Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. А. Ладыженская, Г. А. Серёгин, О гладкости решений систем, описывающих течения обобщенных ньютоновских жидкостей, и об оценке размерностей их аттракторов, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1998, том 62, выпуск 1, 59–122

DOI: <https://doi.org/10.4213/im183>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 06:05:42

УДК 517.9+534.231

О. А. Ладыженская, Г. А. Серегин

**О гладкости решений систем, описывающих
течения обобщенных ньютоновских жидкостей,
и об оценке размерностей их аттракторов**

Исследуются двумерные начально-краевые задачи динамики обобщенных ньютоновских жидкостей. Доказываются результаты по гладкости решений таких задач и оценкам хаусдорфовой и фрактальной размерностей их аттракторов.

Библиография: 17 наименований.

§ 1. Постановка задачи и формулировка основных результатов

Пусть D – известная скалярная функция, заданная на множестве симметричных тензоров второго ранга. Для фиксированных положительного числа T , области Ω в $\mathbb{R}^2$ и векторного поля g на $Q_T \equiv \Omega \times]0, T[$ рассмотрим в Q_T следующую систему дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\partial_t v + (\nabla v)v - \operatorname{div} \sigma = g - \nabla p, \quad (1.1_1)$$

$$\operatorname{div} v = 0, \quad (1.1_2)$$

$$\sigma = \frac{\partial D}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(v)), \quad (1.1_3)$$

$$\varepsilon(v) - \text{симметричная часть градиента } \nabla v, \quad (1.1_4)$$

в которой неизвестными являются векторное поле v и скалярная функция p .

В случае, когда потенциал D зависит только от второго инварианта своего аргумента, т.е. $D(\varepsilon) = D_0(|\varepsilon|^2)$, где ε – симметричный тензор второго ранга и $|\varepsilon| = \sqrt{\operatorname{tr} \varepsilon^2}$, система (1.1_k), $k = 1, 2, 3, 4$, описывает течение несжимаемой обобщенной ньютоновской жидкости с нелинейной вязкостью $\mu_0(|\varepsilon|^2) = 2D'_0(|\varepsilon|^2)$, поскольку

$$\sigma = \frac{\partial D}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(v)) = \mu_0(|\varepsilon(v)|^2)\varepsilon(v).$$

При этом функции v и p имеют физический смысл вектора скорости и давления.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, грант № 96-01-00824, и INTAS, грант № 94-1376.

Система (1.1_k), $k = 1, 2, 3, 4$, записана в инвариантной форме, не зависящей от выбора конкретной системы координат. Пусть x_k , $k = 1, 2$, – произвольная фиксированная ортогональная декартова система координат в $\mathbb{R}^2$. Используя координатные представления векторов и тензоров относительно выбранной системы координат, мы будем отождествлять векторы и симметричные тензоры второго ранга с элементами пространств $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{M}$ соответственно. Здесь $\mathbb{M}$ – пространство вещественных симметричных (2×2) -матриц. Таким образом, $v = (v_i)$, $\tau = (\tau_{ij})$ и т.д., где v_i и τ_{ij} – координаты вектора v и тензора τ в данной декартовой системе координат. Примем соглашение о суммировании по повторяющимся латинским индексам и положим

$$\begin{aligned} a \otimes b &= (a_i b_j), & a \odot b &= \frac{1}{2}(a \otimes b + b \otimes a), \\ a \cdot b &= a_i b_i, & |a| &= \sqrt{a \cdot a}, & \sigma a &= (\sigma_{ij} a_j), \\ \sigma : \varepsilon &= \text{tr } \sigma \varepsilon = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}, & |\sigma| &= \sqrt{\sigma : \sigma}, & \frac{\partial D}{\partial \varepsilon}(\varepsilon) &= \left(\frac{\partial D}{\partial \varepsilon_{ij}}(\varepsilon) \right) \end{aligned}$$

для $a, b \in \mathbb{R}^2$ и $\sigma, \varepsilon \in \mathbb{M}$.

Обозначим через $f_{,k}$ частную производную от функции f по переменной x_k , т.е. $f_{,k} \equiv \frac{\partial f}{\partial x_k}$. Тогда для дифференциальных операторов ∇ и div мы будем иметь представления

$$\begin{aligned} \nabla p &= (p_{,i}), & \nabla v &= (v_{i,j}), & \text{div } v &= v_{i,i}, \\ \text{div } \sigma &= (\sigma_{ij,j}) \end{aligned}$$

и, таким образом,

$$(\nabla v)v = v_k v_{,k} = (v_{i,k} v_k), \quad \varepsilon(v) = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}).$$

Система (1.1_k), $k = 1, 2, 3, 4$, должна быть дополнена начальными и краевыми условиями. В данной работе мы ограничимся случаем периодических краевых условий, предполагая, что $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_k| < 1, k = 1, 2\}$ – квадрат. Итак,

$$v|_{t=0} = \varphi \quad \text{в } \Omega \quad (1.15)$$

и

$$\begin{aligned} v|_{x_k=-1} &= v|_{x_k=1}, & \nabla v|_{x_k=-1} &= \nabla v|_{x_k=1}, \\ p|_{x_k=-1} &= p|_{x_k=1}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Начально-краевая задача (1.1_k), $k = 1, 2, \dots, 6$, будет изучаться при следующих предположениях относительно потенциала D :

$$D - \text{функция класса } C^2 \text{ и } D(0) = 0, \quad (1.21)$$

$$D(\varepsilon) \geq \nu |\varepsilon|^2, \quad \nu > 0 - \text{const}, \quad (1.22)$$

$$\left(\frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon^2}(\varepsilon) \varkappa \right) : \varkappa \equiv \frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{km}}(\varepsilon) \varkappa_{ij} \varkappa_{km} \geq 2\nu |\varkappa|^2, \quad (1.23)$$

$$\left| \frac{\partial D}{\partial \varepsilon}(\varepsilon) \right| \leq \nu_1 (|\varepsilon| + 1), \quad \nu_1 - \text{const}, \quad (1.24)$$

для всех $\varepsilon, \kappa \in \mathbb{M}$.

При $D(\varepsilon) = \nu|\varepsilon|^2$ уравнения (1.1_k), $k = 1, 2, 3, 4$, совпадают с уравнениями Навье–Стокса.

Для того чтобы аккуратно формулировать результаты по существованию и регулярности решений начально-краевой задачи (1.1_k), $k = 1, 2, \dots, 6$, введем следующие функциональные пространства:

$L_p(\omega; \mathbb{R}^k)$, $W_p^l(\omega; \mathbb{R}^k)$ – известные пространства Лебега и Соболева функций, заданных на $\omega \in \mathbb{R}^m$, со значениями в $\mathbb{R}^k$. Норму в пространстве $L_p(\omega; \mathbb{R}^k)$ будем обозначать символом $\|\cdot\|_{p,\omega}$, причем если $p = 2$, то $\|\cdot\|_\omega \equiv \|\cdot\|_{2,\omega}$, если $\omega = \Omega$, то $\|\cdot\|_p \equiv \|\cdot\|_{p,\Omega}$, и если $p = 2$ и $\omega = \Omega$, то $\|\cdot\| \equiv \|\cdot\|_{2,\Omega}$. Скалярное произведение в $L_2(\omega; \mathbb{R}^k)$ обозначается через $(\cdot, \cdot)_\omega$, а при $\omega = \Omega$ через $(\cdot, \cdot)$;

$L_p(0, T; B)$ – пространство измеримых функций на отрезке $[0, T]$ со значениями в банаховом пространстве B , имеющих конечную норму $\left(\int_0^T \|f(t)\|_B^p dt\right)^{1/p}$, если $1 \leq p < +\infty$, и $\text{ess sup}_{0 \leq t \leq T} \|f(t)\|_B$, если $p = +\infty$;

$C([0, T]; B)$ – пространство непрерывных на отрезке $[0, T]$ функций со значениями в банаховом пространстве B ;

$W_{2,\text{per}}^1(\Omega; \mathbb{R}^m) = \{f \in W_2^1(\Omega; \mathbb{R}^m) : f|_{x_k=-1} = f|_{x_k=1}, k = 1, 2\}$;

$\overset{\circ}{W}_{2,\text{per}}^1(\Omega; \mathbb{R}^m) = \{f \in W_{2,\text{per}}^1(\Omega; \mathbb{R}^m) : \int_\Omega f dx = 0\}$;

$\hat{J}^\infty$ – пространство ограничений на Ω бесконечно дифференцируемых соленоидальных функций $v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, удовлетворяющих условию периодичности $v(x + 2z) = v(x) \quad \forall x \in \Omega$ и $z \in Z^2$ и условию нормировки $\int_\Omega v dx = 0$;

H – замыкание множества $\hat{J}^\infty$ в $L_2(\Omega; \mathbb{R}^2)$, снабжаемое нормой $\|\cdot\|$ и скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ пространства $L_2(\Omega; \mathbb{R}^2)$;

H^1 – замыкание множества $\hat{J}^\infty$ в $W_2^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$, снабжаемое нормой $\|v\|_{(1)} = \|\nabla v\|$;

H^{-1} – пространство, двойственное к H^1 относительно H , с нормой $\|v\|_{(-1)} = \sup\{(v, u) : \|u\|_{(1)} = 1\}$;

H^2 – замыкание множества $\hat{J}^\infty$ в $W_2^2(\Omega; \mathbb{R}^2)$, снабжаемое нормой $\|v\|_{(2)} = \|\Delta v\|$.

Обозначим через λ_k , $k = 1, 2, \dots$, собственные значения оператора Стокса при периодических краевых условиях, т.е.

$$(\nabla \varphi^k, \nabla w) = \lambda_k(\varphi^k, w) \quad \forall w \in H^1, \quad (1.3)$$

где $\varphi^k \in H^1$, $k = 1, 2, \dots$, – соответствующие собственные функции, удовлетворяющие условиям $\|\varphi^k\| = 1$, $k = 1, 2, \dots$, и $(\varphi^k, \varphi^l) = 0$, $k, l = 1, 2, \dots$, $k \neq l$.

Глобальная однозначная разрешимость начально-краевой задачи (1.1_k), $k = 1, 2, \dots, 5$, с однородными условиями Дирихле $v|_{\partial\Omega} = 0$ в классе обобщенных решений с конечной энергетической нормой была доказана в работах [1]–[3] одного из авторов. В [4], [5] для нее доказано свойство мгновенного сглаживания, существование компактного минимального глобального B -аттрактора $\mathfrak{M}$ и ряд его важных свойств. Для краевых условий (1.1₆) все делается аналогично, и даже проще. Суммируя результаты работ [1]–[5], сформулируем следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1.1. 1) Пусть выполнены условия (1.2_k), $k = 1, 2, 3, 4$. Тогда для всех $T > 0$, $\varphi \in H$ и $g \in L_2(0, T; H^{-1})$ начально-краевая задача (1.1_k), $k = 1, 2, \dots, 6$, имеет единственное решение v , обладающее следующими свойствами:

$$v \in C([0, T]; H) \cap L_2(0, T; H^1), \quad \partial_t v \in L_2(0, T; H^{-1}).$$

Оно удовлетворяет для п.в. $t \in [0, T]$ вариационному тождеству

$$(\partial_t v(t), w) + (\nabla v(t)v(t), w) + \left(\frac{\partial D}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(v(t))), \varepsilon(w) \right) = (g(t), w) \quad \forall w \in H^1 \quad (1.4)$$

и оценке

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|v(t)\|^2 + \int_0^T (\|\nabla v(t)\|^2 + \|\partial_t v(t)\|_{(-1)}^2) dt \leq \Phi_1(T, \|\varphi\|, \|g\|_{L_2(0, T; H^{-1})}). \quad (1.5)$$

Здесь и всюду в дальнейшем мажоранты Φ_i суть непрерывные и неубывающие функции своих аргументов.

2) Если дополнительно предположить, что

$$t\partial_t g \in L_2(0, T; H^{-1}), \quad (1.6)$$

то $\sqrt{t}v \in L_\infty(0, T; H^1)$, $\sqrt{t}\partial_t v \in L_2(Q_T; \mathbb{R}^2)$, $t\partial_t v \in L_\infty(0, T; H) \cap L_2(0, T; H^1)$ и верна оценка

$$\begin{aligned} & \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} [t\|v(t)\|^2 + t^2\|\partial_t v(t)\|^2] + \int_0^T (t\|\partial_t v(t)\|^2 + t^2\|\nabla \partial_t v(t)\|^2) dt \\ & \leq \Phi_2(T, \|\varphi\|, \|g\|_{L_2(0, T; H^{-1})}, \|t\partial_t g\|_{L_2(0, T; H^{-1})}). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Как правило, за исключением специально оговоренных случаев, мы не будем следить, как наши мажоранты в оценках зависят от потенциала D .

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть выполнены условия (1.2_k), $k = 1, 2, 3, 4$, и пусть дополнительно

$$g(t) \equiv f \in H^{-1}. \quad (1.8)$$

Тогда задача (1.1_k), $k = 1, 2, \dots, 6$, однозначно разрешима для всех $T > 0$ и $\varphi \in H$, а ее разрешающие операторы $V_t: H \rightarrow H$ ($V_t(\varphi) \equiv v(t)$), $t \geq 0$, образуют полугруппу класса I , имеющую B -поглощающие множества вида

$$\{u \in H: \|u\| < R\}, \quad R > R_0 = \frac{2\|f\|_{(-1)}}{\nu\sqrt{\lambda_1}}.$$

Эта полугруппа имеет компактный минимальный глобальный B -аттрактор $\mathfrak{M}$, который является связным инвариантным множеством в H , ограниченным в H^1 . Для любого $\varphi \in \mathfrak{M}$ решение $V_t(\varphi)$, $t \in \mathbb{R}_+^1 = \{q \in \mathbb{R}^1 : q \geq 0\}$, может быть продолжено на $\mathbb{R}_-^1 = \{q \in \mathbb{R}^1 : q < 0\}$ так, чтобы $V_t(\varphi)$ было решением системы (1.1_k), $k = 1, 2, 3, 4$, для всех $t \in \mathbb{R}^1$. Более того, имеет место оценка

$$M_1 = \sup_{\varphi \in \mathfrak{M}} \sup_{t \in \mathbb{R}^1} \left\{ \|\nabla V_t(\varphi)\|^2 + \|\partial_t V_t(\varphi)\|^2 + \int_t^{t+1} \|\nabla \partial_\theta V_\theta(\varphi)\|^2 d\theta \right\} < +\infty.$$

Число определяющих мод на $\mathfrak{M}$ конечно.

При формулировке теоремы 1.2 мы использовали терминологию из [6]. По поводу более ранних результатов, связанных с двумерными уравнениями Навье–Стокса, мы отсылаем читателя к работе [7].

В [4], [5] мы не сумели доказать конечномерность аттрактора $\mathfrak{M}$, поскольку не обладали необходимой для этого информацией о дифференциальных свойствах решения задачи (1.1_k), $k = 1, 2, \dots, 6$. Некоторый прогресс в этом направлении был достигнут в [8], однако все еще недостаточный для получения оценок хаусдорфовой и фрактальной размерностей множества $\mathfrak{M}$ ($\dim_H \mathfrak{M}$ и $\dim_f \mathfrak{M}$ соответственно). В настоящей работе для случая периодических краевых условий мы устанавливаем ряд новых результатов по регулярности решений задачи (1.1_k), $k = 1, 2, \dots, 6$, и доказываем конечномерность аттрактора $\mathfrak{M}$ двумя способами. Первый из них проще, но оценки для $\dim_H \mathfrak{M}$ и $\dim_f \mathfrak{M}$ получаются хуже. Второй способ, описанный в [6], дает более точные оценки. Но для обоснования его применимости мы должны доказывать “равномерную дифференцируемость” разрешающих операторов на аттракторе $\mathfrak{M}$, что требует большей гладкости траекторий на $\mathfrak{M}$ по сравнению с первым способом.

Сформулируем основные результаты данной работы, вводя следующие обозначения:

$$I =]0, T[, \quad I_\delta =]\delta, T[, \quad Q_{\delta, T} = \Omega \times I_\delta, \quad \delta \in]0, T[.$$

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть выполнены все условия теоремы 1.1, и пусть дополнительно

$$L \equiv \sup_{\varepsilon \in \mathbb{M}} \left| \frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon^2}(\varepsilon) \right| = \sup_{\varepsilon \in \mathbb{M}} \sqrt{\frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{km}}(\varepsilon) \frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{km}}(\varepsilon)} < +\infty. \quad (1.9)$$

Тогда $t\partial_{t^2} v \in L_2(I; H^{-1})$ и верна оценка

$$\|t\partial_{t^2} v\|_{L_2(I; H^{-1})} \leq \Phi_3(T, \|\varphi\|, \|g\|_{L_2(I; H^{-1})}, \|t\partial_t g\|_{L_2(I; H^{-1})}). \quad (1.10)$$

Более того, если

$$\sqrt{t} g \in L_2(Q_T; \mathbb{R}^2), \quad (1.11)$$

то $\sqrt{t} \nabla^2 v \in L_2(Q_T; \mathbb{R}^8)$, причем

$$\|\sqrt{t} \nabla^2 v\|_{Q_T} \leq \Phi_4(T; \|\varphi\|, \|g\|_{L_2(I; H^{-1})}, \|t\partial_t g\|_{L_2(I; H^{-1})}, \|\sqrt{t} g\|_{Q_T}). \quad (1.12)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Из утверждений теорем 1.1 и 1.3, в частности, следует, что $t\partial_t v \in C([0, T]; H)$ и $t\nabla v \in C([0, T]; L_2(\Omega; \mathbb{R}^4))$.

Следующее утверждение является ключевым в первом способе оценивания $\dim_H \mathfrak{M}$ и $\dim_f \mathfrak{M}$.

ТЕОРЕМА 1.4. Пусть выполнены условия (1.2_k), $k = 1, 2, 3$, (1.8), (1.9), и пусть функция $u \in H^1$ удовлетворяет вариационному тождеству

$$\left(\frac{\partial D}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(u)), \varepsilon(w) \right) = (f, w) \quad \forall w \in H^1. \quad (1.13)$$

Тогда если $f \in L_2(\Omega; \mathbb{R}^2)$, то $u \in H^2$ и верна оценка

$$\|\nabla^2 u\| \leq C_0 \|f\|. \quad (1.14)$$

Более того, если

$$f \in L_{2+\alpha_0}(\Omega; \mathbb{R}^2) \quad \text{при} \quad \alpha_0 > 0, \quad (1.15)$$

то существует число $\alpha_1 \in]0, \alpha_0]$, не зависящее от f , такое, что $u \in W_{2+\alpha_1}^2(\Omega; \mathbb{R}^2)$ и верна оценка

$$\|\nabla^2 u\|_{2+\alpha_1} \leq C'_0 \|f\|_{2+\alpha_1}. \quad (1.16)$$

Теорема 1.4 позволяет доказать следующую лемму.

ЛЕММА 1.1. Пусть выполнены условия (1.2_k), $k = 1, 2, 3$, (1.9), (1.8), (1.15), и пусть дополнительно

$$L_1 = \sup_{\varepsilon \in \mathbb{M}} \left| \frac{\partial^3 D}{\partial \varepsilon^3}(\varepsilon) \right| < +\infty. \quad (1.17)$$

Тогда существует число $m > 0$ такое, что

$$\|V_1(\varphi^1) - V_1(\varphi)\|_{(1)} \leq m \|\varphi^1 - \varphi\| \quad \forall \varphi^1, \varphi \in \mathfrak{M}. \quad (1.18)$$

Применяя теорему 1 из [9], получаем следующие оценки $\dim_H \mathfrak{M}$ и $\dim_f \mathfrak{M}$.

ТЕОРЕМА 1.5. Пусть выполнены все условия леммы 1.1. Тогда

$$\dim_H \mathfrak{M} \leq \dim_f \mathfrak{M} \leq N \frac{\ln \left(\frac{8\kappa^2 l^2}{1-\delta^2} \right)}{\ln \left(\frac{2}{1+\delta^2} \right)}, \quad (1.19)$$

где N выбрано так, чтобы $\delta \equiv \frac{m}{\sqrt{\lambda_{N+1}}} < 1$, $l = \frac{m}{\sqrt{\lambda_1}}$, а κ – постоянная Гаусса.

Перейдем к описанию результатов по регулярности решения задачи (1.1_k), $k = 1, 2, \dots, 6$, достаточных для доказательства конечномерности аттрактора $\mathfrak{M}$ вторым способом.

ТЕОРЕМА 1.6. Пусть выполнены все условия теорем 1.1 и 1.3, и пусть дополнительно

$$t^{\frac{5}{2}} \partial_t g \in L_2(Q_T; \mathbb{R}^2). \quad (1.20)$$

Тогда

$$t^{\frac{5}{2}} \partial_t v \ln(2 + |\partial_t v|^2) \in L_\infty(I; L_2(\Omega; \mathbb{R}^2)), \quad (1.21_1)$$

$$t^{\frac{5}{2}} \partial_t v \ln(2 + |\partial_t v|^2) \in L_2(Q_T; \mathbb{R}^4) \quad (1.21_2)$$

и верна оценка

$$\begin{aligned} & \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \left\| t^{\frac{5}{2}} \partial_t v(t) \ln(2 + |\partial_t v(t)|^2) \right\|^2 + \left\| t^{\frac{5}{2}} \nabla \partial_t v \ln(2 + |\partial_t v|^2) \right\|_{Q_T}^2 \\ & \leq \Phi_5 \left(T, \|\varphi\|, \|g\|_{L_2(I; H^{-1})}, \|t \partial_t g\|_{L_2(I; H^{-1})}, \|t^{\frac{1}{2}} g\|_{Q_T}, \|t^{\frac{5}{2}} \partial_t g\|_{Q_T} \right). \end{aligned} \quad (1.22)$$

Здесь и всюду в дальнейшем мы будем считать, что все наши функции периодически продолжены на все пространство $\mathbb{R}^2$. Для произвольных точки $x_0 \in \mathbb{R}^2$ и числа $R \in]0, 1[$ мы полагаем

$$\omega(x_0, R) = \{x \in \mathbb{R}^2: |x_k - x_{0k}| < R, \quad k = 1, 2\}.$$

СЛЕДСТВИЕ 1.1 (локальный вариант теоремы 1.6). В условиях теоремы 1.6 имеет место следующая оценка:

$$\operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \left\| t^{\frac{5}{2}} \partial_t v(t) \right\|_{\omega(x_0, R)}^2 \leq \frac{1}{\ln^2 \frac{1}{R}} \Phi_6, \quad 0 < R \leq \frac{1}{2}, \quad (1.23)$$

в которой мажоранта Φ_6 зависит от тех же аргументов, что и Φ_5 .

Оценка типа (1.23) справедлива и для $\nabla^2 v$.

ТЕОРЕМА 1.7. Пусть выполнены все условия теоремы 1.6, и пусть дополнительно

$$t^{\frac{5}{2}} g \in L_\infty(I; L_{2+\gamma_0}(\Omega; \mathbb{R}^2)), \quad \gamma_0 > 0. \quad (1.24)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \left\| t^{\frac{5}{2}} \nabla^2 v(t) \right\|_{\omega(x_0, R)}^2 & \leq \frac{1}{\ln \frac{1}{R}} \Phi_7 \left(T, \|\varphi\|, \|g\|_{L_2(I; H^{-1})}, \|t \partial_t g\|_{L_2(I; H^{-1})}, \right. \\ & \left. \|t^{\frac{1}{2}} g\|_{Q_T}, \|t^{\frac{5}{2}} \partial_t g\|_{Q_T}, \|t^{\frac{5}{2}} g\|_{L_\infty(I; L_{2+\gamma_0}(\Omega; \mathbb{R}^2))} \right) \end{aligned} \quad (1.25)$$

для всех $x_0 \in \mathbb{R}^2$ и $0 < R \leq 1/4$.

При помощи следствия 1.1 и теоремы 1.7 мы доказываем две оценки, на которых основан второй способ доказательства конечномерности аттрактора $\mathfrak{M}$.

ТЕОРЕМА 1.8. Пусть выполнены условия теоремы (1.7) и условие (1.17), и пусть дополнительно

$$g \in L_2(I_\delta; W_{2,\text{per}}^1(\Omega; \mathbb{R}^2)) \quad \forall \delta \in]0, T[. \quad (1.26)$$

Тогда для всех $\delta_1 \in]\delta, T[$ мы имеем

$$\begin{aligned} \nabla^2 v &\in L_\infty(I_{\delta_1}; L_2(\Omega; \mathbb{R}^8)), & \nabla \partial_t v &\in L_\infty(I_{\delta_1}; L_2(\Omega; \mathbb{R}^4)), \\ \nabla^3 v &\in L_2(Q_{\delta_1, T}; \mathbb{R}^{16}), & \nabla^2 \partial_t v &\in L_2(Q_{\delta_1, T}; \mathbb{R}^8). \end{aligned} \quad (1.27)$$

Более того, верны две оценки:

$$\begin{aligned} &\text{ess sup}_{\delta_1 \leq t \leq T} \|\nabla^2 v(t)\|^2 + \|\nabla^3 v\|_{Q_{\delta_1, T}}^2 \\ &\leq \Phi_8 \left(T, \|\varphi\|, \|g\|_{L_2(I; H^{-1})}, \|t \partial_t g\|_{L_2(I; H^{-1})}, \|t^{\frac{1}{2}} g\|_{Q_T}, \|t^{\frac{5}{2}} \partial_t g\|_{Q_T}, \right. \\ &\quad \left. \|t^{\frac{5}{2}} g\|_{L_\infty(I; L_{2+\gamma_0}(\Omega; \mathbb{R}^2))}, \|\text{curl } g\|_{Q_{\delta, T}}, \frac{1}{\delta_1 - \delta}, \frac{1}{\delta} \right) \end{aligned} \quad (1.28)$$

и

$$\text{ess sup}_{\delta_1 \leq t \leq T} \|\nabla \partial_t v(t)\|^2 + \|\nabla^2 \partial_t v\|_{Q_{\delta_1, T}}^2 \leq \Phi_9, \quad (1.29)$$

где $0 < \delta < \delta_1$ и мажоранта Φ_9 зависит от тех же аргументов, что и Φ_8 .

СЛЕДСТВИЕ 1.2. В условиях теоремы 1.8 верны следующие утверждения:

$$\nabla^2 v \in C(\bar{I}_{\delta_1}; L^2(\Omega; \mathbb{R}^8)), \quad (1.30)$$

$$\|\nabla v\|_{W_4^1(Q_{\delta_1, T}; \mathbb{R}^4)} \leq \Phi_{10}, \quad (1.31)$$

$$\|v\|_{C^1(\bar{Q}_{\delta_1, T}; \mathbb{R}^2)} \leq \Phi_{11} \quad (1.32)$$

для всех $0 < \delta < \delta_1$, а мажоранты Φ_{10} , Φ_{11} зависят от тех же аргументов, что и Φ_8 .

Следующее утверждение, дополняющее теорему 1.2, непосредственно вытекает из полугрупповых свойств семейства разрешающих операторов V_t и теоремы 1.8.

ТЕОРЕМА 1.9. Пусть выполнены условия (1.2_k), $k = 1, 2, 3, 4$, (1.9), (1.17), (1.8), и пусть дополнительно

$$f \in W_{2,\text{per}}^1(\Omega; \mathbb{R}^2). \quad (1.33)$$

Тогда аттрактор $\mathfrak{M}$ полугруппы $\{V_t, t \in \mathbb{R}_+, H\}$ ограничен в $H^2 \cap C^1(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^2)$ и верна оценка

$$M_2 = \sup_{\varphi \in \mathfrak{M}} \sup_{t \in \mathbb{R}^1} \int_t^{t+1} \left[\|\nabla^2 V_\theta(\varphi)\|_4^4 + \|\nabla \partial_\theta V_\theta(\varphi)\|_4^4 + \|\nabla^3 V_\theta(\varphi)\|^2 + \|\nabla^2 \partial_\theta V_\theta(\varphi)\|^2 \right] d\theta < +\infty. \quad (1.34)$$

Пусть $\psi \in H$, $v(t) = V_t(\varphi)$, $t \geq 0$, $\varphi \in H$. Рассмотрим следующую начально-краевую задачу:

$$\begin{cases} \partial_t u + (\nabla u)v + (\nabla v)u - \operatorname{div} \left(\frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon^2}(\varepsilon(v)) \varepsilon(u) \right) = 0, \\ \operatorname{div} u = 0, \end{cases} \quad (1.35_1)$$

$$u|_{t=0} = \psi, \quad (1.35_2)$$

$$\begin{cases} u|_{x_k=-1} = u|_{x_k=1}, & \nabla u|_{x_k=-1} = \nabla u|_{x_k=1}, \\ p|_{x_k=-1} = p|_{x_k=1}, & k = 1, 2. \end{cases} \quad (1.35_3)$$

Уравнения (1.35₁) получаются в результате формальной линеаризации уравнений (1.1_k), $k = 1, 2, 3, 4$, на решении v .

Задача (1.35_k), $k = 1, 2, 3$, имеет единственное решение $u \in C(\bar{I}; H) \cap L_2(I; H^1)$ с $\partial_t u \in L_2(I; H^{-1})$, $I =]0, T[$ $\forall T \in \mathbb{R}_+^1$, которое удовлетворяет вариационному тождеству

$$(\partial_t u(t), w) + (\nabla u(t)v(t) + \nabla v(t)u(t), w) + \left(\frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon^2}(\varepsilon(v(t))) \varepsilon(u(t)), \varepsilon(w) \right) = 0 \quad (1.36)$$

$\forall w \in H^1$ для п.в. $t \in [0, T]$. Это доказывается теми же методами, что и однозначная глобальная разрешимость задачи (1.1_k), $k = 1, 2, \dots, 6$. Обозначим через $\{V'_t(\varphi)\}_{t \geq 0}$ семейство линейных разрешающих операторов, действующих из H в H , полагая $u(t) = V'_t(\varphi)\psi$. Справедлива следующая

ЛЕММА 1.2. Пусть выполнены все условия теоремы 1.9. Тогда семейство линейных операторов $V'_1(\varphi): H \rightarrow H$ равномерно ограничено на $\mathfrak{M}$:

$$\sup_{\varphi \in \mathfrak{M}} \|V'_1(\varphi)\| < +\infty, \quad (1.37)$$

и существуют положительное число r и непрерывная функция $h: [0, r] \rightarrow \mathbb{R}_+^1$ такие, что $h(0) = 0$, причем

$$\|V_1(\varphi^1) - V_1(\varphi) - V'_1(\varphi)(\varphi^1 - \varphi)\| \leq h(\|\varphi^1 - \varphi\|) \|\varphi^1 - \varphi\| \quad (1.38)$$

для всех $\varphi, \varphi^1 \in \mathfrak{M}$, удовлетворяющих условию $\|\varphi^1 - \varphi\| \leq r$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пусть $U: H \rightarrow H$ – непрерывный оператор, имеющий компактное инвариантное многообразие $\mathcal{N}$, т.е. $U(\mathcal{N}) = \mathcal{N}$. Мы будем говорить, что оператор равномерно квазидифференцируем на $\mathcal{N}$, если существует семейство линейных операторов $\{W_\varphi: H \rightarrow H\}_{\varphi \in \mathcal{M}}$, удовлетворяющее требованию

$$\sup_{\varphi \in \mathcal{M}} \|W_\varphi\| < +\infty,$$

и существуют положительное число r и непрерывная функция $h: [0, r] \rightarrow \mathbb{R}_+^1$ такие, что $h(0) = 0$,

$$\|U(\varphi') - U(\varphi) - W_\varphi(\varphi' - \varphi)\| \leq h(\|\varphi' - \varphi\|) \|\varphi' - \varphi\|$$

для всех $\varphi', \varphi \in \mathcal{N}$.

Заметим, что равномерная квазидифференцируемость, вообще говоря, не влечет не только равномерной дифференцируемости оператора U на $\mathcal{N}$, но даже и его поточечной дифференцируемости на $\mathcal{N}$. Условие типа равномерной квазидифференцируемости впервые появилось, во-видимому, в [10] (см. также [11] и [12]).

В работе [6] были получены оценки фрактальной и хаусдорфовой размерностей инвариантного множества $\mathcal{N}$ оператора U в предположении, что U равномерно дифференцируем на $\mathcal{N}$. Однако все рассуждения и оценки в [6] остаются в силе, если условие равномерной дифференцируемости U на $\mathcal{N}$ заменить условием равномерной квазидифференцируемости. Поскольку утверждение леммы 1.2 в точности означает равномерную квазидифференцируемость оператора V_1 на аттракторе $\mathcal{M}$ (разумеется, таким свойством обладает любой оператор V_t), то, используя аргументы работы [6], можно доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1.10. Пусть выполнены все условия теоремы 1.9; тогда

$$\dim_H \mathcal{M} \leq \dim_f \mathcal{M} < c_* \frac{\|f\|_{(-1)}^2}{\nu^4}, \quad (1.41)$$

где c_* – абсолютная постоянная.

Наша статья организована следующим образом. В § 2 собраны вспомогательные утверждения, которые активно используются на протяжении всей статьи. Теорема 1.3 доказывается в § 3; § 4 посвящен обоснованию первого способа оценки хаусдорфовой и фрактальной размерностей аттрактора $\mathcal{M}$. Для того чтобы показать идею второго способа доказательства конечномерности аттрактора $\mathcal{M}$, мы даем в § 5 и § 7 формальные доказательства оценок теорем 1.5 и 1.8, предполагая решение достаточно гладким. Их корректные доказательства читатель найдет в § 9 и § 11 соответственно. В § 6 найдены мажоранты хаусдорфовой и фрактальной размерностей аттрактора $\mathcal{M}$ вторым способом и, в частности, доказываются теоремы 1.9 и 1.10. Наконец, § 10 содержит исследование регуляризованной задачи, используемой при доказательстве теоремы 1.8.

**§ 2. Вспомогательные соглашения,
утверждения, неравенства и тождества**

Всюду в дальнейшем постоянные, зависящие только от $\nu, \nu_1, L, L_1, \gamma_0, \alpha_0$, будут обозначаться символами C, C_1 и т.д., причем в разных неравенствах они могут иметь разные значения.

Начнем с формулировки известных утверждений относительно плотности гладких функций в пространствах, введенных в § 1.

ЛЕММА 2.1. *Имеют место следующие утверждения:*

(i) $W_{2,\text{per}}^1(\Omega; \mathbb{R}^m)$ есть замыкание в $W_2^1(\Omega; \mathbb{R}^m)$ множества ограниченных на Ω бесконечно дифференцируемых функций $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^m$, удовлетворяющих условию периодичности

$$f(x + 2z) = f(x) \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall z \in \mathbb{Z}^2;$$

(ii) $H^1 = \{v \in \mathring{W}_{2,\text{per}}^1(\Omega; \mathbb{R}^2): \operatorname{div} v = 0 \text{ в } \Omega\}$;

(iii) $H^2 = \{v \in \mathring{W}_{2,\text{per}}^1(\Omega; \mathbb{R}^2): \nabla v \in \mathring{W}_{2,\text{per}}^1(\Omega; \mathbb{R}^4), \operatorname{div} v = 0 \text{ в } \Omega\}$.

При помощи леммы 2.1 и интегрирования по частям устанавливаются следующие тождества:

$$\|\varepsilon(u)\|^2 = \frac{1}{2}(\|\nabla u\|^2 + \|\operatorname{div} u\|^2) \quad \forall u \in W_{2,\text{per}}^1(\Omega; \mathbb{R}^2), \quad (2.1)$$

$$\|\operatorname{curl} u\|^2 + \|\operatorname{div} u\|^2 = \|\nabla u\|^2 \quad \forall u \in W_{2,\text{per}}^1(\Omega; \mathbb{R}^2), \quad (2.2)$$

где $\operatorname{curl} u = u_{2,1} - u_{1,2}$,

$$\begin{aligned} (\operatorname{div} \sigma, \Delta u) &= (\sigma_{,k}, \varepsilon(u, k)) \quad \forall \sigma \in W_{2,\text{per}}^1(\Omega; \mathbb{M}), \\ \forall u \in W_{2,\text{per}}^1(\Omega; \mathbb{R}^2), \quad \nabla u &\in W_{2,\text{per}}^1(\Omega; \mathbb{R}^4). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Отметим еще одно тождество:

$$\begin{aligned} \operatorname{curl}^*(\varphi \operatorname{curl} u) &= -\varphi \Delta u + \operatorname{curl}^* \varphi \operatorname{curl} u \\ \forall \varphi \in C^1(\Omega), \quad \forall u &\in W_2^2(\Omega; \mathbb{R}^2), \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $\operatorname{curl}^* \psi = (\psi_{,2}, -\psi_{,1})$.

В дальнейшем мы будем часто использовать два неравенства: неравенство Пуанкаре

$$\|u\| \leq C \|\nabla u\| \quad \forall u \in \mathring{W}_{2,\text{per}}^1(\Omega; \mathbb{R}^2) \quad (2.5)$$

и неравенство

$$\|u\|_4^2 \leq C \|u\| \|\nabla u\| \quad \forall u \in \mathring{W}_{2,\text{per}}^1(\Omega; \mathbb{R}^2), \quad (2.6)$$

по существу доказанное в [13] (см. также [14]–[16]).

И, наконец, еще одна пара тождеств устанавливается интегрированием по частям:

$$(\operatorname{div} \sigma, \varphi \Delta u)_\omega = (\sigma_{,k}, \varphi \varepsilon(u_{,k}))_\omega + (\sigma_{,k}, u_{,k} \odot \nabla \varphi)_\omega - (\operatorname{div} \sigma, u_{,k} \varphi_{,k})_\omega \quad (2.7_1)$$

и

$$(\operatorname{div} \sigma, \varphi \Delta u)_\omega = (\sigma_{,k}, \varphi \varepsilon(u_{,k}))_\omega + (\sigma, \varepsilon(u_{,k}) \varphi_{,k})_\omega - (\sigma \nabla \varphi, \Delta u)_\omega. \quad (2.7_2)$$

Они верны для всех $\varphi \in C_0^1(\omega)$, $\sigma \in W_{2,\operatorname{loc}}^1(\omega; \mathbb{M})$ и $u \in W_{2,\operatorname{loc}}^2(\omega; \mathbb{R}^2)$.

Сделаем еще несколько замечаний, касающихся пространств H^k . Во-первых, все собственные функции задачи (1.3) принадлежат множеству $\hat{J}^\infty$. Во-вторых, мы отождествляем элементы пространств H^k с рядами Фурье по собственным функциям задачи (1.3), а именно

$$f \in H^k \Leftrightarrow f = \sum_{i=1}^{\infty} (f, \varphi^i) \varphi^i, \\ \|f\|_{(k)} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |(f, \varphi^i)|^2 \lambda_i^k \right)^{\frac{1}{2}}, \quad k = -1, 0, 1, 2, \quad H^0 \equiv H.$$

В-третьих, легко видеть, что справедливы следующие утверждения:

$$H = L_2(\Omega; \mathbb{R}^2) \cap H^{-1}, \quad H^1 = W_{2,\operatorname{per}}^1(\Omega; \mathbb{R}^2) \cap H^{-1}.$$

§ 3. Доказательство теоремы 1.3

Доказательство теоремы 1.3 есть прямое продолжение доказательства теоремы 1 из [5]. Действительно, рассмотрим галёркинские аппроксимации решения начально-краевой задачи (1.1_k), $k = 1, 2, \dots, 6$. Они имеют вид

$$v^n(x, t) = \sum_{k=1}^n a_k^n(t) \varphi^k(x),$$

где $\{\varphi^k\}_{k=1}^n$ – первые n собственных функций задачи (1.3), а коэффициенты $a_k^n(t)$ определяются в результате решения следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$(\partial_t v^k(t), w^n) + (\nabla v^n(t) v^k(t), w^n) + \left(\frac{\partial D}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(v^n(t))), \varepsilon(w^n) \right) = (g(t), w^n) \quad \forall w^n \in H_n^1, \quad (3.1_1)$$

дополненной начальным условием

$$v^n(0) = P_n \varphi = \sum_{k=1}^n (\varphi, \varphi^k) \varphi^k. \quad (3.1_2)$$

Здесь $H_n^1 = \text{Span}\{\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^n\}$, P_n – ортопроектор из H в H_n^1 . Как показано в [5], для v^n верны оценки (1.5), (1.7) теоремы 1.1.

Итак, пусть выполнено условие (1.9). Имеем для всякого $w \in H^1$

$$\begin{aligned} (\partial_{t^2} v^n(t), w) &= (\partial_{t^2} v^n, P_n w) = (\partial_t v_i^n(t) v^n(t) + v_i^n(t) \partial_t v^n(t), (P_n w), i) \\ &\quad - (\partial_t \sigma^n(t), \varepsilon(P_n w)) + (\partial_t g(t), P_n w), \end{aligned}$$

где $\sigma^n(t) = \frac{\partial D}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(v^n(t)))$. Отметим следующие неравенства:

$$\begin{aligned} |\partial_t \sigma^n(t)| &= \left| \frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon^2}(\varepsilon(v^n(t))) \varepsilon(\partial_t v^n(t)) \right| \leq C |\nabla \partial_t v^n(t)|, \\ \|P_n w\|_{(1)} &\leq \|w\|_{(1)} \quad \forall w \in H^1. \end{aligned}$$

Таким образом, три последних соотношения, неравенство (2.6) и (1.5) дают оценку

$$\begin{aligned} |(\partial_{t^2} v^n(t), w)| &\leq C_1 (\|\nabla \partial_t v^n(t)\| + \|\partial_t g(t)\|_{(-1)} + \|v^n(t)\|_4 \|\partial_t v^n(t)\|_4) \|\nabla w\| \\ &\leq C_2 \left(\|\nabla \partial_t v^n(t)\| + \|\partial_t g(t)\|_{(-1)} \right. \\ &\quad \left. + \|v^n(t)\|^{\frac{1}{2}} \|\nabla v^n(t)\|^{\frac{1}{2}} \|\partial_t v^n(t)\|^{\frac{1}{2}} \|\nabla \partial_t v^n(t)\|^{\frac{1}{2}} \right) \|\nabla w\| \\ &\leq C_3 \left(\|\nabla \partial_t v^n(t)\| + \|\partial_t g(t)\|_{(-1)}^2 + \Phi_1^{\frac{1}{2}} \|\nabla v^n(t)\| \|\partial_t v^n(t)\| \right) \|\nabla w\|. \end{aligned}$$

После умножения последнего неравенства на t и учета (1.7) будем иметь

$$t \|(\partial_{t^2} v^n(t))\|_{(-1)} \leq C \left(t \|\nabla \partial_t v^n(t)\| + t \|\partial_t g(t)\|_{(-1)} + \Phi_1^{\frac{1}{2}} \Phi_2^{\frac{1}{2}} \sqrt{t} \|\partial_t v^n(t)\| \right).$$

Отсюда и из (1.7) мы получаем оценку (1.10) для галёркинских приближений.

Перейдем к доказательству оценки (1.12) для галёркинских приближений, предполагая выполненным условие (1.11). Прежде всего отметим, что в случае периодических краевых условий мы имеем

$$\Delta v^n(t) \in H_n^1$$

для всех $t \in [0, T]$ и всех n . Это позволяет положить $w^n = \Delta v^n(t)$ в (3.1₁) и получить

$$\begin{aligned} & - (\partial_t v^n(t), \Delta v^n(t)) + (\text{div } \sigma^n(t), \Delta v^n(t)) \\ & = - (g(t), \Delta v^n(t)) - (\nabla v^n(t) v^n(t), \Delta v^n(t)). \end{aligned}$$

Принимая во внимание тождество (2.3), будем иметь

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \partial_t \|\nabla v^n(t)\|^2 + (\sigma_{,k}^n(t), \varepsilon(v_{,k}^n(t))) \\ &= \frac{1}{2} \partial_t \|\nabla v^n(t)\|^2 + \left(\frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon^2} (\varepsilon(v^n(t)) \varepsilon(v_{,k}^n(t)), \varepsilon(v_{,k}^n(t))) \right) \\ &\leq \|g(t)\| \|\nabla^2 v^n(t)\| + \|\nabla v^n(t)\|_4 \|v^n(t)\|_4 \|\nabla^2 v^n(t)\|. \end{aligned}$$

Для оценки левой части последнего неравенства воспользуемся последовательно условием (1.2₃) и тождеством (2.1), полагая $u = v_{,k}^n(t)$. Правую часть оценим при помощи неравенства (2.6). В результате будем иметь

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \partial_t \|\nabla v^n(t)\|^2 + \nu \|\nabla^2 v^n(t)\|^2 \\ &\leq \|g(t)\| \|\nabla^2 v^n(t)\| + C \|v^n(t)\|^{\frac{1}{2}} \|\nabla v^n(t)\| \|\nabla^2 v^n(t)\|^{\frac{3}{2}}, \end{aligned}$$

а после применения неравенства Юнга и оценки (1.5) получим

$$\partial_t \|\nabla v^n(t)\|^2 + \nu \|\nabla^2 v^n(t)\|^2 \leq C [\|g(t)\|^2 + \Phi_1 \|\nabla v^n(t)\|^4].$$

Осталось умножить последнее неравенство на t :

$$\begin{aligned} & \partial_t (t \|\nabla v^n(t)\|^2) + \nu t \|\nabla^2 v^n(t)\|^2 \\ &\leq C (\|\nabla v^n(t)\|^2 + t \|g(t)\|^2) + C \Phi_1 \|\nabla v^n(t)\|^2 (t \|\nabla v^n(t)\|^2), \end{aligned}$$

и установить

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq t \leq T} t \|\nabla v^n(t)\|^2 \leq C \int_0^T (\|\nabla v^n(t)\|^2 + t \|g(t)\|^2) dx \\ & \times \exp \left[C \Phi_1 \int_0^T \|\nabla^2 v(t)\|^2 dx \right] \leq C [\Phi_1 + \|\sqrt{t} g\|_{Q_T}^2] \exp(C \Phi_1^2). \end{aligned}$$

Из двух последних соотношений получаем оценку (1.12) для галёркинских приближений. Теорема 1.3 доказана.

§ 4. Первый способ доказательства конечномерности аттрактора

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.4. В силу выпуклости потенциала D не существует двух неравных функций, удовлетворяющих тождеству (1.13) с одной и той же правой частью f . Рассмотрим функцию n переменных

$$F(b_1, \dots, b_n) = \int_{\Omega} D(\varepsilon(w^n)) dx - (f, w^n),$$

где

$$w^n = \sum_{k=1}^n b_k \varphi^k \in H_n^1 = \text{Span}\{\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^n\},$$

а φ^k – собственные функции задачи (1.3). В силу условий, наложенных на потенциал D , функция F достигает своей нижней точной грани в единственной точке $(b_1^n, \dots, b_n^n)$. Необходимые условия экстремума влекут тождество

$$\left(\frac{\partial D}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(u^n)), \varepsilon(w^n) \right) = (f, w^n), \quad w^n \in H_n^1, \quad (4.1)$$

где $u^n = \sum_{k=1}^n b_k^n \varphi^k$. Рассмотрим разность (1.13) с $w = w^n$ и (4.1), взяв в них $w^n = P_n u - u^n$, где $P_n u = \sum_{k=1}^n (u, \varphi_k) \varphi^k$, и результат запишем в виде

$$\left(\frac{\partial D}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(u)) - \frac{\partial D}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(u^n)), \varepsilon(u - u^n) \right) = \left(\frac{\partial D}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(u)) - \frac{\partial D}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(u^n)), \varepsilon(u - P_n u) \right).$$

Отсюда в силу (1.23), (1.24) и (2.1) выводим неравенство

$$\begin{aligned} \nu \|u^n - u\|_{(1)}^2 &= 2\nu \|\varepsilon(u^n - u)\|^2 \leq \left(\frac{\partial D}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(u)) - \frac{\partial D}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(u^n)), \varepsilon(u - P_n u) \right) \\ &\leq C \|u - u^n\|_{(1)} \|u - P_n u\|_{(1)}. \end{aligned}$$

Так как $u \in H^1$, то $\|u - P_n u\|_{(1)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$ и, следовательно,

$$u^n \rightarrow u \quad \text{в} \quad H^1. \quad (4.2)$$

Пусть $f \in L_2(\Omega; \mathbb{R}^2)$. Как мы уже отмечали, в случае периодических краевых условий $\Delta u^n \in H_n^1$. Полагая $w^n = \Delta u^n$ в (4.1) и учитывая тождества (2.1) и (2.3), получим

$$\begin{aligned} \nu \|\nabla^2 u^n\|^2 &= 2\nu (\varepsilon(u_{,k}^n), \varepsilon(u_{,k}^n)) \leq \left(\frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon^2}(\varepsilon(u^n)) \varepsilon(u_{,k}^n), \varepsilon(u_{,k}^n) \right) \\ &= \left(\left(\frac{\partial D}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(u^n)) \right)_{,k}, \varepsilon(u_{,k}^n) \right) = \left(\text{div} \frac{\partial D}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(u^n)), \Delta u^n \right) = -(f, \Delta u^n) \end{aligned}$$

и, таким образом,

$$\|\nabla^2 u^n\| \leq \frac{\|f\|}{\nu}.$$

Отсюда и из (4.2) вытекает оценка (1.14).

Предположим теперь, что выполнено условие (1.15). Продолжим функцию u периодическим образом на все пространство $\mathbb{R}^2$. Согласно лемме 2.1 продолженная

таким образом функция принадлежит классу $W_{2,\text{loc}}^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$. Для того чтобы использовать локальные пробные функции в тождестве (1.13), поступим следующим образом. Для произвольных $x_0 \in \mathbb{R}^2$ и $R \in]0, 1[$ введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\omega(x_0, R) &= \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_k - x_{0k}| < R, \quad k = 1, 2\}, \\ \omega^z(x_0, R) &= \omega(x_0, R) + 2z, \quad z \in \mathbb{Z}^2, \\ \Xi(x_0, R) &= \bigcup_{z \in \mathbb{Z}^2} \omega^z(x_0, R), \\ \Omega(x_0, R) &= \Omega \cap \Xi(x_0, R).\end{aligned}\tag{4.3}$$

Пусть, далее, $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^2)$ – срезающая функция, удовлетворяющая условиям

$$\begin{aligned}0 &\leq \varphi \leq 1, \quad \text{spt } \varphi \subset \omega(x_0, R), \\ \varphi &\equiv 1 \quad \text{в } \omega(x_0, R/2), \\ |\nabla \varphi| &\leq \frac{C}{R}.\end{aligned}\tag{4.4_1}$$

Положим

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u(x) - (\nabla u)_{x_0, R}(x - x_0 - 2z), & x \in \omega^z(x_0, R), \quad z \in \mathbb{Z}^2, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Xi(x_0, R), \end{cases}$$

где

$$(\nabla u)_{x_0, R} = \oint_{\omega(x_0, R)} \nabla u \, dx$$

– среднее значение функции ∇u на квадрате $\omega(x_0, R)$, и

$$\hat{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x - x_0 - 2z), & x \in \omega^z(x_0, R), \quad z \in \mathbb{Z}^2, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Xi(x_0, R). \end{cases}\tag{4.4_2}$$

Легко видеть, что

$$\hat{w} = \text{curl}^*(\hat{\varphi}^2 \text{curl } \bar{u}) \in H.$$

С другой стороны, поскольку $u \in H^2$, то из (1.13) следует, что

$$-(\text{div } \sigma, w) = (f, w) \quad \forall w \in H, \quad \sigma = \frac{\partial D}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(u)).$$

Полагая $w = \hat{w}$ в последнем тождестве, получим (см. (2.4))

$$\begin{aligned}-(\text{div } \sigma, \hat{w}) &= (\text{div } \sigma, \varphi^2 \Delta u - \text{curl}^* \varphi^2 \text{curl } \bar{u})_{\omega(x_0, R)} \\ &= (f, \hat{w}) = -(f, \varphi^2 \Delta u - \text{curl}^* \varphi^2 \text{curl } \bar{u})_{\omega(x_0, R)}.\end{aligned}$$

Принимая во внимание тождество (2.7₂) и свойства (4.4₁), выводим из последнего равенства соотношение

$$\begin{aligned} \int_{\omega(x_0, R)} \varphi^2 \sigma_{,k} : \varepsilon(u_{,k}) dx &\leq C \left[\|\varphi \nabla^2 u\|_{\omega(x_0, R)} \frac{1}{R} \|\nabla \bar{u}\|_{\omega(x_0, R)} \right. \\ &\quad \left. + \|f\|_{\omega(x_0, R)} \|\varphi \nabla^2 u\|_{\omega(x_0, R)} + \|f\|_{\omega(x_0, R)} \frac{1}{R} \|\nabla \bar{u}\|_{\omega(x_0, R)} \right]. \end{aligned}$$

С другой стороны, условие (1.2₃) и интегрирование по частям дают

$$\begin{aligned} \int_{\omega(x_0, R)} \varphi^2 \sigma_{,k} : \varepsilon(u_{,k}) dx &\geq 2\nu \int_{\omega(x_0, R)} \varphi^2 \varepsilon(u_{,k}) : \varepsilon(u_{,k}) dx \\ &\geq \nu \|\varphi \nabla^2 u\|_{\omega(x_0, R)}^2 - C \|\varphi \nabla^2 u\|_{\omega(x_0, R)} \frac{1}{R} \|\nabla \bar{u}\|_{\omega(x_0, R)}. \end{aligned}$$

Итак, два последних неравенства влекут оценку

$$\int_{\omega(x_0, R)} \varphi^2 |\nabla^2 u|^2 dx \leq C \left[\int_{\omega(x_0, R)} |f|^2 dx + \frac{1}{R^2} \int_{\omega(x_0, R)} |\nabla \bar{u}|^2 dx \right]$$

для всех $R \in]0, 1[$ и всех $x_0 \in \mathbb{R}^2$. Отсюда в силу неравенства Пуанкаре

$$\left(\int_{\omega(x_0, R)} |\nabla \bar{u}|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq CR \int_{\omega(x_0, R)} |\nabla^2 u| dx.$$

Мы получаем окончательно соотношение

$$\left(\int_{\omega(x_0, R/2)} |\nabla^2 u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \left[\left(\int_{\omega(x_0, R)} |f|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \int_{\omega(x_0, R)} |\nabla u| dx \right],$$

которое является локальным вариантом обратного неравенства Гёльдера. Как известно (см., например, [17]), существуют числа $\alpha_1 \in]0, \alpha_0[$ и $R_0 \in]0, 1[$, которые не зависят от f , такие, что $\nabla^2 u \in L_{2+\alpha_1, \text{loc}}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ и имеет место оценка

$$\begin{aligned} &\left(\int_{\omega(x_0, R/2)} |\nabla^2 u|^{2+\alpha_1} dx \right)^{\frac{1}{2+\alpha_1}} \\ &\leq C \left[\left(\int_{\omega(x_0, R)} |f|^{2+\alpha_1} dx \right)^{\frac{1}{2+\alpha_1}} + \left(\int_{\omega(x_0, R)} |\nabla^2 u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \right] \end{aligned} \quad (4.5)$$

для всех $x_0 \in \mathbb{R}^2$ и $R \in]0, R_0]$. Положим $R = R_0/2$ в (4.5) и получим (см. (1.14))

$$\begin{aligned} &\left(\int_{\omega(x_0, R_0/4)} |\nabla^2 u|^{2+\alpha_1} dx \right)^{\frac{1}{2+\alpha_1}} \\ &\leq C_1 \left[\left(\int_{\Omega} |f|^{2+\alpha_1} dx \right)^{\frac{1}{2+\alpha_1}} + R_0^{\frac{2}{2+\alpha_1}-1} \left(\int_{\Omega} |\nabla^2 u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\ &\leq C_2 \left[\|f\|_{2+\alpha_1} + R_0^{\frac{\alpha_1}{2+\alpha_1}} \|f\| \right] \leq C_3 \|f\|_{2+\alpha_1} \end{aligned}$$

для всех $x_0 \in \mathbb{R}^2$. Покрывая квадрат Ω конечным числом квадратов $\omega(x_0, R_0/4)$, устанавливаем оценку (1.16). Теорема 1.4 доказана.

Отметим полезное следствие теоремы 1.4, которое в дальнейшем будет использовано.

ЛЕММА 4.1. Пусть выполнены все условия теоремы 1.3; тогда для п.в. $t \in [0, T]$ имеет место оценка

$$\|\nabla^2 v(t)\| \leq C [\|g(t)\| + \|\partial_t v(t)\| + \|v(t)\| \|\nabla v(t)\|^2]. \quad (4.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, согласно теореме 1.4 и (2.6) верна оценка

$$\begin{aligned} \|\nabla^2 v(t)\| &\leq C \|g(t) - \partial_t v(t) - \nabla v(t)v(t)\| \\ &\leq C [\|g(t)\| + \|\partial_t v(t)\| + \|\nabla v(t)\|_4 \|v(t)\|_4] \\ &\leq C_1 [\|g(t)\| + \|\partial_t v(t)\| + \|v(t)\|^{\frac{1}{2}} \|\nabla v(t)\| \|\nabla^2 v(t)\|^{\frac{1}{2}}]. \end{aligned}$$

Отсюда и из неравенства Юнга получаем (4.6). Лемма 4.1 доказана.

Перейдем к доказательству конечномерности аттрактора.

ЛЕММА 4.2. Пусть выполнены условия (1.2_k), $k = 1, 2, 3$, (1.9), (1.8) и (1.15). Тогда существует $\alpha_1 \in]0, \alpha_0]$ такое, что

$$M_3 = \sup_{\varphi \in \mathfrak{M}} \sup_{t \in \mathbb{R}} \int_t^{t+1} \|\nabla^2 V_\theta(\varphi)\|_{2+\alpha_1}^{2+\alpha_1} d\theta < +\infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 1.2 и леммы 4.1 мы имеем

$$\|\nabla^2 v(t)\| \leq C [\|f\| + M_1^{\frac{1}{2}} + R_0 M_1] \equiv M_4 \quad \forall \varphi \in \mathfrak{M}, \quad \forall t \in \mathbb{R}^1, \quad (4.7)$$

где $v(t) = V_t(\varphi)$. Теперь оценим $\|\tilde{g}(t)\|_{2+\alpha}$, где

$$\tilde{g}(t) = f - \partial_t v(t) - (\nabla v(t))v(t), \quad \alpha \in]0, \alpha_0].$$

Имеем

$$\begin{aligned} \|\tilde{g}(t)\|_{2+\alpha} &\leq \|f\|_{2+\alpha} + \|\partial_t v(t)\|_{2+\alpha} + \|v(t)\|_\infty \|\nabla v(t)\|_{2+\alpha} \\ &\leq \|f\|_{2+\alpha} + \|\partial_t v(t)\|_{2+\alpha} + C \|\nabla^2 v(t)\|^2 \\ &\leq \|f\|_{2+\alpha} + \|\partial_t v(t)\|_{2+\alpha} + C M_4^2. \end{aligned}$$

Далее воспользуемся мультипликативным неравенством (см. [15, гл. II])

$$\|\partial_t v(t)\|_{2+\alpha} \leq C \|\partial_t v(t)\|^{\frac{2}{2+\alpha}} \|\nabla \partial_t v(t)\|^{\frac{\alpha}{2+\alpha}} \leq C M_1^{\frac{1}{2+\alpha}} \|\nabla \partial_t v(t)\|^{\frac{\alpha}{2+\alpha}}.$$

Из двух последних неравенств выводим

$$\|\tilde{g}(t)\|_{2+\alpha}^{\frac{2\alpha+2}{\alpha}} \leq M_5 (\|\nabla \partial_t v(t)\|^2 + 1) \quad \forall \alpha \in]0, \alpha_0].$$

Отсюда, в частности, следует, что $\tilde{g}(t) \in L_{2+\alpha_0}(\Omega; \mathbb{R}^2)$ при п.в. всех $t \in [0, T]$.

Таким образом, мы можем применить теорему 1.4 и получить

$$\|\nabla^2 v(t)\|_{2+\alpha_1}^{\frac{2\alpha_1+2}{\alpha_1}} \leq C M_5 (\|\nabla \partial_t v(t)\|^2 + 1) \quad \text{для п.в. } t \in [0, T].$$

Утверждение леммы следует из теоремы 1.2, если положить $M_3 = C M_5 (M_1 + 1)$.

Лемма доказана.

Прежде чем доказывать лемму 1.1, докажем для полноты изложения следующее известное утверждение.

ЛЕММА 4.3. Пусть выполнены условия (1.2_k), $k = 1, 2, 3, 4$, и (1.8). Тогда имеет место оценка

$$\|V_t(\varphi^1) - V_t(\varphi)\|^2 + \int_0^t \|V_\theta(\varphi^1) - V_\theta(\varphi)\|_{(1)}^2 d\theta \leq C \|\varphi^1 - \varphi\|^2 e^{CM_1 t} \quad (4.8)$$

для всех $t \geq 0$, $\varphi^1, \varphi \in \mathfrak{M}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $v^1(t) = V_t(\varphi^1)$, $v(t) = V_t(\varphi)$, $\hat{u}(t) = v^1(t) - v(t)$. Имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \partial_t \|\hat{u}(t)\|^2 + (v_k^1(t) v_{,k}^1(t) - v_k(t) v_{,k}(t), \hat{u}(t)) \\ & + \left(\frac{\partial D}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(v^1(t))) - \frac{\partial D}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(v(t))), \varepsilon(\hat{u}(t)) \right) = 0 \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{2} \partial_t \|\hat{u}(t)\|^2 + 2\nu \|\varepsilon(\hat{u}(t))\|^2 \leq |(\hat{u}_k(t) v_{,k}(t), \hat{u}(t))|.$$

Воспользуемся тождеством (2.1) и неравенством (2.6). В результате получим

$$\frac{1}{2} \partial_t \|\hat{u}(t)\|^2 + \nu \|\nabla \hat{u}(t)\|^2 \leq C \|\nabla v(t)\| \|\hat{u}(t)\| \|\nabla \hat{u}(t)\| \leq CM_1^{\frac{1}{2}} \|\hat{u}(t)\| \|\nabla \hat{u}(t)\|$$

и

$$\partial_t \|\hat{u}(t)\|^2 + \nu \|\nabla \hat{u}(t)\|^2 \leq CM_1 \|\hat{u}(t)\|^2.$$

Отсюда легко выводится (4.8). Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1.1. Используя обозначения леммы 4.2, получим из (4.1) соотношение

$$(\partial_t \hat{u} + (\nabla v^1(t)) v^1(t) - (\nabla v(t)) v(t) - \operatorname{div}(\sigma^1(t) - \sigma(t)), w) = 0 \quad \forall w \in H, \quad (4.9)$$

где

$$\sigma^1(t) = \frac{\partial D}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(v^1(t))), \quad \sigma(t) = \frac{\partial D}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(v(t))).$$

Мы знаем, что $\hat{u} \in H^2$. Но тогда для периодических краевых условий $\Delta \hat{u} \in H$. Следовательно, мы можем положить $w = \Delta \hat{u}(t)$ в (4.9). Воспользуемся теперь тождеством (1.3), и в результате будем иметь

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \partial_t \|\nabla \hat{u}(t)\|^2 + (\sigma_{,k}^1(t) - \sigma_{,k}(t), \varepsilon(\hat{u}_{,k}(t))) \leq |((\nabla \hat{u}(t)) v^1(t) + (\nabla v(t)) \hat{u}(t), \Delta \hat{u}(t))| \\ & \leq \|v^1(t)\|_\infty \|\nabla \hat{u}(t)\| \|\Delta \hat{u}(t)\| + \|\nabla v(t)\|_4 \|\hat{u}(t)\|_4 \|\Delta \hat{u}(t)\| \\ & \leq C(\|\nabla^2 v^1(t)\| + \|\nabla^2 v(t)\|) \|\nabla \hat{u}(t)\| \|\Delta \hat{u}(t)\| \leq 2CM_4 \|\nabla \hat{u}(t)\| \|\nabla^2 \hat{u}(t)\|. \end{aligned}$$

Остается оценить снизу второе слагаемое в левой части последнего неравенства.

А именно

$$\begin{aligned}
(\sigma_{,k}^1(t) - \sigma_{,k}(t), \varepsilon(\hat{u}_{,k}(t))) &= \left(\frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon^2}(\varepsilon(v^1(t))) \varepsilon(v_{,k}^1(t)) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon^2}(\varepsilon(v(t))) \varepsilon(v_{,k}(t)), \varepsilon(\hat{u}_{,k}(t)) \right) \\
&= \left(\frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon^2}(\varepsilon(v^1(t))) \varepsilon(\hat{u}_{,k}(t)), \varepsilon(\hat{u}_{,k}(t)) \right) \\
&\quad + \left(\left[\frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon^2}(\varepsilon(v^1(t))) - \frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon^2}(\varepsilon(v(t))) \right] \varepsilon(v_{,k}(t)), \varepsilon(\hat{u}_{,k}(t)) \right) \\
&\geq 2\nu(\varepsilon(\hat{u}_{,k}(t)), \varepsilon(\hat{u}_{,k}(t))) - C_1 \int_{\Omega} |\varepsilon(\hat{u}(t))| |\nabla \varepsilon(v(t))| |\nabla \varepsilon(\hat{u}(t))| \\
&\geq \nu \|\nabla^2 \hat{u}(t)\| - C_2 \int_{\Omega} |\nabla \hat{u}(t)| |\nabla^2 v(t)| |\nabla^2 \hat{u}(t)| dx.
\end{aligned}$$

Итак, два последних соотношения дают

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \partial_t \|\nabla \hat{u}(t)\|^2 + \nu \|\nabla^2 \hat{u}(t)\|^2 \\
&\leq CM_4 \|\nabla \hat{u}(t)\| \|\nabla^2 \hat{u}(t)\| + C \|\nabla^2 \hat{u}(t)\| \left(\int_{\Omega} |\nabla \hat{u}(t)|^2 |\nabla^2 v(t)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Для оценки последнего слагаемого в (4.10) воспользуемся числом α_1 леммы 4.2 и неравенством Гёльдера:

$$\left(\int_{\Omega} |\nabla \hat{u}(t)|^2 |\nabla^2 v(t)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|\nabla \hat{u}(t)\|_{2^{\frac{2+\alpha_1}{\alpha_1}}} \|\nabla^2 v(t)\|_{2+\alpha_1}. \tag{4.11}$$

Первый сомножитель в правой части неравенства (4.11) оценим при помощи мультипликативного неравенства:

$$\|\nabla \hat{u}(t)\|_{2^{\frac{2+\alpha_1}{\alpha_1}}} \leq C \|\nabla \hat{u}(t)\|^{\frac{\alpha_1}{2+\alpha_1}} \|\nabla^2 \hat{u}(t)\|^{\frac{2}{2+\alpha_1}}.$$

Отсюда, а также из (4.10) и (4.11) вытекает оценка

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \partial_t \|\nabla \hat{u}(t)\|^2 + \nu \|\nabla^2 \hat{u}(t)\|^2 \\
&\leq CM_4 \|\nabla \hat{u}(t)\| \|\nabla^2 \hat{u}(t)\| + C \|\nabla^2 \hat{u}(t)\|^{1+\frac{2}{2+\alpha_1}} \|\nabla \hat{u}(t)\|^{\frac{\alpha_1}{2+\alpha_1}} \|\nabla^2 v(t)\|_{2+\alpha_1}.
\end{aligned}$$

Оценивая последнее слагаемое с помощью неравенства Юнга, сделаем такой вывод:

$$\frac{1}{2} \partial_t \|\nabla \hat{u}(t)\|^2 + \nu \|\nabla^2 \hat{u}(t)\|^2 \leq \frac{\nu}{2} \|\nabla^2 \hat{u}(t)\|^2 + M_6 \|\nabla \hat{u}(t)\|^2 \left(\|\nabla^2 v(t)\|_{\frac{\alpha_1}{2+\alpha_1}}^{\frac{2(2+\alpha_1)}{\alpha_1}} + 1 \right). \quad (4.12)$$

После умножения на t выводим из (4.12) оценку

$$\partial_t (t \|\nabla \hat{u}(t)\|^2) \leq \|\nabla \hat{u}(t)\|^2 + 2M_6 (t \|\nabla \hat{u}(t)\|^2) \left(\|\nabla^2 v(t)\|_{\frac{\alpha_1}{2+\alpha_1}}^{\frac{2(2+\alpha_1)}{\alpha_1}} + 1 \right),$$

из которой следует, что

$$t \|\nabla \hat{u}(t)\|^2 \leq \int_0^t \|\nabla \hat{u}(\sigma)\|^2 d\sigma \exp \left\{ 2M_6 \left(\int_0^t \|\nabla^2 v(\theta)\|_{\frac{\alpha_1}{2+\alpha_1}}^{\frac{2(2+\alpha_1)}{\alpha_1}} d\theta + t \right) \right\}. \quad (4.13)$$

Принимая во внимание утверждения лемм 4.2 и 4.3, получим окончательно

$$\|\nabla \hat{u}(1)\|^2 \leq C \|\varphi^1 - \varphi\|^2 \exp \{ C M_1 + 2M_6(M_3 + 1) \}.$$

Лемма 1.1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.5. Благодаря (1.18)

$$\begin{aligned} \|Q_N(\hat{u}(1))\|^2 &= \left\| \sum_{k=N+1}^{\infty} (\hat{u}(1), \varphi^k) \varphi^k \right\|^2 = \sum_{k=N+1}^{\infty} |(\hat{u}(1), \varphi^{(k)})|^2 \\ &\leq \frac{1}{\lambda_{N+1}} \sum_{k=N+1}^{\infty} \lambda_k |(\hat{u}(1), \varphi^k)|^2 \leq \frac{1}{\lambda_{N+1}} \|\nabla \hat{u}(1)\|^2 \leq \frac{m^2}{\lambda_{N+1}} \|\hat{u}(0)\|^2 \end{aligned}$$

и

$$\|P_N \hat{u}(1)\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^N (\hat{u}(1), \varphi^k) \varphi^k \right\|^2 \leq \|\hat{u}(1)\|^2 \leq \frac{1}{\lambda_1} \|\nabla \hat{u}(1)\|^2 \leq \frac{m^2}{\lambda_1} \|\hat{u}(0)\|^2.$$

Применяя теперь теорему 1 из [9], получим оценку (1.19).

§ 5. Формальный вывод оценки (1.22) и доказательство следствия 1.1

Начнем с формального вывода глобальной оценки (1.22), предполагая, что решение задачи (1.1_k), $k = 1, 2, \dots, 6$, достаточно гладкое. Аккуратное доказательство всех утверждений теоремы 1.6 читатель найдет в § 9.

Рассмотрим при $t > 0$ следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned} \Delta q &= \operatorname{div} \left(\partial_t v(t) \ln^2(2 + |\partial_t v(t)|^2) \right) = 4 \ln(2 + |\partial_t v(t)|^2) \frac{\partial_t v(t) \cdot (\nabla \partial_t v(t)) \partial_t v(t)}{2 + |\partial_t v(t)|^2}, \\ q|_{x_k=-1} &= q|_{x_k=1}, \quad \nabla q|_{x_k=-1} = \nabla q|_{x_k=1}, \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Функция q может быть найдена методом Фурье, и в силу (1.21₂) имеем $q \in W_2^2(\Omega)$ и верна оценка

$$\|\nabla^2 q\| \leq C \|\nabla \partial_t v(t) \ln(2 + |\partial_t v(t)|^2)\|, \quad t > 0. \quad (5.2)$$

Но тогда первое уравнение в (5.1) и утверждения леммы 2.1 позволяют утверждать, что

$$w = \partial_t v(t) \ln^2(2 + |\partial_t v(t)|^2) - c_0(t) - \nabla q \in H^1 \quad (5.3)$$

при п.в. $t \in [0, T]$, где

$$c_0(t) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \partial_t v(t) \ln^2(2 + |\partial_t v(t)|^2) dx.$$

Поэтому в силу уравнения (1.1₁), продифференцированного по t , справедливо равенство

$$\begin{aligned} (\partial_{t^2} v(t), w) + (\partial_t \sigma(t), \varepsilon(w)) &= -(\nabla \partial_t v(t) v(t), w) \\ &\quad - (\nabla v(t) \partial_t v(t), w) + (\partial_t g(t), w) \end{aligned} \quad (5.4)$$

с w из (5.3). Его мы перепишем в виде

$$I_1 + I_2 = I_3 + I_4 + I_5. \quad (5.5)$$

Для I_1 имеем

$$\begin{aligned} I_1 &= (\partial_{t^2} v(t), \partial_t v(t) \ln^2(2 + |\partial_t v(t)|^2) - (\partial_{t^2} v(t), c_0(t)) - (\partial_{t^2} v(t), \nabla q)) \\ &= (\partial_{t^2} v(t), \partial_t v(t) \ln(2 + |\partial_t v(t)|^2)) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \ln^2(2 + |\partial_t v(t)|^2) \partial_t (2 + |\partial_t v(t)|^2) \\ &= \frac{1}{2} \partial_t \int_{\Omega} H_{\infty}(|\partial_t v(t)|^2) dx, \end{aligned} \quad (5.6)$$

где

$$H_\infty(z) = (z+2)[\ln^2(z+2) - 2\ln(z+2) + 2], \quad z \geq 0.$$

Мы используем неравенство

$$H_\infty(z) \geq \frac{1}{2}(z+2)\ln^2(z+2) \geq \frac{1}{2}z\ln^2(z+2), \quad z \geq 0. \quad (5.7)$$

Что касается I_2 , то

$$I_2 = (\partial_t \sigma(t), \varepsilon(\partial_t v(t) \ln^2(2 + |\partial_t v(t)|^2))) - (\partial_t \sigma(t), \nabla^2 q) = I'_2 + I''_2, \quad (5.8)$$

причем I''_2 оценивается при помощи (1.9) и (5.2) следующим образом:

$$\begin{aligned} |I''_2| &\leq \|\partial_t \sigma(t)\| \|\nabla^2 q\| \leq \left\| \frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon^2}(\varepsilon(v(t))) \varepsilon(\partial_t v(t)) \right\| \|\nabla^2 q\| \\ &\leq C \|\nabla \partial_t v(t)\| \|\nabla \partial_t v(t) \ln(2 + |\partial_t v(t)|^2)\|. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Для краткости обозначим

$$\mathcal{L} \equiv \frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon^2}(\varepsilon(v(t))) \Rightarrow \partial_t \sigma(t) = \mathcal{L} \varepsilon(\partial_t v(t))$$

и заметим еще, что

$$\nabla(\varphi u) = \varphi \nabla u + u \otimes \nabla \varphi, \quad \varepsilon(\varphi u) = \varphi \varepsilon(u) + u \odot \nabla \varphi. \quad (5.10)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} I'_2 &= \left(\mathcal{L} \varepsilon(\partial_t v(t)), \ln(2 + |\partial_t v(t)|^2) \varepsilon(\partial_t v(t) \ln(2 + |\partial_t v(t)|^2)) \right. \\ &\quad \left. + \partial_t v(t) \ln(2 + |\partial_t v(t)|^2) \odot \nabla \ln(2 + |\partial_t v(t)|^2) \right) \\ &= \left(\mathcal{L}(\ln(2 + |\partial_t v(t)|^2) \varepsilon(\partial_t v(t))), \varepsilon(\partial_t v(t) \ln(2 + |\partial_t v(t)|^2)) \right. \\ &\quad \left. + \partial_t v(t) \odot \nabla \ln(2 + |\partial_t v(t)|^2) \right) \\ &= \left(\mathcal{L}(\varepsilon(\partial_t v(t) \ln(2 + |\partial_t v(t)|^2)) - \partial_t v(t) \odot \nabla \ln(2 + |\partial_t v(t)|^2)), \right. \\ &\quad \left. \varepsilon(\partial_t v(t) \ln(2 + |\partial_t v(t)|^2)) + \partial_t v(t) \odot \nabla \ln(2 + |\partial_t v(t)|^2) \right) \\ &= (\mathcal{L} \varepsilon(\partial_t v(t) \ln(2 + |\partial_t v(t)|^2)), \varepsilon(\partial_t v(t) \ln(2 + |\partial_t v(t)|^2))) \\ &\quad - (\mathcal{L} \partial_t v(t) \odot \nabla \ln(2 + |\partial_t v(t)|^2), \partial_t v(t) \odot \nabla \ln(2 + |\partial_t v(t)|^2)). \end{aligned}$$

Далее, последовательно воспользуемся условиями (1.2₃), (1.9) и неравенством Корна, вытекающим из тождества (2.1), и получим

$$\begin{aligned}
I'_2 &\geq 2\nu \|\varepsilon(\partial_t v(t) \ln(2 + |\partial_t v(t)|^2))\|^2 - C_1 \|\partial_t v(t) \odot \nabla \ln(2 + |\partial_t v(t)|^2)\|^2 \\
&\geq \nu \|\nabla(\partial_t v(t) \ln(2 + |\partial_t v(t)|^2))\|^2 - C_2 \|\nabla \partial_t v(t)\|^2 \\
&= \nu \|\nabla \partial_t v(t) \ln(2 + |\partial_t v(t)|^2) + \partial_t v(t) \otimes \nabla \ln(2 + |\partial_t v(t)|^2)\|^2 - C_2 \|\nabla \partial_t v(t)\|^2 \\
&\geq \frac{\nu}{2} \|\nabla \partial_t v(t) \ln(2 + |\partial_t v(t)|^2)\|^2 - C_3 \|\nabla \partial_t v(t)\|^2.
\end{aligned}$$

Отсюда и из (5.8), (5.9) выводим

$$I_2 \geq \frac{\nu}{4} \|\nabla \partial_t v(t) \ln(2 + |\partial_t v(t)|^2)\|^2 - C \|\nabla \partial_t v(t)\|^2. \quad (5.11)$$

Прежде чем оценивать правую часть в (5.5), заметим, что в силу (2.6), (1.7) и (1.12) мы имеем

$$\begin{aligned}
&\|t \partial_t v(t)\|_{4, Q_T}^2 + \|\sqrt{t} \nabla v\|_{4, Q_T}^2 \\
&\leq C \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \|t \partial_t v(t)\| \|t \nabla \partial_t v(t)\|_{Q_T} + \sup_{0 \leq t \leq T} \|\sqrt{t} \nabla v(t)\| \|\sqrt{t} \nabla^2 v\|_{Q_T} \right] \\
&\leq \Phi'_2(T, \|\varphi\|, \|g\|_{L_2(I; H^{-1})}, \|t \partial_t g\|_{L_2(I; H^{-1})}), \quad (5.12)
\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\|tv\|_{\infty, Q_T} \leq \Phi''_2(T, \|\varphi\|, \|g\|_{L_2(I; H^{-1})}, \|t \partial_t g\|_{L_2(I; H^{-1})}). \quad (5.13)$$

Далее, $|I_5| \leq \|\partial_t g(t)\| \|w\|$, а поскольку

$$\begin{aligned}
\|w\|^2 &\leq \|w\|^2 + \|\nabla q\|^2 = \|\partial_t v(t) \ln^2(2 + |\partial_t v(t)|^2) - c_0(t)\|^2 \\
&\leq \|\partial_t v(t) \ln^2(2 + |\partial_t v(t)|^2)\|^2 \leq C_1 \|\partial_t v(t) (1 + |\partial_t v(t)|)\|^2 \\
&\leq C_2 [\|\partial_t v(t)\|^2 + \|\partial_t v(t)\|_4^4], \quad (5.14)
\end{aligned}$$

то

$$|I_5| \leq C \|\partial_t g(t)\| \left[\|\partial_t v(t)\|^2 + \|\partial_t v(t)\|_4^4 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (5.15)$$

Для двух других интегралов правой части (5.5), используя (5.14), мы получаем

$$\begin{aligned}
|I_3| + |I_4| &\leq \|v(t)\|_{\infty} \|\nabla \partial_t v(t)\| \|w\| + \|w\| \|\partial_t v(t)\|_4 \|\nabla v(t)\|_4 \\
&\leq C_1 \left(\|\partial_t v(t)\|^2 + \|\partial_t v(t)\|_4^4 \right)^{\frac{1}{2}} \left[\|\nabla \partial_t v(t)\| \|v(t)\|_{\infty} + \|\partial_t v(t)\|_4 \|\nabla v(t)\|_4 \right] \\
&\leq C_1 \left[\|\partial_t v(t)\|^2 + \|\partial_t v(t)\|_4^4 + \|\nabla \partial_t v(t)\|^2 \|v(t)\|_{\infty}^2 + \|\partial_t v(t)\|_4^2 \|\nabla v(t)\|_4^2 \right] \\
&\leq C_2 \left[\|\partial_t v(t)\|^2 + \|\partial_t v(t)\|_4^4 + \|\nabla v(t)\|_4^4 + \|\nabla \partial_t v(t)\|^2 \|v(t)\|_{\infty}^2 \right]. \quad (5.16)
\end{aligned}$$

Собирая оценки (5.16), (5.15), (5.11) и (5.6), выводим из (5.4) и (5.5) неравенство

$$\begin{aligned} & \partial_t \int_{\Omega} H_{\infty}(|\partial_t v(t)|^2) dx + \frac{\nu}{2} \left\| \nabla \partial_t v(t) \ln(2 + |\partial_t v(t)|^2) \right\|^2 \\ & \leq C \left[\|\partial_t g(t)\|^2 + (1 + \|v(t)\|_{\infty}^2) \|\nabla \partial_t v(t)\|^2 + \|\partial_t v(t)\|_4^4 + \|\nabla v(t)\|_4^4 \right]. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Умножив (5.17) на t^5 , будем иметь

$$\begin{aligned} & \partial_t \left(t^5 \int_{\Omega} H_{\infty}(|\partial_t v(t)|^2) dx + \frac{\nu}{2} \left\| t^{\frac{5}{2}} \nabla \partial_t v(t) \ln(2 + |\partial_t v(t)|^2) \right\|^2 \right) \\ & \leq 5t^4 \int_{\Omega} H_{\infty}(|\partial_t v(t)|^2) dx + C \left[\left\| t^{\frac{5}{2}} \partial_t g(t) \right\|^2 + T(T^2 + \|tv\|_{\infty, Q_T}^2) \|t \nabla \partial_t v(t)\|^2 \right. \\ & \quad \left. + T(\|t \partial_t v(t)\|_4^4 + T^2 \|t^{\frac{1}{2}} \nabla v(t)\|_4^4) \right]. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Принимая во внимание неравенство

$$H_{\infty}(z) \leq C(1 + z^2)$$

и оценки (5.12), (5.13) и (1.12), получаем из (5.18)

$$\begin{aligned} & \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} t^5 \int_{\Omega} H_{\infty}(|\partial_t v(t)|^2) dx + \frac{\nu}{2} \left\| t^{\frac{5}{2}} \nabla \partial_t v(t) \ln(2 + |\partial_t v(t)|^2) \right\|_{Q_T}^2 \\ & \leq C \left[T^4 + (\Phi_2')^2 + \|t^{\frac{5}{2}} \partial_t g\|_{Q_T}^2 + T(T^2 + (\Phi_2'')^2) \Phi_2 + T(1 + T^2)(\Phi_2')^2 \right]. \end{aligned}$$

Отсюда и из (5.7) вытекает оценка (1.22).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1.1. Воспользуемся обозначениями (4.3). В силу неравенства Йенсена мы имеем

$$\begin{aligned} & \oint_{\Omega(x_0, R)} |\partial_t v(t)|^2 dx \ln^2 \left(2 + \oint_{\Omega(x_0, R)} |\partial_t v(t)|^2 dx \right) \\ & \leq \oint_{\Omega(x_0, R)} |\partial_t v(t)|^2 \ln^2(2 + |\partial_t v(t)|^2) dx \equiv \frac{H(t)}{|\Omega(x_0, R)|} = \frac{H(t)}{4R^2}, \end{aligned} \quad (5.20)$$

где

$$H(t) = \left\| \partial_t v(t) \ln(2 + |\partial_t v(t)|^2) \right\|^2,$$

а СИМВОЛОМ

$$\oint_{\Omega(x_0, R)} f dx$$

обозначается среднее значение функции f на множестве $\Omega(x_0, R)$. В силу периодичности получаем из (5.20)

$$\int_{\omega(x_0, R)} |\partial_t v(t)|^2 dx \leq \frac{H(t)}{\ln^2 \left(2 + \oint_{\omega(x_0, R)} |\partial_t v(t)|^2 dx \right)}. \quad (5.21)$$

Возможны два случая:

$$\oint_{\omega(x_0, R)} |\partial_t v(t)|^2 dx \leq \frac{2}{R} \Rightarrow \int_{\omega(x_0, R)} |\partial_t v(t)|^2 dx \leq 8R$$

и

$$\begin{aligned} \oint_{\omega(x_0, R)} |\partial_t v(t)|^2 dx &> \frac{2}{R} \stackrel{(5.21)}{\Rightarrow} \int_{\omega(x_0, R)} |\partial_t v(t)|^2 dx \\ &\leq \frac{H(t)}{\ln^2 \left(2 + \frac{2}{R} \right)} = \frac{H(t)}{[\ln \frac{1}{R} + \ln(2 + 2R)]^2} \leq \frac{H(t)}{\ln^2 \frac{1}{R}}. \end{aligned}$$

Поэтому верна оценка

$$\int_{\omega(x_0, R)} |\partial_t v(t)|^2 dx \leq \max \left\{ 8R, \frac{H(t)}{\ln^2 \frac{1}{R}} \right\} \leq C_* \max\{1, H(t)\} \frac{1}{\ln^2 \frac{1}{R}}, \quad R \in \left] 0, \frac{1}{2} \right],$$

где $C_* = \sup_{0 < R \leq 1/2} 8R \ln^2 \frac{1}{R}$. Если положить $\Phi_6 = C_* \max\{T^5, \Phi_5\}$, то из (1.22) вытекает локальная оценка (1.23). Следствие 1.1 доказано.

§ 6. Доказательство теоремы 1.7

Утверждение (1.12) теоремы 1.3 позволяет переписать вариационное тождество (1.4) в виде

$$-(\operatorname{div} \sigma(t), w) = (\bar{g}(t), w) \quad \forall w \in H \quad \text{и п.в.} \quad t \in [0, T], \quad (6.1)$$

где

$$\bar{g}(t) = g(t) - \partial_t v(t) - v_k(t) v_{,k}(t), \quad \sigma(t) = \frac{\partial D}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(v(t))).$$

Согласно оценке 4.6 леммы 4.1 мы имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|t^{\frac{5}{2}} \nabla^2 v(t)\|^2 &\leq C \left[\|t^{\frac{5}{2}} g\|_{L_\infty(I; L_2(\Omega; \mathbb{R}^2))}^2 + T^3 \sup_{0 \leq t \leq T} \|t \partial_t v(t)\|^2 \right. \\ &\quad \left. + T^4 \sup_{0 \leq t \leq T} \|v(t)\|^2 \sup_{0 \leq t \leq T} \|t^{\frac{1}{2}} \nabla v(t)\|^2 \right]. \end{aligned}$$

Вспоминая утверждение теоремы 1.1, получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|t^{\frac{5}{2}} \nabla^2 v(t)\|^2 &\leq C [\|t^{\frac{5}{2}} g\|_{L_\infty(I; L_2(\Omega; \mathbb{R}^2))}^2 + T^3 \Phi_2 + T^4 \Phi_1 \Phi_2] \\ &\leq \Phi'_7(T, \|\varphi\|, \|g\|_{L_2(I; H^{-1})}, \|t \partial_t g\|_{L_2(I; H^{-1})}, \|t^{\frac{1}{2}} g\|_{Q_T}, \|t^{\frac{5}{2}} g\|_{L_\infty(I; L_{2+\gamma_0}(\Omega; \mathbb{R}^2))}). \end{aligned}$$

Для построения локальной пробной функции воспользуемся обозначениями (4.3), срезающей функцией φ , удовлетворяющей условиям (4.4₁), и ее периодическим продолжением $\widehat{\varphi}$, определяемым равенством (4.4₂). Положим

$$\bar{v}(x, t) = \begin{cases} v(x, t) - [\nabla v(t)]_{x_0, R}(x - x_0 - 2z), & x \in w^z(x_0, R), \quad z \in \mathbb{Z}^2, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Xi(x_0, R), \end{cases}$$

где

$$[\nabla v(t)]_{x_0, R} = \oint_{T(x_0, R)} \nabla v(t) \, dx$$

– среднее значение функции $\nabla v(t)$ на множестве

$$T(x_0, R) = \omega(x_0, R) \setminus \overline{\omega}\left(x_0, \frac{R}{2}\right).$$

Справедливо

$$\widehat{w}(t) = \operatorname{curl}^*(\widehat{\varphi}^2 \operatorname{curl} \bar{v}(t)) \in H$$

при п.в. $t \in [0, T]$. Поэтому мы можем положить $w = \widehat{w}(t)$ в (6.1) и получить

$$-(\operatorname{div} \sigma(t), \widehat{w}(t)) = (\bar{g}(t), \widehat{w}(t)) \quad \text{для п.в. } t \in [0, T]. \quad (6.3)$$

Далее, в силу периодичности и тождества (2.4) имеем

$$\begin{aligned} -(\operatorname{div} \sigma(t), \widehat{w}(t)) &= (\operatorname{div} \sigma(t), \varphi^2 \Delta v(t))_{\omega(x_0, R)} - (\operatorname{div} \sigma(t), \operatorname{curl}^* \varphi^2 \operatorname{curl} \bar{v}(t))_{\omega(x_0, R)} \\ &\geq (\operatorname{div} \sigma(t), \varphi^2 \Delta v(t)) - \frac{C}{R} \|\nabla^2 v(t)\|_{T(x_0, R)} \|\nabla \bar{v}(t)\|_{T(x_0, R)}. \end{aligned}$$

Тождество (2.7₁) влечет

$$\begin{aligned} -(\operatorname{div} \sigma(t), \widehat{w}(t)) &\geq (\sigma_{,k}(t), \varphi^2 \varepsilon(v_{,k}(t)))_{\omega(x_0, R)} \\ &\quad - \frac{C}{R} \|\nabla^2 v(t)\|_{T(x_0, R)} \|\nabla \bar{v}(t)\|_{T(x_0, R)}. \end{aligned}$$

С другой стороны, условие (1.2₃) и интегрирование по частям дают

$$\begin{aligned} (\sigma_{,k}(t), \varphi^2 \varepsilon(v_{,k}(t)))_{\omega(x_0, R)} &\geq 2\nu \|\varphi \nabla \varepsilon(v(t))\|_{\omega(x_0, R)}^2 \\ &\geq \frac{\nu}{4} \|\varphi \nabla^2 v(t)\|_{\omega(x_0, R)}^2 - \frac{C}{R} \|\nabla^2 v(t)\|_{T(x_0, R)} \|\nabla \bar{v}(t)\|_{T(x_0, R)}. \end{aligned}$$

Из трех последних соотношений выводим

$$-(\operatorname{div} \sigma(t), \widehat{w}(t)) \geq \frac{\nu}{4} \|\varphi \nabla^2 v(t)\|_{\omega(x_0, R)}^2 - \frac{C}{R} \|\nabla^2 v(t)\|_{T(x_0, R)} \|\nabla \bar{v}(t)\|_{T(x_0, R)}. \quad (6.4)$$

Для правой части равенства (6.3) имеем

$$\begin{aligned} (\bar{g}(t), \widehat{w}(t)) &= (\bar{g}(t), -\varphi^2 \Delta v(t) + \operatorname{curl}^* \varphi^2 \operatorname{curl} \bar{v}(t))_{\omega(x_0, R)} \\ &\leq \left| \int_{\omega(x_0, R)} v_k(t) v_{,k}(t) \cdot \operatorname{curl}^* (\varphi^2 \operatorname{curl} \bar{v}(t)) \, dx \right| \\ &\quad + C \left[\|g(t)\|_{\omega(x_0, R)} + \|\partial_t v(t)\|_{\omega(x_0, R)} \right] \\ &\quad \times \left[\|\varphi \nabla^2 v(t)\|_{\omega(x_0, R)} + \frac{1}{R} \|\nabla \bar{v}(t)\|_{\omega(x_0, R)} \right]. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Заметим еще, что

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\omega(x_0, R)} v_k(t) v_{,k}(t) \cdot \operatorname{curl}^* (\varphi^2 \operatorname{curl} v(t)) \, dx \right| \\ &= \left| \int_{\omega(x_0, R)} v_k(t) \operatorname{curl} v_{,k}(t) \varphi^2 \operatorname{curl} v(t) \, dx \right| \\ &= \left| \int_{T(x_0, R)} v_k(t) \varphi \varphi_{,k} |\operatorname{curl} \bar{v}(t)|^2 \, dx \right| \leq \frac{C}{R} \|v(t)\|_{T(x_0, R)} \|\nabla \bar{v}(t)\|_{4, T(x_0, R)}^2 \\ &\leq \frac{C}{R} \|v(t)\| \|\nabla \bar{v}(t)\|_{4, T(x_0, R)}^2 \stackrel{(1.5)}{\leq} \frac{C}{R} \Phi_1^{\frac{1}{2}} \|\nabla \bar{v}(t)\|_{4, T(x_0, R)}^2. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Собирая оценки (6.4), (6.5) и применяя неравенство Юнга, выводим из (6.3) оценку

$$\begin{aligned} \|\nabla^2 v(t)\|_{\omega(x_0, R/2)} &\leq \|\varphi \nabla^2 v(t)\|_{\omega(x_0, R)}^2 \\ &\leq C \left[\|\nabla^2 v(t)\|_{T(x_0, R)}^2 + \frac{1}{R^2} \|\nabla \bar{v}(t)\|_{T(x_0, R)}^2 \right. \\ &\quad \left. + \Phi_1^{\frac{1}{2}} \frac{1}{R} \|\nabla \bar{v}(t)\|_{4, T(x_0, R)}^2 + \|g(t)\|_{\omega(x_0, R)}^2 + \|\partial_t v(t)\|_{\omega(x_0, R)}^2 \right]. \end{aligned}$$

Из теорем вложения вытекают два неравенства:

$$\begin{aligned} \|\nabla \bar{v}(t)\|_{T(x_0, R)}^2 &\leq CR^2 \|\nabla^2 v(t)\|_{T(x_0, R)}^2, \\ \|\nabla v(t)\|_{4, T(x_0, R)}^2 &\leq CR \|\nabla^2 v(t)\|_{T(x_0, R)}^2, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \|\nabla^2 v(t)\|_{\omega(x_0, R/2)}^2 &\leq C(1 + \Phi_1^{\frac{1}{2}}) \|\nabla^2 v(t)\|_{T(x_0, R)}^2 \\ &\quad + C[\|g(t)\|_{\omega(x_0, R)}^2 + \|\partial_t v(t)\|_{\omega(x_0, R)}^2]. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\|\nabla^2 v(t)\|_{T(x_0, R)}^2 = \|\nabla^2 v(t)\|_{\omega(x_0, R)}^2 - \|\nabla^2 v(t)\|_{\omega(x_0, R/2)}^2,$$

то из последнего неравенства можно вывести оценку

$$\|\nabla^2 v(t)\|_{\omega(x_0, R/2)}^2 \leq \Theta \|\nabla^2 v(t)\|_{\omega(x_0, R)}^2 + C [\|g(t)\|_{\omega(x_0, R)}^2 + \|\partial_t v(t)\|_{\omega(x_0, R)}^2],$$

где

$$0 < \frac{C}{C+1} \leq \Theta \equiv \frac{C(1 + \Phi_1^{\frac{1}{2}})}{1 + C(1 + \Phi_1^{\frac{1}{2}})} < 1. \quad (6.7)$$

И, наконец, полагая,

$$G(R) \equiv \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|t^{\frac{5}{2}} \nabla^2 v(t)\|_{\omega(x_0, R)}^2,$$

получим

$$G(R/2) \leq \Theta G(R) + C \left[\operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} t^5 \|g(t)\|_{\omega(x_0, R)}^2 + \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|t^{\frac{5}{2}} \partial_t v(t)\|_{\omega(x_0, R)}^2 \right]. \quad (6.8)$$

Далее, принимая во внимание условие (1.24), будем иметь

$$\begin{aligned} t^5 \|g(t)\|_{\omega(x_0, R)}^2 &\leq t^5 |\omega(x_0, R)|^{\frac{2\gamma_0}{2+\gamma_0}} \|g(t)\|_{2+\gamma_0, \omega(x_0, R)}^2 \\ &\leq C_1 R^{\frac{4\gamma_0}{2+\gamma_0}} \|t^{\frac{5}{2}} g(t)\|_{2+\gamma_0}^2 \leq C_2 \frac{1}{\ln^2 \frac{1}{R}} \|t^{\frac{5}{2}} g(t)\|_{2+\gamma_0}^2 \end{aligned}$$

для $0 < R \leq 1/4$. Последнее слагаемое в правой части (6.8) оценивается при помощи следствия 1.1. В результате получаем неравенство

$$G(R/2) \leq \Theta G(R) + \frac{1}{\ln^2 \frac{1}{R}} \Phi_7'', \quad 0 < R \leq \frac{1}{4}, \quad (6.9)$$

в котором мажоранта Φ_7'' зависит от тех же аргументов, что и Φ_7 в (1.25).

Неравенство (6.9) можно проитерировать:

$$G\left(\frac{R}{2^k}\right) \leq \Theta^k G(R) + \Phi_7'' \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\Theta^{k-1-i}}{\ln^2 \left(\frac{2^i}{R}\right)}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (6.10)$$

Для того чтобы оценить последнее слагаемое в правой части (6.10), рассмотрим сумму

$$I(k, \Theta, R) \equiv \Theta^k \sum_{i=1}^k \frac{\Theta^{-i}}{\left(\ln \frac{1}{R} + i \ln 2\right)^2}.$$

Имеем неравенство

$$\frac{\Theta^{-i}}{\left(\ln \frac{1}{R} + x \ln 2\right)^2} \leq \int_{i-1}^i \frac{\Theta^{-x-1}}{\left(\ln \frac{1}{R} + x \ln 2\right)^2} dx$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} I(k, \Theta, R) &\leq \Theta^{k-1} \int_0^k \frac{\Theta^{-x}}{\left(\ln \frac{1}{R} + x \ln 2\right)^2} dx = \Theta^{-1} \left[\Theta^k \int_{k/2}^k \dots + \Theta^k \int_0^{k/2} \dots \right] \\ &\leq \Theta^{-1} \left[\int_{k/2}^k \frac{dx}{\left(\ln \frac{1}{R} + x \ln 2\right)^2} + \Theta^{\frac{k}{2}} \int_0^{k/2} \frac{dx}{\left(\ln \frac{1}{R} + x \ln 2\right)^2} \right] \\ &\leq \frac{\Theta^{-1}}{\ln 2} \left[\frac{1}{\ln \frac{1}{R} + \frac{k}{2} \ln 2} - \frac{1}{\ln \frac{1}{R} + k \ln 2} + \frac{\Theta^{\frac{k}{2}}}{\ln \frac{1}{R}} \right] \\ &\leq \frac{1}{\Theta \ln 2} \left[\frac{\frac{k}{2} \ln 2}{\left(\ln \frac{1}{R} + \frac{k}{2} \ln 2\right)} \cdot \frac{1}{\left(\ln \frac{1}{R} + k \ln 2\right)} + \frac{\Theta^{\frac{k}{2}}}{\ln \frac{1}{R}} \right] \\ &\leq \frac{1}{\Theta \ln 2} \left[\frac{1}{\ln \frac{1}{R} + k \ln 2} + \frac{\Theta^{\frac{k}{2}}}{\ln \frac{1}{R}} \right] \leq \frac{1}{\Theta \ln 2} \left[\frac{1}{\ln \frac{1}{R} + k \ln 2} + \frac{\Theta^{\frac{k}{2}}}{\ln \frac{1}{R}} \right]. \end{aligned}$$

Теперь мы можем оценить сумму в (6.10) следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\Theta^{k-1-i}}{\ln^2 \left(\frac{2^i}{R}\right)} &= \frac{1}{\Theta} \left[\frac{1}{\ln^2 \frac{1}{R}} - \frac{1}{\left(\ln \frac{1}{R} + k \ln 2\right)^2} \right] + \frac{1}{\Theta} I(k, \Theta, R) \\ &\leq \frac{1}{\Theta} \left[\frac{\Theta^k}{\ln^2 \frac{1}{R}} + \frac{1}{\Theta \ln 2} \left(\frac{1}{\ln \left(\frac{2^k}{R}\right)} + \frac{\Theta^{\frac{k}{2}}}{\ln \frac{1}{R}} \right) \right]. \end{aligned}$$

Отсюда и из (6.10) выводим

$$\begin{aligned} G\left(\frac{R}{2^k}\right) &\leq \Theta^{\frac{k}{2}} \left[\Theta^{\frac{k}{2}} G(R) + \Phi_7'' \left(\frac{\Theta^{\frac{k}{2}}}{\Theta \ln^2 \frac{1}{R}} + \frac{1}{\Theta^2 \ln 2 \ln \frac{1}{R}} \right) \right] + \Phi_7'' \frac{1}{\Theta^2 \ln 2} \cdot \frac{1}{\ln \left(\frac{2^k}{R}\right)} \\ &\leq \Theta^{\frac{k}{2}} \left[G(R) + \frac{\Phi_7''}{\Theta \ln \frac{1}{R}} \left(\frac{1}{\ln \frac{1}{R}} + \frac{1}{\Theta \ln 2} \right) \right] + \frac{\Phi_7''}{\Theta^2 \ln 2} \frac{1}{\ln \left(\frac{2^k}{R}\right)}. \end{aligned}$$

Пусть $0 < \rho \leq R \leq 1/4$. Выберем число k таким, чтобы

$$\frac{1}{2^{k+1}} < \frac{\rho}{R} \leq \frac{1}{2^k}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \rho &\leq \frac{R}{2^k}, \quad \frac{1}{2\rho} \leq \frac{2^k}{R}, \quad k \leq \frac{\ln \frac{R}{\rho}}{\ln 2}, \\ \frac{\ln \frac{R}{2\rho}}{\ln 2} &= \frac{\ln \frac{R}{\rho}}{\ln 2} - 1 \leq k, \\ \Theta^{\frac{k}{2}} &\leq \exp \left\{ -\frac{1}{2} \ln \frac{1}{\Theta} \cdot \frac{\ln \frac{R}{2\rho}}{\ln 2} \right\} = \left(\frac{2\rho}{R} \right)^{\frac{1}{2} \frac{\ln \frac{1}{\Theta}}{\ln 2}} \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} G(\rho) &\leq \left(\frac{2\rho}{R} \right)^{\frac{1}{2} \frac{\ln \frac{1}{\Theta}}{\ln 2}} \left[G(R) + \frac{\Phi_7''}{\Theta \ln \frac{1}{R}} \left(\frac{1}{\ln \frac{1}{R}} + \frac{1}{\Theta \ln 2} \right) \right] + \frac{\Phi_7''}{\Theta^2 \ln 2} \frac{1}{\ln \frac{1}{2\rho}}, \\ 0 < \rho &\leq R \leq \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Осталось положить $R = 1/4$, учесть (6.7) и оценку $G(R) \leq \Phi_7'$, вытекающую из (6.2), и получить требуемое неравенство (1.25). Теорема 1.7 доказана.

§ 7. Формальный вывод оценок (1.28), (1.29) и доказательство следствия 1.2

Мы предполагаем, что утверждения (1.27) уже доказаны и, более того, что

$$v_{,j}(t), \partial_t v_{,i}(t) \in H^1, \quad i, j = 1, 2, \quad (7.1)$$

для п.в. $t \in [0, T]$. Этих предположений достаточно, чтобы вывести оценки (1.28), (1.29). Полное доказательство теоремы 1.8 будет дано в § 11.

Начнем с локального варианта оценки (1.28). В силу сделанных выше предположений из (1.4) вытекает тождество

$$\begin{aligned} (\partial_t v_{,i}(t), w) + ((v_k(t)v_{,k}(t))_{,i}, w) - (\operatorname{div} \sigma_{,i}(t), w) &= (g_{,i}(t), w), \\ w &\in H, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (7.2)$$

для п.в. $t \in [0, T]$. Для произвольных $x_0 \in \mathbb{R}^2$ и $R \in]0, 1/4]$ воспользуемся обозначениями (4.3). Относительно срезающей функции φ предположим, что

$$\begin{aligned} \varphi &\in C_0^2(\mathbb{R}^2), \quad 0 \leq \varphi \leq 1, \\ \varphi &\equiv 1 \text{ в } \omega(x_0, r), \quad \varphi \equiv 0 \text{ вне } w(x_0, q), \\ |\nabla \varphi| &\leq \frac{C}{q-r}, \quad |\nabla^2 \varphi| \leq \frac{C}{(q-r)^2}, \quad \frac{R}{2} \leq r < q \leq R. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Пусть $\widehat{\varphi}$ – периодическое продолжение φ , определяемое соотношениями (4.4₂). Напоминаем, что функция v считается продолженной на все $\mathbb{R}^2$ периодическим образом. Предположения (7.1) позволяют утверждать, что

$$\widehat{w}(t) = \operatorname{curl}^*(\widehat{\varphi}^4 \operatorname{curl} v, i(t)) = -\widehat{\varphi}^4 \Delta v, i(t) + \operatorname{curl}^* \widehat{\varphi}^4 \operatorname{curl} v, i(t) \in H$$

при п.в. $t \in [0, T]$. Полагая $w = \widehat{w}(t)$ в (7.2), получим

$$I_1 + I_2 = I_3 + I_4, \quad (7.4)$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &\equiv (\partial_t v, i(t), \widehat{w}(t)), & I_2 &\equiv -(\operatorname{div} \sigma, i(t), \widehat{w}(t)), \\ I_3 &= -((v_k(t) v, k(t)), i, \widehat{w}(t)), & I_4 &= (g, i(t), \widehat{w}(t)). \end{aligned}$$

Оцениваем слагаемые в (7.4) по очереди:

$$I_1 = \frac{1}{2} \partial_t \|\varphi^2 \nabla \operatorname{curl} v(t)\|_{\omega(x_0, R)}^2, \quad (7.5)$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\omega(x_0, R)} \varphi^4 \operatorname{div} \sigma, i(t) \cdot \Delta v, i(t) dx \\ &\quad + \int_{\omega(x_0, R)} \sigma, i(t) : \varepsilon(\operatorname{curl}^* \varphi^4 \operatorname{curl} v, i(t)) dx = I'_2 + I''_2. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Для I''_2 с учетом (7.3) получаем

$$|I''_2| \leq \frac{C}{q-r} \left[\|\varphi^2 \nabla^3 v(t)\|_{\omega(x_0, R)} + \frac{1}{q-r} \|\nabla^2 v(t)\|_{\omega(x_0, R)} \right] \|\nabla^2 v(t)\|_{\omega(x_0, R)}. \quad (7.7)$$

Для того чтобы оценить I'_2 , воспользуемся тождеством (2.7₂):

$$\begin{aligned} I'_2 &= (\sigma, ik(t), \varphi^4 \varepsilon(v, ik(t)))_{\omega(x_0, R)} \\ &\quad + (\sigma, i(t), \varepsilon(v, ik(t)) \varphi^4_k)_{\omega(x_0, R)} - (\sigma, i \nabla \varphi^4, \Delta v, i(t))_{\omega(x_0, R)} \\ &\geq (\sigma, ik, \varphi^4 \varepsilon(v, ik(t)))_{\omega(x_0, R)} - \frac{C}{q-r} \|\varphi^2 \nabla^3 v(t)\|_{\omega(x_0, R)} \|\nabla^2 v(t)\|_{\omega(x_0, R)}. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Для вторых производных от σ мы имеем

$$\sigma, ik = \left(\frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon^2} (\varepsilon(v)) \varepsilon(v, i) \right)_{,k} = \frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon^2} (\varepsilon(v)) \varepsilon(v, ik) + \left(\frac{\partial^3 D}{\partial \varepsilon^3} (\varepsilon(v)) \varepsilon(v, k) \right) \varepsilon(v, i).$$

Принимая во внимание условие (1.23) и (1.17), выводим из (7.8) оценку

$$I_2' \geq 2\nu \|\varphi^2 \nabla^2 \varepsilon(v(t))\|_{\omega(x_0, R)}^2 - C \|\varphi \nabla^2 v(t)\|_{4, \omega(x_0, R)}^2 \|\varphi^2 \nabla^3 v(t)\|_{\omega(x_0, R)}^2 - \frac{C}{q-r} \|\varphi^2 \nabla^3 v(t)\|_{\omega(x_0, R)} \|\nabla^2 v(t)\|_{\omega(x_0, R)}.$$

Интегрирование по частям приводит к неравенству

$$2 \|\varphi^2 \nabla^2 \varepsilon(v(t))\|_{\omega(x_0, R)} \geq \|\varphi^2 \nabla^3 v(t)\|_{\omega(x_0, R)}^2 - \frac{C}{q-r} \|\varphi^2 \nabla^3 v(t)\|_{\omega(x_0, R)} \|\nabla^2 v(t)\|_{\omega(x_0, R)}.$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского и объединяя две последние оценки с (7.7), (7.6), устанавливаем

$$I_2 \geq \frac{\nu}{4} \|\varphi^2 \nabla^3 v(t)\|_{\omega(x_0, R)}^2 - \frac{C}{(q-r)^2} \|\nabla^2 v(t)\|_{\omega(x_0, R)}^2 - C \|\varphi \nabla^2 v(t)\|_{4, \omega(x_0, R)}^4.$$

Осталось воспользоваться неравенством типа (2.6):

$$\begin{aligned} \|\varphi \nabla^2 v(t)\|_{4, \omega(x_0, R)}^4 &\leq C_1 \|\varphi \nabla^2 v(t)\|_{\omega(x_0, R)}^2 \|\nabla(\varphi \nabla^2 v(t))\|_{\omega(x_0, R)}^2 \\ &\leq C_2 \|\nabla^2 v(t)\|_{\omega(x_0, R)}^2 \left(\|\nabla^3 v(t)\|_{\omega(x_0, q)}^2 + \frac{1}{(q-r)^2} \|\nabla^2 v(t)\|_{\omega(x_0, R)}^2 \right), \end{aligned}$$

и получить окончательную оценку для I_2 :

$$\begin{aligned} I_2 &\geq \frac{\nu}{4} \|\varphi^2 \nabla^3 v(t)\|_{\omega(x_0, R)}^2 - \frac{C}{(q-r)^2} \|\nabla^2 v(t)\|_{\omega(x_0, R)}^2 \\ &\quad - C \|\nabla^2 v(t)\|_{\omega(x_0, R)}^2 \left[\|\nabla^3 v(t)\|_{\omega(x_0, q)}^2 + \frac{1}{(q-r)^2} \|\nabla^2 v(t)\|_{\omega(x_0, R)}^2 \right]. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Перейдем к оценке правой части в (7.4):

$$\begin{aligned} |I_3| &= \left| \int_{\omega(x_0, R)} v_k(t) \operatorname{curl} v_{,k}(t) (\varphi^4 \operatorname{curl}(v_{,i}(t)))_{,i} dx \right| \\ &\leq C \|v(t)\|_{\infty, \omega} \left[\|\varphi^2 \nabla^3 v(t)\|_{\omega(x_0, R)} \|\nabla^2 v(t)\|_{\omega(x_0, R)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{q-r} \|\nabla^2 v(t)\|_{\omega(x_0, R)}^2 \right] \end{aligned} \quad (7.10)$$

и

$$\begin{aligned} |I_4| &= \left| \int_{\omega(x_0, R)} \operatorname{curl} g(\varphi^4 \operatorname{curl} v_{,i}(t))_{,i} dx \right| \\ &\leq C \|\operatorname{curl} g\|_{\omega(x_0, R)} \left(\|\varphi^2 \nabla^3 v(t)\|_{\omega(x_0, R)}^2 + \frac{1}{q-r} \|\nabla^2 v(t)\|_{\omega(x_0, R)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Собирая оценки (7.5), (7.9)–(7.11) и применяя неравенство Коши–Буняковского, выводим из (7.4)

$$\begin{aligned} & \partial_t \|\varphi^2 \nabla \operatorname{curl} v(t)\|_{\omega(x_0, R)}^2 + \frac{\nu}{4} \|\nabla^3 v(t)\|_{\omega(x_0, r)}^2 \\ & \leq C \left\{ \|\nabla^2 v(t)\|_{\omega(x_0, R)}^2 \left[\|\nabla^3 v(t)\|_{\omega(x_0, q)}^2 + \frac{1}{(q-r)^2} \|\nabla^2 v(t)\|_{\omega(x_0, R)}^2 \right] \right. \\ & \quad \left. + \|\operatorname{curl} g(t)\|_{\omega(x_0, R)}^2 + \left(\|v(t)\|_{\infty, \omega(x_0, R)}^2 + \frac{1}{(q-r)^2} \right) \|\nabla^2 v(t)\|_{\omega(x_0, R)}^2 \right\}. \end{aligned} \quad (7.12)$$

В силу оценки (1.25) теоремы 1.7 для любого $\delta > 0$ мы имеем

$$\sup_{\delta \leq t \leq T} \|\nabla^2 v(t)\|_{\omega(x_0, R)}^2 \leq \frac{1}{\delta^5} \sup_{\delta \leq t \leq T} t^5 \|\nabla^2 v(t)\|_{\omega(x_0, R)}^2 \leq \frac{1}{\delta^5} \Phi_7 \frac{1}{\ln \frac{1}{R}}, \quad 0 < R \leq \frac{1}{4}. \quad (7.13)$$

Таким образом, существует мажоранта

$$\begin{aligned} \Phi'_8 = \Phi'_8 \Big(T, \|\varphi\|, \|g\|_{L_2(I; H^{-1})}, \|t \partial_t g\|_{L_2(I; H^{-1})}, \|t^{\frac{1}{2}} g\|_{Q_T}, \\ \|t^{\frac{5}{2}} \partial_t g\|_{Q_T}, \|t^{\frac{5}{2}} g\|_{L_\infty(I; L_{2+\gamma_0}(\Omega; \mathbb{R}^2))}, \frac{1}{\delta} \Big) \geq 4 \end{aligned}$$

такая, что

$$C \frac{1}{\delta^5} \Phi_7 \frac{1}{\ln \frac{1}{R}} \leq \frac{\nu}{8} \quad \forall R \in \left] 0, \frac{1}{\Phi'_8} \right], \quad (7.14)$$

с постоянной C из неравенства (7.12). Итак, из (7.12)–(7.14) следует оценка

$$\begin{aligned} & \partial_t \|\varphi^2 \nabla \operatorname{curl} v(t)\|_{\omega(x_0, R)}^2 + \frac{\nu}{4} \|\nabla^3 v(t)\|_{\omega(x_0, r)}^2 \\ & \leq \frac{\nu}{8} \|\nabla^3 v(t)\|_{\omega(x_0, q)}^2 + C \left[\|\operatorname{curl} g(t)\|_{\omega(x_0, R)}^2 \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{1}{(q-r)^2} + \|v(t)\|_{\infty, \omega(x_0, R)}^2 \right) \|\nabla^2 v(t)\|_{\omega(x_0, R)}^2 \right] \end{aligned} \quad (7.15)$$

для всех $R/2 \leq r < q \leq R$, $0 < R \leq 1/\Phi'_8$.

Пусть $t_0 \geq \delta + R^2$, а χ – срезающая функция, удовлетворяющая условиям

$$\chi(t) = \begin{cases} 0, & t \leq t_0 - q^2, \\ \frac{t - t_0 + q^2}{q^2 - r^2}, & t_0 - q^2 < t < t_0 - r^2, \\ 1, & t \geq t_0 - r^2. \end{cases} \quad (7.16)$$

Положим

$$Q(x_0, t_0, R) \equiv \omega(x_0, R) \times]t_0 - R^2, t_0[. \quad (7.17)$$

Умножая неравенство (7.15) на χ и интегрируя его по t на интервале $]t_0 - R^2, t_0[$, мы получим

$$\begin{aligned} G(r) &\leq \frac{1}{2}G(q) + C \left[\frac{1}{(q-r)^2} + \|v\|_{\infty, Q(x_0, t_0, R)}^2 \right] \|\nabla^2 v\|_{Q(x_0, t_0, R)}^2 \\ &\quad + C \|\operatorname{curl} g\|_{Q(x_0, t_0, R)}^2, \quad \frac{R}{2} \leq r < q \leq R, \end{aligned}$$

где

$$G(r) = \operatorname{ess\,sup}_{t_0 - r^2 \leq t \leq t_0} \|\nabla \operatorname{curl} v(t)\|_{\omega(x_0, r)}^2 + \frac{\nu}{4} \|\nabla^3 v\|_{Q(x_0, t_0, r)}^2.$$

Отсюда (см. [17, гл. 5, лемма 3.1]) вытекает

$$G\left(\frac{R}{2}\right) \leq C \left[\frac{1}{R^2} + \|v\|_{\infty, Q(x_0, t_0, R)}^2 \right] \|\nabla^2 v\|_{Q(x_0, t_0, R)}^2 + C \|\operatorname{curl} g\|_{Q(x_0, t_0, R)}^2 \quad (7.18)$$

для всех $x_0 \in \mathbb{R}^2$, $t_0 \geq R^2 + \delta$, $0 < R \leq 1/\Phi'_8$.

Перейдем к выводу глобальной оценки (1.28). В силу периодичности и оценок (1.12), (5.13) мы имеем

$$\begin{aligned} \|\nabla^2 v\|_{Q(x_0, t_0, R)}^2 &= \int_{t_0 - R^2}^{t_0} \int_{\omega(x_0, R)} |\nabla^2 v(x, t)|^2 dx dt \\ &\leq \int_{t_0 - R^2}^{t_0} \int_{\Omega} |\nabla^2 v(x, t)|^2 dx dt \\ &\leq \int_{\delta}^T dt \|\nabla^2 v(t)\|^2 \leq \frac{1}{\delta} \|\sqrt{t} \nabla^2 v\|_{Q_T}^2 \leq \frac{1}{\delta} \Phi_4 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \|v\|_{\infty, Q(x_0, t_0, R)}^2 &= \sup_{t_0 - R^2 \leq t \leq t_0} \|v(t)\|_{\infty, \omega(x_0, R)}^2 \\ &\leq \sup_{t_0 - R^2 \leq t \leq t_0} \|v(t)\|_{\infty}^2 \leq \sup_{\delta \leq t \leq T} \|v(t)\|_{\infty}^2 \\ &\leq \frac{1}{\delta^2} \sup_{\delta \leq t \leq T} \|tv(t)\|_{\infty}^2 \leq \frac{1}{\delta^2} \|tv\|_{\infty, Q_T}^2 \leq \frac{1}{\delta^2} (\Phi_2'')^2. \end{aligned}$$

Таким образом, из (7.18) можно вывести оценку

$$\begin{aligned} &\operatorname{ess\,sup}_{t_0 - (\frac{R}{2})^2 \leq t \leq t_0} \|\nabla \operatorname{curl} v(t)\|_{\omega(x_0, \frac{R}{2})}^2 + \frac{\nu}{4} \|\nabla^3 v\|_{Q(x_0, t_0, \frac{R}{2})}^2 \\ &\leq C \left[\frac{1}{R^2} + \frac{1}{\delta^2} (\Phi_2'')^2 \right] \frac{1}{\delta} \Phi_4 + C \|\operatorname{curl} g\|_{Q_{\delta, T}}^2 \end{aligned} \quad (7.19)$$

для всех $x_0 \in \mathbb{R}^2$, $t_0 \geq R^2 + \delta$, $0 < R \leq 1/\Phi_8$.

Пусть $\delta_1 > \delta$, положим

$$R_1 = \min \left\{ \sqrt{\delta_1 - \delta}, \frac{1}{\Phi'_8} \right\}.$$

Затем разобьем отрезки $[-1, 1]$ и $\bar{I}_{\delta_1} = [\delta_1, T]$ на N_1 и N_2 одинаковых частей так, что:

$$\begin{aligned} -1 = a_0 < a_1 < \dots < a_{N_1} = 1, \quad a_i - a_{i-1} < \frac{R_1}{4}, \quad i = 1, 2, \dots, N_1, \\ \delta_1 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N_2} = T, \quad t_k - t_{k-1} < \frac{R_1^2}{16}, \quad k = 1, 2, \dots, N_2. \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} x^{i,j} &= (a_i, a_j) \in \mathbb{R}^2, \quad \omega_{i,j} = \omega(x^{i,j}, R_1), \\ I_k &= \left[t_k - \frac{R_1^2}{4}, t_k \right], \quad Q_{i,j}^k = \omega_{i,j} \times I_k, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, N_1, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N_2. \end{aligned}$$

В силу построения мы имеем

$$t_0 \geq R_1^2 + \delta, \quad \Omega \subset \bigcup_{i,j=0}^{N_1} \omega_{i,j}, \quad I_{\delta_1} \subset \bigcup_{k=0}^{N_2} I_k$$

и, следовательно,

$$Q_{\delta_1, T} \subset \bigcup_{i,j=0}^{N_1} \bigcup_{k=0}^{N_2} Q_{i,j}^k.$$

Далее, в силу (7.19) мы имеем

$$\begin{aligned} & \operatorname{ess\,sup}_{\delta_1 \leq t \leq T} \left\| \nabla \operatorname{curl} v(t) \right\|_{\Omega}^2 + \frac{\nu}{4} \left\| \nabla^3 v \right\|_{Q_{\delta_1, T}}^2 \\ & \leq \operatorname{ess\,sup}_{\delta_1 \leq t \leq T} \sum_{i,j=0}^{N_1} \left\| \nabla \operatorname{curl} v(t) \right\|_{\omega_{i,j}}^2 + \frac{\nu}{4} \sum_{i,j=0}^{N_1} \sum_{k=0}^{N_2} \left\| \nabla^3 v \right\|_{Q_{i,j}^k}^2 \\ & \leq \sum_{i,j=0}^{N_1} \left(\operatorname{ess\,sup}_{\delta_1 \leq t \leq T} \left\| \nabla \operatorname{curl} v(t) \right\|_{\omega_{i,j}}^2 + \frac{\nu}{4} \sum_{k=0}^{N_2} \left\| \nabla^3 v \right\|_{Q_{i,j}^k}^2 \right) \\ & \leq \sum_{i,j=0}^{N_1} \sum_{k=0}^{N_2} \left[\operatorname{ess\,sup}_{t \in I_k} \left\| \nabla \operatorname{curl} v(t) \right\|_{\omega_{i,j}}^2 + \frac{\nu}{4} \left\| \nabla^2 v \right\|_{Q_{i,j}^k}^2 \right] \\ & \leq C N_1^2 N_2 \left[\frac{1}{\delta} \Phi_4 \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{\delta^2} (\Phi_2'')^2 \right) + \left\| \operatorname{curl} g \right\|_{Q_{\delta, T}}^2 \right]. \end{aligned} \tag{7.20}$$

Осталось заметить, что $\|\nabla \operatorname{curl} v(t)\| = \|\nabla^2 v(t)\|$ (см. (2.2)) и что $N_1^2 N_2 \leq \Phi_8''$ с мажорантой Φ_8'' , зависящей от тех же переменных, что и Φ_8 . Итак, формальное доказательство (1.28) закончено.

Перейдем к обсуждению оценки (1.29). Пользуясь предположениями (7.1), мы можем записать тождество

$$(\partial_{t^2} v(t), w) - (\operatorname{div} \partial_t \sigma(t), w) = (\partial_t g(t), w) - (\partial_t (v_k(t) v_{,k}(t)), w) \quad (7.21)$$

для всех $w \in H$ и п.в. всех $t \in [0, T]$. Полагаем

$$w = \hat{w}(t) = -\Delta \partial_t v(t) \quad (7.22)$$

в (7.21), а затем будем оценивать каждое слагаемое в (7.21). Имеем

$$(\partial_{t^2} v(t), \hat{w}(t)) = \frac{1}{2} \|\nabla \partial_t v(t)\|^2. \quad (7.23)$$

Далее используем тождество (2.3) и получаем

$$-(\operatorname{div} \partial_t \sigma(t), \hat{w}(t)) = (\partial_t \sigma_{,k}, \varepsilon(\partial_t v_{,k}(t))),$$

где

$$\partial_t \sigma_{,k} = \partial_t \left(\frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon^2}(\varepsilon(v)) \varepsilon(v_{,k}) \right) = \frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon^2}(\varepsilon(v)) \varepsilon(\partial_t v_{,k}) + \left(\frac{\partial^3 D}{\partial \varepsilon^3}(\varepsilon(v)) \varepsilon(\partial_t v) \right) \varepsilon(v_{,k}),$$

и, следовательно, в силу условий (1.23), (1.17)

$$\begin{aligned} -(\operatorname{div} \partial_t \sigma(t), \hat{w}(t)) &\geq 2\nu \|\nabla \varepsilon(\partial_t v(t))\|^2 - C_1 \|\nabla \varepsilon(\partial_t v(t))\| \|\nabla \partial_t v\| \|\nabla^2 v\| \\ &\geq \nu \|\nabla \varepsilon(\partial_t v(t))\|^2 - C_2 \|\nabla \partial_t v(t)\|_4^2 \|\nabla^2 v(t)\|_4^2 \\ &\geq \frac{\nu}{2} \|\nabla^2 \partial_t v(t)\|^2 - C_3 \|\nabla \partial_t v(t)\| \|\nabla^2 \partial_t v(t)\| \|\nabla^2 v(t)\|_4^2 \\ &\geq \frac{\nu}{4} \|\nabla^2 \partial_t v(t)\|^2 - C_4 \|\nabla \partial_t v(t)\|^2 \|\nabla^2 v(t)\|_4^4. \end{aligned} \quad (7.24)$$

Теперь будем оценивать слагаемые в правой части (7.21). Имеем

$$|(\partial_t g(t), \hat{w}(t))| \leq \|\partial_t g(t)\| \|\nabla^2 \partial_t v(t)\|. \quad (7.25)$$

Далее,

$$\begin{aligned} |(\partial_t (v_k(t) v_{,k}(t)), \hat{w}(t))| &= |(\partial_t (v_k(t) v_{,k}(t)), \operatorname{curl}^*(\operatorname{curl} \partial_t v(t)))| \\ &= |(\partial_t (v_k(t) \operatorname{curl} v_{,k}(t)), \operatorname{curl} \partial_t v(t))| = |(\partial_t v_k(t) \operatorname{curl} v_{,k}(t), \operatorname{curl} \partial_t v(t))| \\ &\leq C_1 \|\nabla \partial_t v(t)\| \|\partial_t v(t)\|_4 \|\nabla^2 v(t)\|_4 \stackrel{(2.6)}{\leq} C_2 \|\nabla \partial_t v(t)\|^{\frac{3}{2}} \|\partial_t v(t)\|^{\frac{1}{2}} \|\nabla^2 v(t)\|_4 \\ &\stackrel{(2.5)}{\leq} C_3 \|\nabla \partial_t v(t)\|^2 \left(\|\nabla^2 v(t)\|_4^4 + 1 \right). \end{aligned} \quad (7.26)$$

Собирая оценки (7.23)–(7.26), выводим из (7.21), (7.22)

$$\begin{aligned} \partial_t \|\nabla \partial_t v(t)\|^2 + \frac{\nu}{2} \|\nabla^2 \partial_t v(t)\|^2 &\leq C_1 \left\{ \|\nabla \partial_t v(t)\|^2 (\|\nabla^2 v(t)\|_4^4 + 1) + \|\partial_t g(t)\|^2 \right\} \\ &\leq C_2 \left\{ \|\nabla \partial_t v(t)\|^2 (\|\nabla^2 v(t)\|^2 \|\nabla^3 v(t)\|^2 + 1) + \|\partial_t g(t)\|^2 \right\}. \end{aligned} \quad (7.27)$$

Пусть срезающая функция χ выбрана так, чтобы

$$\chi(t) = \begin{cases} 0, & t \leq \frac{\delta_1 + \delta}{2}, \\ \frac{2t - \delta_1 - \delta}{\delta_1 - \delta}, & \frac{\delta_1 + \delta}{2} < t < \delta_1, \\ 1, & t \geq \delta_1. \end{cases} \quad (7.28)$$

Тогда умножение (7.27) на функцию χ , удовлетворяющую условию (7.28), дает

$$\begin{aligned} \partial_t \left(\chi(t) \|\nabla \partial_t v(t)\|^2 \right) + \frac{\nu}{2} \left(\chi(t) \|\nabla^2 \partial_t v(t)\|^2 \right) \\ \leq C \left(\chi(t) \|\nabla \partial_t v(t)\|^2 \right) \left[\|\nabla^2 v(t)\|_2^2 \|\nabla^3 v(t)\|_2^2 + 1 \right] \\ + \chi'(t) \|\nabla \partial_t v(t)\|^2 + C \chi(t) \|\partial_t g(t)\|^2. \end{aligned} \quad (7.29)$$

Теперь из (7.29) можно вывести оценку

$$\begin{aligned} \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \left(\chi(t) \|\nabla \partial_t v(t)\|^2 \right) &\leq C \int_0^T \left[\chi'(t) \|\nabla \partial_t v(t)\|^2 + \chi(t) \|\partial_t g(t)\|^2 \right] dx \\ &\times \exp \left\{ C \left[\operatorname{ess\,sup}_{\frac{\delta_1 + \delta}{2} \leq t \leq T} \|\nabla^2 v(t)\|^2 \int_{\frac{\delta_1 + \delta}{2}}^T |\nabla^3 v(t)|^2 dt + T \right] \right\}. \end{aligned} \quad (7.30)$$

В силу оценки (1.7) и условия (1.20) мы имеем

$$\begin{aligned} \int_0^T \left[\chi'(t) \|\nabla \partial_t v(t)\|^2 + \chi(t) \|\partial_t g(t)\|^2 \right] dx &\leq \frac{2}{(\delta_1 - \delta)\delta^2} \int_0^T \|t \nabla \partial_t v(t)\|^2 dt \\ &+ \frac{1}{\delta^5} \int_0^T t^5 \|\partial_t g(t)\|^2 dt \leq \frac{2}{\delta^2(\delta_1 - \delta)} \Phi_2 + \frac{1}{\delta^5} \|t^{\frac{5}{2}} \partial_t g\|_{Q_T}^2. \end{aligned} \quad (7.31)$$

Таким образом, если воспользоваться оценкой (1.28), в которой δ_1 заменено на $\frac{\delta_1 + \delta}{2}$, мы получим из (7.30) и (7.31)

$$\operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \left(\chi(t) \|\partial_t v(t)\|^2 \right) \leq \Phi'_9, \quad (7.32)$$

где мажоранта Φ'_9 зависит от тех же аргументов, что и Φ_8 . Но тогда из (7.29), (7.31) и (7.32) следует

$$\begin{aligned} \frac{\nu}{2} \|\nabla^2 \partial_t v(t)\|_{Q_{\delta_1, T}}^2 &\leq C \Phi'_9 \left[\operatorname{ess\,sup}_{\frac{\delta_1 + \delta}{2} \leq t \leq T} \|\nabla^2 v(t)\|^2 \int_{\frac{\delta_1 + \delta}{2}}^T \|\nabla^3 v(t)\|^2 dt + T \right] \\ &+ C \left[\frac{2}{\delta^2(\delta_1 - \delta)} \Phi_2 + \frac{1}{\delta^5} \|t^{\frac{5}{2}} \partial_t g(t)\|_{Q_T}^2 \right]. \end{aligned}$$

Повторяя рассуждения, использованные для вывода (7.32), заключаем, что две последние оценки влекут (1.29).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1.2. Утверждение (1.30) вытекает из конечности нормы $\|\nabla^2 \partial_t v\|_{Q_{\delta_1, T}}$. Далее в силу неравенства (2.6) имеем

$$\|\nabla^2 v\|_{4, Q_{\delta_1, T}}^2 \leq C \sup_{\delta_1 \leq t \leq T} \|\nabla^2 v(t)\| \|\nabla^3 v\|_{Q_{\delta_1, T}} \leq C \Phi_8$$

и

$$\|\nabla \partial_t v\|_{4, Q_{\delta_1, T}}^2 \leq C \operatorname{ess\,sup}_{\delta_1 \leq t \leq T} \|\nabla \partial_t v(t)\| \|\nabla^2 \partial_t v\|_{Q_{\delta_1, T}} \leq C \Phi_9.$$

Отсюда вытекает (1.31). Утверждение (1.32) получаем из непрерывности вложения $W_4^1(Q_{\delta_1, T}; \mathbb{R}^4)$ в $C^{\frac{1}{4}}(\overline{Q}_{\delta_1, T}; \mathbb{R}^4)$ (градиент ∇v непрерывен по Гёльдеру в $\overline{Q}_{\delta_1, T}$ с показателем $1/4$).

§ 8. Второй способ доказательства конечномерности аттрактора $\mathfrak{M}$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1.2. Полагая $w = u(t)$ в (1.36), мы получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \partial_t \|u(t)\|^2 + \left(\frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon^2} (\varepsilon(v(t))) \varepsilon(u(t)), \varepsilon(u(t)) \right) \\ &= (v_k(t) u_{,k}(t), u(t)) + (u_k(t) v_{,k}(t), u(t)) \leq \|\nabla v(t)\| \|u(t)\|_4^2 \\ &\stackrel{(2.6)}{\leq} C \|\nabla v(t)\| \|\nabla u(t)\| \|u(t)\|. \end{aligned} \quad (8.1)$$

В силу условия (1.2₃) и тождества (2.1) имеем

$$\left(\frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon^2} (\varepsilon(v(t))) \varepsilon(u(t)), \varepsilon(u(t)) \right) \geq 2\nu \|\varepsilon u(t)\|^2 = \nu \|\nabla u(t)\|^2.$$

Отсюда и из (8.1) выводим

$$\partial_t \|u(t)\|^2 + \nu \|\nabla u(t)\|^2 \leq C \|\nabla v(t)\|^2 \|u(t)\|^2. \quad (8.2)$$

Поскольку $v(t) \in \mathfrak{M}$, $t \in \mathbb{R}^1$, то согласно теореме 1.2 мы получаем из (8.2) оценку

$$\partial_t \|u(t)\|^2 + \nu \|\nabla u(t)\|^2 \leq C M_1 \|u(t)\|^2, \quad (8.3)$$

и, следовательно,

$$\|u(1)\|^2 \leq \|u(0)\|^2 e^{C M_1} \Leftrightarrow \|V_1'(\varphi) \psi\|^2 \leq \|\psi\|^2 e^{C M_1}$$

для всех $\psi \in H$ и $\varphi \in \mathfrak{M}$. Отсюда вытекает утверждение (1.37).

Перейдем к доказательству второго утверждения леммы. Положим

$$\begin{aligned} v^1(t) &= V_t(\varphi^1), & v(t) &= V_t(\varphi), & \tilde{u}(t) &= v^1(t) - v(t), \\ u(t) &= V'_t(\varphi)(\varphi^1 - \varphi), & \hat{u}(t) &= \tilde{u}(t) - u(t). \end{aligned}$$

Из тождеств (1.4), (1.36) вытекает

$$\begin{aligned} &(\partial_t \hat{u}(t), w) + \left(\frac{\partial D}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(v^1(t))) - \frac{\partial D}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(v(t))) - \frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon^2}(\varepsilon(v(t)))\varepsilon(u(t)), \varepsilon(w) \right) \\ &= -(v_k^1(t)v_{,k}^1(t) - v_k(t)v_{,k}(t) - v_k(t)u_{,k}(t) - u_k(t)v_{,k}(t), w). \end{aligned}$$

Подставим $w = \hat{u}(t)$ в последнее тождество и применим формулу конечных приращений:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\partial_t \|\hat{u}(t)\|^2 + \left(\int_0^1 \left(\frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon^2}(\varepsilon(v(t)) + \theta \varepsilon(\tilde{u}(t))) - \frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon^2}(\varepsilon(v(t))) \right) d\theta \varepsilon(\tilde{u}(t)), \varepsilon(\hat{u}(t)) \right) \\ &+ \left(\frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon^2}(\varepsilon(v(t)))\varepsilon(\hat{u}(t)), \varepsilon(\hat{u}(t)) \right) \\ &= -(v_k^1(t)\tilde{u}_{,k}(t) + \tilde{u}_k(t)v_{,k}(t) - v_k(t)u_{,k}(t) - u_k(t)v_{,k}(t), \hat{u}(t)) \\ &= -(\hat{u}_k(t)v_{,k}(t), \hat{u}_k(t)) - (v_k^1(t)\hat{u}_{,k}(t), \hat{u}(t)) - (\tilde{u}_k(t)u_{,k}(t), \hat{u}(t)) \\ &\leq \|\nabla v(t)\| \|\hat{u}(t)\|_4^2 + (\tilde{u}_k(t)\tilde{u}_{,k}(t), \hat{u}(t)) \\ &\leq \|\nabla v(t)\| \|\hat{u}(t)\|_4^2 + \|\nabla \hat{u}(t)\| \|\tilde{u}(t)\|_4^2. \end{aligned} \tag{8.4}$$

При оценке второго и третьего слагаемых в левой части (8.4) воспользуемся соответственно условиями (1.17) и (1.23). Правая часть будет оцениваться при помощи неравенства (2.6):

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\partial_t \|\hat{u}(t)\|^2 + 2\nu \|\varepsilon(\hat{u}(t))\|^2 \leq C \|\varepsilon(\tilde{u}(t))\|_4^2 \|\varepsilon(\hat{u}(t))\| \\ &+ C \|\nabla v(t)\| \|\hat{u}(t)\| \|\nabla \hat{u}(t)\| + C \|\nabla \hat{u}(t)\| \|\tilde{u}(t)\| \|\nabla \tilde{u}(t)\|. \end{aligned}$$

Затем воспользуемся тождеством 2.1, неравенством Коши–Буняковского и теоремой 1.2. В результате будем иметь

$$\partial_t \|\hat{u}(t)\|^2 + \frac{\nu}{2} \|\nabla \hat{u}(t)\|^2 \leq C \|\varepsilon(\tilde{u}(t))\|_4^4 + CM_1 \|\hat{u}(t)\|^2 + C \|\nabla \tilde{u}(t)\|^2 \|\tilde{u}(t)\|^2.$$

Отсюда выводится оценка

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq 1} \|\hat{u}(t)\|^2 &\leq Ce^{CM_1} \left[\int_0^1 \|\varepsilon(\tilde{u}(t))\|_4^4 dt \right. \\ &\quad \left. + \sup_{0 \leq t \leq 1} \|\tilde{u}(t)\|^2 \int_0^1 \|\nabla \tilde{u}(t)\|^2 dt \right]. \end{aligned}$$

Принимая во внимание утверждение леммы 4.3, имеем

$$\|\hat{u}(1)\|^2 \leq Ce^{CM_1} \left[\int_0^1 \|\varepsilon(\tilde{u}(t))\|_4^4 dt + \|\varphi^1 - \varphi\|^4 \right]. \quad (8.5)$$

Для оценки первого слагаемого в правой части (8.5) воспользуемся тем фактом, что

$$\int_{Q_1} \varepsilon(\tilde{u}) dx dt = 0,$$

и мультипликативным неравенством (см. [15, гл. II])

$$\begin{aligned} \|\varepsilon(\tilde{u})\|_{4, Q_1} &\leq C_1 (\|\nabla \varepsilon(\tilde{u})\|_{4, Q_1} + \|\partial_t \varepsilon(\tilde{u})\|_{4, Q_1})^{\frac{3}{7}} \|\varepsilon(\tilde{u})\|_{Q_1}^{\frac{4}{7}} \\ &\leq C_2 \|\nabla \tilde{u}\|_{W_4^1(Q_1; \mathbb{R}^4)}^{\frac{3}{7}} \|\nabla \tilde{u}\|_{Q_1}^{\frac{4}{7}}. \end{aligned}$$

Таким образом, отсюда, а также из (8.5) и леммы 4.3 выводим

$$\begin{aligned} \|\hat{u}(1)\|^2 &\leq Ce^{CM_1} \left\{ \|\nabla \tilde{u}\|_{W_4^1(Q_1; \mathbb{R}^4)}^{\frac{12}{7}} \|\varphi^1 - \varphi\|^{\frac{16}{7}} + \|\varphi^1 - \varphi\|^4 \right\} \\ &\leq Ce^{CM_1} \|\varphi^1 - \varphi\|^{2\frac{2}{7}} \left\{ \|\nabla \tilde{u}\|_{W_4^1(Q_1; \mathbb{R}^4)}^{\frac{12}{7}} + \|\varphi^1 - \varphi\|^{\frac{12}{7}} \right\}. \end{aligned}$$

С другой стороны, в силу оценки (1.34) теоремы 1.9 и согласно теореме 1.2 имеем

$$\begin{aligned} \|\nabla \tilde{u}\|_{W_4^1(Q_1; \mathbb{R}^4)} &= \left(\int_0^1 (\|\nabla^2(V_t(\varphi^1) - V_t(\varphi))\|_4^4 \right. \\ &\quad \left. + \|\nabla \partial_t(V_t(\varphi^1) - V_t(\varphi))\|_4^4) dt \right)^{\frac{1}{4}} \leq 2M_2^{\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

и

$$\|\varphi^1 - \varphi\| \leq 2R_0.$$

Собирая три последних оценки, получим

$$\|\hat{u}(1)\|^2 \leq Ce^{CM_1} \|\varphi^1 - \varphi\|^{2\frac{2}{7}} \left\{ M_2^{\frac{3}{7}} + R_0^{\frac{12}{7}} \right\} \quad (8.6)$$

для всех $\varphi^1, \varphi \in \mathfrak{M}$. Осталось положить

$$r \equiv 1, \quad h(s) = s^{\frac{1}{7}} Ce^{CM_1} \left\{ M_2^{\frac{3}{7}} + R_0^{\frac{12}{7}} \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad s \in [0, 1],$$

вспомнить определение $\hat{u}(1) = V_1(\varphi^1) - V_1(\varphi) - V_1'(\varphi)(\varphi^1 - \varphi)$ и вывести из (8.6) требуемое неравенство (1.38). Лемма 1.2 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.10. Как уже объяснялось в § 1, мы можем применить схему оценки размерности аттракторов, изложенную в [6]. В частности, мы будем использовать теорему 4.9 из [6] при $t = 1/\nu$. Еще раз подчеркнем, что в силу полугрупповых свойств оператор V_t обладает свойством равномерной квазидифференцируемости на $\mathfrak{M}$ при всяком конечном t . Для того чтобы использовать теорему 4.9 из [6], мы должны определить мажоранту для

$$\begin{aligned} (L^c(t)w, w) &\equiv -((\nabla w)v(t) + (\nabla v(t))w, w) - \left(\frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon^2}(\varepsilon(v(t)))\varepsilon(w), \varepsilon(w) \right) \\ &\leq -((\nabla v(t))w, w) - 2\nu \|\varepsilon(w)\|^2 \leq \|\nabla v(t)\| \|w\|_4^2 - \nu \|\nabla w\|^2 \\ &\leq \bar{c} \|\nabla v(t)\| \|w\| \|\nabla w\| - \nu \|\nabla w\|^2 \leq -\frac{\nu}{2} \|\nabla w\|^2 + \frac{\bar{c}^2}{2\nu} \|\nabla v(t)\|^2 \|w\|^2, \end{aligned}$$

где $\bar{c}$ – абсолютная постоянная из неравенства (2.6). Полагаем

$$\begin{aligned} h_1(t) &= \frac{\nu}{2}, \quad h_0(t) = \frac{\bar{c}^2}{2\nu} \|\nabla v(t)\|^2, \quad \bar{h}_1(t) = \frac{\nu}{2}, \\ \bar{h}_0(t) &= \frac{\bar{c}^2}{2\nu t} \int_0^t \|\nabla v(\theta)\|^2 d\theta = \frac{\bar{c}^2}{2} \int_0^t \|\nabla v(\theta)\|^2 d\theta, \quad t = \frac{1}{\nu}. \end{aligned}$$

С другой стороны, так как $v(t) \in \mathfrak{M}$, то мы можем оценить $\bar{h}_0(1/\nu)$ (см. [5, теорема 1.2, оценки 2.4]):

$$\begin{aligned} \frac{\nu}{2} \int_0^t \|\nabla v(\theta)\|^2 d\theta &\leq R_0^2 + \frac{2}{\nu} t \|f\|_{(-1)}^2 = \left[t = \frac{1}{\nu} \right] \\ &= \frac{4\|f\|_{(-1)}^2}{\nu^2 \lambda_1} + \frac{2}{\nu^2} \|f\|_{(-1)}^2 = \frac{2}{\nu^2} \|f\|_{(-1)}^2 \left[\frac{2}{\lambda_1} + 1 \right] \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\bar{h}_0(t) \leq \frac{2\bar{c}^2}{\nu^3} \|f\|_{(-1)}^2 \left[\frac{2}{\lambda_1} + 1 \right], \quad t = \frac{1}{\nu}.$$

Известно, что $\lambda_k = O(k)$, и потому существует абсолютная положительная постоянная c_1 такая, что

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \geq c_1 n^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

Здесь $\{\lambda_i\}_{i=1}^\infty$ – собственные значения оператора задачи (1.3). Тогда согласно теореме 4.9 из [6] мы имеем оценки

$$\dim_H \mathfrak{M} \leq \dim_f \mathfrak{M} \leq N,$$

где N удовлетворяет неравенству

$$-\bar{h}_1(t)c_1 N + \bar{h}_0(t) < 0, \quad t = \frac{1}{\nu}.$$

Таким образом,

$$N < \frac{\bar{h}_0(t)}{c_1 \bar{h}_1(t)} \leq \frac{4\bar{c}^2}{c_1} \left[\frac{2}{\lambda_1} + 1 \right] \frac{1}{\nu^4} \|f\|_{(-1)}^2.$$

Теорема 1.10 доказана.

§ 9. Доказательство теоремы 1.6

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.6. Идея доказательства теоремы 1.6 изложена в § 5. Но для того чтобы все операции были законными, мы вынуждены заменить одну производную по t конечными разностями. Пусть $t \in]0, T[$, $h > 0$, причем $t + h \in]0, T[$. Полагая $\Delta_h f(t) = (f(t + h) - f(t))/h$, выводим из вариационного тождества (1.4) следующее соотношение:

$$(\Delta_h \partial_t v(t), w) + \left(\Delta_h \frac{\partial D}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(v(t))), \varepsilon(w) \right) = -(\Delta_h (\nabla v(t)v(t)), w) + (\Delta_h g(t), w) \quad \forall w \in H^1. \quad (9.1)$$

Применяя формулу конечных приращений, введем обозначения

$$\Delta_h \frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon^2}(\varepsilon(v(t))) = \mathcal{L}_h(t) \varepsilon(\Delta_h v(t)),$$

где

$$\mathcal{L}_h(t) = \int_0^1 \frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon^2}(\varepsilon(v(t)) + \theta h \Delta_h \varepsilon(v(t))) d\theta, \quad (9.2)$$

причем в силу условий (1.2₃) и (1.9)

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_h(t) \varkappa, \varkappa) &\geq 2\nu |\varkappa|^2 \quad \forall \varkappa \in \mathbb{M}, \\ |\mathcal{L}_h(t)| &\leq L. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Для произвольного положительного k полагаем

$$\begin{aligned} z_k(t) &= \min\{k, |\Delta_h v(t)|\}, \\ w^k(t) &= \Delta_h v(t) \ln^2(2 + z_k^2(t)). \end{aligned} \quad (9.4)$$

В силу теоремы 1.1 $w^k(t) \in W_{2,\text{per}}^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$ для п.в. $t \in [0, T]$ и всех k , поскольку

$$\begin{aligned} |\nabla w^k(t)| &\leq |\Delta_h \nabla v(t)| \ln(2 + z_k^2(t)) \left[\ln(2 + z_k^2(t)) + \frac{4|\Delta_h v(t)|^2}{2 + |\Delta_h v(t)|^2} \right] \\ &\leq |\nabla_h \nabla v(t)| \ln(2 + k^2) [\ln(2 + k^2) + 4]. \end{aligned}$$

Введем $\bar{w}^k(t) \equiv w^k(t) - \frac{1}{4} \int_{\Omega} w^k(t) dt$; тогда

$$\bar{w}^k(t) \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega; \mathbb{R}^2), \quad t \in]0, T[, \quad k > 0.$$

Теперь вместо задачи (5.1) мы рассматриваем краевую задачу

$$\begin{cases} \Delta q = \operatorname{div} w^k(t) & \text{в } \Omega, \\ q|_{x_i=-1} = q|_{x_i=1}, \quad \nabla q|_{x_i=-1} = \nabla q|_{x_i=1}, & i = 1, 2, \end{cases} \quad (9.5)$$

решение которой принадлежит $W_2^2(\Omega)$. Для решения верна оценка

$$\|\nabla^2 q\| \leq C_1 \|\operatorname{div} w^k(t)\| \leq C_2 \|\Delta_h \nabla v(t) \ln(2 + z_k^2(t))\|. \quad (9.6)$$

Таким образом, мы можем утверждать, что

$$\tilde{w}^k(t) = \bar{w}^k(t) - \nabla q \in H^1 \quad \text{для п.в. } t \in [0, T]. \quad (9.7)$$

Но тогда можно положить $w = \tilde{w}^k(t)$ в (9.1) и получить равенство

$$I_1 + I_2 = I_3 + I_4 + I_5, \quad (9.8)$$

в котором

$$\begin{aligned} I_1 &\equiv (\partial_t \Delta_h v(t), \tilde{w}^k(t)), \quad I_2 \equiv (\mathcal{L}_h(t) \varepsilon(\Delta_h v(t)), \varepsilon(\tilde{w}^k(t))), \\ I_3 &\equiv ((\nabla \Delta_h v(t))v(t+h), \tilde{w}^k(t)), \quad I_4 \equiv ((\nabla v(t))\Delta_h v(t), \tilde{w}^k(t)), \\ I_5 &= (\Delta_h g(t), \tilde{w}^k(t)). \end{aligned}$$

В силу теоремы 1.1 $\partial_t \Delta_h v(T) \in H^1$ для п.в. $t \in]0, T[$ таких, что $t+h \in]0, T[$. По этой причине следующая цепочка равенств законна:

$$I_1 = (\partial_t \Delta_h v(t), w^k(t)) = \frac{1}{2} \partial_t \int_{\Omega} H_k(|\partial_h v(t)|^2) dx, \quad (9.9)$$

где (см. (5.6))

$$H_k(y) = \begin{cases} H_{\infty}(y), & 0 \leq y \leq k^2, \\ (y+2) \ln^2(2+k^2) - 2(2+k^2) [\ln(2+k^2) - 1], & y \geq k^2. \end{cases}$$

Для функции H_k справедливы соотношения

$$H_k(y) \geq H_{\infty}(\min\{y, k^2\}), \quad (9.10_1)$$

$$H_k(y) \rightarrow H_{\infty}(y) \quad \text{при } k \rightarrow +\infty, \quad (9.10_2)$$

$$H_k(y) \leq (y+2) \ln^2(2+y) \leq C(y^2+1) \quad (9.10_3)$$

для всех $y \geq 0$.

Второе слагаемое в левой части равенства (9.8) оценивается при помощи (9.2), (9.3), (9.5)–(9.7) совершенно так же, как и соответствующее слагаемое в (5.5). Выпишем окончательный результат (аналог (5.11)):

$$I_2 \geq \frac{\nu}{4} \|\nabla \Delta_h v(t) \ln(2 + z_k^2)\|^2 - C \|\nabla \Delta_h v(t)\|^2. \quad (9.11)$$

Слагаемые I_3, I_4 оцениваются следующим образом:

$$|I_3| + |I_4| \leq \|v(t+h)\|_\infty \|\nabla \Delta_h v(t)\| \|\tilde{w}^k(t)\| + \|\tilde{w}^k(t)\| \|\Delta_h v(t)\|_4 \|\nabla v(t)\|_4. \quad (9.12)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \|\tilde{w}^k(t)\|^2 &\leq \|w^k(t)\|^2 \leq \int_\Omega |\Delta_h v(t)|^2 \ln^4(2 + z_k^2(t)) \\ &\leq \int_\Omega |\Delta_h v(t)|^2 \ln^4(2 + |\Delta_h v(t)|^2) dx \\ &\leq C \left[\|\Delta_h v(t)\|^2 + \|\Delta_h v(t)\|_4^4 \right]. \end{aligned} \quad (9.13)$$

Из (9.12) и (9.13) выводим

$$\begin{aligned} |I_3| + |I_4| &\leq C \left[\|\Delta_h v(t)\|^2 + \|\Delta_h v(t)\|_4^4 + \|\nabla v(t)\|_4^2 \right. \\ &\quad \left. + \|v(t+h)\|_\infty^2 \|\nabla \Delta_h v(t)\|^2 \right]. \end{aligned} \quad (9.14)$$

И, наконец, при помощи (9.13) получаем

$$|I_5| \leq C \|\Delta_h g(t)\| \left(\|\Delta_h v(t)\|^2 + \|\Delta_h v(t)\|_4^4 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (9.15)$$

Собирая оценки (9.9), (9.11), (9.14) и (9.15), приходим к неравенству

$$\begin{aligned} \partial_t \int_\Omega H_k(|\Delta_h v(t)|^2) dx + \frac{\nu}{2} \|\nabla \Delta_h v(t) \ln(2 + z_k^2(t))\|^2 \\ \leq C \left[\|\Delta_h g(t)\|^2 + (1 + \|v(t+h)\|_\infty^2) \|\nabla \Delta_h v(t)\|^2 \right. \\ \left. + \|\Delta_h v(t)\|_4^4 + \|\nabla v(t)\|_4^4 \right] \end{aligned} \quad (9.16)$$

для п.в. $t \in [0, T]$ таких, что $t+h \in]0, T[$. Пусть теперь δ – произвольное число из интервала $]0, T[$, и пусть $|h| \leq \delta$. Умножая (9.16) на $(t - \delta)^5$, мы можем получить

следующую оценку:

$$\begin{aligned}
& \operatorname{ess\,sup}_{\delta \leq t \leq T-\delta} (t-\delta)^5 \int_{\Omega} H_k(|\Delta_h v(t)|) dx \\
& + \frac{\nu}{2} \int_{\delta}^{T-\delta} (t-\delta)^5 \|\nabla \Delta_h v(t) \ln(2+z_k^2(t))\|^2 dt \\
& \leq C \left[\int_{\delta}^{T-\delta} (t-\delta)^4 \int_{\Omega} H_k(|\Delta_h v(t)|^2) dx dt + \int_{\delta}^{T-\delta} (t-\delta)^5 \|\Delta_h g(t)\|^2 dt \right. \\
& + T \left(T^2 + \sup_{\delta \leq t \leq T-\delta} (t-\delta)^2 \|v(t+h)\|_{\infty}^2 \right) \int_{\delta}^{T-\delta} (t-\delta)^2 \|\nabla \Delta_h v(t)\|^2 dt \\
& \left. + T \int_{\delta}^{T-\delta} (t-\delta)^4 \|\Delta_h v(t)\|_4^4 dt + T^3 \int_{\delta}^{T-\delta} (t-\delta)^2 \|\nabla v(t)\|_4^4 dt \right]. \tag{9.17}
\end{aligned}$$

В силу (5.12) и (5.13) мы имеем

$$\sup_{\delta \leq t \leq T-\delta} (t-\delta) \|v(t+h)\|_{\infty} \leq \sup_{\delta \leq t \leq T-\delta} (t+h) \|v(t+h)\|_{\infty} \leq \|tv\|_{\infty, Q_T} \leq \Phi_2'' \tag{9.18}$$

и

$$\int_{\delta}^{T-\delta} (t-\delta)^2 \|\nabla v(t)\|_4^4 dt \leq \|\sqrt{t} \nabla v\|_{4, Q_T}^4 \leq (\Phi_2')^2. \tag{9.19}$$

Принимая во внимание (9.4), (9.10₁), (9.10₃), выводим из (9.17)–(9.19) следующее соотношение:

$$\begin{aligned}
& \operatorname{ess\,sup}_{\delta \leq t \leq T-\delta} (t-\delta)^5 \int_{\Omega} H_{\infty}(z_k^2(t)) + \frac{\nu}{2} \int_{\delta}^{T-\delta} (t-\delta)^5 \|\nabla \Delta_h v(t) \ln(2+z_k^2(t))\|^2 dt \\
& \leq C \left[T^4 + (1+T) \int_{\delta}^{T-\delta} (t-\delta)^4 \|\Delta_h v(t)\|_4^4 dt + \int_{\delta}^{T-\delta} (t-\delta)^5 \|\Delta_h g(t)\|^2 dt \right. \\
& \left. + T(T^2 + (\Phi_2'')^2) \int_{\delta}^{T-\delta} (t-\delta)^2 \|\nabla \Delta_h v(t)\|^2 dt + T^3 (\Phi_2')^2 \right]. \tag{9.20}
\end{aligned}$$

С другой стороны, известно, что

$$\begin{aligned}
& \int_{\delta}^{T-\delta} (t-\delta)^4 \|\Delta_h v(t)\|_4^4 dt \leq \|t \partial_t v\|_{4, Q_T}^4 \stackrel{(5.12)}{\leq} (\Phi_2')^2, \\
& \int_{\delta}^{T-\delta} (t-\delta)^5 \|\Delta_h g(t)\|^2 dt \leq \|t^{\frac{5}{2}} \partial_t g\|_{Q_T}^2, \\
& \int_{\delta}^{T-\delta} (t-\delta)^2 \|\nabla \Delta_h v(t)\|^2 dt \leq \|t \nabla \partial_t v\|_{Q_T}^2 \stackrel{(1.7)}{\leq} \Phi_2.
\end{aligned}$$

Таким образом, три последних неравенства вместе с оценкой (9.20) дают

$$\begin{aligned}
& \operatorname{ess\,sup}_{\delta \leq t \leq T-\delta} (t-\delta)^5 \int_{\Omega} H_{\infty}(z_k^2(t)) dx + \frac{\nu}{2} \int_{\delta}^{T-\delta} (t-\delta)^5 \|\nabla \Delta_h v(t) \ln(2+z_k^2(t))\|^2 dt \\
& \leq C [T^4 + (1+T)(\Phi_2')^2 + \|t^{\frac{5}{2}} \partial_t g\|_{Q_T}^2 + T^3 (\Phi_2')^2 + T(T^2 + (\Phi_2'')^2) \Phi_2]
\end{aligned}$$

для всех положительных k и δ . Устремляя k к $+\infty$, а затем δ к 0, заканчиваем доказательство теоремы 1.6.

§ 10. Регуляризованная задача

Используя неравенство

$$\|\nabla^2 u\| \leq C \|\Delta u\| \quad \forall u \in H^2, \quad (10.1)$$

введем на H^2 эквивалентную норму $\|u\|_{(2)} = \|\Delta u\|$.

Для произвольного числа $\mu \in]0, 1]$ рассмотрим следующую задачу. Найти функции v^μ такую, что

$$v^\mu \in C([0, T]; H) \cap L_2(0, T; H^2), \quad \partial_t v^\mu \in L_2(0, T; H^{-2}), \quad (10.2_1)$$

$$(\partial_t v^\mu(t), w) + \mu(\Delta v^\mu(t), \Delta w) + (\nabla v^\mu(t) v^\mu(t), w) - (\operatorname{div} \sigma^\mu(t), w) = (g(t), w)$$

$$\forall w \in H^2, \quad \sigma^\mu \equiv \frac{\partial D}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(v^\mu)), \quad (10.2_2)$$

для п.в. $t \in [0, T]$,

$$v^\mu(0) = \varphi. \quad (10.2_3)$$

Совершенно так же, как и теорема 1.1, доказывается

ТЕОРЕМА 10.1. *Для любых $T > 0$, $g \in L_2(0, T; H^{-1})$ и $\varphi \in H$ существует единственное решение v^μ задачи (10.2_k), $k = 1, 2, 3$. При этом верна оценка*

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|v^\mu(t)\|^2 + \mu \|\Delta v^\mu\|_{Q_T}^2 + \|\nabla v^\mu\|_{Q_T}^2 + \|\partial_t v^\mu\|_{L_2(I; H^{-2})}^2 \leq \Phi'_1.$$

Более того, если выполнено условие (1.6), то

$$\sqrt{t} v^\mu \in L_\infty(I; H^1), \quad \sqrt{t} \partial_t v^\mu \in L_2(I; H),$$

$$t \partial_t v^\mu \in L_\infty(I; H) \cap L_2(I; H^1),$$

$$\sqrt{t} \Delta v^\mu \in L_\infty(I; H), \quad t \Delta \partial_t v^\mu \in L_2(Q_T; \mathbb{R}^2)$$

и

$$\begin{aligned} & \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} [t \|\nabla v^\mu(t)\|^2 + \mu t \|\Delta v^\mu(t)\|^2 + t^2 \|\partial_t v^\mu(t)\|^2] \\ & + \int_0^T [t^2 (\mu \|\Delta \partial_t v^\mu(t)\|^2 + \|\nabla \partial_t v^\mu(t)\|^2) + t \|\partial_t v^\mu(t)\|^2] dt \leq \Phi'_2. \end{aligned} \quad (10.4)$$

И наконец, при условии (1.9) $t \partial_{t^2} v^\mu \in L_2(I; H^{-2})$ и

$$\|t \partial_{t^2} v^\mu\|_{L_2(I; H^{-2})} \leq \Phi'_3. \quad (10.5)$$

Мажоранты Φ'_1 , Φ'_2 и Φ'_3 зависят от тех же аргументов, что и Φ_1 , Φ_2 и Φ_3 соответственно.

СЛЕДСТВИЕ 10.1. В условиях теоремы 10.1 мы имеем

$$\begin{aligned} t\nabla v^\mu &\in C(\bar{I}; L_2(\Omega; \mathbb{R}^4)), & t\Delta v^\mu &\in C(\bar{I}; H), \\ t\partial_t v^\mu &\in C(I; H). \end{aligned} \quad (10.6)$$

Функции v^μ приближают решение v задачи (1.1_k), $k = 1, 2, \dots, 6$, в следующем смысле.

ЛЕММА 10.1. Пусть выполнены все условия теоремы 10.1. Тогда существует подпоследовательность последовательности v^μ (здесь и всюду в дальнейшем все подпоследовательности последовательности v^μ будут снова обозначаться через v^μ) такая, что

$$v^\mu \rightharpoonup v \quad \text{в} \quad L_2(I; H^1), \quad (10.7_1)$$

$$v^\mu \rightarrow v \quad \text{в} \quad L_2(Q_T; \mathbb{R}^2), \quad (10.7_2)$$

$$(v^\mu(t), w) \rightarrow (v(t), w) \quad \text{в} \quad C(\bar{I}) \quad \forall w \in H, \quad (10.7_3)$$

$$\partial_t v^\mu \rightharpoonup \partial_t v \quad \text{в} \quad L_2(I; H^{-2}), \quad (10.7_4)$$

$$t\partial_t v^\mu \rightarrow t\partial_t v \quad \text{в} \quad L_2(I; H), \quad (10.7_5)$$

$$t\partial_t v^\mu \rightharpoonup t\partial_t v \quad \text{в} \quad L_2(I; H^1). \quad (10.7_6)$$

При формулировке леммы 10.1 были использованы символы $\rightarrow$ и $\rightharpoonup$, обозначающие соответственно сильную и слабую сходимость. Лемма 10.1 доказывается совершенно так же, как и лемма 4.1 в [8].

Используя галёркинские приближения, нетрудно установить аналог теоремы 1.3.

ТЕОРЕМА 10.2. Пусть выполнены все условия теоремы 10.1, а также условие (1.11). Тогда

$$\sqrt{t} v_{,ij}^\mu \in L_2(I; H^2), \quad i, j = 1, 2, \quad \mu \in]0, 1], \quad (10.8)$$

и имеет место следующая равномерная по μ оценка:

$$\|\sqrt{t} \nabla^2 v^\mu\|_{Q_T} + \sqrt{\mu} \|\sqrt{t} \nabla \Delta v^\mu\|_{Q_T} \leq \Phi'_4 \quad (10.9)$$

с мажорантой Φ'_4 , зависящей от тех же аргументов, что и Φ_4 .

Теоремы вложения, лемма 10.1, теоремы 10.1 и 10.2 влекут следующие дополнительные утверждения:

$$\sqrt{t} \nabla^2 v^\mu \rightharpoonup \sqrt{t} \nabla^2 v \quad \text{в} \quad L_2(Q_T; \mathbb{R}^8), \quad (10.10_1)$$

$$t \nabla^2 v^\mu \rightharpoonup t \nabla^2 v \quad \text{в} \quad L_2(Q_T; \mathbb{R}^8), \quad (10.10_2)$$

$$\partial_t(t \nabla v^\mu) \rightharpoonup \partial_t(t \nabla v) \quad \text{в} \quad L_2(Q_T; \mathbb{R}^4), \quad (10.11)$$

$$t \nabla v^\mu \rightarrow t \nabla v \quad \text{в} \quad L_2(Q_T; \mathbb{R}^4), \quad (10.12)$$

$$\nabla v^\mu \rightarrow \nabla v \quad \text{п.в. в} \quad Q_T, \quad (10.13)$$

$$\|t v^\mu\|_{W_4^1(Q_T; \mathbb{R}^2)} \leq \Phi_{12}, \quad (10.14)$$

$$\|t v^\mu\|_{\infty, Q_T} \leq \Phi_{13}, \quad (10.15)$$

$$t v^\mu \rightarrow t v \quad \text{в} \quad C(\bar{Q}_T; \mathbb{R}^2). \quad (10.16)$$

Мажоранты Φ_{12} , Φ_{13} зависят от тех же аргументов, что и Φ_4 .

Следующая лемма является глобальным вариантом леммы 7.1 из [8] для случая периодических краевых условий и доказывается по той же схеме.

ЛЕММА 10.2. Пусть выполнены все условия теоремы 10.2. Тогда

$$\rho_1(\mu) \equiv \sup_{0 \leq t \leq T} \|t \nabla u^\mu(t)\|^2 + \mu \|t \nabla \Delta v^\mu\|_{Q_T}^2 + \|t \nabla^2 u^\mu\|_{Q_T}^2 \rightarrow 0, \quad (10.17)$$

$$\rho_2(\mu) \equiv \sup_{0 \leq t \leq T} \|t^{\frac{3}{2}} \partial_t u^\mu(t)\|^2 + \mu \|t^{\frac{3}{2}} \Delta \partial_t v^\mu\|_{Q_T}^2 + \|t^{\frac{3}{2}} \nabla \partial_t u^\mu\|_{Q_T}^2 \rightarrow 0 \quad (10.18)$$

при $\mu \rightarrow 0$. Здесь $u^\mu = v^\mu - v$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что утверждение (10.12) может быть слегка улучшено, а именно:

$$\sqrt{t} \nabla u^\mu \rightarrow 0 \quad \text{в} \quad L_2(Q; \mathbb{R}^4). \quad (10.19)$$

Действительно,

$$\|\sqrt{t} \nabla u^\mu\|_{Q_T}^2 \leq \|t \nabla u^\mu\|_{Q_T} \|\nabla u^\mu\|_{Q_T} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \mu \rightarrow 0,$$

так как первый сомножитель в правой части последнего неравенства стремится к нулю, а второй ограничен в силу теоремы 10.1.

Вычтем из тождества (10.2₂) тождество 6.1, возьмем пробную функцию $w = \Delta v^\mu(t)$ и умножим полученное равенство на t^2 . В результате будем иметь

$$\begin{aligned} & \mu t^2 \|\nabla \Delta v^\mu(t)\|^2 - t^2 (\partial_t u^\mu(t), \Delta v^\mu(t)) + t^2 (\operatorname{div}(\sigma^\mu(t) - \sigma(t)), \Delta v^\mu(t)) \\ & = t^2 (v_k^\mu(t) v_{,k}^\mu(t) - v_k(t) v_{,k}^\mu(t), \Delta v^\mu(t)). \end{aligned}$$

Перепишем последнее равенство в виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} t^2 \partial_t \|\nabla u^\mu(t)\|^2 + \mu t^2 \|\nabla \Delta v^\mu(t)\|^2 + t^2 (\operatorname{div}(\sigma^\mu(t) - \sigma(t)), \Delta u^\mu(t)) \\ & = t^2 (\partial_t u^\mu(t), \Delta v(t)) - t^2 (\operatorname{div}(\sigma^\mu(t) - \sigma(t)), \Delta v(t)) \\ & \quad + t^2 (v_k^\mu(t) v_{,k}^\mu(t) - v_k(t) v_{,k}^\mu(t), \Delta v^\mu(t)) \\ & \equiv t^2 (A_1^\mu(t) + A_2^\mu(t) + A_3^\mu(t)). \end{aligned} \quad (10.20)$$

В силу тождества (2.3), условия (1.2₃) получаем

$$\begin{aligned}
& (\operatorname{div}(\sigma^\mu(t) - \sigma(t)), \Delta u^\mu(t)) = ((\sigma^\mu(t) - \sigma(t))_{,k}, \varepsilon(u^\mu_{,k}(t))) \\
& = \left(\frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon^2}(\varepsilon(v^\mu(t))) \varepsilon(v^\mu_{,k}(t)) - \frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon^2}(\varepsilon(v(t))) \varepsilon(v_{,k}(t)), \varepsilon(u^\mu_{,k}(t)) \right) \\
& = \left(\frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon^2}(\varepsilon(v^\mu(t))) \varepsilon(u^\mu_{,k}(t)), \varepsilon(u^\mu_{,k}(t)) \right) \\
& \quad + \left(\left(\frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon^2}(\varepsilon(v^\mu(t))) - \frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon^2}(\varepsilon(v(t))) \right) \varepsilon(v_{,k}(t)), \varepsilon(u^\mu_{,k}(t)) \right) \\
& \geq 2\nu \|\nabla \varepsilon(u^\mu(t))\|^2 - \|\nabla \varepsilon(u^\mu(t))\| \\
& \quad \times \left\| \left(\frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon^2}(\varepsilon(v^\mu(t))) - \frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon^2}(\varepsilon(v(t))) \right) \nabla \varepsilon(v(t)) \right\| \\
& \geq \nu \|\nabla \varepsilon(u^\mu(t))\|^2 - A_4^\mu(t) \stackrel{(2.1)}{=} \frac{1}{2} \nu \|\nabla^2 u^\mu(t)\|^2 - A_4^\mu(t), \tag{10.21}
\end{aligned}$$

где $A_4^\mu \geq 0$ и оценивается следующим образом:

$$\int_0^T t^2 A_4^\mu(t) dt \leq C \int_{Q_T} t^2 \left| \frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon^2}(\varepsilon(v^\mu)) - \frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon^2}(\varepsilon(v)) \right|^2 |\nabla \varepsilon(v)|^2 dx dt.$$

Используя (1.12), (10.13), условие (1.9) и теорему Лебега, заключаем, что

$$\int_0^T t^2 A_4^\mu(t) dt = \int_0^T t^2 |A_4^\mu(t)| dt \xrightarrow{\mu \rightarrow 0} 0. \tag{10.22}$$

Теперь из (10.20) и (10.21) выводим оценку

$$\frac{1}{2} t^2 \partial_t \|\nabla u^\mu(t)\|^2 + \mu t^2 \|\nabla \Delta v^\mu(t)\|^2 + \frac{\nu}{2} t^2 \|\nabla^2 u^\mu(t)\|^2 \leq t^2 \sum_{i=1}^4 A_i^\mu(t). \tag{10.23}$$

Далее, согласно (1.12) и (10.7₅) мы имеем

$$\int_0^T t^2 |A_1^\mu(t)| dt \leq \|t \partial_t u^\mu\|_{Q_T} \|t \Delta v\|_{Q_T} \xrightarrow{\mu \rightarrow 0} 0. \tag{10.24}$$

Оценку A_2^μ проведем при помощи тождества (2.3) следующим образом:

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^T t^2 A_2^\mu(t) dt \right| = \left| \int_0^T t^2 (\sigma^\mu_{,k}(t) - \sigma_{,k}(t), \varepsilon(v_{,k}(t))) dt \right| \\
& = \left| \int_0^T t^2 \left(\frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon^2}(\varepsilon(v^\mu(t))) \varepsilon(v^\mu_{,k}(t)) - \frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon^2}(\varepsilon(v(t))) \varepsilon(v_{,k}(t)), \varepsilon(v_{,k}(t)) \right) dt \right| \\
& \leq \left| \int_0^T t^2 \left(\frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon^2}(\varepsilon(v(t))) \varepsilon(u^\mu_{,k}(t)), \varepsilon(v_{,k}(t)) \right) dt \right| \\
& \quad + \left| \int_0^T t^2 \left(\left(\frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon^2}(\varepsilon(v^\mu(t))) - \frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon^2}(\varepsilon(v(t))) \right) \varepsilon(v^\mu_{,k}(t)), \varepsilon(v_{,k}(t)) \right) dt \right| \\
& \leq \left| \int_0^T \left(\frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon^2}(\varepsilon(v(t))) \varepsilon(v_{,k}(t)), \varepsilon(u^\mu_{,k}(t)) \right) dt \right| \\
& \quad + C \|t \nabla^2 v^\mu\|_{Q_T} \left(\int_0^T t^2 A_4^\mu(t) dt \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{10.25}
\end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части (10.25) стремится к нулю в силу (10.10₂), а второе – в силу оценки (10.9) и (10.22). Итак,

$$\int_0^T t^2 A_2^\mu(t) dt \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \mu \rightarrow 0. \quad (10.26)$$

Однако мы не можем пока утверждать, что

$$\int_0^T t^2 |A_2^\mu(t)| dt \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \mu \rightarrow 0. \quad (10.27)$$

Осталось оценить A_3^μ . Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^t t^2 |A_3^\mu(t)| dt &\leq \int_0^T t^2 |(\Delta v^\mu(t), u_k^\mu(t) v_{,k}^\mu(t) + v_k(t) u_{,k}^\mu(t))| dt \\ &\leq \|tu^\mu\|_{\infty, Q_T} \|\sqrt{t} \nabla^2 v^\mu\|_{Q_T} \sqrt{T} \|\nabla v^\mu\|_{Q_T} \\ &\quad + \|tv\|_{\infty, Q_T} \|\sqrt{t} \nabla^2 v^\mu\|_{Q_T} \|\sqrt{t} \nabla u^\mu\|_{Q_T} \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (10.28)$$

при $\mu \rightarrow 0$ в силу (10.16), (10.9), (10.3) и (5.13), (10.9), (10.19) для первого и второго слагаемых в правой части (10.28) соответственно.

Интегрируем неравенство (10.23) по t на $[0, T]$ и получаем

$$\frac{\nu}{2} \|t \nabla^2 u^\mu\|_{Q_T}^2 \leq \sum_{i=1}^4 \int_0^T t^2 A_i^\mu(t) dt + \int_0^T t \|\nabla u^\mu(t)\|^2 dt \rightarrow 0$$

при $\mu \rightarrow 0$. Это вытекает из (10.19), (10.22), (10.24), (10.26) и (10.28). Следовательно, $t \nabla^2 v^\mu \rightarrow t \nabla^2 v$ в $L_2(Q_T; \mathbb{R}^2)$. Но тогда из (10.25) вытекает (10.27). Снова интегрируем неравенство (10.23) и приходим к оценке

$$\begin{aligned} &\sup_{0 \leq t \leq T} \|t \nabla u^\mu(t)\|^2 + \mu \|t \nabla \Delta v^\mu\|_{Q_T}^2 + \nu \|t \nabla^2 u^\mu\|_{Q_T} \\ &\leq \sum_{i=1}^4 \int_0^T t^2 |A_i^\mu(t)| dt + \int_0^T t \|\nabla u^\mu(t)\|^2 dt \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \mu \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Итак, утверждение (10.17) доказано.

Доказательство (10.18) начнем со следующего замечания. Мы знаем, что $\{t \partial_t v^\mu\}$ ограничена в $L_\infty(I; H)$ и $\partial_t(t \partial_t v^\mu) \rightarrow \partial_t(t \partial_t v)$ в $L_2(I; H^{-2})$, и, следовательно, $(t \partial_t v^\mu(t), w) \rightarrow (t \partial_t v(t), w)$ в $C(\bar{I})$ для любого $w \in H$. Но тогда (см. [8], вывод (7.14))

$$(t \partial_t v^\mu(t), w(t)) \rightarrow (t \partial_t v(t), w(t)) \quad \text{в} \quad C(\bar{I}) \quad (10.29)$$

для всех $w \in C(I; H)$.

Комбинируя тождества для v^μ и v , получим

$$\begin{aligned} & (\partial_{t^2} u^\mu(t), w) + \mu(\Delta \partial_t v^\mu(t), \Delta w) + (\partial_t \sigma^\mu(t) - \partial_t \sigma(t), \varepsilon(w)) \\ &= (\partial_t (v_k^\mu(t) u^\mu(t) + u_k^\mu(t) v(t)), w_{,k}) \quad \forall w \in H^2. \end{aligned}$$

В силу теоремы 10.2 мы можем положить в последнем тождестве $w = \partial_t v^\mu(t)$:

$$\begin{aligned} & t^3 (\partial_{t^2} u^\mu(t), \partial_t v^\mu(t)) + \mu t^3 \|\Delta \partial_t v^\mu(t)\|^2 + t^3 (\partial_t \sigma^\mu(t) - \partial_t \sigma(t), \varepsilon(\partial_t v^\mu(t))) \\ &= t^3 B_1^\mu(t) \equiv t^3 (\partial_t (v_k^\mu(t) u^\mu(t) + u_k^\mu(t) v(t)), \partial_t v_{,k}^\mu(t)). \end{aligned} \quad (10.30)$$

B_1^μ будем оценивать при помощи неравенства (2.6):

$$\begin{aligned} & \int_0^T t^3 |B_1^\mu(t)| dt \leq 2 \int_0^T t^3 \|\nabla \partial_t v^\mu(t)\| \left(\|\partial_t v^\mu(t)\|_4 \|u^\mu(t)\|_4 + \|\partial_t u^\mu(t)\|_4 \|v(t)\|_4 \right) \\ & \leq C_1 \int_0^T \|\nabla \partial_t v^\mu(t)\| t^2 \left(\|\partial_t v^\mu(t)\|^{\frac{1}{2}} \|\nabla \partial_t v^\mu(t)\|^{\frac{1}{2}} \|u^\mu(t)\|^{\frac{1}{2}} \|\nabla u^\mu(t)\|^{\frac{1}{2}} \right. \\ & \quad \left. + \|\partial_t u^\mu(t)\|^{\frac{1}{2}} \|\nabla \partial_t u^\mu(t)\|^{\frac{1}{2}} \|v(t)\|^{\frac{1}{2}} \|\nabla v(t)\|^{\frac{1}{2}} \right) dt \leq C_2 \int_0^T \|\nabla \partial_t v^\mu(t)\| dt \\ & \quad \times \left\{ \sqrt{T} \|\partial_t v^\mu\|_{\infty, Q_T}^{\frac{1}{2}} (\|v^\mu\|_{\infty, Q_T} + \|v\|_{\infty, Q_T})^{\frac{1}{2}} \|\nabla \partial_t v^\mu(t)\|^{\frac{1}{2}} \|\nabla u^\mu(t)\|^{\frac{1}{2}} \right. \\ & \quad \left. + T^{\frac{3}{4}} \|v\|_{\infty, Q_T}^{\frac{1}{2}} \|t^{\frac{1}{2}} \nabla v\|_{\infty, Q_T}^{\frac{1}{2}} \|t \partial_t u^\mu(t)\|^{\frac{1}{2}} \|t \nabla \partial_t u^\mu(t)\|^{\frac{1}{2}} \right\} \\ & \leq C_3 \int_0^T \left[\sqrt{T} \|\nabla \partial_t v^\mu(t)\|^{\frac{3}{2}} \|\nabla u^\mu(t)\|^{\frac{1}{2}} (\Phi_2')^{\frac{1}{4}} \left((\Phi_1')^{\frac{1}{2}} + \Phi_1^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\ & \quad \left. + T^{\frac{3}{4}} \|\nabla \partial_t v^\mu(t)\| \|\nabla u^\mu(t)\|^{\frac{1}{2}} \|\nabla \partial_t u^\mu(t)\|^{\frac{1}{2}} \Phi_1^{\frac{1}{4}} \Phi_2^{\frac{1}{4}} \right] dt \\ & \leq \Phi_{14} \int_0^T (\|\nabla \partial_t v^\mu(t)\|^2 + \|\nabla \partial_t v(t)\|^2)^{\frac{3}{4}} (\|\nabla u^\mu(t)\|^2 + \|t \partial_t u^\mu(t)\|^2)^{\frac{1}{4}} dt \\ & \leq \Phi_{14} (\|t \nabla \partial_t v^\mu\|_{Q_T}^2 + \|\nabla \partial_t v\|_{Q_T}^2)^{\frac{3}{4}} (\|t \nabla u^\mu(t)\|_{Q_T}^2 + \|t \partial_t u^\mu(t)\|_{Q_T}^2)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \Phi_{14} (\Phi_2' + \Phi_2)^{\frac{3}{4}} (\|t \nabla u^\mu(t)\|_{Q_T}^2 + \|t \partial_t u^\mu(t)\|_{Q_T}^2)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \mu \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (10.31)$$

Утверждение (10.31) вытекает из (10.12) и (10.7₅).

Преобразуем третье слагаемое в левой части (10.30) следующим образом:

$$\begin{aligned} & (\partial_t \sigma^\mu(t) - \partial_t \sigma(t), \varepsilon(\partial_t v^\mu(t))) = \left(\frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon^2} (\varepsilon(v^\mu(t))) \varepsilon(\partial_t v^\mu(t)) \right. \\ & \quad \left. - \frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon^2} (\varepsilon(v(t))) \varepsilon(\partial_t v(t)), \varepsilon(\partial_t v^\mu(t)) \right) = B_0^\mu(t) - B_2^\mu(T) - B_3^\mu(t), \end{aligned} \quad (10.32)$$

где

$$\begin{aligned}
B_0^\mu(t) &\equiv \left(\frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon^2}(\varepsilon(v^\mu(t))) \varepsilon(\partial_t u^\mu(t)), \varepsilon(\partial_t u^\mu(t)) \right) \\
&\geq 2\nu \|\varepsilon(\partial_t u^\mu(t))\|^2 = \nu \|\nabla \partial_t u^\mu(t)\|^2, \\
B_2^\mu(t) &\equiv - \left(\left(\frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon^2}(\varepsilon(v^\mu(t))) - \frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon^2}(\varepsilon(v(t))) \right) \right. \\
&\quad \left. \times \varepsilon(\partial_t v(t)), \varepsilon(\partial_t v^\mu(t)) + \varepsilon(\partial_t u^\mu(t)) \right), \\
B_3^\mu(t) &\equiv - \left(\frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon^2}(\varepsilon(v(t))) \varepsilon(\partial_t v(t)), \varepsilon(\partial_t u^\mu(t)) \right).
\end{aligned}$$

Для оценки $B_2^\mu(t)$ мы снова используем (1.23), (10.13) и теорему Лебега:

$$\begin{aligned}
\int_0^T t^3 |B_2^\mu(t)| dt &\leq \int_0^T t^3 (\|\nabla \partial_t v^\mu(t)\| + \|\nabla \partial_t u^\mu(t)\|) \\
&\quad \times \left\| \left| \frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon^2}(\varepsilon(v^\mu(t))) - \frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon^2}(\varepsilon(v(t))) \right| |\varepsilon(\partial_t v(t))| \right\| \\
&\leq C (\|t \nabla \partial_t v^\mu(t)\|_{Q_T}^2 + \|t \nabla \partial_t u^\mu(t)\|_{Q_T}^2)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \times \left(\int_0^T t^4 \left\| \left| \frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon^2}(\varepsilon(v^\mu(t))) - \frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon^2}(\varepsilon(v(t))) \right| |\varepsilon(\partial_t v(t))| \right\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0
\end{aligned} \tag{10.33}$$

при $\mu \rightarrow 0$. И наконец, в силу (10.76)

$$\int_0^T t^3 B_3^\mu(t) dt \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \mu \rightarrow 0. \tag{10.34}$$

Но пока мы не можем утверждать, что

$$\int_0^T t^3 |B_3^\mu(t)| dt \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \mu \rightarrow 0. \tag{10.35}$$

Далее, интегрируя по частям, мы получаем

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \theta^3 (\partial_{t^2} u^\mu(\theta), \partial_t v^\mu(\theta)) d\theta \\
&= \frac{1}{2} t^3 \|\partial_t u^\mu(t)\|^2 - \int_0^t \theta^3 B_4^\mu(\theta) d\theta - t^3 B_5^\mu(t) - 3 \int_0^t \theta^2 B_6^\mu(\theta) d\theta,
\end{aligned} \tag{10.36}$$

где

$$\begin{aligned}
B_4^\mu(t) &\equiv (\partial_{t^2} v(t), \partial_t u^\mu(t)), \quad B_5^\mu(t) = -(\partial_t v(t), \partial_t u^\mu(t)), \\
B_6^\mu(t) &\equiv \frac{1}{2} [\|\partial_t v^\mu(t)\|^2 - \|\partial_t v(t)\|^2].
\end{aligned}$$

В силу (1.10) и (10.7₆) мы имеем

$$\int_0^T t^3 B_4^\mu(t) dt \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \mu \rightarrow 0. \quad (10.37)$$

Однако неясно, верно ли, что

$$\int_0^T t^3 |B_4^\mu(t)| dt \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \mu \rightarrow 0. \quad (10.38)$$

В силу (10.7₅)

$$\int_0^T t^2 |B_6^\mu(t)| dt \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \mu \rightarrow 0. \quad (10.39)$$

Вспоминая замечание 1.1, отметим, что $t\partial_t v \in C(\bar{I}; H)$, но тогда согласно (10.29)

$$\sup_{0 \leq t \leq T} t^3 |B_5^\mu(t)| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \mu \rightarrow 0. \quad (10.40)$$

Теперь из (10.30), (10.32) и (10.36) в результате интегрирования получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} t^3 \|\partial_t u^\mu(t)\|^2 + \mu \int_0^t \theta^3 \|\Delta \partial_t v^\mu(\theta)\|^2 d\theta + \nu \int_0^t \theta^3 \|\nabla \partial_t u^\mu(\theta)\|^2 d\theta \\ & \leq \sum_{i=1}^4 \int_0^t \theta^3 B_i^\mu(\theta) d\theta + t^3 B_5^\mu(t) + 3 \int_0^t \theta^2 B_6^\mu(\theta) d\theta. \end{aligned} \quad (10.41)$$

Полагая $t = T$ и принимая во внимание утверждения (10.31), (10.33), (10.34), (10.37), (10.39) и (10.40), заключаем, что

$$\int_0^T t^3 \|\nabla \partial_t u^\mu(t)\|^2 dt \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \mu \rightarrow 0.$$

Но это означает, что соотношения (10.35) и (10.38) верны. Из (10.41) следует, что

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sup_{0 \leq t \leq T} t^3 \|\partial_t u^\mu(t)\|^2 + \mu \int_0^T t^3 \|\Delta \partial_t v^\mu(t)\|^2 dt + \nu \int_0^T t^3 \|\nabla \partial_t u^\mu(t)\|^2 dt \\ & \leq \sum_{i=1}^4 \int_0^T t^3 |B_i^\mu(t)| dt + \sup_{0 \leq t \leq T} t^3 |B_5^\mu(t)| \\ & \quad + 3 \int_0^T t^2 |B_6^\mu(t)| dt \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \mu \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Итак, утверждение (10.18) доказано. Лемма 10.2 доказана.

Нам понадобится некоторый аналог теоремы 1.7 для решения регуляризованной задачи.

ЛЕММА 10.3. В условиях теоремы 1.7 для всех $x_0 \in \mathbb{R}^2$ и $0 < R \leq 1/8$ верна оценка

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|t^3 \nabla^2 v^\mu(t)\|_{\omega(x_0, R)}^2 \leq \Phi_{15} \frac{1}{\ln \frac{1}{R}} + \frac{1}{R^4} \rho_3(\mu), \quad (10.42_1)$$

в которой мажоранта Φ_{15} зависит от тех же аргументов, что Φ_7 . При этом

$$\rho_3(\mu) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \mu \rightarrow 0 \quad (10.42_2)$$

и при фиксированных T , φ , g , удовлетворяющих условиям леммы, и ρ_3 не зависит от R .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^2$ и $0 < R \leq 1/8$. Воспользуемся обозначениями (4.3). Пусть срезающая функция $\varphi \in C_0^2(\mathbb{R}^2)$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} 0 \leq \varphi \leq 1, \quad \text{spt } \varphi \subset \omega(x_0, R), \\ \varphi \equiv 1 \quad \text{в} \quad \omega\left(x_0, \frac{R}{2}\right), \\ |\nabla \varphi| \leq \frac{C}{R}, \quad |\nabla^2 \varphi| \leq \frac{C}{R^2}. \end{aligned} \quad (10.43)$$

Пусть, далее, $\widehat{\varphi}$ – периодическое продолжение φ , определяемое формулой (4.4₁). Положим

$$\bar{v}(x, t) = \begin{cases} v(x, t) - (\nabla v(t))_{x_0, 2R}(x - x_0 - 2z), & x \in \omega^z(x_0, R), \quad z \in \mathbb{Z}^2, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Xi(x_0, R), \end{cases}$$

где

$$(\nabla v(t))_{x_0, R} = \frac{1}{4R^2} \int_{\omega(x_0, R)} \nabla v(t) \, dx.$$

И наконец, пусть

$$\bar{v}^\mu = v^\mu + \bar{v}. \quad (10.44)$$

Согласно 10.8 мы утверждаем, что

$$\widehat{w}(t) = \text{curl}^*(\widehat{\varphi}^4 \text{curl } \bar{v}^\mu(t)) \in H^2. \quad (10.45)$$

Таким образом, мы можем положить $w = \widehat{w}(t)$ в (10.2₂) и получить

$$\begin{aligned} & (\partial_t v^\mu(t), \widehat{w}(t))_{\omega(x_0, 2R)} + \mu(\Delta v^\mu(t), \Delta \widehat{w}(t))_{\omega(x_0, 2R)} \\ & + (\nabla v^\mu(t) v^\mu(t), \widehat{w}(t))_{\omega(x_0, 2R)} \\ & - (\text{div } \sigma^\mu(t), \widehat{w}(t))_{\omega(x_0, 2R)} = (g(t), \widehat{w}(t))_{\omega(x_0, 2R)}. \end{aligned} \quad (10.46)$$

Слагаемые в (10.46) оцениваются при помощи неравенства Пуанкаре:

$$\|\nabla \bar{v}(t)\|_{\omega(x_0, 2R)} \leq CR \|\nabla^2 v(t)\|_{\omega(x_0, 2R)}$$

и равенства

$$\hat{w}(t) = -\hat{\varphi}^4 \Delta v^\mu(t) + \operatorname{curl}^* \varphi^4 \operatorname{curl} \bar{v}^\mu(t)$$

по схеме, которая использовалась для доказательства леммы 7.2 из [8].

Имеем для первого слагаемого в левой части (10.46)

$$\begin{aligned} |(\partial_t v^\mu(t), \hat{w}(t))| &\leq C_1 \|\partial_t v^\mu(t)\|_{\omega(x_0, 2R)} \left(\|\varphi^2 \Delta v^\mu(t)\|_{\omega(x_0, 2R)}^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{R^2} \|\nabla \bar{v}^\mu(t)\|_{\omega(x_0, 2R)}^2 \right) \leq C_2 (\|\partial_t v(t)\|_{\omega(x_0, 2R)}^2 + \|\partial_t u^\mu(t)\|_{\omega(x_0, 2R)}^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \left(\|\varphi^2 \Delta v^\mu(t)\|_{\omega(x_0, 2R)}^2 + \|\nabla^2 v(t)\|_{\omega(x_0, 2R)}^2 + \frac{1}{R^2} \|\nabla u^\mu(t)\|_{\omega(x_0, 2R)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (10.47)$$

Далее, второе слагаемое в левой части (10.46) оценивается так:

$$\begin{aligned} \mu(\Delta v^\mu(t), \Delta \hat{w}(t)) &\geq \frac{\mu}{2} \|\varphi^2 \nabla \Delta v^\mu(t)\|_{\omega(x_0, 2R)}^2 \\ &\quad - \frac{\mu C_1}{R^2} \left[\|\Delta v^\mu(t)\|_{\omega(x_0, 2R)}^2 + \frac{1}{R^2} \|\nabla \bar{v}^\mu(t)\|_{\omega(x_0, 2R)}^2 \right] \\ &\stackrel{(10.44)}{\geq} \frac{\mu}{2} \|\varphi^2 \nabla \Delta v^\mu(t)\|_{\omega(x_0, 2R)}^2 - \frac{\mu C_2}{R^4} [\|\nabla^2 v^\mu(t)\|_{\omega(x_0, 2R)}^2 \\ &\quad + \|\nabla u^\mu(t)\|_{\omega(x_0, 2R)}^2 + \|\nabla \bar{v}(t)\|_{\omega(x_0, 2R)}^2] \\ &\geq \frac{\mu}{2} \|\varphi^2 \nabla \Delta v^\mu(t)\|_{\omega(x_0, 2R)}^2 - \frac{\mu C_3}{R^4} [\|\nabla^2 v^\mu(t)\|^2 + \|\nabla v^\mu(t)\|^2 + \|\nabla v(t)\|^2] \\ &\geq \frac{\mu}{2} \|\varphi^2 \nabla \Delta v^\mu(t)\|_{\omega(x_0, 2R)}^2 - \frac{\mu C_4}{R^4} [\|\Delta v^\mu(t)\|^2 + \|\nabla v(t)\|^2]. \end{aligned} \quad (10.48)$$

Положим

$$\rho'_3(\mu) \equiv \mu \sup_{0 \leq t \leq T} t^6 [\|\Delta v^\mu(t)\|^2 + \|\nabla v(t)\|^2].$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T} t^6 \|\Delta v^\mu(t)\|^2 &\leq \frac{2}{T} \|t^3 \Delta v^\mu\|_{Q_T}^2 + T \|\partial_t(t^3 \Delta v^\mu)\|_{Q_T}^2 \\ &\leq T^4 C [\|t^{\frac{1}{2}} \Delta v^\mu\|_{Q_T}^2 + \|t^{\frac{3}{2}} \Delta \partial_t v^\mu\|_{Q_T}^2], \end{aligned}$$

то в силу (1.7), (10.18) и (10.9) мы получаем

$$\rho'_3(\mu) \leq \mu T^2 \Phi_2 + CT \mu \Phi'_4 + TC \rho_2(\mu) \xrightarrow{\mu \rightarrow 0} 0.$$

Итак, мы получили, что

$$\rho'_3(\mu) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \mu \rightarrow 0 \quad (10.49)$$

и при фиксированных T, φ, g , удовлетворяющих условиям доказываемой леммы.

Далее, для третьего слагаемого в (10.46) имеем следующую оценку:

$$\begin{aligned} |t^6(v_k^\mu(t)v_{,k}^\mu(t), \widehat{w}(t))| &= |t^6(v_k^\mu(t) \operatorname{curl} v_{,k}^\mu(t), \varphi^4 \operatorname{curl} \bar{v}^\mu(t))_{\omega(x_0, 2R)}| \\ &= 2|t^6(\varphi^3 v_{,k}^\mu(t) \varphi_{,k}, |\operatorname{curl} \bar{v}^\mu(t)|^2)_{\omega(x_0, 2R)}| \leq C_1 t^5 \|tv^\mu(t)\|_\infty \frac{1}{R} \|\nabla \bar{v}^\mu\|_{\omega(x_0, 2R)}^2 \\ &\stackrel{(10.15)}{\leq} C_2 \Phi_{13} t^5 \frac{1}{R^2} (\|\nabla \bar{v}(t)\|_{\omega(x_0, 2R)}^2 + \|\nabla u^\mu(t)\|^2) \\ &\leq C_3 \Phi_{13} \left(\|t^{\frac{5}{2}} \nabla^2 v(t)\|_{\omega(x_0, 2R)}^2 + \frac{T^3}{R^2} \|t \nabla u^\mu(t)\|^2 \right) \\ &\leq C_4 \Phi_{13} \left(\frac{1}{\ln \frac{1}{2R}} \Phi_7 + \frac{T^3}{R^2} \rho_1(\mu) \right) \end{aligned} \quad (10.50)$$

для п.в. $t \in [0, T]$.

Правая часть в (10.46) оценивается так же, как и первое слагаемое в левой части (см. (10.47)):

$$\begin{aligned} |(g(t), \widehat{w}(t))| &\leq C \|g(t)\|_{\omega(x_0, 2R)} \left(\|\varphi^2 \Delta v^\mu(t)\|_{\omega(x_0, 2R)}^2 \right. \\ &\quad \left. + \|\nabla^2 v(t)\|_{\omega(x_0, 2R)}^2 + \frac{1}{R^2} \|\nabla u^\mu(t)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (10.51)$$

Осталось оценить последнее слагаемое в левой части (10.46). Имеем

$$\begin{aligned} |(\operatorname{div} \sigma^\mu(t), \widehat{w}(t))| &= \int_{\omega(x_0, 2R)} \varphi^4 \operatorname{div} \sigma^\mu(t) \cdot \Delta v^\mu(t) dx \\ &\quad - \frac{C}{R} \|\varphi^2 \nabla^2 v^\mu(t)\|_{\omega(x_0, 2R)} \|\nabla \bar{v}^\mu(t)\|_{\omega(x_0, 2R)} \\ &\stackrel{(2.7_2)}{\geq} (\varphi^4 \sigma_{,k}^\mu(t), \varepsilon(v_{,k}^\mu(t)))_{\omega(x_0, 2R)} - \frac{C_1}{R} \|\varphi^2 \nabla^2 v^\mu(t)\|_{\omega(x_0, 2R)} \\ &\quad \times \|\nabla \bar{v}^\mu(t)\|_{\omega(x_0, 2R)} \geq 2\nu \|\varphi^2 \nabla \varepsilon(v^\mu(t))\|_{\omega(x_0, 2R)}^2 \\ &\quad - \frac{C_2}{R} \|\varphi^2 \nabla^2 v^\mu(t)\|_{\omega(x_0, 2R)} \|\nabla \bar{v}^\mu(t)\|_{\omega(x_0, 2R)} \\ &\geq \frac{\nu}{2} \|\varphi^2 \nabla^2 v^\mu(t)\|_{\omega(x_0, 2R)}^2 - \frac{C_3}{R^2} \|\nabla \bar{v}^\mu(t)\|_{\omega(x_0, 2R)}^2 \\ &\geq \frac{\nu}{2} \|\varphi^2 \nabla^2 v^\mu(t)\|_{\omega(x_0, 2R)}^2 \\ &\quad - C_4 \left[\|\nabla^2 v(t)\|_{\omega(x_0, 2R)}^2 + \frac{1}{R^2} \|\nabla u^\mu(t)\|_{\omega(x_0, 2R)}^2 \right]. \end{aligned} \quad (10.52)$$

Теперь из (10.46)–(10.48), (10.50)–(10.52) выводим неравенство

$$\begin{aligned}
& t^6 (\mu \|\varphi^2 \nabla \Delta v^\mu(t)\|_{\omega(x_0, 2R)}^2 + \nu \|\varphi^2 \nabla^2 v^\mu(t)\|_{\omega(x_0, 2R)}^2) \\
& \leq \frac{C}{R^4} \rho'_3(\mu) + C \Phi_{13} \left(\frac{1}{\ln \frac{1}{R}} \Phi_7 + T^3 \rho_1(\mu) \right) \\
& \quad + Ct^6 \left[\|\nabla^2 v(t)\|_{\omega(x_0, 2R)}^2 + \frac{1}{R^2} \|\nabla u^\mu(t)\|_{\omega(x_0, 2R)}^2 \right] \\
& \quad + Ct^6 (\|g(t)\|_{\omega(x_0, 2R)}^2 + \|\partial_t u^\mu(t)\|_{\omega(x_0, 2R)}^2 + \|\partial_t v(t)\|_{\omega(x_0, wR)}^2)^{\frac{1}{2}} \\
& \quad \times \left(\|\varphi^2 \Delta v^\mu(t)\|_{\omega(x_0, 2R)}^2 + \|\nabla^2 v(t)\|_{\omega(x_0, 2R)}^2 + \frac{1}{R^2} \|u^\mu(t)\|_{\omega(x_0, R)}^2 \right).
\end{aligned}$$

Применим неравенство Коши; тогда с учетом (1.23), (1.24), (10.17) и (10.18) получим

$$\begin{aligned}
& t^6 (\mu \|\nabla \Delta v^\mu(t)\|_{\omega(x_0, R)}^2 + \nu \|\nabla^2 v^\mu(t)\|_{\omega(x_0, R)}^2) \\
& \leq C \left\{ \frac{1}{R^4} \rho'_3(\mu) + T^3 \rho_1(\mu) [\Phi_{13} + T] \right. \\
& \quad \left. + \frac{\Phi_7}{\ln \frac{1}{R}} [\Phi_{13} + T] + \frac{\Phi_6}{\ln^2 \frac{1}{R}} T + T \|t^{\frac{5}{2}} \partial_t g(t)\|_{\omega(x_0, 2R)}^2 \right\}.
\end{aligned}$$

Используя условие (1.24), отсюда получаем утверждение леммы 10.3.

§ 11. Доказательство теоремы 1.8

Мы начнем с доказательства оценки (1.28). Для этого достаточно повторить соответствующие рассуждения § 7, заменяя исходную задачу регуляризованной. При этом вместо теоремы 1.7 мы будем использовать лемму 10.3. В силу (10.8) все рассуждения § 7 будут законны.

Итак, пусть $x_0 \in \mathbb{R}^2$ и $0 < R \leq 1/8$ произвольны. Возьмем срезающую функцию, удовлетворяющую условиям (7.3). Из вариационного тождества (10.2₂) выводим

$$\begin{aligned}
& (\partial_t v_{,i}^\mu(t), w) - \mu (\nabla \Delta v_{,i}^\mu(t), \nabla w) - (\operatorname{div} \sigma_{,i}^\mu(t), w) \\
& = -((v_k^\mu(t) v_{,k}^\mu(t), w) + (g_{,i}(t), w)) \quad \forall w \in H^1
\end{aligned} \tag{11.1}$$

для п.в. $t \in [0, T]$. Согласно (10.8) мы можем положить в (11.1) $w = \widehat{w}(t)$, где

$$\widehat{w}(t) = \operatorname{curl}^* (\widehat{\varphi}^4 \operatorname{curl} v_{,i}^\mu(t)) \in H^1$$

для п.в. $t \in [0, T]$. Полученное равенство запишем в виде

$$I_1 + I_0 + I_2 = I_3 + I_4, \tag{11.2}$$

где

$$\begin{aligned} I_0 &\equiv -\mu(\nabla \Delta v_{,i}^\mu(t), \widehat{w}(t)), & I_1 &\equiv (\partial_t v_{,i}(t), \widehat{w}(t)), \\ I_2 &\equiv -(\operatorname{div} \sigma_{,i}^\mu(t), \widehat{w}(t)), & I_3 &\equiv -((v_k^\mu(t) v_{,k}^\mu(t))_{,i}, \widehat{w}(t)), \\ I_4 &= (g_{,i}(t), \widehat{w}(t)). \end{aligned}$$

Величины I_k , $k = 1, 2, 3, 4$, оцениваются совершенно так же, как и соответствующие величины в § 7. Выпишем результат:

$$I_1 = \frac{1}{2} \partial_t \|\varphi^2 \nabla \operatorname{curl} v^\mu(t)\|_{\omega(x_0, R)}^2, \quad (11.3)$$

$$\begin{aligned} I_2 &\geq \frac{\nu}{4} \|\varphi^2 \nabla^3 v^\mu(t)\|_{\omega(x_0, R)}^2 - \frac{C}{(q-r)^2} \|\nabla^2 v^\mu(t)\|_{\omega(x_0, R)}^2 \\ &\quad - C \|\nabla^2 v^\mu(t)\|_{\omega(x_0, R)}^2 \left[\|\nabla^3 v^\mu(t)\|_{\omega(x_0, R)}^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(q-r)^2} \|\nabla^2 v^\mu(t)\|_{\omega(x_0, R)}^2 \right], \end{aligned} \quad (11.4)$$

$$\begin{aligned} |I_3| &\leq C \|v^\mu(t)\|_{\infty, \omega(x_0, R)} \left[\|\varphi^2 \nabla^3 v^\mu(t)\|_{\omega(x_0, R)} \|\nabla^2 v^\mu(t)\|_{\omega(x_0, R)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{q-r} \|\nabla^2 v^\mu(t)\|_{\omega(x_0, R)}^2 \right], \end{aligned} \quad (11.5)$$

$$\begin{aligned} |I_4| &\leq C \|\operatorname{curl} g\|_{\omega(x_0, R)} \left(\|\varphi^2 \nabla^3 v^\mu(t)\|_{\omega(x_0, R)}^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(q-r)^2} \|\nabla^2 v^\mu(t)\|_{\omega(x_0, R)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (11.6)$$

Осталось оценить I_0 . Имеем

$$\begin{aligned} I_0 &= -\mu(\nabla \Delta v_{,i}^\mu(t), -\varphi^4 \nabla \Delta v_{,i}^\mu - \Delta v_{,i}^\mu \otimes \nabla \varphi^4 \\ &\quad + \nabla \operatorname{curl}^* \varphi^4 \operatorname{curl} v_{,i}^\mu(t) + \operatorname{curl}^* \varphi^4 \otimes \nabla \operatorname{curl} v_{,i}^\mu(t))_{\omega(x_0, R)} \\ &\geq \mu \|\varphi^2 \nabla^2 \Delta v^\mu(t)\|_{\omega(x_0, R)}^2 - \mu C_1 \|\varphi^2 \nabla^2 \Delta v^\mu(t)\|_{\omega(x_0, R)} \\ &\quad \times \left(\frac{1}{(q-r)^2} \|\nabla^3 v^\mu(t)\|^2 + \frac{1}{(q-r)^4} \|\nabla^2 v^\mu(t)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\geq \frac{\mu}{2} \|\varphi^2 \nabla^2 \Delta v^\mu(t)\|_{\omega(x_0, R)}^2 - \frac{\mu C_2}{(q-r)^4} \|\nabla \Delta v^\mu(t)\|^2. \end{aligned} \quad (11.7)$$

Собирая (11.3)–(11.7), выводим из (11.2)

$$\begin{aligned}
& \partial_t \|\varphi^2 \nabla \operatorname{curl} v^\mu(t)\|_{\omega(x_0, R)}^2 + \mu \|\varphi^2 \nabla^2 \Delta v^\mu(t)\|_{\omega(x_0, R)}^2 \\
& + \frac{\nu}{4} \|\varphi^2 \nabla^3 v^\mu(t)\|_{\omega(x_0, R)}^2 \leq \mu \frac{C}{(q-r)^4} \|\nabla \Delta v^\mu(t)\|^2 \\
& + C \|\nabla^2 v^\mu(t)\|_{\omega(x_0, R)}^2 \left[\|\nabla^3 v^\mu(t)\|_{\omega(x_0, q)}^2 + \frac{1}{(q-r)^2} \|\nabla^2 v^\mu(t)\|_{\omega(x_0, R)}^2 \right] \\
& + C \left(\|v(t)\|_{\infty, \omega(x_0, R)}^2 + \frac{1}{(q-r)^2} \right) \|\nabla^2 v^\mu(t)\|_{\omega(x_0, R)}^2 \\
& + C \|\operatorname{curl} g\|_{\omega(x_0, R)}^2.
\end{aligned} \tag{11.8}$$

Применим лемму 10.3. Тогда для любого $\delta > 0$ мы имеем оценку

$$\sup_{\delta \leq t \leq T} \|\nabla^2 v^\mu(t)\|_{\omega(x_0, R)}^2 \leq \frac{1}{\delta^6} \left(\Phi_{15} \frac{1}{\ln \frac{1}{R}} + \frac{1}{R^4} \rho_3(\mu) \right) \tag{11.9}$$

для всех $R \in]0, 1/8[$. Таким образом, существует мажоранта Φ_{16} , зависящая от тех же аргументов, что и Φ'_8 (см. §7), такая, что

$$\Phi_{16} \geq 8, \quad \frac{C}{\delta^6} \Phi_{15} \frac{1}{\ln \frac{1}{R}} \leq \frac{\nu}{16} \tag{11.10}$$

для всех $R \in]0, \frac{1}{\Phi_{16}}[$.

Пусть теперь число R из интервала $]0, \frac{1}{\Phi_{16}}[$ произвольно, но фиксировано. В силу (10.42₂) существует положительное число μ_0 , зависящее от R и аргументов функции Φ_{15} , такое, что

$$\frac{C}{\delta^6 R^4} \rho_3(\mu) \leq \frac{\nu}{16} \quad \text{для всех} \quad 0 < \mu \leq \mu_0. \tag{11.11}$$

Таким образом, объединяя (11.8)–(11.11), устанавливаем оценку

$$\begin{aligned}
& \partial_t \|\varphi^2 \nabla \operatorname{curl} v^\mu(t)\|_{\omega(x_0, R)}^2 + \frac{\nu}{4} \|\nabla^3 v^\mu(t)\|_{\omega(x_0, r)}^2 \\
& \leq \frac{\nu}{8} \|\nabla^3 v^\mu(t)\|_{\omega(x_0, q)}^2 + C \left\{ \frac{\mu}{(q-r)^4} \|\nabla \Delta v^\mu(t)\|^2 + \|\operatorname{curl} g(t)\|_{\omega(x_0, R)}^2 \right. \\
& \quad \left. + \left(\|v^\mu(t)\|_{\infty}^2 + \frac{1}{(q-r)^2} \right) \|\nabla^2 v^\mu(t)\|_{\omega(x_0, R)}^2 \right\}
\end{aligned} \tag{11.12}$$

для п.в. $t \geq \delta$, $\frac{R}{2} \leq q < r \leq R$, $0 < R \leq \frac{1}{\Phi_{16}}$, $0 < \mu \leq \mu_0$.

Пусть $t_0 \geq \delta + R^2$. Рассуждая так же, как и в § 7, выводим из (11.12)

$$\begin{aligned} G^\mu(r) &\leq C \frac{1}{R^4} \|\nabla \Delta v^\mu\|_{\Omega \times]t_0 - R^2, t_0[}^2 + C \left\{ \left[\frac{1}{R^2} + \|v_\infty^\mu\|_{\infty, Q(x_0, t_0, R)}^2 \right] \right. \\ &\quad \times \|\nabla^2 v^\mu\|_{Q(x_0, t_0, R)}^2 + \|\operatorname{curl} g\|_{Q(x_0, t_0, R)}^2 \Big\}, \\ t_0 &\geq \delta + R^2, \quad R \in \left] 0, \frac{1}{\Phi_{16}} \right[, \quad 0 < \mu \leq \mu_0. \end{aligned} \quad (11.13)$$

Согласно лемме 10.2 мы имеем

$$\begin{aligned} \mu \|\nabla \Delta v^\mu\|_{\Omega \times I_\delta}^2 &\leq \frac{1}{\delta^2} \rho_1(\mu) \xrightarrow{\mu \rightarrow 0} 0, \\ \|\nabla^2 v^\mu\|_{Q(x_0, t_0, R)} &\leq \|\nabla^2 v\|_{Q(x_0, t_0, R)} + \|\nabla^2 u^\mu\|_{\Omega \times I_\delta} \\ &\leq \|\nabla^2 v\|_{Q(x_0, t_0, R)} + \frac{1}{\delta} \sqrt{\rho_1(\mu)}. \end{aligned} \quad (11.14)$$

Переходя к пределу в (11.13) с учетом (11.14), (10.16), получаем оценку (7.18), в которой надо заменить Φ'_8 на Φ_{16} . Далее просто повторяя рассуждения § 7, получаем (1.28).

Перейдем к доказательству (1.29). Для того чтобы сделать рассуждения § 7 неформальными, достаточно одну производную по времени заменить разностным отношением. Перепишем (9.1) в виде

$$(\partial_t \Delta_h v(t), w) - (\operatorname{div} \Delta_h \sigma(t), w) = -(\Delta_h (\nabla v(t) v(t)), w) + (\Delta_h g(t), w) \quad \forall w \in H, \quad (11.15)$$

для п.в. всех $t \in [0, T]$ таких, что $t, t+h \in [0, T]$, и положим

$$w = \hat{w}(t) = -\Delta \Delta_h v(t). \quad (11.16)$$

Будем оценивать каждое слагаемое отдельно:

$$(\partial_t \Delta_h v(t), \hat{w}(t)) = \frac{1}{2} \partial_t \|\nabla \Delta_h v(t)\|^2. \quad (11.17)$$

В силу тождества (2.3) имеем

$$\begin{aligned} -(\operatorname{div} \Delta_h \sigma(t), \hat{w}(t)) &= (\Delta_h \sigma_{,k}(t), \varepsilon(\Delta_h v_{,k}(t))) \\ &= \left(\Delta_h \left(\frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon^2}(\varepsilon(v(t))) \varepsilon(v_{,k}(t)) \right), \varepsilon(\Delta_h v_{,k}(t)) \right). \end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} &\Delta_h \left(\frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon^2}(\varepsilon(v(t))) \varepsilon(v_{,k}(t)) \right) \\ &= \frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon^2}(\varepsilon(v(t+h))) \varepsilon(\Delta_h v_{,k}(t)) + \Delta_h \left(\frac{\partial^2 D}{\partial \varepsilon^2}(\varepsilon(v(t))) \right) \varepsilon(v_{,k}(t)), \end{aligned}$$

то в силу (1.23) и (1.17) получим

$$\begin{aligned}
& - (\operatorname{div} \Delta_h \sigma(t), \widehat{w}(t)) \geq 2\nu \|\nabla \varepsilon(\Delta_h v(t))\|^2 - C_1 \|\nabla \varepsilon(\Delta_h(v(t)))\| \\
& \quad \times \|\nabla \varepsilon(v(t))\| \|\varepsilon(\Delta_h v(t))\| \\
& \stackrel{(2.1)}{\geq} \frac{\nu}{2} \|\nabla^2 \Delta_h v(t)\|^2 - C_2 \|\nabla^2 v(t)\|_4^2 \|\nabla \Delta_h v(t)\|_4^2 \\
& \stackrel{(2.6)}{\geq} \frac{\nu}{2} \|\nabla^2 \Delta_h v(t)\|^2 - C_3 \Gamma^{\frac{1}{2}}(t) \|\nabla \Delta_h v(t)\| \|\nabla^2 \Delta_h v(t)\| \\
& \geq \frac{\nu}{4} \|\nabla^2 \Delta_h v(t)\|^2 - C_4 \Gamma(t) \|\nabla \Delta_h v(t)\|^2,
\end{aligned} \tag{11.18}$$

где $\Gamma(t) \equiv \|\nabla^2 v(t)\|_4^4$. Отметим, что в силу уже доказанной оценки (1.28) можно утверждать, что

$$\begin{aligned}
\int_{\delta_1}^T \|\nabla^2 v(t)\|_4^4 dt & \leq C \operatorname{ess\,sup}_{\delta_1 \leq t \leq T} \|\nabla^2 v(t)\|^2 \|\nabla^3 v\|_{Q_{\delta_1}, T}^2 \\
& \leq \Phi_8^2 \left(\dots, \|\operatorname{curl} g\|_{Q_{\delta, T}}, \frac{1}{\delta_1 - \delta}, \frac{1}{\delta} \right), \quad \delta_1 > \delta > 0.
\end{aligned} \tag{11.19}$$

Перейдем к оценке правой части в (11.15). Имеем

$$(\Delta_h(v_k(t)v_{,k}(t)), \widehat{w}(t)) = (\Delta_h(v_k(t) \operatorname{curl} v_{,k}(t)), \operatorname{curl} \Delta_h v(t)) = B_1(t) + B_2(t), \tag{11.20}$$

где

$$\begin{aligned}
B_1(t) & \equiv (v_k(t+h) \operatorname{curl} \Delta_h v_{,k}(t), \operatorname{curl} \Delta_h v(t)) = 0, \\
B_2(t) & \equiv (\operatorname{curl} v_{,k}(t) \Delta_h v_k(t), \operatorname{curl} \Delta_h v(t)),
\end{aligned} \tag{11.21}$$

$$\begin{aligned}
|B_2(t)| & \leq C_1 \|\nabla \Delta_h v(t)\| \|\nabla^2 v(t)\|_4 \|\Delta_h v(t)\|_4 \stackrel{(2.6)}{\leq} C_2 \|\nabla \Delta_h v(t)\|^{\frac{3}{2}} \Gamma^{\frac{1}{4}}(t) \|\Delta_h v(t)\|^{\frac{1}{2}} \\
& \stackrel{(2.5)}{\leq} C_3 \|\nabla \Delta_h v(t)\|^2 \Gamma^{\frac{1}{4}}(t) \leq C_4 \|\nabla \Delta_h v(t)\|^2 (\Gamma(t) + 1).
\end{aligned} \tag{11.22}$$

И, наконец,

$$(\Delta_h g(t), \widehat{w}(t)) \leq C \|\Delta_h g(t)\| \|\nabla^2 \Delta_h v(t)\|. \tag{11.23}$$

Принимая во внимание соотношения (11.17)–(11.23), выводим из (11.15), (11.16) неравенство

$$\partial_t \|\nabla \Delta_h v(t)\|^2 + \frac{\nu}{4} \|\nabla^2 \Delta_h v(t)\|^2 \leq C \{ \|\Delta_h g(t)\|^2 + \|\nabla \Delta_h v(t)\|^2 (\Gamma(t) + 1) \}. \tag{11.24}$$

Неравенство (11.24) выполнено для п.в. $t \in [0, T]$ таких, что $t, t+h \in [0, T]$.

Пусть теперь χ – срезающая функция, определяемая соотношениями (7.28). Тогда из (11.24) следует неравенство

$$\begin{aligned} & \partial_t (\chi(t) \|\nabla \Delta_h v(t)\|^2) + \frac{\nu}{4} (\chi(t) \|\nabla^2 \Delta_h v(t)\|^2) \\ & \leq C (\chi(t) \|\nabla \Delta_h v(t)\|^2) (\Gamma(t) + 1) + \chi'(t) \|\nabla \Delta_h v(t)\|^2 + C \chi(t) \|\Delta_h g(t)\|^2. \end{aligned} \quad (11.25)$$

В свою очередь (11.25) влечет оценку

$$\begin{aligned} & \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T-h} (\chi(t) \|\nabla \Delta_h v(t)\|^2) \\ & \leq C \int_0^{T-h} [\chi'(t) \|\nabla \Delta_h v(t)\|^2 + \chi(t) \|\partial_t g(t)\|^2] dt \\ & \quad \times \exp t \left\{ C \left(\int_{\frac{\delta_1+\delta}{2}}^T \Gamma(t) dt + T \right) \right\}. \end{aligned} \quad (11.26)$$

С другой стороны, предполагая, что $h < \frac{\delta_1 - \delta}{4}$, имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^{T-h} (\chi'(t) \|\nabla \Delta_h v(t)\|^2 + \chi(t) \|\Delta_h g(t)\|^2) dx \\ & \leq \frac{2}{\delta_1 - \delta} \int_{\frac{\delta_1+\delta}{2}}^{T-h} \|\nabla \Delta_h v(t)\|^2 dt + \int_{\frac{\delta_1+\delta}{2}}^{T-h} \|\Delta_h g(t)\|^2 dx \\ & \leq \frac{2}{\delta_1 - \delta} \int_{\delta}^T \|\nabla \partial_t v(t)\|^2 dt + \int_{\delta}^T \|\partial_t g(t)\|^2 dx \\ & \leq \frac{2}{(\delta_1 - \delta) \delta^2} \int_{\delta}^T \|t \nabla \partial_t v(t)\|^2 dx + \frac{1}{\delta^5} \int_{\delta}^t t^5 \|\partial_t g(t)\|^2 dt \\ & \leq \frac{2}{(\delta_1 - \delta) \delta^2} \Phi_2 + \frac{1}{\delta^5} \|t^{\frac{5}{2}} \partial_t g\|_{Q_T}^2. \end{aligned} \quad (11.27)$$

Таким образом, правая часть в (11.26) мажорируется величиной, не зависящей от h . Используя (11.25)–(11.27), мы можем оценить $\int_0^{T-h} \chi(t) \|\nabla^2 \Delta_h v(t)\|^2 dt$ и получить

$$\operatorname{ess\,sup}_{\delta_1 \leq t \leq T-h} \|\nabla \Delta_h v(t)\|^2 + \int_{\delta_1}^{T-h} \|\nabla^2 \Delta_h v(t)\|^2 dx \leq \tilde{\Phi}_9,$$

где $\tilde{\Phi}_9$ зависят от тех же аргументов, что и Φ_9 , и не зависят от h . Устремляя h к нулю, получаем оценку (1.29). Теорема 1.8 доказана.

Список литературы

1. *Ладженская О. А.* О нелинейных проблемах механики сплошных сред // Тр. Международного конгресса математиков (Москва, 1966). М.: Наука, 1968. С. 560–573.

2. *Ладыженская О. А.* Новые уравнения для описания движения вязких несжимаемых жидкостей и глобальная разрешимость краевых задач для них // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова. 1967. Т. 102. С. 85–104.
3. *Ладыженская О. А.* О некоторых модификациях уравнений Навье–Стокса для больших градиентов скоростей // Зап. научн. семинаров ЛОМИ. 1968. Т. 7. С. 126–154.
4. *Ladyzhenskaya O. A., Seregin G. A.* On global stability of the two-dimensional visco-plastic flows // Jyväskylä – St. Petersburg Seminar on PDE's and Numerical Methods. Ber. Univ. Jyväskylä Math. Inst. 1993. V. 56. P. 43–52.
5. *Ladyzhenskaya O. A., Seregin G. A.* On semigroups generated by initial boundary-value problems describing two-dimensional visco-plastic flows. Nonlinear evolution equations // Amer. Math. Soc. Transl., Amer. Math. Soc. Providence. Ser. 2. 1995. V. 164. P. 99–123.
6. *Ladyzhenskaya O. A.* Attractors for semi-groups and evolution equations. Lenzioni Lincee, Roma 1988. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1991.
7. *Ладыженская О. А.* О динамической системе, порожденной уравнениями Навье–Стокса // Зап. научн. семинаров ЛОМИ. 1972. Т. 27. С. 91–114.
8. *Серегин Г. А.* Течение двумерной обобщенной ньютоновской жидкости // Алгебра и анализ. 1997. Т. 9. № 1. С. 163–196.
9. *Ладыженская О. А.* Некоторые дополнения и уточнения к моим публикациям по теории аттракторов // Зап. научн. семинаров ЛОМИ. 1990. Т. 182. С. 102–112.
10. *Douady A., Oesterlé J.* Dimension de Hausdorff des attractors // C.R. Acad. Sc. 1980. V. 290. P. 1135–1138.
11. *Бабин А. В., Вилиш М. И.* Аттракторы эволюционных уравнений с частными производными и оценки их размерности // УМН. 1983. Т. 38. № 4. С. 134–187.
12. *Ладыженская О. А.* Об оценках фрактальной размерности и числа определяющих мод для инвариантных множеств динамических систем // Зап. научн. семинаров ЛОМИ. 1987. Т. 163. С. 105–129.
13. *Ладыженская О. А.* Решение “в целом” краевой задачи для уравнений Навье–Стокса в случае двух пространственных переменных // ДАН СССР. 1958. Т. 123. С. 427–429.
14. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Физматгиз, 1951; 2-е изд. М.: Наука, 1970.
15. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уралцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
16. *Ладыженская О. А., Уралцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.
17. *Giaquinta M.* Multiple integrals in the calculus of variations and nonlinear elliptic systems // Ann. Math. Studies. № 105. Princeton–N.Y.: Princeton University Press, 1983.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Санкт-Петербург

Поступило в редакцию
22.IV.1997