 \int_0^{2^{-k}} t^{l-2d/p+d/q-1} \left(\int_{2tB^d} \int_{I_{m\xi}^d} \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_{+l}^d} |\Delta_\xi^m \mathcal{D}^\kappa f(\eta)|^p d\eta d\xi \right)^{1/p} dt. \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

Доказательство теоремы 1.3.4 с очевидными изменениями повторяет доказательство теоремы 2.3 в [1].

Непосредственным следствием теорем 1.3.3 и 1.3.4 является

ТЕОРЕМА 1.3.5. Пусть $\alpha > 0$, $d \in \mathbb{N}$, $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $l = [\alpha]$, если $\alpha \notin \mathbb{Z}$, $l = \alpha - 1$, если $\alpha \in \mathbb{Z}$, и $m = 1$, если $\alpha \notin \mathbb{Z}$, $m = 2$, если $\alpha \in \mathbb{Z}$. Тогда существует константа $c_{10}(\alpha, d, p, q) > 0$ такая, что если $q \leq p$ или если $q > p$ и $\alpha - d/p + d/q > 0$, то для $f \in \mathcal{H}_p^\alpha(I^d)$ при $k \in \mathbb{Z}_+$ справедливо неравенство

$$\|f - \mathcal{U}_k^{l+m-1, d, \lambda} f\|_{L_q(I^d)} \leq c_{10} 2^{-k(\alpha - (d/p - d/q)_+)}, \quad \lambda \in \mathbb{Z}_{+l+m-1}^d, \quad (1.3.9)$$

где, как обычно, $t_+ = (t + |t|)/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства достаточно применить (1.3.7) и (1.3.8) с учетом того обстоятельства, что для $f \in \mathcal{H}_p^\alpha(I^d) \subset W_p^l(I^d)$ при $\delta > 0$ соблюдается неравенство

$$\left(\int_{\delta B^d} \int_{I_{m\xi}^d} \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_{+l}^d} |\Delta_\xi^m \mathcal{D}^\kappa f(\eta)|^p d\eta d\xi \right)^{1/p} \leq 2^{d/p} \delta^{\alpha-l+d/p}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В силу (1.1.2) в формулировке теоремы 1.3.5 класс $\mathcal{H}_p^\alpha(I^d)$ можно заменить на класс $\mathcal{B}_{p,\theta}^\alpha(I^d)$ при $1 \leq \theta < \infty$. При этом константа c_{10} зависит от α, d, p, θ, q .

Пусть $\alpha > 0$, $d \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$, D – область в $\mathbb{R}^d$, $l = [\alpha]$, если $\alpha \notin \mathbb{Z}$, $l = \alpha - 1$, если $\alpha \in \mathbb{Z}$, и $m = 1$, если $\alpha \notin \mathbb{Z}$, $m = 2$, если $\alpha \in \mathbb{Z}$. Обозначим через $H_p^\alpha(D)$ множество всех функций $f \in W_p^l(D)$, для которых конечна величина

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{Z}_{+l}^d} \sup_{t>0} t^{-(\alpha-l)} \Omega^m(\mathcal{D}^\lambda f, t)_{L_p(D)}.$$

ТЕОРЕМА 1.3.6. Пусть $\alpha > 0$, $d \in \mathbb{N}$, $1 < p < q \leq \infty$, $\alpha - d/p + d/q > 0$, $l = [\alpha]$, если $\alpha \notin \mathbb{Z}$, $l = \alpha - 1$, если $\alpha \in \mathbb{Z}$, $m = 1$, если $\alpha \notin \mathbb{Z}$, $m = 2$, если $\alpha \in \mathbb{Z}$, и $\lambda \in \mathbb{Z}_{+l+m-1}^d$. Тогда существует константа $c_{11}(\alpha, d, p, q) > 0$ такая, что для любого $\delta > 0$ и любого $x^0 \in \mathbb{R}^d$, $Q = x^0 + \delta I^d$, для любой функции $f \in H_p^\alpha(Q)$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned} & \|f - P_{\delta, x^0}^{l+m-1, d, \lambda} f\|_{L_q(Q)} \\ & \leq c_{11} \int_0^\delta t^{l-2d/p+d/q-1} \left(\int_{2tB^d} \int_{Q_{m\xi}} \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_{+l}^d} |\Delta_\xi^m \mathcal{D}^\kappa f(\eta)|^P d\eta d\xi \right)^{1/p} dt. \end{aligned} \quad (1.3.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, в силу определения оператора $\mathcal{U}_0^{l+m-1, d, \lambda}$ из (1.3.8) при $\delta = 1$, $x^0 = 0$ для $\phi \in H_p^\alpha(I^d)$ имеем

$$\begin{aligned} & \|\phi - P_{1,0}^{l+m-1, d, \lambda} \phi\|_{L_q(I^d)} \\ & \leq c_{11} \int_0^1 t^{l-2d/p+d/q-1} \left(\int_{2tB^d} \int_{I_{m\xi}^d} \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_{+l}^d} |\Delta_\xi^m \mathcal{D}^\kappa \phi(\eta)|^p d\eta d\xi \right)^{1/p} dt, \end{aligned} \quad (1.3.11)$$

ибо

$$\begin{aligned} & t^{l-2d/p+d/q-1} \left(\int_{2tB^d} \int_{I_{m\xi}^d} \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_{+l}^d} |\Delta_\xi^m \mathcal{D}^\kappa \phi(\eta)|^p d\eta d\xi \right)^{1/p} \\ & \leq c_{12}(\alpha, d, p) t^{\alpha-d/p+d/q-1} \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_{+l}^d} \sup_{\tau>0} \tau^{-(\alpha-l)} \Omega^m(\mathcal{D}^\kappa \phi, \tau)_{L_p(I^d)} \in L_1((0, 1)). \end{aligned}$$

Обозначая для $\delta > 0$ и $x^0 \in \mathbb{R}^d$ через g_{δ, x^0} оператор, который каждой функции f , заданной на Q , ставит в соответствие функцию $g_{\delta, x^0} f$, определенную на I^d равенством

$$(g_{\delta, x^0} f)(x) = f(x^0 + \delta x),$$

нетрудно видеть (см. доказательство теоремы 1.3.1), что

$$P_{\delta, x^0}^{l+m-1, d, \lambda} = (g_{\delta, x^0})^{-1} P_{1, 0}^{l+m-1, d, \lambda} g_{\delta, x^0}.$$

Поэтому для $f \in H_p^\alpha(Q)$, полагая $\phi = g_{\delta, x^0} f$, получаем

$$\begin{aligned} \|f - P_{\delta, x^0}^{l+m-1, d, \lambda} f\|_{L_q(Q)} &= \|(g_{\delta, x^0})^{-1}(\phi - P_{1, 0}^{l+m-1, d, \lambda} \phi)\|_{L_q(Q)} \\ &= \delta^{d/q} \|\phi - P_{1, 0}^{l+m-1, d, \lambda} \phi\|_{L_q(I^d)}. \end{aligned} \quad (1.3.12)$$

Подставляя в (1.3.12) оценку (1.3.11) и учитывая, что

$$\begin{aligned} &\left(\int_{2tB^d} \int_{I_{m\xi}^d} \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_{+l}^d} |\Delta_\xi^m \mathcal{D}^\kappa \phi(\eta)|^p d\eta d\xi \right)^{1/p} \\ &= \left(\int_{\left\{ \begin{smallmatrix} (\xi, \eta): \xi \in 2tB^d \\ \eta \in I^d, \eta + m\xi \in I^d \end{smallmatrix} \right\}} \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_{+l}^d} \left| \sum_{j=0}^m C_m^j (-1)^{m-j} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \delta^{|\kappa|} \mathcal{D}^\kappa f(x^0 + \delta(\eta + j\xi)) \right|^p d\eta d\xi \right)^{1/p} \\ &= \delta^l \left(\int_{\left\{ \begin{smallmatrix} (x, y): x/\delta \in 2tB^d \\ (y-x^0)/\delta \in I^d \\ (y-x^0)/\delta + mx/\delta \in I^d \end{smallmatrix} \right\}} \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_{+l}^d} \left| \sum_{j=0}^m C_m^j (-1)^{m-j} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \mathcal{D}^\kappa f(y + jx) \right|^p \delta^{-2d} dx dy \right)^{1/p} \\ &= \delta^{l-2d/p} \left(\int_{\left\{ \begin{smallmatrix} (x, y): x \in 2\delta tB^d \\ y \in Q, y + mx \in Q \end{smallmatrix} \right\}} \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_{+l}^d} |\Delta_x^m \mathcal{D}^\kappa f(y)|^p dx dy \right)^{1/p} \\ &= \delta^{l-2d/p} \left(\int_{2\delta tB^d} \int_{Q_{mx}} \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_{+l}^d} |\Delta_x^m \mathcal{D}^\kappa f(y)|^p dy dx \right)^{1/p}, \end{aligned}$$

приходим к неравенству

$$\begin{aligned} &\|f - P_{\delta, x^0}^{l+m-1, d, \lambda} f\|_{L_q(Q)} \leq c_{11} \delta^{d/q} \\ &\quad \times \int_0^1 t^{l-2d/p+d/q-1} \delta^{l-2d/p} \left(\int_{2\delta tB^d} \int_{Q_{mx}} \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_{+l}^d} |\Delta_x^m \mathcal{D}^\kappa f(y)|^p dy dx \right)^{1/p} dt, \end{aligned}$$

которое после замены переменной $t = \tau/\delta$ совпадает с (1.3.10).

§ 2. Асимптотика наилучшей точности восстановления по значениям в n точках функций конечной гладкости

2.1. В этом пункте будет получена оценка сверху наилучшей точности восстановления в метрике $W_q^r(I^d)$ по значениям в n точках функций из классов $\mathcal{H}_p^\alpha(I^d)$ и $\mathcal{B}_{p,\theta}^\alpha(I^d)$.

Но прежде напомним некоторые определения.

Пусть $C(D)$ – пространство непрерывных вещественных функций на топологическом пространстве D и X – некоторое линейное нормированное пространство вещественных функций, определенных на D .

Для $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\Phi_n(C(D))$ множество всех отображений $\phi: C(D) \mapsto \mathbb{R}^n$, для каждого из которых существует набор точек $x^1, \dots, x^n \in D$ такой, что для $f \in C(D)$ значение $\phi(f)$ равно $(f(x^1), \dots, f(x^n))$, а через $\mathcal{A}_n(X)$ обозначим множество всех отображений $A: \mathbb{R}^n \mapsto X$.

Для множества $K \subset C(D) \cap X$ при $n \in \mathbb{N}$ через $\sigma_n(K, C(D), X)$ обозначим величину

$$\sigma_n(K, C(D), X) = \inf_{\{A \in \mathcal{A}_n(X), \phi \in \Phi_n(C(D))\}} \sup_{f \in K} \|f - A \circ \phi(f)\|_X.$$

Для доказательства основного результата этого пункта нам понадобится

ЛЕММА 2.1.1. Пусть $l \in \mathbb{Z}_+$, $d \in \mathbb{N}$, $\rho, \sigma, \tau > 0$. Тогда существует константа $c_{13}(l, d, \rho, \sigma, \tau) > 0$ такая, что для любого $\delta > 0$ и любого $\beta \in \mathbb{R}^d$ такого, что $|\beta_j| = 1$, $j = 1, \dots, d$, для любых точек $x^0, y^0 \in \mathbb{R}^d$ таких, что $\|x^0 - y^0\| \leq \sigma\delta$, для любого множества $Q \subset \mathbb{R}^d$ такого, что $\sup_{x \in Q} \|x - x^0\| \leq \tau\delta$, для любого $f \in \mathcal{P}^{l,d}$ справедлива оценка

$$\sup_{x \in Q} |f(x)| \leq c_{13} \max_{\lambda \in \mathbb{Z}_{+l}^d} |f(y^0 + \rho\delta\beta\lambda)|, \quad (2.1.1)$$

где для $x, y \in \mathbb{R}^d$ под xy понимается вектор $xy = (x_1y_1, \dots, x_dy_d)$.

Доказательство леммы 2.1.1 можно найти в [1].

ТЕОРЕМА 2.1.2. Пусть $\alpha > 0$, $l = [\alpha]$, если $\alpha \notin \mathbb{Z}$, $l = \alpha - 1$, если $\alpha \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $r \leq l$, $d \in \mathbb{N}$, $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ таковы, что

$$\alpha - d/p > 0, \quad (2.1.2)$$

а при $q > p$ выполняется условие

$$\alpha - r - d/p + d/q > 0. \quad (2.1.3)$$

Пусть еще $K = \mathcal{H}_p^\alpha(I^d)$, $X = W_q^r(I^d)$. Тогда существуют константы $c_{14}(\alpha, r, d, p, q) > 0$ и $n_0(\alpha, d) \in \mathbb{N}$ такие, что при $n \geq n_0(\alpha, d)$ справедливо неравенство

$$\sigma_n(K, C(I^d), X) \leq c_{14} n^{-(\alpha-r)/d+(1/p-1/q)_+}. \quad (2.1.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего отметим, что вследствие (2.1.2) имеет место включение $K \subset C(I^d)$ (см. [2]). Далее, при $q \leq p$ очевидно, что $K \subset W_q^r(I^d)$. Если же $q > p$ и выполнено условие (2.1.3), то, учитывая, что при $\lambda \in \mathbb{Z}_{+l}^d$ для $f \in \mathcal{H}_p^\alpha(I^d)$ ее производная $\mathcal{D}^\lambda f$ принадлежит $\mathcal{H}_p^{\alpha-|\lambda|}(I^d)$, видим (см. [2] или теорему 1.3.5), что $K \subset W_q^r(I^d)$. Поэтому при $n \in \mathbb{N}$ величина $\sigma_n(K, C(I^d), X)$ определена. Теперь установим справедливость (2.1.4) при $q \neq \infty$. С этой целью для $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0(\alpha, d)$, где $n_0(\alpha, d)$ будет указано ниже, фиксируем $s \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{Z}_+$ так, чтобы соблюдались соотношения

$$s^d \leq n < (s+1)^d, \quad 2^k \leq s < 2^{k+1}. \quad (2.1.5)$$

Положим $m = 1$, если $\alpha \notin \mathbb{Z}$, и $m = 2$, если $\alpha \in \mathbb{Z}$, и введем в рассмотрение необходимые для дальнейших построений объекты.

Для $\mu \in N_s^d$ обозначим через $x^{s,\mu} \in \mathbb{R}^d$ точку, j -я координата которой есть $(x^{s,\mu})_j = s^{-1}(\mu_j + 1/2)$, $j = 1, \dots, d$, и определим $\beta(\mu) \in \mathbb{Z}^d$, полагая

$$\beta_j(\mu) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq \mu_j \leq [(s-1)/2], \\ -1, & \text{если } [(s-1)/2] + 1 \leq \mu_j \leq s-1, \end{cases} \quad j = 1, \dots, d.$$

Ясно, что при $s \geq 2(l+m-1) + 1$ для $\mu \in N_s^d$ и $\lambda \in \mathbb{Z}_{+l+m-1}^d$ мультииндекс $\mu + \beta(\mu)\lambda$ принадлежит N_s^d .

Для $\nu \in N_{2^k}^d$ через $y^{k,\nu} \in \mathbb{R}^d$ обозначим точку, j -я координата которой есть

$$(y^{k,\nu})_j = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq \nu_j \leq l+m+4, \\ 1 - 2(l+m+4)2^{-k}, & \text{если } 2^k - l - m - 4 \leq \nu_j \leq 2^k - 1, \\ 2^{-k}(\nu_j - l - m - 4), & \text{если } l+m+4 < \nu_j < 2^k - l - m - 4, \end{cases} \\ j = 1, \dots, d,$$

и определим куб $D_{k,\nu}^d \subset \mathbb{R}^d$ равенством

$$D_{k,\nu}^d = y^{k,\nu} + 2(l+m+4)2^{-k}I^d.$$

Нетрудно проверить, что при $2^k \geq 2(l+m+4)$ справедливо включение

$$Q_{k,\nu}^d \subset D_{k,\nu}^d \subset I^d, \quad \nu \in N_{2^k}^d. \quad (2.1.6)$$

Из первого включения в (2.1.6) вытекает, что существует константа $c_{15}(\alpha, d) > 0$ такая, что для любого $x \in \mathbb{R}^d$ выполняется неравенство

$$\text{kard}\{\nu \in N_{2^k}^d : x \in D_{k,\nu}^d\} \leq c_{15}, \quad (2.1.7)$$

где $\text{kard } E$ – мощность множества E .

Выберем $n_0(\alpha, d) \in \mathbb{N}$ так, чтобы при $n \geq n_0(\alpha, d)$ для s и k , подчиненных условию (2.1.5), соблюдались неравенства $s \geq 2(l+m-1)+1$ и $2^k \geq 2(l+m+4)$.

Определим отображение $\phi \in \Phi_{s^d}(C(I^d))$ равенством

$$\phi(f) = \{f(x^{s,\mu}) : \mu \in N_s^d\}, \quad f \in C(I^d).$$

Как известно (см., например, [4]), существует система полиномов $\{p_\lambda^{l+m-1,d} \in \mathcal{P}^{l+m-1,d} : \lambda \in \mathbb{Z}_{+l+m-1}^d\}$ такая, что для $\kappa \in \mathbb{Z}_{+l+m-1}^d$

$$p_\lambda^{l+m-1,d}(\kappa) = \begin{cases} 1 & \text{при } \kappa = \lambda, \\ 0 & \text{при } \kappa \neq \lambda. \end{cases}$$

Для $\mu \in N_s^d$, $\lambda \in \mathbb{Z}_{+l+m-1}^d$ обозначим

$$R_{s,\mu,\lambda}^{l+m-1,d}(x) = p_\lambda^{l+m-1,d}(s\beta(\mu)(x - x^{s,\mu})).$$

Тогда для $\mu \in N_s^d$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{Z}_{+l+m-1}^d$ имеем

$$R_{s,\mu,\lambda}^{l+m-1,d}(x^{s,\mu+\beta(\mu)\kappa}) = R_{s,\mu,\lambda}^{l+m-1,d}(x^{s,\mu} + s^{-1}\beta(\mu)\kappa) = p_\lambda^{l+m-1,d}(\kappa).$$

Определим для $\mu \in N_s^d$ оператор

$$R_{s,\mu}^{l+m-1,d} : \mathbb{R}^{s^d} \mapsto \mathcal{P}^{l+m-1,d},$$

полагая для $t = \{t_\nu \in \mathbb{R} : \nu \in N_s^d\}$

$$R_{s,\mu}^{l+m-1,d}t = \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}_{+l+m-1}^d} t_{\mu+\beta(\mu)\lambda} R_{s,\mu,\lambda}^{l+m-1,d}.$$

Легко видеть, что при $\mu \in N_s^d$ для $f \in C(I^d)$, $\lambda \in \mathbb{Z}_{+l+m-1}^d$ имеет место равенство

$$(R_{s,\mu}^{l+m-1,d} \circ \phi(f))(x^{s,\mu+\beta(\mu)\lambda}) = f(x^{s,\mu+\beta(\mu)\lambda}). \quad (2.1.8)$$

Построим разбиение единицы на I^d , которое будет использовано для определения отображения $A \in \mathcal{A}_{s^d}(X)$ с требуемыми свойствами.

Для этого, взяв функцию $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, носитель которой есть $\text{supp } \psi \subset \frac{1}{4}B^d$ и $\int_{\mathbb{R}^d} \psi(y) dy = 1$, положим

$$g(x) = \int_{I^d} \psi(y-x) dy.$$

Нетрудно видеть, что $\text{supp } g \subset \{x \in \mathbb{R}^d : -1/4 \leq x_j \leq 5/4, j = 1, \dots, d\}$ и

$$\begin{aligned} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^d} g(x-\nu) &= \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^d} \int_{I^d} \psi(y-x+\nu) dy = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^d} \int_{\nu+I^d} \psi(y-x) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \psi(y-x) dy = \int_{\mathbb{R}^d} \psi(y) dy = 1, \quad x \in \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

Определим систему функций $\{g_{s,\nu}^d: \nu \in \mathbb{Z}^d\}$, полагая $g_{s,\nu}^d(x) = g(sx - \nu)$. Ясно, что при $\nu \in \mathbb{Z}^d$

$$\text{supp } g_{s,\nu}^d \subset \{x \in \mathbb{R}^d: s^{-1}(\nu_j - 1/4) \leq x_j \leq s^{-1}(\nu_j + 5/4), j = 1, \dots, d\}.$$

Обозначая через $N_s'^d$ множество мультииндексов:

$$N_s'^d = \{\nu \in \mathbb{Z}^d: -1 \leq \nu_j \leq s, j = 1, \dots, d\},$$

видим, что для $x \in I^d$ при $\lambda \in \mathbb{Z}_+^d$

$$\sum_{\nu \in N_s'^d} \mathcal{D}^\lambda g_{s,\nu}^d(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } \lambda = 0, \\ 0 & \text{при } \lambda \neq 0. \end{cases} \quad (2.1.9)$$

Очевидно, что для каждого $\lambda \in \mathbb{Z}_+^d$ существует константа $c_{16}(\lambda, d) > 0$ такая, что при $s \in \mathbb{N}$ для $\nu \in \mathbb{Z}^d$ и $x \in \mathbb{R}^d$ справедлива оценка

$$|\mathcal{D}^\lambda g_{s,\nu}^d(x)| \leq c_{16} s^{|\lambda|}. \quad (2.1.10)$$

Заметим, что если для $\nu \in N_{2^k}^d$ и $\nu' \in \mathbb{Z}^d$ пересечение $Q_{k,\nu}^d \cap \text{supp } g_{s,\nu'}^d$ не равно $\emptyset$, то, выбирая $x \in Q_{k,\nu}^d \cap \text{supp } g_{s,\nu'}^d$, получим, что для $j = 1, \dots, d$ выполняются неравенства

$$2^{-k}\nu_j < x_j \leq s^{-1}(\nu'_j + 5/4),$$

а следовательно,

$$\begin{aligned} s2^{-k}\nu_j - 5/4 &< \nu'_j, \\ s^{-1}(\nu'_j - 1/4) &\leq x_j < 2^{-k}\nu_j + 2^{-k}, \end{aligned}$$

а значит,

$$\nu'_j < s2^{-k}\nu_j + s2^{-k} + 1/4 \leq s2^{-k}\nu_j + 2^{k+1}2^{-k} + 1/4 = s2^{-k}\nu_j + 9/4.$$

Отсюда нетрудно понять, что для $\nu \in N_{2^k}^d$ верна оценка

$$\text{kard}\{\nu' \in \mathbb{Z}^d: \text{supp } g_{s,\nu'}^d \cap Q_{k,\nu}^d \neq \emptyset\} \leq 4^d. \quad (2.1.11)$$

Каждому $\mu' \in N_s'^d$ сопоставим $\mu = \mu(\mu') \in N_s^d$, полагая

$$\mu_j = \begin{cases} \mu'_j, & \text{если } 0 \leq \mu'_j \leq s-1, \\ 0, & \text{если } \mu'_j = -1, \\ s-1, & \text{если } \mu'_j = s, \end{cases} \quad j = 1, \dots, d.$$

Отметим еще некоторые полезные обстоятельства. Пусть $\nu \in N_{2^k}^d$ и $\mu' \in N_s'^d$ таковы, что $Q_{k,\nu}^d \cap \text{supp } g_{s,\mu'}^d \neq \emptyset$. Тогда, взяв $x \in Q_{k,\nu}^d \cap \text{supp } g_{s,\mu'}^d$, имеем

$$\begin{aligned} \|2^{-k}\nu - x^{s,\mu(\mu')}\| &\leq \|2^{-k}\nu - x\| + \|x - s^{-1}\mu'\| + \|s^{-1}\mu' - s^{-1}\mu(\mu')\| \\ &\quad + \|s^{-1}\mu(\mu') - x^{s,\mu(\mu')}\| \leq 2^{-k} + 2s^{-1} + s^{-1} + \frac{1}{2}s^{-1} \\ &< 5 \cdot 2^{-k} < 10s^{-1}. \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

Из (2.1.12) получаем, что для указанных $\nu \in N_{2^k}^d$ и $\mu' \in N_s'^d$ при $\lambda \in \mathbb{Z}_{+l+m-1}^d$ будет (см. (2.1.5))

$$\begin{aligned} \|2^{-k}\nu - x^{s,\mu(\mu')+\beta(\mu(\mu'))\lambda}\| &= \|2^{-k}\nu - x^{s,\mu(\mu')} - s^{-1}\beta(\mu(\mu'))\lambda\| \\ &\leq \|2^{-k}\nu - x^{s,\mu(\mu')}\| + \|s^{-1}\beta(\mu(\mu'))\lambda\| < 5 \cdot 2^{-k} + s^{-1}(l+m-1) \\ &\leq (l+m+4)2^{-k}. \end{aligned}$$

Отсюда и из определения кубов $D_{k,\nu}^d$ вытекает, что для $\nu \in N_{2^k}^d$ и $\mu' \in N_s'^d$ таких, что $Q_{k,\nu}^d \cap \text{supp } g_{s,\mu'}^d \neq \emptyset$, при $\lambda \in \mathbb{Z}_{+l+m-1}^d$ имеет место включение

$$x^{s,\mu(\mu')+\beta(\mu(\mu'))\lambda} \in D_{k,\nu}^d. \quad (2.1.13)$$

Теперь определим оператор $A: \mathbb{R}^{s^d} \mapsto X$, полагая для $t = \{t_\mu \in \mathbb{R}: \mu \in N_s^d\}$

$$At = \sum_{\mu' \in N_s'^d} R_{s,\mu(\mu')}^{l+m-1,d}(t) g_{s,\mu'}^d.$$

Тогда для $f \in K$ и $\lambda \in \mathbb{Z}_{+r}^d$, обозначая

$$\mathbb{Z}_+^d(\lambda) = \{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d: \kappa_j \leq \lambda_j, j = 1, \dots, d\},$$

ввиду (2.1.9) имеем

$$\begin{aligned}
& \|\mathcal{D}^\lambda f - \mathcal{D}^\lambda A \circ \phi(f)\|_{L_q(I^d)} \leq \|\mathcal{D}^\lambda f - \mathcal{U}_k^{l-|\lambda|+m-1,d,0} \mathcal{D}^\lambda f\|_{L_q(I^d)} \\
& + \left\| \mathcal{U}_k^{l-|\lambda|+m-1,d,0} \mathcal{D}^\lambda f \right. \\
& \quad \left. - \sum_{\mu' \in N_s'^d} \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(\lambda)} C_\lambda^\kappa \mathcal{D}^\kappa R_{s,\mu(\mu')}^{l+m-1,d} \circ \phi(f) \mathcal{D}^{\lambda-\kappa} g_{s,\mu'}^d \right\|_{L_q(I^d)} \\
& = \|\mathcal{D}^\lambda f - \mathcal{U}_k^{l-|\lambda|+m-1,d,0} \mathcal{D}^\lambda f\|_{L_q(I^d)} \\
& + \left\| \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(\lambda)} C_\lambda^\kappa \sum_{\mu' \in N_s'^d} (\mathcal{U}_k^{l-|\kappa|+m-1,d,0} \mathcal{D}^\kappa f \right. \\
& \quad \left. - \mathcal{D}^\kappa R_{s,\mu(\mu')}^{l+m-1,d} \circ \phi(f)) \mathcal{D}^{\lambda-\kappa} g_{s,\mu'}^d \right\|_{L_q(I^d)} \\
& \leq \|\mathcal{D}^\lambda f - \mathcal{U}_k^{l-|\lambda|+m-1,d,0} \mathcal{D}^\lambda f\|_{L_q(I^d)} \\
& + \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(\lambda)} C_\lambda^\kappa \left\| \sum_{\mu' \in N_s'^d} (\mathcal{U}_k^{l-|\kappa|+m-1,d,0} \mathcal{D}^\kappa f \right. \\
& \quad \left. - \mathcal{D}^\kappa R_{s,\mu(\mu')}^{l+m-1,d} \circ \phi(f)) \mathcal{D}^{\lambda-\kappa} g_{s,\mu'}^d \right\|_{L_q(I^d)}. \tag{2.1.14}
\end{aligned}$$

Учитывая, что $\mathcal{D}^\lambda f \in \mathcal{H}_p^{\alpha-|\lambda|}(I^d)$, а также условие (2.1.3), на основании (1.3.9) заключаем, что

$$\|\mathcal{D}^\lambda f - \mathcal{U}_k^{l-|\lambda|+m-1,d,0} \mathcal{D}^\lambda f\|_{L_q(I^d)} \leq c_{17} 2^{-k(\alpha-|\lambda|-(d/p-d/q)_+)} \tag{2.1.15}$$

Продолжая оценку (2.1.14), в силу неравенства Минковского находим

$$\begin{aligned}
& \left\| \sum_{\mu' \in N_s'^d} (\mathcal{U}_k^{l-|\kappa|+m-1,d,0} \mathcal{D}^\kappa f - \mathcal{D}^\kappa R_{s,\mu(\mu')}^{l+m-1,d} \circ \phi(f)) \mathcal{D}^{\lambda-\kappa} g_{s,\mu'}^d \right\|_{L_q(I^d)}^q \\
& = \sum_{\nu \in N_{2^k}^d} \int_{Q_{k,\nu}^d} \left| \sum_{\{\mu' \in N_s'^d : Q_{k,\nu}^d \cap \text{supp } g_{s,\mu'}^d \neq \emptyset\}} \left(\mathfrak{S}_{k,\nu}^{l-|\kappa|+m-1,d,0} \mathcal{D}^\kappa f \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \mathcal{D}^\kappa R_{s,\mu(\mu')}^{l+m-1,d} \circ \phi(f) \right) \mathcal{D}^{\lambda-\kappa} g_{s,\mu'}^d \right|^q dx \\
& \leq \sum_{\nu \in N_{2^k}^d} \left(\sum_{\{\mu' \in N_s'^d : Q_{k,\nu}^d \cap \text{supp } g_{s,\mu'}^d \neq \emptyset\}} \left\| (\mathfrak{S}_{k,\nu}^{l-|\kappa|+m-1,d,0} \mathcal{D}^\kappa f \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \mathcal{D}^\kappa R_{s,\mu(\mu')}^{l+m-1,d} \circ \phi(f)) \mathcal{D}^{\lambda-\kappa} g_{s,\mu'}^d \right\|_{L_q(Q_{k,\nu}^d)} \right)^q. \tag{2.1.16}
\end{aligned}$$

Пользуясь (1.3.3), (2.1.10) и обозначая

$$S_{k,\nu}^{l+m-1,d} = P_{\delta,x^0}^{l+m-1,d,0},$$

при $\delta = 2(l+m+4)2^{-k}$, $x^0 = y^{k,\nu}$, $\nu \in N_{2^k}^d$, получаем для $\mu' \in N_s'^d: Q_{k,\nu}^d \cap \text{supp } g_{s,\mu'}^d \neq \emptyset$,

$$\begin{aligned} & \left\| (\mathfrak{S}_{k,\nu}^{l+m-1-|\kappa|,d,0} \mathcal{D}^\kappa f - \mathcal{D}^\kappa R_{s,\mu(\mu')}^{l+m-1,d} \circ \phi(f)) \mathcal{D}^{\lambda-\kappa} g_{s,\mu'}^d \right\|_{L_q(Q_{k,\nu}^d)} \\ &= \left\| (\mathcal{D}^\kappa \mathfrak{S}_{k,\nu}^{l+m-1,d,\kappa} f - \mathcal{D}^\kappa R_{s,\mu(\mu')}^{l+m-1,d} \circ \phi(f)) \mathcal{D}^{\lambda-\kappa} g_{s,\mu'}^d \right\|_{L_q(Q_{k,\nu}^d)} \\ &\leq c_{18} s^{|\lambda-\kappa|} \left\| \mathcal{D}^\kappa \mathfrak{S}_{k,\nu}^{l+m-1,d,\kappa} f - \mathcal{D}^\kappa R_{s,\mu(\mu')}^{l+m-1,d} \circ \phi(f) \right\|_{L_q(Q_{k,\nu}^d)} \\ &\leq c_{18} s^{|\lambda-\kappa|} \left(\left\| \mathcal{D}^\kappa \mathfrak{S}_{k,\nu}^{l+m-1,d,\kappa} f - \mathcal{D}^\kappa S_{k,\nu}^{l+m-1,d} f \right\|_{L_q(Q_{k,\nu}^d)} \right. \\ &\quad \left. + \left\| \mathcal{D}^\kappa S_{k,\nu}^{l+m-1,d} f - \mathcal{D}^\kappa R_{s,\mu(\mu')}^{l+m-1,d} \circ \phi(f) \right\|_{L_q(Q_{k,\nu}^d)} \right). \end{aligned} \quad (2.1.17)$$

Принимая во внимание (2.1.17), (2.1.11), с учетом неравенства Гёльдера получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{\nu \in N_{2^k}^d} \left(\sum_{\{\mu' \in N_s'^d: Q_{k,\nu}^d \cap \text{supp } g_{s,\mu'}^d \neq \emptyset\}} \left\| (\mathfrak{S}_{k,\nu}^{l-|\kappa|+m-1,d,0} \mathcal{D}^\kappa f \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \mathcal{D}^\kappa R_{s,\mu(\mu')}^{l+m-1,d} \circ \phi(f)) \mathcal{D}^{\lambda-\kappa} g_{s,\mu'}^d \right\|_{L_q(Q_{k,\nu}^d)} \right)^q \\ & \leq \sum_{\nu \in N_{2^k}^d} \left(\sum_{\{\mu' \in N_s'^d: Q_{k,\nu}^d \cap \text{supp } g_{s,\mu'}^d \neq \emptyset\}} c_{18} s^{|\lambda-\kappa|} \right. \\ & \quad \times \left(\left\| \mathcal{D}^\kappa \mathfrak{S}_{k,\nu}^{l+m-1,d,\kappa} f - \mathcal{D}^\kappa S_{k,\nu}^{l+m-1,d} f \right\|_{L_q(Q_{k,\nu}^d)} \right. \\ & \quad \left. \left. + \left\| \mathcal{D}^\kappa S_{k,\nu}^{l+m-1,d} f - \mathcal{D}^\kappa R_{s,\mu(\mu')}^{l+m-1,d} \circ \phi(f) \right\|_{L_q(Q_{k,\nu}^d)} \right) \right)^q \\ & = (c_{18} s^{|\lambda-\kappa|})^q \sum_{\nu \in N_{2^k}^d} \left(\left(\sum_{\{\mu' \in N_s'^d: Q_{k,\nu}^d \cap \text{supp } g_{s,\mu'}^d \neq \emptyset\}} \left\| \mathcal{D}^\kappa \mathfrak{S}_{k,\nu}^{l+m-1,d,\kappa} f \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \mathcal{D}^\kappa S_{k,\nu}^{l+m-1,d} f \right\|_{L_q(Q_{k,\nu}^d)} \right) \\ & \quad \left. + \left(\sum_{\{\mu' \in N_s'^d: Q_{k,\nu}^d \cap \text{supp } g_{s,\mu'}^d \neq \emptyset\}} \left\| \mathcal{D}^\kappa S_{k,\nu}^{l+m-1,d} f \right. \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. - \mathcal{D}^\kappa R_{s,\mu(\mu')}^{l+m-1,d} \circ \phi(f) \right\|_{L_q(Q_{k,\nu}^d)} \Bigg)^q \\
& \leq (c_{18}s^{|\lambda-\kappa|})^q \sum_{\nu \in N_{2^k}^d} \left(4^d \left\| \mathcal{D}^\kappa \mathfrak{S}_{k,\nu}^{l+m-1,d,\kappa} f - \mathcal{D}^\kappa S_{k,\nu}^{l+m-1,d} f \right\|_{L_q(Q_{k,\nu}^d)} \right. \\
& \quad \left. + \left(\sum_{\{\mu' \in N_s'^d: Q_{k,\nu}^d \cap \text{supp } g_{s,\mu'}^d \neq \emptyset\}} \left\| \mathcal{D}^\kappa S_{k,\nu}^{l+m-1,d} f \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \mathcal{D}^\kappa R_{s,\mu(\mu')}^{l+m-1,d} \circ \phi(f) \right\|_{L_q(Q_{k,\nu}^d)} \right) \Bigg)^q \\
& \leq (c_{18}s^{|\lambda-\kappa|})^q \sum_{\nu \in N_{2^k}^d} 2^{q-1} \left(4^{dq} \left\| \mathcal{D}^\kappa \mathfrak{S}_{k,\nu}^{l+m-1,d,\kappa} f - \mathcal{D}^\kappa S_{k,\nu}^{l+m-1,d} f \right\|_{L_q(Q_{k,\nu}^d)}^q \right. \\
& \quad \left. + \left(\sum_{\{\mu' \in N_s'^d: Q_{k,\nu}^d \cap \text{supp } g_{s,\mu'}^d \neq \emptyset\}} \left\| \mathcal{D}^\kappa S_{k,\nu}^{l+m-1,d} f \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \mathcal{D}^\kappa R_{s,\mu(\mu')}^{l+m-1,d} \circ \phi(f) \right\|_{L_q(Q_{k,\nu}^d)} \right)^q \Bigg) \\
& = (c_{18}s^{|\lambda-\kappa|})^q 2^{q-1} 4^{dq} \sum_{\nu \in N_{2^k}^d} \left\| \mathcal{D}^\kappa \mathfrak{S}_{k,\nu}^{l+m-1,d,\kappa} f - \mathcal{D}^\kappa S_{k,\nu}^{l+m-1,d} f \right\|_{L_q(Q_{k,\nu}^d)}^q \\
& \quad + (c_{18}s^{|\lambda-\kappa|})^q 2^{q-1} \sum_{\nu \in N_{2^k}^d} \left(\sum_{\{\mu' \in N_s'^d: Q_{k,\nu}^d \cap \text{supp } g_{s,\mu'}^d \neq \emptyset\}} \left\| \mathcal{D}^\kappa S_{k,\nu}^{l+m-1,d} f \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \mathcal{D}^\kappa R_{s,\mu(\mu')}^{l+m-1,d} \circ \phi(f) \right\|_{L_q(Q_{k,\nu}^d)} \right)^q. \tag{2.1.18}
\end{aligned}$$

Используя (1.3.2), (1.3.1), а также (2.1.6), (1.3.6), выводим

$$\begin{aligned}
& \left\| \mathcal{D}^\kappa \mathfrak{S}_{k,\nu}^{l+m-1,d,\kappa} f - \mathcal{D}^\kappa S_{k,\nu}^{l+m-1,d} f \right\|_{L_q(Q_{k,\nu}^d)} \\
& = \left\| \mathcal{D}^\kappa \mathfrak{S}_{k,\nu}^{l+m-1,d,\kappa} (f - S_{k,\nu}^{l+m-1,d} f) \right\|_{L_q(Q_{k,\nu}^d)} \\
& \leq c_6 2^{k(|\kappa|+d/p-d/q)} \|f - S_{k,\nu}^{l+m-1,d} f\|_{L_p(Q_{k,\nu}^d)} \\
& \leq c_6 2^{k(|\kappa|+d/p-d/q)} \|f - S_{k,\nu}^{l+m-1,d} f\|_{L_p(D_{k,\nu}^d)} \\
& \leq c_6 2^{k(|\kappa|+d/p-d/q)} c_7 (2(l+m+4)2^{-k})^{l-d/p} \\
& \quad \times \left(\int_{2^{l(m+4)}2^{-k}B^d} \int_{(D_{k,\nu}^d)_{m\xi}} \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}_{+l}^d} |\Delta_\xi^m \mathcal{D}^\gamma f(\eta)|^p d\eta d\xi \right)^{1/p} \\
& = c_{19} 2^{-k(l-|\kappa|-2d/p+d/q)}
\end{aligned}$$

$$\times \left(\int_{c2^{-k} B^d} \int_{(D_{k,\nu}^d)_{m\xi}} \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}_{+l}^d} |\Delta_\xi^m \mathcal{D}^\gamma f(\eta)|^p d\eta d\xi \right)^{1/p}, \quad (2.1.19)$$

где $c = 2(l + m + 4)$.

Применяя (2.1.19) и неравенство Гёльдера с показателем $p/q \leq 1$, а затем пользуясь неравенством (2.1.7) и неравенством Гёльдера с показателем $1/p$, при $q \geq p$ имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{\nu \in N_{2^k}^d} \|\mathcal{D}^\kappa \mathfrak{S}_{k,\nu}^{l+m-1,d,\kappa} f - \mathcal{D}^\kappa S_{k,\nu}^{l+m-1,d} f\|_{L_q(Q_{k,\nu}^d)}^q \\ & \leq (c_{19} 2^{-k(l-|\kappa|-2d/p+d/q)})^q \\ & \quad \times \sum_{\nu \in N_{2^k}^d} \left(\int_{c2^{-k} B^d} \int_{(D_{k,\nu}^d)_{m\xi}} \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}_{+l}^d} |\Delta_\xi^m \mathcal{D}^\gamma f(\eta)|^p d\eta d\xi \right)^{q/p} \\ & \leq (c_{19} 2^{-k(l-|\kappa|-2d/p+d/q)})^q \\ & \quad \times \left(\sum_{\nu \in N_{2^k}^d} \int_{c2^{-k} B^d} \int_{(D_{k,\nu}^d)_{m\xi}} \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}_{+l}^d} |\Delta_\xi^m \mathcal{D}^\gamma f(\eta)|^p d\eta d\xi \right)^{q/p} \\ & \leq (c_{19} 2^{-k(l-|\kappa|-2d/p+d/q)})^q \\ & \quad \times \left(\int_{c2^{-k} B^d} \sum_{\nu \in N_{2^k}^d} \int_{D_{k,\nu}^d \cap I_{m\xi}^d} \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}_{+l}^d} |\Delta_\xi^m \mathcal{D}^\gamma f(\eta)|^p d\eta d\xi \right)^{q/p} \\ & = (c_{19} 2^{-k(l-|\kappa|-2d/p+d/q)})^q \\ & \quad \times \left(\int_{c2^{-k} B^d} \int_{I_{m\xi}^d} \left(\sum_{\nu \in N_{2^k}^d} \chi_{D_{k,\nu}^d}(\eta) \right) \left(\sum_{\gamma \in \mathbb{Z}_{+l}^d} |\Delta_\xi^m \mathcal{D}^\gamma f(\eta)|^p \right) d\eta d\xi \right)^{q/p} \\ & \leq (c_{19} 2^{-k(l-|\kappa|-2d/p+d/q)})^q \\ & \quad \times \left(\int_{c2^{-k} B^d} \int_{I_{m\xi}^d} c_{15} \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}_{+l}^d} |\Delta_\xi^m \mathcal{D}^\gamma f(\eta)|^p d\eta d\xi \right)^{q/p} \\ & \leq (c_{20} 2^{-k(l-|\kappa|-2d/p+d/q)})^q \\ & \quad \times \left(\sum_{\gamma \in \mathbb{Z}_{+l}^d} \left(\int_{c2^{-k} B^d} \int_{I_{m\xi}^d} |\Delta_\xi^m \mathcal{D}^\gamma f(\eta)|^p d\eta d\xi \right)^{1/p} \right)^q \\ & \leq (c_{20} 2^{-k(l-|\kappa|-2d/p+d/q)})^q \\ & \quad \times \left(\sum_{\gamma \in \mathbb{Z}_{+l}^d} \left(\int_{c2^{-k} B^d} (\Omega^m(\mathcal{D}^\gamma f, c2^{-k})_{L_p(I^d)})^p d\xi \right)^{1/p} \right)^q \\ & \leq \left(c_{20} 2^{-k(l-|\kappa|-2d/p+d/q)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}'_{+l}} (2c2^{-k})^{d/p} (c2^{-k})^{\alpha-l} \sup_{t>0} t^{-(\alpha-l)} \Omega^m(\mathcal{D}^\gamma f, t)_{L_p(I^d)} \Big)^q \\
& \leq (c_{21} 2^{-k(\alpha-|\kappa|-d/p+d/q)})^q,
\end{aligned} \tag{2.1.20}$$

где $\chi_{D_{k,\nu}^d}$ – характеристическая функция множества $D_{k,\nu}^d$.

Применяя сначала (1.1.3), затем (2.1.12), пользуясь неравенством (2.1.1), наконец, с учетом (2.1.8), (2.1.13) и (2.1.2), используя (1.3.10), приходим при $\nu \in N_{2^k}^d$ и $\mu' \in N_s'^d$, $Q_{k,\nu}^d \cap \text{supp } g_{s,\mu'}^d \neq \emptyset$, к оценке

$$\begin{aligned}
& \left\| \mathcal{D}^\kappa S_{k,\nu}^{l+m-1,d} f - \mathcal{D}^\kappa R_{s,\mu(\mu')}^{l+m-1,d} \circ \phi(f) \right\|_{L_q(Q_{k,\nu}^d)} \\
& \leq c_1 2^{k(|\kappa|-d/q)} \left\| S_{k,\nu}^{l+m-1,d} f - R_{s,\mu(\mu')}^{l+m-1,d} \circ \phi(f) \right\|_{L_\infty(Q_{k,\nu}^d)} \\
& \leq c_1 2^{k(|\kappa|-d/q)} c_{13} \max_{\gamma \in \mathbb{Z}_{+l+m-1}^d} \left| (S_{k,\nu}^{l+m-1,d} f)(x^{s,\mu(\mu')+\beta(\mu(\mu'))\gamma}) \right. \\
& \quad \left. - (R_{s,\mu(\mu')}^{l+m-1,d} \circ \phi(f))(x^{s,\mu(\mu')+\beta(\mu(\mu'))\gamma}) \right| \\
& = c_{22} 2^{k(|\kappa|-d/q)} \max_{\gamma \in \mathbb{Z}_{+l+m-1}^d} \left| (S_{k,\nu}^{l+m-1,d} f)(x^{s,\mu(\mu')+\beta(\mu(\mu'))\gamma}) \right. \\
& \quad \left. - f(x^{s,\mu(\mu')+\beta(\mu(\mu'))\gamma}) \right| \\
& \leq c_{22} 2^{k(|\kappa|-d/q)} \sup_{x \in D_{k,\nu}^d} \left| (S_{k,\nu}^{l+m-1,d} f)(x) - f(x) \right| \\
& = c_{22} 2^{k(|\kappa|-d/q)} \left\| f - S_{k,\nu}^{l+m-1,d} f \right\|_{L_\infty(D_{k,\nu}^d)} \\
& \leq c_{22} 2^{k(|\kappa|-d/q)} c_{11} \int_0^{2^{(l+m+4)2^{-k}}} t^{l-2d/p-1} \\
& \quad \times \left(\int_{2tB^d} \int_{(D_{k,\nu}^d)_{m\xi}} \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}'_{+l}} |\Delta_\xi^m \mathcal{D}^\gamma f(\eta)|^p d\eta d\xi \right)^{1/p} dt \\
& = c_{23} 2^{k(|\kappa|-d/q)} \int_0^{c2^{-k}} t^{l-2d/p-1} \\
& \quad \times \left(\int_{2tB^d} \int_{(D_{k,\nu}^d)_{m\xi}} \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}'_{+l}} |\Delta_\xi^m \mathcal{D}^\gamma f(\eta)|^p d\eta d\xi \right)^{1/p} dt.
\end{aligned} \tag{2.1.21}$$

Выбирая $\epsilon \geq 0$ так, чтобы удовлетворить условию $\alpha - d/p - \epsilon > 0$, и применяя неравенство Гёльдера, из (2.1.21) при $\nu \in N_{2^k}^d$ и $\mu' \in N_s'^d$, $Q_{k,\nu}^d \cap \text{supp } g_{s,\mu'}^d \neq \emptyset$, получаем

$$\left\| \mathcal{D}^\kappa S_{k,\nu}^{l+m-1,d} f - \mathcal{D}^\kappa R_{s,\mu(\mu')}^{l+m-1,d} \circ \phi(f) \right\|_{L_q(Q_{k,\nu}^d)}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq c_{23} 2^{k(|\kappa|-d/q)} \int_0^{c2^{-k}} t^{l-2d/p-\epsilon-1/q} \\
 &\quad \times \left(\int_{2tB^d} \int_{(D_{k,\nu}^d)_{m\xi}} \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}_{+l}^d} |\Delta_\xi^m \mathcal{D}^\gamma f(\eta)|^p d\eta d\xi \right)^{1/p} t^{\epsilon-1/q'} dt \\
 &\leq c_{23} 2^{k(|\kappa|-d/q)} \left(\int_0^{c2^{-k}} t^{q(l-2d/p-\epsilon)-1} \right. \\
 &\quad \times \left. \left(\int_{2tB^d} \int_{(D_{k,\nu}^d)_{m\xi}} \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}_{+l}^d} |\Delta_\xi^m \mathcal{D}^\gamma f(\eta)|^p d\eta d\xi \right)^{q/p} dt \right)^{1/q} \\
 &\quad \times \left(\int_0^{c2^{-k}} t^{\epsilon q'-1} dt \right)^{1/q'} \\
 &= c_{24} 2^{k(|\kappa|-d/q-\epsilon)} \left(\int_0^{c2^{-k}} t^{q(l-2d/p-\epsilon)-1} \right. \\
 &\quad \times \left. \left(\int_{2tB^d} \int_{(D_{k,\nu}^d)_{m\xi}} \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}_{+l}^d} |\Delta_\xi^m \mathcal{D}^\gamma f(\eta)|^p d\eta d\xi \right)^{q/p} dt \right)^{1/q}. \quad (2.1.22)
 \end{aligned}$$

Принимая во внимание (2.1.22) и (2.1.11), находим

$$\begin{aligned}
 &\sum_{\nu \in N_{2^k}^d} \left(\sum_{\{\mu' \in N_s^d: Q_{k,\nu}^d \cap \text{supp } g_{s,\mu'}^d \neq \emptyset\}} \left\| \mathcal{D}^\kappa S_{k,\nu}^{l+m-1,d} f \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \mathcal{D}^\kappa R_{s,\mu(\mu')}^{l+m-1,d} \circ \phi(f) \right\|_{L_q(Q_{k,\nu}^d)} \right)^q \\
 &\leq \sum_{\nu \in N_{2^k}^d} \left(4^d c_{24} 2^{k(|\kappa|-d/q-\epsilon)} \left(\int_0^{c2^{-k}} t^{q(l-2d/p-\epsilon)-1} \right. \right. \\
 &\quad \times \left. \left. \left(\int_{2tB^d} \int_{(D_{k,\nu}^d)_{m\xi}} \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}_{+l}^d} |\Delta_\xi^m \mathcal{D}^\gamma f(\eta)|^p d\eta d\xi \right)^{q/p} dt \right)^{1/q} \right)^q \\
 &= (c_{25} 2^{k(|\kappa|-d/q-\epsilon)})^q \sum_{\nu \in N_{2^k}^d} \int_0^{c2^{-k}} t^{q(l-2d/p-\epsilon)-1} \\
 &\quad \times \left(\int_{2tB^d} \int_{(D_{k,\nu}^d)_{m\xi}} \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}_{+l}^d} |\Delta_\xi^m \mathcal{D}^\gamma f(\eta)|^p d\eta d\xi \right)^{q/p} dt \\
 &= (c_{25} 2^{k(|\kappa|-d/q-\epsilon)})^q \int_0^{c2^{-k}} t^{q(l-2d/p-\epsilon)-1} \\
 &\quad \times \sum_{\nu \in N_{2^k}^d} \left(\int_{2tB^d} \int_{(D_{k,\nu}^d)_{m\xi}} \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}_{+l}^d} |\Delta_\xi^m \mathcal{D}^\gamma f(\eta)|^p d\eta d\xi \right)^{q/p} dt, \quad (2.1.23)
 \end{aligned}$$

а в силу тех же обстоятельств, что использовались при выводе (2.1.20), при $q \geq p$ имеем

$$\begin{aligned}
& \sum_{\nu \in N_{2^k}^d} \left(\int_{2tB^d} \int_{(D_{k,\nu}^d)_{m\xi}} \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}_{+l}^d} |\Delta_\xi^m \mathcal{D}^\gamma f(\eta)|^p d\eta d\xi \right)^{q/p} \\
& \leq \left(\sum_{\nu \in N_{2^k}^d} \int_{2tB^d} \int_{(D_{k,\nu}^d)_{m\xi}} \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}_{+l}^d} |\Delta_\xi^m \mathcal{D}^\gamma f(\eta)|^p d\eta d\xi \right)^{q/p} \\
& = \left(\int_{2tB^d} \sum_{\nu \in N_{2^k}^d} \int_{(D_{k,\nu}^d)_{m\xi}} \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}_{+l}^d} |\Delta_\xi^m \mathcal{D}^\gamma f(\eta)|^p d\eta d\xi \right)^{q/p} \\
& \leq \left(\int_{2tB^d} \sum_{\nu \in N_{2^k}^d} \int_{D_{k,\nu}^d \cap I_{m\xi}^d} \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}_{+l}^d} |\Delta_\xi^m \mathcal{D}^\gamma f(\eta)|^p d\eta d\xi \right)^{q/p} \\
& = \left(\int_{2tB^d} \int_{I_{m\xi}^d} \left(\sum_{\nu \in N_{2^k}^d} \chi_{D_{k,\nu}^d}(\eta) \right) \left(\sum_{\gamma \in \mathbb{Z}_{+l}^d} |\Delta_\xi^m \mathcal{D}^\gamma f(\eta)|^p \right) d\eta d\xi \right)^{q/p} \\
& \leq \left(\int_{2tB^d} \int_{I_{m\xi}^d} c_{15} \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}_{+l}^d} |\Delta_\xi^m \mathcal{D}^\gamma f(\eta)|^p d\eta d\xi \right)^{q/p} \\
& \leq c_{15}^{q/p} \left(\sum_{\gamma \in \mathbb{Z}_{+l}^d} \left(\int_{2tB^d} \int_{I_{m\xi}^d} |\Delta_\xi^m \mathcal{D}^\gamma f(\eta)|^p d\eta d\xi \right)^{1/p} \right)^q \\
& \leq c_{15}^{q/p} \left(\sum_{\gamma \in \mathbb{Z}_{+l}^d} \left(\int_{2tB^d} (\Omega^m(\mathcal{D}^\gamma f, 2t)_{L_p(I^d)})^p d\xi \right)^{1/p} \right)^q \\
& \leq \left(c_{15}^{1/p} (4t)^{d/p} (2t)^{\alpha-l} \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}_{+l}^d} \sup_{\tau > 0} \tau^{-(\alpha-l)} \Omega^m(\mathcal{D}^\gamma f, \tau)_{L_p(I^d)} \right)^q \\
& \leq (c_{26} t^{\alpha-l+d/p})^q. \tag{2.1.24}
\end{aligned}$$

Подставляя (2.1.24) в правую часть (2.1.23), приходим к выводу, что при $q \geq p$ справедливо неравенство

$$\sum_{\nu \in N_{2^k}^d} \left(\sum_{\{\mu' \in N_s^d : Q_{k,\nu}^d \cap \text{supp } g_{s,\mu'}^d \neq \emptyset\}} \|\mathcal{D}^\kappa S_{k,\nu}^{l+m-1,d} f\|
\right)$$

$$\begin{aligned}
 & \left(-\mathcal{D}^\kappa R_{s,\mu}^{l+m-1,d} \circ \phi(f) \right\|_{L_q(Q_{k,\nu}^d)} \Big)^q \\
 & \leq (c_{25} 2^{k(|\kappa|-d/q-\epsilon)})^q \int_0^{c2^{-k}} t^{q(l-2d/p-\epsilon)-1} (c_{26} t^{\alpha-l+d/p})^q dt \\
 & = (c_{27} 2^{k(|\kappa|-d/q-\epsilon)})^q \int_0^{c2^{-k}} t^{q(\alpha-d/p-\epsilon)-1} dt \\
 & = (c_{27} 2^{k(|\kappa|-d/q-\epsilon)})^q \frac{1}{q(\alpha-d/p-\epsilon)} (c2^{-k})^{q(\alpha-d/p-\epsilon)} \\
 & = (c_{28} 2^{-k(\alpha-|\kappa|-d/p+d/q)})^q. \tag{2.1.25}
 \end{aligned}$$

Соединяя (2.1.18), (2.1.20), (2.1.25) и учитывая (2.1.5), получаем, что при $q \geq p$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\nu \in N_{2^k}^d} \left(\sum_{\{\mu' \in N_s^{l,d} : Q_{k,\nu}^d \cap \text{supp } g_{s,\mu'}^d \neq \emptyset\}} \left\| (\mathfrak{S}_{k,\nu}^{l-|\kappa|+m-1,d,0} \mathcal{D}^\kappa f \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \mathcal{D}^\kappa R_{s,\mu}^{l+m-1,d} \circ \phi(f)) \mathcal{D}^{\lambda-\kappa} g_{s,\mu'}^d \right\|_{L_q(Q_{k,\nu}^d)} \right)^q \\
 & \leq (c_{29} 2^{-k(\alpha-|\lambda|-d/p+d/q)})^q,
 \end{aligned}$$

которое вместе с (2.1.16) дает

$$\begin{aligned}
 & \left\| \sum_{\mu' \in N_s^{l,d}} (\mathcal{W}_k^{l-|\kappa|+m-1,d,0} \mathcal{D}^\kappa f - \mathcal{D}^\kappa R_{s,\mu}^{l+m-1,d} \circ \phi(f)) \mathcal{D}^{\lambda-\kappa} g_{s,\mu'}^d \right\|_{L_q(I^d)} \\
 & \leq c_{29} 2^{-k(\alpha-|\lambda|-d/p+d/q)}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}_+^d(\lambda). \tag{2.1.26}
 \end{aligned}$$

Объединяя (2.1.14), (2.1.15) и (2.1.26), заключаем, что при $q \geq p$ для $f \in K$ при $\lambda \in \mathbb{Z}_{+,r}^d$ имеет место неравенство

$$\|\mathcal{D}^\lambda f - \mathcal{D}^\lambda A \circ \phi(f)\|_{L_q(I^d)} \leq c_{30} 2^{-k(\alpha-|\lambda|-d/p+d/q)}$$

и, следовательно,

$$\|f - A \circ \phi(f)\|_X \leq c_{31} 2^{-k(\alpha-r-d/p+d/q)}.$$

Отсюда в силу (2.1.5) получаем (2.1.4) при $q \geq p$.

Если же $q < p$, то $W_p^r(I^d) \subset W_q^r(I^d)$, и для $g \in W_p^r(I^d)$ имеем $\|g\|_{W_q^r(I^d)} \leq \|g\|_{W_p^r(I^d)}$. Поэтому $\sigma_n(K, C(I^d), W_q^r(I^d)) \leq \sigma_n(K, C(I^d), W_p^r(I^d))$, и, следовательно, неравенство (2.1.4) справедливо и при $q < p$.

Проведенное доказательство сохраняет свою силу и при $q = \infty$, если произвести соответствующую корректировку соотношений (2.1.16), (2.1.18), (2.1.20), (2.1.23)–(2.1.25) и опустить (2.1.22).

Прямым следствием теоремы 2.1.2 и включения (1.1.2) является

ТЕОРЕМА 2.1.3. Пусть $K = \mathcal{B}_{p,\theta}^\alpha(I^d)$, $X = W_q^r(I^d)$ с α, d, p, q, r , удовлетворяющими условиям теоремы 2.1.2, и $1 \leq \theta < \infty$. Тогда при $n \geq n_0(\alpha, d)$ соблюдается неравенство (2.1.4) с константой c_{14} , зависящей от $\alpha, d, p, q, r, \theta$.

2.2. В этом пункте устанавливается оценка снизу наилучшей точности восстановления в метрике $W_q^r(I^d)$ по значениям в n точках функций из классов $\mathcal{H}_p^\alpha(I^d)$ и $\mathcal{B}_{p,\theta}^\alpha(I^d)$.

ТЕОРЕМА 2.2.1. В условиях теоремы 2.1.3 существует константа $c_{32}(\alpha, r, d, p, \theta, q) > 0$ такая, что при $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\sigma_n(K, C(I^d), X) \geq c_{32} n^{-(\alpha-r)/d+(1/p-1/q)_+}. \quad (2.2.1)$$

В основе доказательства теоремы 2.2.1 лежит

ЛЕММА 2.2.2. Пусть $\alpha > 0$, $d \in \mathbb{N}$, $1 \leq p, q \leq \infty$, $1 \leq \theta < \infty$, $l = [\alpha]$, если $\alpha \notin \mathbb{Z}$, $l = \alpha - 1$, если $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\lambda \in \mathbb{Z}_+^d$. Тогда существует константа $c_{33}(\alpha, \lambda, d, p, \theta, q) > 0$ такая, что для любого $n \in \mathbb{N}$ и любых точек $x^1, \dots, x^n \in I^d$ можно построить функцию $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{B}_{p,\theta}^\alpha(I^d)$, для которой

$$f(x^i) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.2.2)$$

$$\|\mathcal{D}^\lambda f\|_{L_q(I^d)} \geq c_{33} n^{-(\alpha-|\lambda|)/d+(1/p-1/q)_+}. \quad (2.2.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего фиксируем функцию $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ такую, что $\phi \not\equiv 0$, и ее носитель есть $\text{supp } \phi \subset I^d$. Для произвольных $s \in \mathbb{N}$, $N \subset \mathbb{N}_s^d$ и $\beta = \{\beta_\nu \in \mathbb{R} : \nu \in N\}$ рассмотрим функцию

$$f_{s,N,\beta}(x) = \sum_{\nu \in N} \beta_\nu \phi(sx - \nu).$$

Тогда ясно, что $f_{s,N,\beta} \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\text{supp } f_{s,N,\beta} \subset \bigcup_{\nu \in N} (s^{-1}\nu + s^{-1}I^d)$ и при $1 \leq \rho \leq \infty$ для $\kappa \in \mathbb{Z}_+^d$ справедливо равенство

$$\|\mathcal{D}^\kappa f_{s,N,\beta}\|_{L_\rho(I^d)} = \|\mathcal{D}^\kappa \phi\|_{L_\rho(I^d)} s^{|\kappa|-d/\rho} \|\beta\|_\rho^N, \quad (2.2.4)$$

где

$$\|\beta\|_\rho^N = \begin{cases} \left(\sum_{\nu \in N} |\beta_\nu|^\rho \right)^{1/\rho} & \text{при } 1 \leq \rho < \infty, \\ \max_{\nu \in N} |\beta_\nu| & \text{при } \rho = \infty. \end{cases}$$

Пусть теперь $n \in \mathbb{N}$ и $x^1, \dots, x^n \in I^d$. Выберем $s \in \mathbb{N}$ так, чтобы было

$$(s-1)^d < 2n \leq s^d, \quad (2.2.5)$$

и множество $N \subset N_s^d$:

$$N = \{\nu \in N_s^d: x^j \notin s^{-1}\nu + s^{-1}I^d \quad \forall j = 1, \dots, n\}.$$

Тогда, полагая $m = 1$, если $\alpha \notin \mathbb{Z}$, и $m = 2$, если $\alpha \in \mathbb{Z}$, для функции $g = \tau s^{-\alpha+d/p} f_{s,N,\beta}$ при $\tau > 0$ и $\|\beta\|_p^N \leq 1$ для $\kappa \in \mathbb{Z}'_{+l}$ в силу (2.2.4), с одной стороны, имеем

$$\begin{aligned} \|\Delta_h^m \mathcal{D}^\kappa g\|_{L_p(I_{mh}^d)} &\leq 2^m \|\mathcal{D}^\kappa g\|_{L_p(I^d)} = 2^m \tau s^{-\alpha+d/p} \|\mathcal{D}^\kappa \phi\|_{L_p(I^d)} s^{l-d/p} \|\beta\|_p^N \\ &= \tau c_{34} s^{-\alpha+l} \|\beta\|_p^N \leq \tau c_{34} s^{-\alpha+l}, \quad h \in \mathbb{R}^d, \end{aligned}$$

и, значит,

$$\Omega^m(\mathcal{D}^\kappa g, t)_{L_p(I^d)} \leq \tau c_{34} s^{-\alpha+l}, \quad (2.2.6)$$

с другой стороны, имеем ввиду (1.2.24)

$$\begin{aligned} \|\Delta_h^m \mathcal{D}^\kappa g\|_{L_p(I_{mh}^d)} &\leq m! \|h\|^m \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}'_{+m}} \|\mathcal{D}^{\kappa+\gamma} g\|_{L_p(I^d)} \\ &= m! \|h\|^m \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}'_{+m}} \tau s^{-\alpha+d/p} \|\mathcal{D}^{\kappa+\gamma} \phi\|_{L_p(I^d)} s^{|\kappa+\gamma|-d/p} \|\beta\|_p^N \\ &= \tau c_{35} s^{-\alpha+l+m} \|h\|^m \|\beta\|_p^N \leq \tau c_{35} s^{-\alpha+l+m} \|h\|^m, \quad h \in \mathbb{R}^d, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\Omega^m(\mathcal{D}^\kappa g, t)_{L_p(I^d)} \leq \tau c_{35} s^{-\alpha+l+m} t^m. \quad (2.2.7)$$

Используя (2.2.6), получаем

$$\begin{aligned} \int_{s^{-1}}^\infty t^{-1-\theta(\alpha-l)} (\Omega^m(\mathcal{D}^\kappa g, t)_{L_p(I^d)})^\theta dt &\leq \int_{s^{-1}}^\infty t^{-1-\theta(\alpha-l)} (\tau c_{34} s^{-\alpha+l})^\theta dt \\ &= (\tau c_{34})^\theta s^{-\theta(\alpha-l)} \int_1^\infty (s^{-1}u)^{-1-\theta(\alpha-l)} s^{-1} du \\ &= (\tau c_{34})^\theta \int_1^\infty u^{-1-\theta(\alpha-l)} du. \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

Применяя (2.2.7), имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{s^{-1}} t^{-1-\theta(\alpha-l)} (\Omega^m(\mathcal{D}^\kappa g, t)_{L_p(I^d)})^\theta dt &\leq \int_0^{s^{-1}} t^{-1-\theta(\alpha-l)} (\tau c_{35} s^{-\alpha+l+m} t^m)^\theta dt \\ &= (\tau c_{35})^\theta s^{\theta(l+m-\alpha)} \int_0^1 (s^{-1}u)^{-1+\theta(l+m-\alpha)} s^{-1} du \\ &= (\tau c_{35})^\theta \int_0^1 u^{\theta(l+m-\alpha)-1} du. \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

Из (2.2.8) и (2.2.9) видно, что существует константа $c_{36}(\alpha, d, p, \theta) > 0$ такая, что при $\|\beta\|_p^N \leq 1$ каждая функция $c_{36}s^{-\alpha+d/p}f_{s,N,\beta}$ принадлежит $\mathcal{B}_{p,\theta}^\alpha(I^d)$.

Далее, заметим, что поскольку кубы $s^{-1}\nu + s^{-1}I^d$ при различных $\nu \in N_s^d$ не пересекаются, то для каждого $j = 1, \dots, n$ существует не более одного $\nu \in N_s^d$, для которого $x^j \in s^{-1}\nu + s^{-1}I^d$. Поэтому, учитывая (2.2.5), имеем

$$\text{kard } N = \text{kard } N_s^d - \text{kard}(N_s^d \setminus N) \geq s^d - n \geq n. \quad (2.2.10)$$

Как известно, существует $\tilde{\beta} = \{\tilde{\beta}_\nu \in \mathbb{R} : \nu \in N\}$, для которого $\|\tilde{\beta}\|_p^N = 1$ и

$$\|\tilde{\beta}\|_q^N = \max_{\|\beta\|_p^N \leq 1} \|\beta\|_q^N = (\text{kard } N)^{(1/q-1/p)+}.$$

Полагая $f = c_{36}s^{-\alpha+d/p}f_{s,N,\tilde{\beta}}$, пользуясь соотношениями (2.2.4), (2.2.5) и (2.2.10), легко убедиться в справедливости (2.2.3). Условие (2.2.2), очевидно, выполняется в силу определения множества N .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.2.1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{A}_n(X)$ и $\phi \in \Phi_n(C(I^d))$ определяется системой точек $x^1, \dots, x^n \in I^d$.

Фиксируя $\lambda \in \mathbb{Z}_{+r}^d$, возьмем функцию $f \in \mathcal{B}_{p,\theta}^\alpha(I^d)$, удовлетворяющую условиям (2.2.2), (2.2.3). Тогда $\phi(f) = \phi(0)$, и, следовательно,

$$\begin{aligned} c_{33}n^{-(\alpha-r)/d+(1/p-1/q)+} &\leq \|\mathcal{D}^\lambda f\|_{L_q(I^d)} \leq \|f\|_X \\ &= \|f - A \circ \phi(f) + A \circ \phi(0) - 0\|_X \\ &\leq \|f - A \circ \phi(f)\|_X + \|0 - A \circ \phi(0)\|_X \\ &\leq 2 \sup_{g \in K} \|g - A \circ \phi(g)\|_X. \end{aligned}$$

И, значит, в силу произвольности $\phi \in \Phi_n(C(I^d))$ и $A \in \mathcal{A}_n(X)$ имеет место (2.2.1).

Из теоремы 2.2.1 в силу включения (1.1.2) вытекает

ТЕОРЕМА 2.2.3. В условиях теоремы 2.1.2 имеет место неравенство (2.2.1) с константой c_{32} , зависящей от α, r, d, p, q .

Список литературы

1. Кудрявцев С. Н. Восстановление функций вместе с их производными по значениям функций в заданном числе точек // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 6. С. 79–104.
2. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.
3. Крейн С. Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1971.
4. Кудрявцев С. Н. Некоторые задачи теории приближений для одного класса функций конечной гладкости // Матем. сб. 1992. Т. 183. № 2. С. 3–20.

Поступило в редакцию
6.II.1997