Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. А. Тимошин, Наилучшее приближение оператора второй смешанной производной, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1998, том 62, выпуск 1, 201–210

DOI: <https://doi.org/10.4213/im184>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 18:14:43

УДК 517.51

О. А. Тимошин

Наилучшее приближение оператора второй смешанной производной

Получены точные оценки для наилучшего приближения оператора второй смешанной производной на классах функций двух переменных, задаваемых частными производными второго и третьего порядка.

Библиография: 6 наименований.

Результаты, которые представлены в этой работе, относятся к задаче наилучшего приближения оператора $\partial_1 \partial_2$, где ∂_j означает частную производную по j -у аргументу, ограниченными линейными операторами на классах (комплексных) функций двух переменных, заданных точно или с известной погрешностью, в пространстве $L_\infty = L_\infty(\mathbb{R}^2)$ измеримых существенно ограниченных функций на евклидовой плоскости. Ниже для стандартной нормы в этом пространстве принято обозначение $\|\cdot\|$.

Для заданной пары положительных целых чисел k и l определим множество $W = W_\infty^{k,l}$ комплексных функций $f(x, y)$, непрерывных, ограниченных на $\mathbb{R}^2$, производные

$$\partial_1^{k-1} f(x, y) = f^{(k-1,0)}(x, y), \quad \partial_2^{l-1} f(x, y) = f^{(0,l-1)}(x, y)$$

которых локально абсолютно непрерывны соответственно по переменным x и y на $\mathbb{R}$ почти для всех y и x из $\mathbb{R}$, а производные $\partial_1^k f = f^{(k,0)}$, $\partial_2^l f = f^{(0,l)}$ существенно ограничены на $\mathbb{R}^2$, т.е. принадлежат пространству $L_\infty = L_\infty(\mathbb{R}^2)$. С помощью пары положительных констант K и L выделим в $W = W_\infty^{k,l}$ класс

$$Q = Q_\infty^{k,l}(K, L) = \{f \in L_\infty : \|\partial_1^k f\| \leq K, \quad \|\partial_2^l f\| \leq L\}. \quad (1)$$

Пусть $\mathcal{R}$ есть либо множество $\mathcal{L}$ всех ограниченных линейных операторов из L_∞ в L_∞ , либо более широкое множество $\mathcal{O}$ всех (однозначных) отображений, действующих из L_∞ в L_∞ .

Для числа $\delta \geq 0$ и оператора $T \in \mathcal{R}$ положим

$$U_\delta(T) = \sup\{\|\partial_1 \partial_2 f - Tg\| : f \in Q, g \in L_\infty, \|f - g\| \leq \delta\}. \quad (2)$$

Будем обозначать

$$\nu_\delta(\mathcal{R}) = \inf\{U_\delta(T) : T \in \mathcal{R}\} \quad (3)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 96-01-00378).

величину наилучшего восстановления оператора $\partial_1 \partial_2$ на элементах класса Q , заданных с погрешностью δ , с помощью множества $\mathcal{R}$. Как известно [1], [2], эта величина связана с наилучшим приближением

$$E(N) = \inf \{U_0(T) : T \in \mathcal{L}, \|T\|_{L_\infty \rightarrow L_\infty} \leq N\} \quad (4)$$

оператора $\partial_1 \partial_2$ на элементах класса Q с помощью множества $\mathcal{L}(N)$ линейных ограниченных операторов T из L_∞ в L_∞ , норма которых $\|T\| = \|T\|_{L_\infty \rightarrow L_\infty}$ не превосходит заданного числа $N \geq 0$, и модулем непрерывности

$$\omega(\delta) = \sup \{\|\partial_1 \partial_2 f\| : f \in Q, \|f\| \leq \delta\} \quad (5)$$

оператора $\partial_1 \partial_2$ на классе Q . А именно, имеют место неравенства

$$\omega(\delta) \leq \nu_\delta(\mathcal{O}) \leq \nu_\delta(\mathcal{L}) \leq \varepsilon(\delta), \quad (6)$$

где

$$\varepsilon(\delta) = \inf \{E(N) + N\delta : N > 0\}.$$

Более того, при соответствующей связи между параметрами δ и N экстремальный оператор T_N задачи (4) является экстремальным и в (3), а элемент $f_0 \in Q$, на котором достигается верхняя грань величины уклонения $U_0(T_N)$, является одновременно экстремальным и в (5), а точнее, для него

$$\|\partial_1 \partial_2 f_0\| = \omega(\delta) = U_\delta(T_N), \quad \delta = \|f_0\|.$$

Важную роль при этом имеет интегральное представление

$$\partial_1 \partial_2 f - T_N f = \partial_1^k f * G_1 + \partial_2^l f * G_2 \quad (7)$$

для функций $f \in W_\infty^{k,l}$, правая часть которого является суммой сверток производных $\partial_1^k f$ и $\partial_2^l f$ с суммируемыми на $\mathbb{R}^2$ функциями G_1, G_2 , обладающими экстремальным свойством

$$U_0(T_N) = K \|G_1\|_{L(\mathbb{R}^2)} + L \|G_2\|_{L(\mathbb{R}^2)}.$$

Соотношение (7) позволяет получить оценку сверху для наилучшего приближения (4) оператора $\partial_1 \partial_2$ на классе Q , оценить сверху величину (5) и составить представление о том, как выглядит экстремальная функция f_0 .

Случай $k = l = 3$ был полностью изучен в работах [3]–[5] и до недавнего времени оставался единственным, для которого удавалось найти точное решение рассматриваемых здесь задач. В данной работе представлено решение всех перечисленных задач в случае $k = 3, l = 2$ (и, как следствие, $k = 2, l = 3$); эти результаты были анонсированы ранее без доказательства в [6]. Суть данной работы составляют следующие три теоремы, причем вторая и третья являются фактически следствиями первой.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $K > 0$, $L > 0$, $N > 0$. Тогда

$$E(N; K, L) = \inf\{U_0(T; K, L) : T \in \mathcal{L}(N)\} = 5(K/3)^{2/5}(L/2)^{3/5}N^{-(1/5)}, \quad (8)$$

причем оператор $T_N = T_{N;K,L}$, определенный соотношением

$$(T_N f)(x, y) = N(f(x + h_1, y + h_2) - f(x - h_1, y + h_2) - f(x + h_1, y - h_2) + f(x - h_1, y - h_2))/4, \quad (9)$$

где

$$h_1 = (3L/(2KN^2))^{1/5}, \quad h_2 = (Nh_1)^{-1},$$

является экстремальным в том смысле, что

$$E(N; K, L) = U_0(T_{N;K,L}; K, L). \quad (10)$$

ТЕОРЕМА 2. Для любых $K > 0$, $L > 0$, $\delta > 0$

$$\nu_\delta(\mathcal{O}) = \nu_\delta(\mathcal{L}) = U_\delta(T_N) = (9K)^{1/3}(2L)^{1/2}\delta^{1/6}, \quad (11)$$

где T_N — линейный ограниченный оператор, определенный выше соотношением (9) при $N = (K/3\delta)^{1/3}(L/2\delta)^{1/2}$, — является экстремальным для $\nu_\delta(\mathcal{O})$, а значит, и для $\nu_\delta(\mathcal{L})$.

Прежде чем сформулировать следующую теорему, построим функцию $f_1 \in Q_\infty^{3,2}(3, 2)$, которая окажется экстремальной в рассматриваемых нами задачах. Мы хотим выбрать функцию f_1 так, чтобы она обладала следующими свойствами:

$$f_1(-x, y) = -f_1(x, y) = f_1(x, -y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (12)$$

$$f_1(x + 4i, y + 4j) = f_1(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad i, j \in \mathbb{Z}, \quad (13)$$

$$\begin{cases} \partial_2^2 f_1(x, y) = -2, & \text{если } 0 < x < 1, \quad 0 < y < x^{3/2}, \\ \partial_1^3 f_1(x, y) = -3, & \text{если } 0 < x < 1, \quad x^{3/2} < y < 1, \end{cases} \quad (14)$$

$$\|f_1\| = f_1(1, 1) = 1, \quad \|\partial_1 \partial_2 f_1\| = \partial_1 \partial_2 f_1(0, 0) = 6. \quad (15)$$

Определим вначале функцию $\psi(x, y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, положив

$$\psi(x, y) = \begin{cases} -y^2 - 4x^{3/2}y + 6xy, & \text{если } 0 < x < 1, \quad 0 < y < x^{3/2}, \\ -\frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{2}y^{4/3}x + 6xy, & \text{если } 0 < x < 1, \quad x^{3/2} < y < 1, \\ 0, & \text{если } x > 1 \text{ или } y > 1, \end{cases}$$

и продолжив ее на всю плоскость согласно (12). Пусть

$$f_1(x, y) = \sum_{i,j \in \mathbb{Z}} (-1)^{i+j} \psi(x + 2i, y + 2j), \quad x, y \in \mathbb{R}. \quad (16)$$

Простой подсчет показывает, что f_1 удовлетворяет (12), (14), а также $|\psi(x, y)| \leq \psi(1, 1) = 1$ для всех $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, и $|\partial_1 \partial_2 \psi(x, y)| \leq \partial_1 \partial_2 \psi(0, 0) = 6$, если $|x| < 1$ и $|y| < 1$. Поэтому остается лишь убедиться в том, что $f_1 \in Q_\infty^{3,2}$. Но $\partial_1 \psi(1, y) = \partial_2 \psi(x, 1) = 0$ для всех $0 < x, y < 1$, поэтому периодическое продолжение (16) обеспечивает кусочную непрерывность функций $\partial_2^2 f_1(x, y)$ и $\partial_1^3 f_1(x, y)$ по переменным y и x соответственно для всех x и y .

ТЕОРЕМА 3. Для модуля непрерывности $\omega(\delta)$ оператора $\partial_1\partial_2$ на классе $Q = Q_{\infty}^{3,2}(K, L)$ справедливо соотношение

$$\omega(\delta) = \|\partial_1\partial_2 f_{\delta}\| = (9K)^{1/3}(2L)^{1/2}\delta^{1/6}, \quad (17)$$

где экстремальная функция f_{δ} имеет вид

$$f_{\delta}(x, y) = \delta f_1 \left((K/3\delta)^{1/3}x, (L/2\delta)^{1/2}y \right). \quad (18)$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Для любой функции $f \in W_{\infty}^{3,2}$ справедливо точное на этом классе неравенство

$$\|\partial_1\partial_2 f\| \leq (9\|\partial_1^3 f\|)^{1/3}(2\|\partial_2^2 f\|)^{1/2}\|f\|^{1/6}; \quad (19)$$

на функциях вида $af_1(b_1x, b_2y)$, где a, b_1, b_2 — отличные от нуля константы, это неравенство обращается в равенство.

Точное неравенство (19) и конструкция экстремальной функции f_1 приведены в [6]. Как уже отмечалось, теоремы 2 и 3 вытекают из теоремы 1, в основе доказательства которой лежит интегральное представление разности между оператором $\partial_1\partial_2$ и оператором (9) для $K = 3, L = 2, N = 1$:

$$(T_1 f)(x, y) = \frac{1}{4}(f(x+1, y+1) - f(x-1, y+1) - f(x+1, y-1) + f(x-1, y-1)). \quad (20)$$

ЛЕММА 1. Пусть $0 < p < q < 2p$, k и l — целые числа, $k \geq 3, l \geq 2$. Для любой функции $f \in W_{\infty}^{k,l}$ имеет место следующее интегральное представление остаточного члена оператора (20):

$$\begin{aligned} (T_1 f)(0, 0) - \partial_1\partial_2 f(0, 0) &= \int_{\varepsilon}^1 d\xi \int_0^1 p\xi^{p-q-1} u \left(\partial_1^2 \tilde{f} \right) (\xi^p u, \xi^q) du \\ &\quad + \int_{\varepsilon}^1 d\xi \int_0^1 q\xi^{q-p-1} v \left(\partial_2^2 \tilde{f} \right) (\xi^p, \xi^q v) dv + o(1), \end{aligned} \quad (21)$$

где $\tilde{f}(x, y) = \frac{1}{4}(f(x, y) - f(-x, y) - f(x, -y) + f(-x, -y))$, а $o(1)$ — бесконечно малая при $\varepsilon \rightarrow +0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этого утверждения основано на идее осреднения функции f . Для любого $t \in \mathbb{R}$ и $0 < \xi \leq 1$ положим

$$\Omega(\xi, t) = \frac{1}{\xi} \varphi \left(\frac{t}{\xi} \right), \quad \text{где } \varphi(u) = \begin{cases} 0, & \text{если } |u| \geq 1, \\ 1/2, & \text{если } |u| < 1. \end{cases}$$

Зафиксировав параметры p и q , для заданной функции $f \in W_{\infty}^{3,2}$ будем рассматривать ее среднюю функцию

$$\begin{aligned} f_{\xi}(x, y) &= \iint_{\mathbb{R}^2} f(t, s) \Omega(\xi^p, x - t) \Omega(\xi^q, y - s) dt ds \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} f(x - \xi^p u, y - \xi^q v) \varphi(u) \varphi(v) du dv. \end{aligned}$$

Поскольку частные производные $\partial_1 f$ и $\partial_2 f$ непрерывны на $\mathbb{R}^2$, для любого $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} f_1(x, y) - f_\varepsilon(x, y) &= \int_\varepsilon^1 \frac{\partial f_\xi(x, y)}{\partial \xi} d\xi \\ &= \int_\varepsilon^1 d\xi \iint_{\mathbb{R}^2} (-p\xi^{p-1}u (\partial_1 f)(x - \xi^p u, y - \xi^q v)) \varphi(u)\varphi(v) du dv \\ &\quad + \int_\varepsilon^1 d\xi \iint_{\mathbb{R}^2} (-q\xi^{q-1}v (\partial_2 f)(x - \xi^p u, y - \xi^q v)) \varphi(u)\varphi(v) du dv \\ &= \frac{1}{4} \int_\varepsilon^1 d\xi \int_{-1}^1 (-p\xi^{p-1}u) du \int_{y-\xi^q}^{y+\xi^q} \xi^{-q} (\partial_1 f)(x - \xi^p u, s) ds \\ &\quad + \frac{1}{4} \int_\varepsilon^1 d\xi \int_{-1}^1 (-q\xi^{q-1}v) dv \int_{x-\xi^p}^{x+\xi^p} \xi^{-p} (\partial_2 f)(t, y - \xi^q v) dt. \end{aligned}$$

Если подставить в это соотношение вместо функции f нечетную по каждому аргументу функцию $\tilde{f}$, затем применить к обеим его частям оператор $\partial_1 \partial_2$ и положить $x = 0, y = 0$, то получится, что

$$\begin{aligned} \tilde{f}(1, 1) - \varepsilon^{-p-q} \tilde{f}(\varepsilon^p, \varepsilon^q) &= \int_\varepsilon^1 d\xi \int_0^1 (p\xi^{p-1}u) \xi^{-q} (\partial_1^2 \tilde{f})(\xi^p u, \xi^q) du \\ &\quad + \int_\varepsilon^1 d\xi \int_0^1 (q\xi^{q-1}v) \xi^{-p} (\partial_2^2 \tilde{f})(\xi^p, \xi^q v) dv. \end{aligned}$$

Поскольку $(T_1 f)(0, 0) = \tilde{f}(1, 1)$ и $(\partial_1 \partial_2 \tilde{f})(0, 0) = (\partial_1 \partial_2 f)(0, 0)$, соотношение (21) будет установлено, если показать, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon^{-p-q} \tilde{f}(\varepsilon^p, \varepsilon^q) = (\partial_1 \partial_2 \tilde{f})(0, 0). \quad (22)$$

Для этого положим $s = p/q$ и заметим следующее. Поскольку $\tilde{f} \in W_\infty^{k,l}$, $k \geq 3$, $l \geq 2$, можно утверждать, что функции $\partial_1 \partial_2 \tilde{f}$, $\partial_1 \tilde{f}$, $\partial_2 \tilde{f}$ и $\tilde{f}$ непрерывны, а функции $\partial_1^3 \tilde{f}$ и $\partial_2^3 \tilde{f}$ равномерно ограничены на $\mathbb{R}^2$. Следовательно, учитывая, что $\frac{1}{2} < s < 1$, при $t \rightarrow +0$ имеем

$$\begin{aligned} t^{1-s} (\partial_2^2 \tilde{f})(t^s, t) &= o(1), \\ \left| t^{s-1} (\partial_1^2 \tilde{f})(t^s, t) \right| &= \left| t^{s-1} \int_0^{t^s} (\partial_1^3 \tilde{f})(u, t) du \right| = O(t^{2s-1}) = o(1), \\ (\partial_1 \partial_2 \tilde{f})(t^s, t) &= (\partial_1 \partial_2 \tilde{f})(0, 0) + o(1), \\ (\partial_1 \tilde{f})(t^s, t) &= o(1), \quad (\partial_2 \tilde{f})(t^s, t) = o(1), \quad \tilde{f}(t^s, t) = o(1). \end{aligned}$$

Теперь можно установить (22):

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon^{-p-q} \tilde{f}(\varepsilon^p, \varepsilon^q) &= \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\tilde{f}(t^s, t)}{t^{1+s}} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{st^{s-1} \left(\partial_1 \tilde{f} \right)(t^s, t) + \left(\partial_2 \tilde{f} \right)(t^s, t)}{(1+s)t^s} \\
&= \frac{s}{1+s} \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\left(\partial_1 \tilde{f} \right)(t^s, t)}{t} + \frac{1}{1+s} \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\left(\partial_2 \tilde{f} \right)(t^s, t)}{t^s} \\
&= \frac{s}{1+s} \lim_{t \rightarrow +0} \left(st^{s-1} \left(\partial_1^2 \tilde{f} \right)(t^s, t) + \left(\partial_1 \partial_2 \tilde{f} \right)(t^s, t) \right) \\
&\quad + \frac{1}{1+s} \lim_{t \rightarrow +0} \left(\left(\partial_1 \partial_2 \tilde{f} \right)(t^s, t) + \frac{1}{s} t^{1-s} \left(\partial_2^2 \tilde{f} \right)(t^s, t) \right) \\
&= (\partial_1 \partial_2 \tilde{f})(0, 0).
\end{aligned}$$

Лемма 1 доказана.

За счет выбора значений p и q удается приспособить соотношение (21) к конкретному классу. Так, для класса $W_\infty^{3,3}$ следует положить $p/q \rightarrow 1 - 0$; в результате появляется интегральное представление остаточного члена, полученное в [5]. Если же принять $p^2 = 2/3$, $q = 1/p$, то получим следующий результат, приведенный без доказательства в [6].

ЛЕММА 2. Для любой функции $f \in W_\infty^{3,2}$ имеем

$$\partial_1 \partial_2 f - T_1 f = \partial_1^3 f * G_1 + \partial_2^2 f * G_2, \quad (23)$$

где оператор T_1 определен соотношением (20), а суммируемые на $\mathbb{R}^2$ функции G_1 и G_2 таковы, что

$$G_1(x, y) = y^{-(8/3)}(x^2 - y^{4/3})/3, \quad G_2(x, y) = 0, \quad \text{если } 0 < x < 1, \quad x^{3/2} < y < 1; \quad (24)$$

$$G_1(x, y) = 0, \quad G_2(x, y) = -(3/2)yx^{-(7/2)}, \quad \text{если } 0 < x < 1, \quad 0 < y < x^{3/2}; \quad (25)$$

$$G_1(x, y) = G_2(x, y) = 0, \quad \text{если } x > 1 \text{ или } y > 1; \quad (26)$$

$$G_1(-x, y) = G_1(x, y), \quad G_1(x, -y) = -G_1(x, y) \quad \text{для любых } x, y \in \mathbb{R};$$

$$G_2(-x, y) = -G_2(x, y), \quad G_2(x, -y) = -G_2(x, y) \quad \text{для любых } x, y \in \mathbb{R}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольной функции $f \in W_\infty^{3,2}$ и любой фиксированной точки $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ положим

$$g(x, y) = f(x + x_0, y + y_0),$$

$$\tilde{g}(x, y) = (g(x, y) - g(-x, y) - g(x, -y) + g(-x, -y))/4$$

и заметим, что утверждение леммы 2 равносильно следующему:

$$\begin{aligned}
(\partial_1 \partial_2 g)(0, 0) - (T_1 g)(0, 0) &= \int_0^1 dy \int_0^{y^{2/3}} G_1(x, y) \left(\partial_1^3 \tilde{g} \right)(x, y) dx \\
&\quad + \int_0^1 dx \int_0^{x^{3/2}} G_2(x, y) \left(\partial_2^2 \tilde{g} \right)(x, y) dy. \quad (27)
\end{aligned}$$

С другой стороны, если в соотношении (21) положить $p^2 = 2/3$, $q = 1/p$ и сделать замену $\xi^p = \eta$, то получится, что

$$\begin{aligned} (\partial_1 \partial_2 g)(0, 0) - (T_1 g)(0, 0) &= - \int_{\varepsilon_1}^1 d\eta \int_0^1 u \eta^{-(3/2)} (\partial_1^2 \tilde{g})(\eta u, \eta^{3/2}) du \\ &\quad - \frac{3}{2} \int_{\varepsilon_1}^1 d\eta \int_0^1 v \eta^{-(1/2)} (\partial_2^2 \tilde{g})(\eta, v \eta^{3/2}) dv + o(1), \end{aligned} \quad (28)$$

где последнее слагаемое имеет пределом 0 при $\varepsilon_1 \rightarrow +0$, второй из интегралов при этом сходится к

$$-\frac{3}{2} \int_0^1 d\eta \int_0^1 v \eta^{-(1/2)} (\partial_2^2 \tilde{g})(\eta, v \eta^{3/2}) dv = \int_0^1 dx \int_0^{x^{3/2}} G_2(x, y) (\partial_2^2 \tilde{g})(x, y) dy,$$

а другой интеграл можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} & - \int_{\varepsilon_1}^1 d\eta \int_0^1 u \eta^{-(3/2)} (\partial_1^2 \tilde{g})(\eta u, \eta^{3/2}) du \\ &= - \int_{\varepsilon_1^{3/2}}^1 \frac{2}{3} y^{-(1/3)} dy \int_0^{y^{2/3}} x y^{-(2/3)} \cdot y^{-1} (\partial_1^2 \tilde{g})(x, y) y^{-(2/3)} dx \\ &= - \int_{\varepsilon_2}^1 dy \int_0^{y^{2/3}} G_1(x, y) (\partial_1^2 \tilde{g})(x, y) dx. \end{aligned}$$

Последнее равенство устанавливается интегрированием по частям во внутреннем интеграле с учетом того, что $(\partial_1^2 \tilde{g})(0, y) = 0$ для любого y . Таким образом, полагая $\varepsilon_1 \rightarrow +0$, из соотношения (28) можно вывести (27), и утверждение леммы 2 доказано.

Прежде чем приступить к доказательству теоремы 1, установим, что оно сводится к разбору частного случая $K = 3$, $L = 2$, $N = 1$. Поскольку величины $E(N)$, $U_\delta(T)$, а также оператор T_N , определенные выше соотношениями (4), (2) и (9) соответственно, зависят в том числе и от параметров K и L , далее будем явно отмечать эту зависимость:

$$E(N) = E(N; K, L), \quad U_\delta(T) = U_\delta(T; K, L), \quad T_N = T_{N; K, L}.$$

ЛЕММА 3. Пусть $k = 3$, $l = 2$, а N , K , L – произвольные положительные константы. Линейный оператор $T_N = T_{N; K, L}$, определенный соотношением (9), обладает экстремальным свойством

$$E(N; K, L) = U_0(T_{N; K, L}; K, L), \quad (29)$$

если и только если

$$E(1; 3, 2) = U_0(T_{1; 3, 2}; 3, 2); \quad (30)$$

при этом справедливо соотношение

$$E(N; K, L) = (K/3)^{2/5} (L/2)^{3/5} N^{-(1/5)} E(1; 3, 2). \quad (31)$$

Доказательство основано на соображениях однородности, аналогичных тем, которые впервые применялись С. Б. Стечкиным в [1]. Для заданных $K > 0$, $L > 0$ и $N > 0$ определим три параметра h_1 , h_2 и p из системы трех уравнений:

$$ph_1^3 K = 3, \quad (32)$$

$$ph_2^2 L = 2, \quad (33)$$

$$Nh_1 h_2 = 1. \quad (34)$$

Понятно, что эта система однозначно разрешима для любых положительных K , L и N :

$$h_1 = \left(\frac{3L}{2KN^2} \right)^{1/5}, \quad h_2 = \frac{1}{Nh_1}, \quad p = \frac{3}{K} h_1^{-3}. \quad (35)$$

Далее, определим на пространстве L_∞ оператор $\sigma_{h_1 h_2}$ соотношением

$$(\sigma_{h_1 h_2} f)(x, y) = f(h_1 x, h_2 y), \quad f \in L_\infty, \quad (36)$$

а на пространстве $\mathcal{L}$ линейных ограниченных операторов из L_∞ в L_∞ зададим отображение $\tau_{h_1 h_2}$ соотношением

$$(\tau_{h_1 h_2} T f)(x, y) = N(\sigma_{h_1 h_2}^{-1} T \sigma_{h_1 h_2} f)(x, y) = N(T \sigma_{h_1 h_2} f)(x/h_1, y/h_2), \quad T \in \mathcal{L}. \quad (37)$$

Используя (32) и (33), нетрудно убедиться, что оператор $p\sigma_{h_1 h_2}$ взаимно однозначно отображает класс $Q(K, L) = Q_\infty^{3,2}(K, L)$ на класс $Q(3, 2)$, поэтому для любого $T \in \mathcal{L}$ имеем

$$\begin{aligned} U_0(T; 3, 2) &= p \sup \{ \|(\partial_1 \partial_2 - T) \sigma_{h_1 h_2} f\| : f \in Q(K, L) \} \\ &= ph_1 h_2 \sup \{ \|\sigma_{h_1 h_2} (\partial_1 \partial_2 f - N \sigma_{h_1 h_2}^{-1} T \sigma_{h_1 h_2} f)\| : f \in Q(K, L) \} \\ &= ph_1 h_2 U_0(\tau_{h_1 h_2} T; K, L). \end{aligned} \quad (38)$$

С другой стороны, отображение $\tau_{h_1 h_2}$ осуществляет взаимно однозначное соответствие между множествами $\mathcal{L}(1)$ и $\mathcal{L}(N)$. Следовательно, с учетом соотношений (35) и (38)

$$\begin{aligned} E(N; K, L) &= \inf \{ U_0(T; K, L) : T \in \mathcal{L}(N) \} = \inf \{ U_0(\tau_{h_1 h_2} T; K, L) : T \in \mathcal{L}(1) \} \\ &= \frac{1}{ph_1 h_2} \inf \{ U_0(T; K, L) : T \in \mathcal{L}(1) \} \\ &= N^{-(1/5)} (L/2)^{3/5} (K/3)^{2/5} E(1; 3, 2), \end{aligned} \quad (39)$$

чем установлено (31). Но (37) показывает, что

$$\tau_{h_1 h_2} T_{1;3,2} = T_{N;K,L},$$

поэтому (38) влечет

$$U_0(T_{1;3,2}; 3, 2) = ph_1 h_2 U_0(T_{N;K,L}; K, L),$$

а (39) влечет

$$E(1; 3, 2) = ph_1 h_2 E(N; K, L).$$

Итак, (30) и (29) равносильны, и лемма 3 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Как показывает лемма 3, для доказательства достаточно рассмотреть частный случай $K = 3$, $L = 2$, $N = 1$. Лемма 2 позволяет вычислить $U_0(T_1)$ на классе $Q_\infty^{3,2}(3, 2)$. В самом деле, как показывает (23),

$$U_0(T_1) \leq 3\|G_1\|_{L(\mathbb{R}^2)} + 2\|G_2\|_{L(\mathbb{R}^2)}.$$

С другой стороны, сопоставив свойства (24)–(26) функций G_1 и G_2 со свойствами (12)–(15) функции $f_1 \in Q_\infty^{3,2}(3, 2)$, нетрудно прийти к заключению, что

$$\begin{aligned} & 3\|G_1\|_{L(\mathbb{R}^2)} + 2\|G_2\|_{L(\mathbb{R}^2)} \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} (\partial_1^3 f_1)(x, y) G_1(x, y) dx dy + \iint_{\mathbb{R}^2} (\partial_2^2 f_1)(x, y) G_2(x, y) dx dy \\ &= (\partial_1 \partial_2 f_1)(0, 0) - (T_1 f_1)(0, 0) \leq U_0(T_1), \end{aligned}$$

следовательно,

$$\begin{aligned} U_0(T_1) &= (\partial_1 \partial_2 f_1)(0, 0) - (T_1 f_1)(0, 0) = 5, \\ E(1) &\leq U_0(T_1) = 5. \end{aligned}$$

Оценим $U_0(T)$ снизу для произвольного $T \in \mathcal{L}(1)$. Если $\|T\|_{L_\infty \rightarrow L_\infty} \leq 1$, то получается, что

$$U_0(T) \geq \|\partial_1 \partial_2 f_1\| - \|T f_1\| \geq 5,$$

следовательно, $E(1) \geq 5$. Тем самым

$$E(1; 3, 2) = U_0(T_{1;3,2}; 3, 2) = 5,$$

(8) вытекает из (31), а (29) показывает, что оператор T_N , определенный соотношением (9), действительно является экстремальным в смысле (10). Теорема 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Зафиксируем $K > 0$, $L > 0$ и воспользуемся неравенствами (6):

$$\begin{aligned} \omega(\delta) &\leq \varepsilon(\delta) = \inf\{E(N) + N\delta : N > 0\} \\ &= E(N_\delta) + \delta N_\delta = 6\delta N_\delta = (9K)^{1/3} (2L)^{1/2} \delta^{1/6}, \end{aligned} \quad (40)$$

где нижняя грань достигается при

$$N_\delta = (K/3\delta)^{1/3} (L/2\delta)^{1/2}. \quad (41)$$

С другой стороны, для функции (18) справедливо следующее:

$$\|f_\delta\| = \delta, \quad \omega(\delta) \geq \|\partial_1 \partial_2 f_\delta\| = 6\delta N_\delta = \varepsilon(\delta),$$

поэтому

$$\omega(\delta) = \varepsilon(\delta), \quad \delta > 0, \quad (42)$$

и теорема 3 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Соотношение (42) показывает, что в данном случае все неравенства в (6) обращаются в равенства, так что с учетом выражения (40) для $\varepsilon(\delta)$ имеем

$$\nu_\delta(\mathcal{L}) = \nu_\delta(\mathcal{O}) = \varepsilon(\delta) = (9K)^{1/3}(2L)^{1/2}\delta^{1/6}. \quad (43)$$

Поскольку для любых $f \in Q_\infty^{3,2}(K, L)$ и $g \in L_\infty$ таких, что $\|f - g\| \leq \delta$, справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \|\partial_1 \partial_2 f - T_{N_\delta} g\| &\leq \|\partial_1 \partial_2 f - T_{N_\delta} f\| + \|T_{N_\delta}(f - g)\| \\ &\leq U_0(T_{N_\delta}) + \delta N_\delta = E(N_\delta) + \delta N_\delta = \varepsilon(\delta), \end{aligned}$$

приходим к неравенствам

$$\nu_\delta(\mathcal{L}) \leq U_\delta(T_{N_\delta}) \leq \varepsilon(\delta).$$

Но (43) позволяет вывести отсюда равенство

$$\varepsilon(\delta) = \nu_\delta(\mathcal{L}) = U_\delta(T_{N_\delta}),$$

и соотношение (11), а вместе с тем и теорема 2 установлены.

Чтобы доказать следствие 1 для любой функции $f \in W_\infty^{3,2}$, заметим, что $f \in Q_\infty^{3,2}(K, L)$, где $K = \|\partial_1^3 f\|$, $L = \|\partial_2^2 f\|$, (17) дает оценку (19):

$$\|\partial_1 \partial_2 f\| \leq \omega(\|f\|) = (9\|\partial_1^3 f\|)^{1/3} (2\|\partial_2^2 f\|)^{1/2} \|f\|^{1/6},$$

и нетрудно подсчитать, что равенство достигается на любой функции вида $af_1(b_1x, b_2y)$, $a, b_1, b_2 \neq 0$.

Следует отметить, что экстремальные операторы во всех рассмотренных выше экстремальных задачах имеют тот же вид, что и в случае $k = l = 3$; новыми являются экстремальная функция f_1 , определяемая соотношением (16), а также выражения (21), (23) для остаточного члена $\partial_1 \partial_2 f - T_1 f$.

В заключение, пользуясь случаем, выражаю мою глубокую признательность В. В. Арестову за многочисленные полезные замечания, которые позволили существенно улучшить изложение представленных здесь результатов.

Список литературы

1. *Стечкин С. Б.* Наилучшее приближение линейных операторов // Матем. заметки. 1967. Т. 1. № 2. С. 137–148.
2. *Арестов В. В.* О равномерной регуляризации задач вычисления значений оператора // Матем. заметки. 1977. Т. 22. № 2. С. 231–243.
3. *Коновалов В. Н.* Точные неравенства для норм функций, третьих частных, вторых смешанных или косых производных // Матем. заметки. 1978. Т. 23. № 1. С. 67–78.
4. *Буслаев А. П.* О приближении оператора дифференцирования // Матем. заметки. 1981. Т. 29. № 5. С. 731–742.
5. *Тимошин О. А.* Наилучшее приближение оператора второй смешанной производной в метриках L и C на плоскости // Матем. заметки. 1984. Т. 36. № 3. С. 369–375.
6. *Тимошин О. А.* Точные неравенства между нормами частных производных второго и третьего порядка // Докл. РАН. 1995. Т. 344. № 1. С. 20–22.

Поступило в редакцию
13.V.1996