Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Щ. Чжоу, Доказательство гипотезы о расширенной трубе будущего, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1998, том 62, выпуск 1, 211–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/im185>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 17:31:25

УДК 517.55

Чжоу Шаньюй

Доказательство гипотезы о расширенной трубе будущего

Целью работы является доказательство гипотезы о расширенной трубе будущего.

Библиография: 22 наименования.

Введение

Объясним сначала, что такое расширенная труба будущего.

Пусть M^4 есть пространство Минковского с лоренцевой метрикой:

$$x \cdot y = x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3,$$

где $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_0, y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^4$. Через V^+ и $V^- = -V^+$ обозначим конусы будущего и прошлого в $\mathbb{R}^4$, т.е. $V^\pm = \{y \in M: y^2 > 0, \pm y_0 > 0\}$. Соответствующие трубчатые области $\tau^\pm = T^{V^\pm} = \mathbb{R}^4 + iV^\pm$ в $\mathbb{C}^4$ называются *трубами будущего и прошлого*. Пусть L – группа Лоренца, т.е. $L = O(1, 3)$. Группа L имеет 4 связные компоненты; связная компонента единицы обозначается $L_+^\uparrow$ и называется *специальной группой Лоренца*. Таким образом, $L_+^\uparrow = SO_+(1, 3)$. Пусть $L(\mathbb{C})$ – комплексная группа Лоренца, т.е. $L(\mathbb{C}) = O(1, 3, \mathbb{C}) \cong O(4, \mathbb{C})$. Группа $L(\mathbb{C})$ имеет две связные компоненты. Связная компонента единицы обозначается через $L_+(\mathbb{C})$ и называется *собственной комплексной группой Лоренца*. Положим $\tau_N^\pm = \tau^\pm \times \dots \times \tau^\pm$ (N раз). Группа $L_+(\mathbb{C})$ действует диагонально на $\mathbb{C}^{4N}$, так что имеем $\wedge z = (\wedge z^{(1)}, \dots, \wedge z^{(N)})$ для $z = (z^{(1)}, \dots, z^{(N)}) \in \mathbb{C}^{4N}$ и $\wedge \in L_+(\mathbb{C})$. Множество $\tau'_N := \{\wedge z: z \in \tau_N^+, \wedge \in L_+(\mathbb{C})\}$ называется *расширенной трубой будущего*.

Гипотеза о расширенной трубе будущего состоит в том, что расширенная труба будущего τ'_N является областью голоморфности при $N \geq 3$. Иногда ее формулируют как вопрос: является ли τ'_N областью голоморфности.

Эта гипотеза (или вопрос) возникла в аксиоматической квантовой теории поля около 40 лет назад при изучении свойств функций Вайтмана. Ее формулировали и изучали как математики, так и физики, в том числе Р. Йост, К. Хепп, А. Вайтман, Н. Н. Боголюбов и В. С. Владимиров (см. [5], [16]–[19], [14], [13], [3] и ссылки там).

При $N = 1$ имеем $\tau'_1 = \{z \in \mathbb{C}^4; z^2 := z_0^2 - z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 \notin [0, +\infty)\}$. Легко убедиться в том, что это – область голоморфности. При $N = 2$ также можно доказать, что τ'_2 является областью голоморфности, анализируя границу $\partial\tau'_2$.

Нашим основным результатом является следующая теорема.

ТЕОРЕМА. *Расширенная труба будущего является областью голоморфности.*

Статья организована так. В § 1 формулируется утверждение, эквивалентное гипотезе о расширенной трубе будущего. Цель оставшейся части работы – доказать это эквивалентное утверждение. В § 2, 3 собраны предварительные сведения из теории срезов, принцип минимума и несколько элементарных лемм. В § 4 доказывается эквивалентная версия гипотезы о расширенной трубе будущего. При этом в п. 4.2 мы приводим общий подход, решающий задачу при некоторых специальных предположениях, а в пп. 4.1, 4.4, 4.5 проверяем, что эти предположения выполнены в интересующем нас частном случае. В § 5 описаны некоторые следствия гипотезы о расширенной трубе будущего.

Идея доказательства состоит в том, чтобы построить плюрисубгармоническую (слабо) исчерпывающую функцию на расширенной трубе будущего, пользуясь специальной строго плюрисубгармонической L_+^1 -инвариантной функцией на N -точечной трубе будущего (например, ядром Бергмана).

Мы начинаем с простого, но нетривиального наблюдения, связывающего гипотезу о расширенной трубе будущего с принципом минимума Кисельмана–Лоэба. Другой наш инструмент – теория срезов, принадлежащая Д. Луне. Можно считать наше доказательство приложением принципа минимума и теории срезов, а также матричного метода школы Хуа, который я узнал будучи студентом профессора Лю Цзыкен.

Мое доказательство гипотезы о расширенной трубе будущего было получено в январе 1997 г. и изложено в работе “К гипотезе о расширенной трубе будущего”. В начале марта я послал эту работу профессору А. Г. Сергееву. В апреле–мае он сделал ряд докладов на семинаре В. С. Владимирова в МИРАН с тщательным изложением моей работы. Предложения участников семинара были полезны для улучшения первоначального текста. В мае я послал работу профессору П. Хайнцнеру. Позднее он сообщил мне, что он ознакомился с моей работой и написал свою собственную статью с доказательством гипотезы о расширенной трубе будущего, выросшую из моей работы и использующую некоторые результаты присланной ему мною работы.

Настоящая работа является упрощенным вариантом предыдущей.

За последние несколько лет автор пользовался частичной поддержкой Китайской Академии наук, образовательного фонда Wong K. C. и гранта NSF # DMS 9022140 от MSRI.

Автор благодарен профессорам Ш. Ш. Чженю, Лю Цзыкен, А. Г. Сергееву и В. С. Владимирову за их большую поддержку и одобрение.

§ 1. Переформулировка гипотезы о расширенной трубе будущего

Отображение Паули определяется следующим образом:

$$P: \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}[2 \times 2],$$

$$z = (z_0, z_1, z_2, z_3) \mapsto Z = \begin{pmatrix} z_0 + z_3 & z_1 - iz_2 \\ z_1 + iz_2 & z_0 - z_3 \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^3 z_k \sigma_k,$$

где $\sigma_0 = I$, σ_i суть матрицы Паули:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отображение P инъективно и сюръективно.

Легко проверить, что $P(\tau^+) = H := \left\{ Z \in \mathbb{C}[2 \times 2] : \frac{Z - \bar{Z}'}{2i} > 0 \right\}$. Для всякого $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ линейное преобразование $Z \mapsto AZ\bar{A}'$ пространства $\mathbb{C}[2 \times 2]$ переходит при отображении Паули в некоторое линейное преобразование $z \mapsto g_A \cdot z$ пространства $\mathbb{C}^4$, где $g_A \in L_+^\uparrow$. Это задает $2 : 1$ -накрывающий гомоморфизм $\rho : \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow L_+^\uparrow$. Аналогично, линейное преобразование $Z \mapsto AZB^{-1}$ пространства $\mathbb{C}[2 \times 2]$ переходит при отображении Паули в некоторое линейное преобразование $z \mapsto g_{(A,B)} \cdot z$ пространства $\mathbb{C}^4$, где $g_{(A,B)} \in L_+(\mathbb{C})$. Это задает $2 : 1$ -накрывающий гомоморфизм $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow L_+(\mathbb{C})$, обозначаемый также через ρ .

Заметим, что отображение P^{-1} , обратное к отображению Паули, является ρ -эквивариантным и биголоморфным.

Положим $\tilde{P} := P \times \cdots \times P : \mathbb{C}^{4N} \rightarrow \mathbb{C}^N[2 \times 2]$. Расширенная обобщенная полуплоскость определяется как

$$H'_N = \{(AZ_1B^{-1}, \dots, AZ_NB^{-1}) : (Z_1, \dots, Z_N) \in H_N, A, B \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})\}.$$

Заметим, что $H'_N = \tilde{P}(\tau'_N)$.

Таким образом, гипотеза о расширенной трубе будущего эквивалентна утверждению, что H'_N является областью голоморфности.

§ 2. Предварительные сведения

2.1. Пусть $G_{\mathbb{C}}$ – связная комплексная группа Ли, $G_{\mathbb{R}}$ – связная замкнутая вещественная форма группы $G_{\mathbb{C}}$, а X – голоморфное $G_{\mathbb{C}}$ -пространство. Мы называем $G_{\mathbb{R}}$ -инвариантную область $D \subset X$ *орбитально связной*, если множество $b_z^{-1}(D)$ связно для всякого $z \in D$. Здесь $b_z : G_{\mathbb{C}} \rightarrow X$ определяется как $g \mapsto g \cdot z$.

2.2. Если A – замкнутое $G_{\mathbb{C}}$ -инвариантное подмножество в X , а $D \subset X$ – орбитально связная область, то область $D \setminus A$ также орбитально связна.

2.3. N -точечная труба будущего τ_N^+ является $L_+^\uparrow$ -инвариантной, и $L_+^\uparrow$ есть замкнутая вещественная форма группы $L_+(\mathbb{C})$. Теорема Баргманна, Холла и Вайтмана (см. [20], [5], [16]) гласит, что τ_N^+ орбитально связна.

2.4. В случае расширенной обобщенной полуплоскости группа $G_{\mathbb{C}} = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ действует на $\mathbb{C}^N[2 \times 2]$ линейно и голоморфно по правилу:

$$\begin{aligned} ((A, B), (Z_1, \dots, Z_N)) &\mapsto (AZ_1B^{-1}, \dots, AZ_NB^{-1}), \\ G_{\mathbb{R}} = \{(A, (\bar{A}')^{-1}) : A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})\} &\cong \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}). \end{aligned}$$

Область H_N при этом $G_{\mathbb{R}}$ -инвариантна.

Мы утверждаем, что H_N орбитально связна. Действительно, пусть $Z = (Z_1, \dots, Z_N) \in H_N$. Тогда $b_Z^{-1}(H_N) = b_Z^{-1}(P(\tau_N^+)) = \rho^{-1}(b_{P^{-1}(Z)}^{-1}(\tau_N^+))$. Поскольку ρ есть $2 : 1$ -накрытие, а множество $b_{P^{-1}(Z)}^{-1}(\tau_N^+)$ связно (п. 2.3), множество $b_Z^{-1}(H_N)$ имеет не более двух связных компонент.

Заметим, что $\rho((I, I)) = \rho((-I, -I))$ есть единица группы $L_+(\mathbb{C})$. Полагая

$$A_t := \begin{pmatrix} e^{it\pi} & 0 \\ 0 & e^{-it\pi} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \quad \text{для } t \in [0, 1],$$

мы видим, что (A_t, A_t) лежит в $b_Z^{-1}(H_N)$ и соединяет точки (I, I) и $(-I, -I)$. Этим связность множества $b_Z^{-1}(H_N)$ доказана.

2.5. Пусть X – голоморфное $G_{\mathbb{C}}$ -комплексное пространство, а $\mathcal{O}(X)^{G_{\mathbb{C}}}$ – алгебра инвариантов группы $G_{\mathbb{C}}$ в $\mathcal{O}(X)$. На X имеется естественное аналитическое отношение эквивалентности R , а именно, $R := \{(x_1, x_2) \in X \times X : f(x_1) = f(x_2) \text{ для всех } f \in \mathcal{O}(X)^{G_{\mathbb{C}}}\}$.

Категорный фактор $X//G_{\mathbb{C}}$ пространства X по $G_{\mathbb{C}}$ – это хаусдорфово топологическое пространство X/R со структурным пучком $\mathcal{O}_{X//G_{\mathbb{C}}}$, определяемым так. Для всякого открытого $U \subset X/R$ множество $\mathcal{O}_{X//G_{\mathbb{C}}}(U)$ состоит из всех непрерывных комплекснозначных функций на U , которые поднимаются посредством $\pi : X \rightarrow X/R$ до голоморфных функций на $\pi^{-1}(U) \subset X$.

Вообще говоря, $X//G_{\mathbb{C}}$ не является комплексным пространством. Но если $G_{\mathbb{C}}$ – комплексная редуктивная группа Ли, а X – штейново пространство, то по теореме Сноу [15] $X//G_{\mathbb{C}}$ есть комплексное (фактически, штейново) пространство, а проекция $\pi : X \rightarrow X//G_{\mathbb{C}}$ голоморфна. Известно, что отображение π открыто, полусобственно, сюръективно и субмерсивно (т.е. $X//G_{\mathbb{C}}$ имеет фактортопологию), а каждый его слой связан и содержит единственную замкнутую орбиту (см. [15]).

Если X – аффинное многообразие и $G_{\mathbb{C}}$ действует на X регулярно, то $X//G_{\mathbb{C}}$ есть в точности $\mathrm{Spec} \, \mathbb{C}[X]^{G_{\mathbb{C}}}$, что снова является аффинным многообразием по теореме Гильберта о конечности.

2.6. Пусть X – связное штейново голоморфное $G_{\mathbb{C}}$ -многообразие, а $\pi : X \rightarrow X//G_{\mathbb{C}}$ – проекция, причем $G_{\mathbb{C}}$ есть комплексная редуктивная группа Ли. На множестве всех замкнутых $G_{\mathbb{C}}$ -орбит определено следующее естественное отношение частичного порядка: для двух замкнутых $G_{\mathbb{C}}$ -орбит $G_{\mathbb{C}} \cdot x$ и $G_{\mathbb{C}} \cdot y$ имеем $G_{\mathbb{C}} \cdot x > G_{\mathbb{C}} \cdot y$, если существует сюръективное эквивариантное голоморфное отображение из $G_{\mathbb{C}} \cdot x$ на $G_{\mathbb{C}} \cdot y$. По лемме Цорна существуют максимальные элементы. Они называются *главными орбитами*. Группа изотропии $(G_{\mathbb{C}})_x$ называется *главной*, если орбита $G_{\mathbb{C}} \cdot x$ главная.

По теореме Луны–Сноу о срезе главные группы изотропии сопряжены, а замкнутая орбита $G_{\mathbb{C}} \cdot x$ является главной тогда и только тогда, когда $\pi(x)$ есть регулярная точка $X//G_{\mathbb{C}}$ и отображение $\pi : X \rightarrow X//G_{\mathbb{C}}$ невырождено в точке x .

Положим $X' := \{x \in X : G_{\mathbb{C}} \cdot x \text{ замкнутая и главная}\}$, $X_{\mathrm{pr}} := \pi^{-1}(\pi(X'))$, $S := \{x \in X : \mathrm{rank}_x \pi < \dim(X//G_{\mathbb{C}})\}$. Пусть $\mathrm{Sing}(X//G_{\mathbb{C}})$ есть множество особых точек $X//G_{\mathbb{C}}$. Тогда $(X_{\mathrm{pr}})^c = \pi^{-1}(\pi(S)) \cup \pi^{-1}(\mathrm{Sing}(X//G_{\mathbb{C}}))$. Поскольку S является $G_{\mathbb{C}}$ -инвариантным аналитическим подмножеством в X , из полусобственности π вытекает, что $\pi(S)$ также есть аналитическое подмножество в $X//G_{\mathbb{C}}$.

Следовательно, $X_{\text{рег}}$ открыто по Зарисскому в X . Множество $\pi(X')$ – это так называемая главная модель или главный страт.

Если X обладает свойством FPIG (т.е. все главные группы изотропии конечны), то $X' = X_{\text{рег}}$ и $\pi^{-1}(\pi(x)) = G_{\mathbb{C}} \cdot x$ для $x \in X'$.

Дальнейшие сведения из теории срезов см. в работах [10], [15] и [11], [12].

2.7. Проверим, что $H'_N = \pi^{-1}(\pi(H_N))$, где $\pi: \mathbb{C}^N[2 \times 2] \rightarrow \mathbb{C}^N[2 \times 2]/G_{\mathbb{C}}$, $G_{\mathbb{C}} = \text{SL}(2, \mathbb{C}) \times \text{SL}(2, \mathbb{C})$, т.е. что H'_N является π -насыщенным.

Известно, что τ'_N является π_0 -насыщенным, где $\pi_0: \mathbb{C}^{4N} \rightarrow \mathbb{C}^{4N}/L_+(\mathbb{C})$ (см. [5]).

Согласно § 1 отображение $P^{-1}: \mathbb{C}^N[2 \times 2] \rightarrow \mathbb{C}^{4N}$ биголоморфно и ρ -эквивариантно, где $\rho: \text{SL}(2, \mathbb{C}) \times \text{SL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow L_+(\mathbb{C})$ есть 2 : 1-накрывающий гомоморфизм, а P есть N -кратное произведение отображения Паули (обозначаемого также через P).

Нетрудно видеть, что существует биголоморфное (сюръективное) отображение Q , делающее диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{4N} & \xrightarrow{\pi_0} & \mathbb{C}^{4N}/L_+(\mathbb{C}) \\ \uparrow P^{-1} & & \uparrow Q \\ \mathbb{C}^N[2 \times 2] & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{C}^N[2 \times 2]/G_{\mathbb{C}} \end{array}$$

коммутативной. Поэтому $\pi^{-1}(\pi(H'_N)) = P(\pi_0^{-1}(\pi_0(\tau'_N)))$. С другой стороны, $\pi_0^{-1}(\pi_0(\tau'_N)) = \tau'_N$, $P(\tau'_N) = H'_N$. Тем самым $\pi^{-1}(\pi(H'_N)) = H'_N$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пользуясь фундаментальными теоремами теории инвариантов (см. [5]), можно вложить $\mathbb{C}^{4N}/L_+(\mathbb{C})$ как аффинное многообразие.

2.8. Пусть X – комплексное многообразие, $G_{\mathbb{C}}$ – связная комплексная группа Ли, а $G_{\mathbb{R}}$ – связная замкнутая вещественная форма группы $G_{\mathbb{C}}$. Обозначим естественные проекции через $\psi: G_{\mathbb{C}} \rightarrow G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$ и $p: X \times G_{\mathbb{C}} \rightarrow X$.

Группа $G_{\mathbb{C}}$ действует справа на $X \times G_{\mathbb{C}}$ по правилу:

$$(X \times G_{\mathbb{C}}) \times G_{\mathbb{C}} \longrightarrow X \times G_{\mathbb{C}}, \quad ((x, g), h) \longmapsto (x, gh).$$

Пусть $\Omega \subset X \times G_{\mathbb{C}} - G_{\mathbb{R}}$ -правоинвариантная область со связными слоями относительно p . Всякая $G_{\mathbb{R}}$ -правоинвариантная функция $u \in C^\infty(\Omega)$ задает гладкую функцию $\dot{u}(x, \psi(g))$ на $\dot{\Omega} := (\text{id}_X, \psi)(\Omega)$. Допустим, что:

- 1) u плюрисубгармонична на Ω ,
- 2) $\forall x \in p(\Omega)$ функция $u(x, \cdot)$ строго плюрисубгармонична на $\Omega_x = \Omega \cap p^{-1}(x) \subset G_{\mathbb{C}}$,
- 3) $\dot{u}(x, \cdot)$ есть исчерпывающая функция на $\dot{\Omega}_x = \psi(\Omega_x)$.

Тогда принцип минимума гласит, что $v(x) = \inf_{g \in \Omega_x} u(x, g)$ есть плюрисубгармоническая C^∞ -функция на $p(\Omega)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Кисельман [6] впервые получил этот принцип минимума для $X = \mathbb{C}^n$, $G_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^m$, $G_{\mathbb{R}} = \text{Im } \mathbb{C}^m$, а Лоэб [8] обобщил результат Кисельмана на приведенный здесь случай.

§ 3. Леммы о расширенной обобщенной полуплоскости

3.1. Пусть $Z = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix}$, $z_j = x_j + iy_j$. Тогда утверждение, что $Z \in H$, т.е. что

$$\operatorname{Im} Z := \begin{pmatrix} \frac{z_1 - \bar{z}_1}{2i} & \frac{z_2 - \bar{z}_3}{2i} \\ \frac{z_3 - \bar{z}_2}{2i} & \frac{z_4 - \bar{z}_4}{2i} \end{pmatrix} > 0,$$

эквивалентно тому, что $y_1, y_4 > 0$ и $\det \operatorname{Im} Z = y_1 y_4 - \frac{|z_2 - \bar{z}_3|^2}{4} > 0$.

3.2. Если $Z \in H$, то $\det \operatorname{Im} Z \leq |\det Z|$. Действительно, существует матрица $U \in \operatorname{SU}(2)$ такая, что

$$\begin{aligned} UZ\bar{U}' &= \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \\ \det \operatorname{Im} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} &= (\operatorname{Im} a)(\operatorname{Im} c) - \frac{|b|^2}{4} \\ &\leq (\operatorname{Im} a)(\operatorname{Im} c) \leq |ac| = \left| \det \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \right|. \end{aligned}$$

Тем самым, $\det \operatorname{Im} Z = \det \operatorname{Im} UZ\bar{U}' \leq |\det(UZ\bar{U}')| = |\det Z|$.

3.3. Если $Z \in \bar{H}$ и $\det \operatorname{Im} Z > 0$, то $Z \in H$.

Действительно, пусть $Z = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix}$. Тогда если $Z \in \bar{H}$, то $\operatorname{Im} z_1 \geq 0$, $\operatorname{Im} z_4 \geq 0$. С другой стороны, $(\operatorname{Im} z_1)(\operatorname{Im} z_4) - \frac{|z_2 - \bar{z}_3|^2}{4} = \det \operatorname{Im} Z > 0$. Следовательно, $\operatorname{Im} z_1 > 0$, $\operatorname{Im} z_4 > 0$. Тогда $Z \in H$ согласно п. 3.1.

3.4. Обобщенная полуплоскость H биголоморфно отображается на классическую область $\mathcal{R} := \{Z \in \mathbb{C}[2 \times 2] : I - Z\bar{Z}' > 0\}$ с помощью преобразования Кэли. Заметим, что $\mathcal{R}$ есть ограниченная выпуклая область. Преобразование Кэли $H \rightarrow \mathcal{R}$ задается формулой $Z \mapsto W = (I - iZ)^{-1}(I + iZ)$.

Согласно результатам Хуа [4] ядро Бергмана области $\mathcal{R}$ есть $K_{\mathcal{R}}(Z, \bar{Z}) = c \frac{1}{\det(I - Z\bar{Z}')^4}$. Пользуясь преобразованием Кэли, мы вычислим сейчас ядро Бергмана для H .

Из $W = (I - iZ)^{-1}(I + iZ)$ имеем $(I - iZ)W = I + iZ$. Дифференцируя это равенство, получаем $(-idZ)W + (I - iZ)dW = idZ$, т.е.

$$(I - iZ)dW = (idZ)(I + W) = 2i(dZ)(I - iZ)^{-1}.$$

Отсюда $dW = 2i(I - iZ)^{-1}(dZ)(I - iZ)^{-1}$. Следовательно, якобиан преобразования Кэли равен

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial Z} &= 2i(I - iZ)^{-1} * ((I - iZ)')^{-1}, \\ \det \left(\frac{\partial W}{\partial Z} \right) &= C_0 \det(I - iZ)^{-2} \det((I - iZ)')^{-2} = C_0 \det(I - iZ)^{-4}, \end{aligned}$$

где $*$ означает тензорное (или кронекерово) произведение двух матриц (см. [9]).

Пользуясь законом преобразования ядра Бергмана и тем, что $I - W\bar{W}' = 4(I - iZ)^{-1} \cdot \text{Im } Z \cdot (I + i\bar{Z}')^{-1}$, получаем

$$K_H(Z, \bar{Z}) = \left| \det \left(\frac{\partial W}{\partial Z} \right) \right|^2 K_{\mathcal{R}}(W, \bar{W}) = C_1 \frac{1}{\det(\text{Im } Z)^4}.$$

Это $G_{\mathbb{R}}$ -инвариантная функция.

3.5. Пусть X – топологическое пространство, а $D \subset X$ – его собственная подобласть. Непрерывная функция $f \in C^0(D)$ на области D называется *слабо исчерпывающей*, если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ для всех $x_0 \in \partial D$. Типичным примером является $-\log \text{dist}(x, \partial D)$, если X – метрическое пространство.

Ядро Бергмана $K_H(Z, \bar{Z})$ есть слабо исчерпывающая гладкая строго плюрисубгармоническая функция. Функция $K_H(Z, \bar{Z})^p$ также строго плюрисубгармонична при всех $p > 0$.

Если X – штейново пространство, а область $D \subset X$ имеет положительную слабо исчерпывающую плюрисубгармоническую функцию, то D также штейнова.

§ 4. Доказательство основной теоремы

4.1. Для обобщенной полуплоскости справедливо следующее наблюдение. Множество $\{Z = (Z_1, \dots, Z_N) \in \mathbb{C}^N[2 \times 2] : \text{орбита } G_{\mathbb{C}}Z \text{ замкнута, группа } (G_{\mathbb{C}})_Z \text{ конечна}\}$ непусто при $N \geq 3$. Здесь $G_{\mathbb{C}} = \text{SL}(2, \mathbb{C}) \times \text{SL}(2, \mathbb{C})$, а действие этой группы на $\mathbb{C}^N[2 \times 2]$ описано в п. 2.4.

Это наблюдение влечет, что $\mathbb{C}^N[2 \times 2]$ обладает свойством FPIG относительно действия $G_{\mathbb{C}}$.

Выберем $Z_1 = \begin{pmatrix} i & c \\ \bar{c} & i \end{pmatrix}$, $Z_2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix}$, $Z_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 3i \end{pmatrix}$, $Z_4 = \dots = Z_N = Z_2$, где $c \neq 0$. Тогда Z лежит даже в H_N .

1) Проверим, что $(G_{\mathbb{C}})_Z = \{(I, I), (-I, -I)\}$.

Пусть $(A, B) \in (G_{\mathbb{C}})_Z$, т.е. $AZ_jB^{-1} = Z_j$ при $j = 1, 2, 3$. Заметим, что $2Z_2 - Z_3 = iI$, $A(2Z_2 - Z_3)B^{-1} = 2Z_2 - Z_3$, откуда $A = B$ и, следовательно, $AZ_2 = Z_2A$. Поскольку Z_2 есть диагональная матрица с разными элементами на диагонали, матрица A также должна быть диагональной, так что $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$.

Прямое вычисление дает, что $AZ_1A^{-1} = \begin{pmatrix} i & a^2c \\ \frac{\bar{c}}{a^2} & i \end{pmatrix}$. Тогда условие $AZ_1A^{-1} = Z_1$ влечет, что $a = \pm 1$. Следовательно, $A = \pm I$.

2) Проверим, что орбита $G_{\mathbb{C}} \cdot Z$ замкнута.

Пусть $A_nZ_jB_n^{-1} \rightarrow W_j$ при $1 \leq j \leq 3$, где $A_n, B_n \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$. Заметим, что $2Z_2 - Z_3 = iI$, $A_n(2Z_2 - Z_3)B_n^{-1} \rightarrow 2W_2 - W_3$. Поэтому $A_nB_n^{-1} \rightarrow -i(2W_2 - W_3) =: \widetilde{W}$.

Поскольку $\det A_nB_n^{-1} = 1$, имеем $\det \widetilde{W} = 1$, так что матрица $\widetilde{W}$ невырождена. Из того, что $(A_nZ_jA_n^{-1})(A_nB_n^{-1}) \rightarrow W_j$, получаем $A_nZ_jA_n^{-1} \rightarrow W_j\widetilde{W}^{-1}$.

Запишем $A_n = U_nP_n$, где $U_n \in \text{SU}(2)$, $P_n = \begin{pmatrix} \lambda_n & \mu_n \\ 0 & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}$ и $\lambda_n > 0$. Переходя, если надо, к подпоследовательности, можно считать, что $U_n \rightarrow U \in \text{SU}(2)$. Тогда

$P_n Z_2 P_n^{-1}$ сходится. Вычисление показывает, что

$$P_n Z_2 P_n^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_n & \mu_n \\ 0 & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_n} & -\mu_n \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & \lambda_n \mu_n i \\ 0 & 2i \end{pmatrix},$$

и мы заключаем, что $\lambda_n \mu_n$ сходится.

Вычисление дает, что

$$\begin{aligned} P_n Z_1 P_n^{-1} &= \begin{pmatrix} \lambda_n & \mu_n \\ 0 & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & c \\ \bar{c} & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_n} & -\mu_n \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} i + \frac{\mu_n}{\lambda_n} \bar{c} & -\mu_n^2 \bar{c} + \lambda_n^2 c \\ \frac{\bar{c}}{\lambda_n^2} & -\frac{\mu_n}{\lambda_n} \bar{c} + i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Из сходимости этого выражения и сходимости $\lambda_n \mu_n$ получаем, что $\lambda_n \rightarrow \lambda_0 \neq 0$, $\mu_n \rightarrow \mu_0$. Следовательно, A_n, B_n сходятся, так что $G_{\mathbb{C}} \cdot Z$ есть замкнутая орбита.

ЗАМЕЧАНИЕ. Можно выбрать Z так, чтобы группа $(G_{\mathbb{C}})_Z$ была конечна, но орбита $G_{\mathbb{C}} \cdot Z$ не замкнута.

Это Z определяется так: $Z_1 = \begin{pmatrix} i & c \\ 0 & i \end{pmatrix}$, $Z_2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix}$, $Z_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 3i \end{pmatrix}$, $Z_4 = \dots = Z_N = Z_2$. То же доказательство, что выше, показывает, что $(G_{\mathbb{C}})_Z = \{(I, I), (-I, -I)\}$. Но $G_{\mathbb{C}} \cdot Z$ не замкнута. Действительно,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} r_n & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & c \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{r_n} & 0 \\ 0 & r_n \end{pmatrix}, \quad r_n \rightarrow 0, \\ \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} r_n & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{r_n} & 0 \\ 0 & r_n \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 3i \end{pmatrix} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} r_n & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{r_n} & 0 \\ 0 & r_n \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

т.е.

$$Z_0 := \left(\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 3i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix} \right) \in \overline{G_{\mathbb{C}} \cdot Z}.$$

Но такое же доказательство, как в 1), показывает, что не существует $(A, B) \in G_{\mathbb{C}}$ таких, что $AZB^{-1} = Z_0$.

4.2. Пусть X – штейново голоморфное $G_{\mathbb{C}}$ -многообразие, где $G_{\mathbb{C}}$ – связная комплексная редуктивная группа Ли.

Допустим, что X обладает FPIG относительно действия $G_{\mathbb{C}}$. Положим $'X = \{\xi \in X : G_{\mathbb{C}} \cdot \xi \text{ замкнута, } (G_{\mathbb{C}})_{\xi} \text{ конечная и главная}\}$. Тогда $A := X \setminus 'X$ есть замкнутое $G_{\mathbb{C}}$ -инвариантное аналитическое подмножество в X , и $'X = \pi^{-1}(\pi('X))$, где $\pi : X \rightarrow X/G_{\mathbb{C}}$.

Пусть D – штейнова $G_{\mathbb{R}}$ -инвариантная орбитально связная область. Тогда $'D = D \cap 'X = D \setminus A$ также есть $G_{\mathbb{R}}$ -инвариантная орбитально связная область (п. 2.2). Определим

$$\begin{aligned} X \times G_{\mathbb{C}} &\xrightarrow{\rho} X, \\ (\xi, g) &\mapsto g^{-1}\xi. \end{aligned}$$

Пусть $\psi: G_{\mathbb{C}} \rightarrow G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$ и $p: X \times G_{\mathbb{C}} \rightarrow X$ суть канонические проекции.

Тогда $'\Omega := \rho^{-1}('D)$ имеет связные слои относительно p , так как $'\Omega_{\xi} \cong b_{\xi}^{-1}('D)$ для всех $\xi \in p(' \Omega)$, а множество $b_{\xi}^{-1}('D)$ связно в силу орбитальной связности $'D$. Следовательно, множество $'\dot{\Omega}_{\xi} = \psi(' \Omega_{\xi})$ тоже связно, так что $'\dot{\Omega}$ имеет связные слои относительно p .

Заметим, что если группа $G_{\mathbb{R}}$ связна (что мы всегда предполагаем), то связность $'\dot{\Omega}_{\xi}$ эквивалентна связности $'\Omega_{\xi}$.

Пусть на D задана гладкая $G_{\mathbb{R}}$ -инвариантная строго плюрисубгармоническая слабо исчерпывающая функция φ . Пусть $G_{\mathbb{C}}$ действует справа на $X \times G_{\mathbb{C}}$:

$$(X \times G_{\mathbb{C}}) \times G_{\mathbb{C}} \rightarrow X \times G_{\mathbb{C}}, \quad ((\xi, g), h) \mapsto (\xi, gh).$$

Тогда $u(\xi, g) := \varphi \circ \rho(\xi, g) = \varphi(g^{-1} \cdot \xi)$ есть гладкая $G_{\mathbb{R}}$ -правоинвариантная слабо исчерпывающая функция на Ω , где Ω является $G_{\mathbb{R}}$ -правоинвариантной.

Положим $v(\xi) := \inf_{g \in \Omega_{\xi}} u(\xi, g)$. Тогда функция $v(\xi)$ полунепрерывна сверху на $p(\Omega) = G_{\mathbb{C}} \cdot D$. Действительно, имеет место следующий общий факт.

ЛЕММА. Пусть X, Y – топологические пространства, $p: X \times Y \rightarrow X$ – проекция и $u(x, y)$ – полунепрерывная сверху функция на области $\Omega \subset X \times Y$. Тогда функция $v(x) := \inf_{y \in \Omega_x} u(x, y)$ также полунепрерывна сверху на $p(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x_0 \in p(\Omega)$, $v(x_0) < c$, $c \in \mathbb{R}$. Тогда $\exists y_0 \in Y$ такой, что $(x_0, y_0) \in \Omega$ и $u(x_0, y_0) < c$. В силу полунепрерывности u найдется такая открытая окрестность V точки (x_0, y_0) , что $u(x, y) < c$ для $(x, y) \in V$ и, следовательно, $v(x) < c$ для $x \in p(V)$. При этом $p(V)$ есть открытая окрестность точки x_0 . Это означает, что $v(x)$ полунепрерывна сверху. Лемма доказана.

При каждом $\xi \in 'D$ группа $(G_{\mathbb{C}})_{\xi}$ конечна, так что $G_{\mathbb{C}} \rightarrow G_{\mathbb{C}}/(G_{\mathbb{C}})_{\xi}$ есть конечнолистное накрытие. С другой стороны, имеем $G_{\mathbb{C}}/(G_{\mathbb{C}})_{\xi} \xrightarrow{\sim} G_{\mathbb{C}} \cdot \xi$, и функция $\varphi|_{G_{\mathbb{C}} \cdot \xi \cap D}$ строго плюрисубгармонична, поэтому $u(\xi, g)$ строго плюрисубгармонична на $\Omega_{\xi} = ' \Omega_{\xi}$.

Допустим, что функция $\dot{u}(\xi, \psi(g))$, порожденная функцией $u(\xi, g)$, является исчерпывающей на $\dot{\Omega}_{\xi}$. Тогда, применяя принцип минимума к $'\Omega$, мы видим, что $v(\xi)$ плюрисубгармонична на $p(' \Omega) = G_{\mathbb{C}} \cdot 'D = G_{\mathbb{C}} \cdot D \setminus A$.

Поскольку $v(\xi)$ полунепрерывна сверху на $G_{\mathbb{C}} \cdot D$, по теореме о продолжении плюрисубгармонических функций (см. [1], [7]) существует плюрисубгармоническая функция $\tilde{v}(\xi)$ на $G_{\mathbb{C}} \cdot D$ такая, что $\tilde{v}(\xi) = v(\xi)$ на $G_{\mathbb{C}} \cdot D \setminus A$ и $\tilde{v}(\xi_0) = \lim_{\substack{\xi \rightarrow \xi_0 \\ \xi \in G_{\mathbb{C}} \cdot D \setminus A}} v(\xi)$ при $\xi_0 \in G_{\mathbb{C}} \cdot D \cap A$.

Если $\tilde{v}(\xi)$ – слабо исчерпывающая функция, то $G_{\mathbb{C}} \cdot D$ – штейнова область.

ЗАМЕЧАНИЕ. Функции $v(\xi)$ и $\tilde{v}(\xi)$ являются $G_{\mathbb{C}}$ -инвариантными.

Действительно, $v(h \cdot \xi) = \inf_{g \in \Omega_{h \cdot \xi}} \varphi(g^{-1} \cdot h\xi) = \inf_{h^{-1}g \in \Omega_{\xi}} \varphi((h^{-1} \cdot g)^{-1} \cdot \xi) = v(\xi)$, потому что $\forall g_0 \in \Omega_{\xi}$ имеем $hg_0 \in \Omega_{h \cdot \xi}$.

4.3. Вернемся к интересующему нас частному случаю, эквивалентному гипотезе о расширенной трубе будущего. Здесь $X = \mathbb{C}^N[2 \times 2]$, $G_{\mathbb{C}} = \text{SL}(2, \mathbb{C}) \times \text{SL}(2, \mathbb{C})$, $D = H_N$. Мы доказали в п. 4.1, что $\mathbb{C}^N[2 \times 2]$ обладает свойством FPIG относительно действия $G_{\mathbb{C}}$.

Пусть $\varphi_0(Z_j) = \frac{1}{\det \operatorname{Im} Z_j}$.

Положим $\varphi(Z) = \frac{1}{\det \operatorname{Im} Z_1} + \dots + \frac{1}{\det \operatorname{Im} Z_N}$. Эта функция является $G_{\mathbb{R}}$ -инвариантной (см. п. 3.4), строго плюрисубгармонической и слабо исчерпывающей на H_N .

К настоящему моменту доказано выполнение условий 1) и 2) принципа минимума (п. 2.8). Согласно п. 4.2, чтобы установить, что H'_N – область голоморфности, осталось проверить выполнение условия 3) принципа минимума и то, что $v(Z)$ – слабо исчерпывающая функция.

4.4. В этом пункте мы докажем, что условие 3) принципа минимума выполнено в нашем частном случае. Иными словами, докажем, что $\dot{u}(\xi, \cdot)$ есть исчерпывающая функция на $\dot{\Omega}_\xi$, т.е. что множество $\{\psi(g) \in \dot{\Omega}_\xi : \dot{u}(\xi, \psi(g)) \leq c\}$ компактно для любого $\xi \in {}'X \cap H'_N$ и для любого положительного c .

Пусть $\psi(g_k)$ – последовательность элементов этого множества, причем $g_k = (A_k^{-1}, B_k^{-1}) \in \Omega_Z$, $Z \in {}'X$. Тогда $\varphi_0(A_k Z_1 B_k^{-1}) + \dots + \varphi_0(A_k Z_N B_k^{-1}) \leq c$, где $A_k Z_j B_k^{-1} \in H$ для всех j . Докажем, что $\psi(g_k)$ имеет подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке этого множества.

Из $G_{\mathbb{R}}$ -инвариантности φ_0 имеем $\varphi_0(\bar{B}'_k A_k Z_1) + \dots + \varphi_0(\bar{B}'_k A_k Z_N) \leq c$. Пользуясь полярным разложением, запишем $\bar{B}'_k A_k = (\exp t_k Y_k) \cdot U_k$, где $U_k \in \operatorname{SU}(2)$, $Y_k \in \mathfrak{su}(2)$, $\|Y_k\| := \sqrt{\operatorname{tr} Y_k \bar{Y}'_k} = \sqrt{2}$ и $t_k \in \mathbb{R}$. Переходя к подпоследовательности, можно считать, что $U_k \rightarrow U_0 \in \operatorname{SU}(2)$ и $Y_k \rightarrow Y_0$.

Матрица Y_k эрмитова, $\operatorname{tr} Y_k = 0$ и $\|Y_k\| = \sqrt{2}$. Поэтому найдется $V_k \in \operatorname{SU}(2)$ с $V_k Y_k \bar{V}'_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Переходя к подпоследовательности, можно считать, что $V_k \rightarrow V_0 \in \operatorname{SU}(2)$. Заметим, что

$$\varphi_0(\bar{B}'_k A_k Z_j) = \varphi_0(V_k \bar{B}'_k A_k Z_j \bar{V}'_k) = \varphi_0(V_k (\exp t_k Y_k) \bar{V}'_k \cdot V_k U_k Z_j \bar{V}'_k).$$

Поскольку $V_k (\exp t_k Y_k) \bar{V}'_k = \begin{pmatrix} e^{t_k} & 0 \\ 0 & e^{-t_k} \end{pmatrix}$, имеем

$$\varphi_0(\bar{B}'_k A_k Z_j) = \frac{1}{\operatorname{Im} a_k^j \operatorname{Im} d_k^j - \frac{1}{4} |e^{t_k} b_k^j - e^{-t_k} \bar{c}_k^j|^2},$$

где

$$V_k U_k Z_j \bar{V}'_k := \begin{pmatrix} a_k^j & b_k^j \\ c_k^j & d_k^j \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a^j & b^j \\ c^j & d^j \end{pmatrix} =: V_0 U_0 Z_j \bar{V}'_0.$$

Если t_k имеет подпоследовательность, сходящуюся к $+\infty$ (и обозначаемую снова t_k), то рассмотрим неравенство $\operatorname{Im} a_k^j \operatorname{Im} d_k^j - \frac{1}{4} |e^{t_k} b_k^j - e^{-t_k} \bar{c}_k^j|^2 \geq 0$, т.е.

$$\frac{\operatorname{Im} a_k^j \operatorname{Im} d_k^j}{|e^{t_k}|^2} - \frac{1}{4} |b_k^j - e^{-2t_k} \bar{c}_k^j|^2 \geq 0 \quad \text{для всех } j,$$

и устремим $t_k \rightarrow +\infty$. Получим, что $-\frac{1}{4} |b^j|^2 \geq 0$ для всех j . Следовательно, все матрицы $V_0 U_0 Z_j \bar{V}'_0$ нижнетреугольные. Но это противоречит следующему факту, доказательство которого мы отложим до конца пункта.

УТВЕРЖДЕНИЕ. Для любого $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ невозможно, чтобы матрицы $AU_j A^{-1}$, $1 \leq j \leq N$, были все верхнетреугольные или все нижнетреугольные.

Если t_k имеет подпоследовательность, сходящуюся к $-\infty$, то мы аналогично получаем $-\frac{1}{4}|c^j|^2 \geq 0$ для всех j , что также невозможно. Таким образом, последовательность t_k ограничена и, следовательно, имеет подпоследовательность (обозначаемую снова t_k), сходящуюся к некоторому t_0 . Значит, $\overline{B}'_k A_k \rightarrow C$, где $CZ_j \in \overline{H}$ для всех j .

Если $CZ_j \in \partial H$ при некотором j , то $\det(\mathrm{Im} CZ_j) = 0$. С другой стороны, $\frac{1}{\det \mathrm{Im}(\overline{B}'_k A_k Z_j)} \leq c$, т.е. $\det(\mathrm{Im}(\overline{B}'_k A_k Z_j)) \geq \frac{1}{c}$. Переходя к пределу, получаем $0 \geq \frac{1}{c}$. Противоречие.

Следовательно, $(C^{-1}, I) \in \Omega_Z$, и $\psi(A_k^{-1}, B_k^{-1}) = \psi((\overline{B}'_k A_k)^{-1}, I)$ сходится к $\psi(C^{-1}, I)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ. Пусть существует такая матрица $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$, что $AU_j A^{-1} = \begin{pmatrix} p_j & r_j \\ 0 & q_j \end{pmatrix}$ для всех j . Имеем

$$\begin{pmatrix} p_j & 0 \\ 0 & q_j \end{pmatrix} = \lim_{\varepsilon_n \rightarrow 0} \begin{pmatrix} \varepsilon_n & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_j & r_j \\ 0 & q_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon_n} & 0 \\ 0 & \varepsilon_n \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} p_j & 0 \\ 0 & q_j \end{pmatrix} = \lim_{\varepsilon_n \rightarrow 0} \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon_n} & 0 \\ 0 & \varepsilon_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_j & 0 \\ r_j & q_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_n & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon_n} \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$Z_0 := \left(\begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & q_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} p_N & 0 \\ 0 & q_N \end{pmatrix} \right) \in \overline{G_{\mathbb{C}} \cdot Z} = G_{\mathbb{C}} \cdot Z.$$

Легко видеть, что $\dim(G_{\mathbb{C}})_{Z_0} > 0$, так как $AZ_0 A^{-1} = Z_0$ для всех диагональных $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. Это противоречит условию $Z \in {}'X$. Утверждение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть $Z_j = \begin{pmatrix} iy_{j1} & 0 \\ 0 & iy_{j2} \end{pmatrix}$, $y_{j1}, y_{j2} > 0$, $Z \in H_N$.

Имеем $\det \mathrm{Im} Z_j = |\det Z_j|$. Согласно п. 3.2

$$\frac{1}{\det \mathrm{Im} AZ_j B^{-1}} \geq \frac{1}{|\det(AZ_j B^{-1})|} = \frac{1}{|\det Z_j|} = \frac{1}{|\det \mathrm{Im} Z_j|}$$

при $AZ_j B^{-1} \in H$. Это означает, что $v(Z)$ может достигаться в точке $(I, I) \in \Omega_Z$. Но $Z \notin {}'X$, ибо $AZA^{-1} = Z$ для всех диагональных $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$, так что $\dim(G_{\mathbb{C}})_Z > 0$.

4.5. В этом пункте мы докажем, что $\tilde{v}(Z)$ есть слабо исчерпывающая функция на $H'_N = G_{\mathbb{C}} \cdot H_N$.

Определим $M_{\varphi} := \{Z \in {}'X \cap H_N: \varphi(Z) \text{ есть минимум } \varphi(A^{-1}ZB)|_{(A,B) \in \Omega_Z}\}$. Имеем $H'_N \cap {}'X = G_{\mathbb{C}} \cdot M_{\varphi}$. Множество M_{φ} является $G_{\mathbb{R}}$ -инвариантным.

Пусть $W_0 = (W_0^{(1)}, \dots, W_0^{(N)}) \in \partial H'_N$. Возьмем любые $W_n \in H'_N \cap {}'X = G_{\mathbb{C}} \cdot M_{\varphi}$ такие, что $W_n \rightarrow W_0$. Запишем $W_n = A_n Z_n B_n^{-1}$, где $Z_n = (Z_n^{(1)}, \dots, Z_n^{(N)}) \in M_{\varphi}$. По определению $v(W_n) = v(Z_n) = \sum_j \frac{1}{\det(\mathrm{Im} Z_n^{(j)})}$.

Если $\det W_0^{(N)} = 0$, т.е. $\det Z_n^{(N)} \rightarrow \det W_0^{(N)} = 0$, то $v(W_n) \rightarrow +\infty$ в силу п. 3.2, и доказательство закончено.

Пусть $\det W_0^{(N)} \neq 0$. Докажем, что найдутся такие $C_n \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$, что последовательность $C_n Z_n^{(N)} \bar{C}'_n$ сходится, скажем, к $Z_0^{(N)}$.

Существуют $V_n \in \mathrm{SU}(2)$ такие, что $V_n Z_n^{(N)} \bar{V}'_n = \begin{pmatrix} p_n & c_n \\ 0 & q_n \end{pmatrix}$ (и также принадлежит H). В силу п. 3.1 $\frac{|c_n|^2}{4} < (\mathrm{Im} p_n)(\mathrm{Im} q_n) \leq |p_n q_n| \rightarrow |\det W_0^{(N)}| > 0$.

Значит, последовательность $|c_n|$ ограничена, а $|p_n q_n|$ ограничена и отделена снизу от нуля. Поэтому $\exists r_n > 0$ такие, что последовательность

$$\begin{pmatrix} \sqrt{r_n} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{r_n}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n & c_n \\ 0 & q_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{r_n} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{r_n}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n r_n & c_n \\ 0 & \frac{q_n}{r_n} \end{pmatrix}$$

ограничена. Иными словами, найдутся $C_n \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ такие, что последовательность $C_n Z_n^{(N)} \bar{C}'_n$ ограничена.

Переходя к подпоследовательности, можно считать, что $C_n Z_n^{(N)} \bar{C}'_n \rightarrow Z_0^{(N)} \in \bar{H}$. Если $Z_0^{(N)} \in \partial H$, то $v(W_n) \rightarrow +\infty$. Если же $Z_0^{(N)} \in H$, то докажем, что $C_n Z_n^{(j)} \bar{C}'_n$ сходится при всех $1 \leq j \leq N$.

Положим $\tilde{A}_n = A_n C_n^{-1}$, $\tilde{B}_n = B_n \bar{C}'_n$ и $\tilde{Z}_n^{(j)} = C_n Z_n^{(j)} \bar{C}'_n \in H$. По условию $\tilde{A}_n \tilde{Z}_n^{(j)} \tilde{B}_n^{-1} \rightarrow W_0^{(j)}$, и имеем $\tilde{A}_n \tilde{Z}_n^{(j)} (\tilde{Z}_n^{(N)})^{-1} \tilde{A}_n^{-1} \rightarrow W_0^{(j)} (W_0^{(N)})^{-1}$.

Существуют $U_n \in \mathrm{SU}(2)$ (зависящие от j) такие, что

$$U_n \tilde{Z}_n^{(j)} (\tilde{Z}_n^{(N)})^{-1} U_n^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_n & \gamma_n \\ 0 & \beta_n \end{pmatrix}, \quad \alpha_n, \beta_n, \gamma_n \text{ зависят от } j.$$

Поскольку собственные значения $\tilde{Z}_n^{(j)} (\tilde{Z}_n^{(N)})^{-1}$ сходятся к собственным значениям $W_0^{(j)} (W_0^{(N)})^{-1}$, мы можем считать, что $\alpha_n \rightarrow \alpha_0$ и $\beta_n \rightarrow \beta_0$. Переходя к подпоследовательности, имеем

$$U_n \tilde{Z}_n^{(N)} U_n^{-1} := \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \rightarrow U_0 Z_0^{(N)} U_0^{-1} \in \bar{H},$$

$$U_n \tilde{Z}_n^{(j)} \bar{U}'_n = \begin{pmatrix} \alpha_n & \gamma_n \\ 0 & \beta_n \end{pmatrix} (U_n \tilde{Z}_n^{(N)} U_n^{-1}) = \begin{pmatrix} a_n \alpha_n + c_n \gamma_n & b_n \alpha_n + d_n \gamma_n \\ \beta_n c_n & \beta_n d_n \end{pmatrix} \in H.$$

Согласно п. 3.1

$$\mathrm{Im}(a_n \alpha_n + c_n \gamma_n) \mathrm{Im}(\beta_n d_n) - \frac{|b_n \alpha_n + d_n \gamma_n - \overline{\beta_n c_n}|^2}{4} > 0. \quad (*)$$

Поскольку $Z_0^{(N)} \in H$, т.е. $U_0 Z_0^{(N)} U_0^{-1} \in H$, имеем $d_n \rightarrow d_0$, $\mathrm{Im} d_n \rightarrow \mathrm{Im} d_0 > 0$.

В силу (*) последовательность $|\gamma_n|$ должна быть ограниченной. Действительно, иначе (левая часть (*)) $/|\gamma_n|^2 \rightarrow -|d_0|^2$ при $|\gamma_n| \rightarrow +\infty$, поскольку $a_n, b_n, c_n, d_n, \alpha_n, \beta_n$ ограничены.

Значит, последовательность $U_n \tilde{Z}_n^{(j)} \bar{U}'_n$ (и, тем самым, $\tilde{Z}_n^{(j)}$) ограничена при всех $1 \leq j \leq N$.

Если $C_n Z_n \overline{C'_n}$ сходится к некоторой точке $Z_0 \in H_N$, то $\pi(W_n) = \pi(Z_n) = \pi(C_n Z_n \overline{C'_n}) \rightarrow \pi(Z_0) \in \pi(H_N)$, откуда $\pi(W_0) = \pi(Z_0)$. Согласно п. 2.7 $H'_N = \pi^{-1}(\pi(H'_N))$, так что $W_0 \in H'_N$. Противоречие.

Значит, $Z_0 \in \partial H_N$, т.е. $\det(\operatorname{Im} Z_0^{(j)}) = 0$ при некотором j (см. п. 3.3). Следовательно, $v(W_n) \rightarrow +\infty$.

Итак, мы построили плюрисубгармоническую (слабо) исчерпывающую функцию $\tilde{v}(Z)$ на расширенной трубе будущего. Тем самым гипотеза о расширенной трубе будущего доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Аналогичное рассуждение показывает, что $v(\xi)$ непрерывна и $\tilde{v}(\xi) = v(\xi)$ на $G_{\mathbb{C}} \cdot D$.

§ 5. Некоторые следствия гипотезы о расширенной трубе будущего

5.1. В 1958 г. Н. Н. Боголюбов и В. С. Владимиров установили 1-точечную теорему о “конечной ковариантности”. Эта теорема была обобщена Бросом, Эпштейном и Глезером, Боголюбовым и Владимировым на N -точечный случай в предположении справедливости гипотезы о расширенной трубе будущего (детали см. в [17]–[19]).

Доказав гипотезу о расширенной трубе будущего, мы наконец получаем полное доказательство N -точечной теоремы о “конечной ковариантности”.

5.2. Множество $J_N = \tau'_N \cap M^{4N}$, где M^4 есть пространство Минковского, называется *множеством точек Йоста*. Имеется эквивалентное описание точек Йоста, данное Йостом (см. [5], [20]). Старая теорема Глезера и Стритера (см. [5], [16]) гласит, что оболочка голоморфности области Дайсона $\tau_N^+ \cup \tau_N^- \cup J_N$ содержит τ'_N .

Объединяя этот факт с нашей теоремой о том, что τ'_N есть область голоморфности, мы получаем, что оболочка голоморфности области Дайсона $\tau_N^+ \cup \tau_N^- \cup J_N$ есть в точности τ'_N .

5.3. Определим

$$\mathfrak{S}_{N+1} := \{(z_0, z_1, \dots, z_N) \in \mathbb{C}^{4(N+1)} : ((z_1 - z_0), \dots, (z_N - z_{N-1})) \in \tau_N\}$$

и

$$\mathfrak{S}'_{N+1} := \{(z_0, z_1, \dots, z_N) \in \mathbb{C}^{4(N+1)} : ((z_1 - z_0), \dots, (z_N - z_{N-1})) \in \tau'_N\}.$$

Йост [5] пишет: очевидно, что $\mathfrak{S}_{N+1}$ – область голоморфности, и весьма вероятно, что это так и для $\mathfrak{S}'_{N+1}$ при $N > 2$.

Действительно, $\mathfrak{S}_{N+1} = F^{-1}(\tau_N)$ и $\mathfrak{S}'_{N+1} = F^{-1}(\tau'_N)$, где

$$F: \mathbb{C}^{4(N+1)} \rightarrow \mathbb{C}^{4N}, \quad (z_0, z_1, \dots, z_N) \mapsto ((z_1 - z_0), \dots, (z_N - z_{N-1})).$$

Поскольку, как мы доказали, τ'_N есть область голоморфности, и поскольку прообраз области голоморфности при голоморфном отображении есть снова область голоморфности, мы получаем, что $\mathfrak{S}'_{N+1}$ – область голоморфности.

Список литературы

1. *Grauert H., Remmert R.* Plurisubharmonische Funktionen in komplexen Räumen // *Math. Z.* 1956. V. 65. P. 175–194.
2. *Gunning R. C.* Introduction to holomorphic functions of several variables. V. 1–3. Pacific Grove, CA: Brooks/Cole Publishing Company, 1990.
3. *Heinzner P.* Geometric invariant theory on Stein spaces // *Math. Ann.* 1991. V. 289. № 4. P. 631–662.
4. *Хуа Ло-Кен.* Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях. М.: ИЛ, 1959.
5. *Йоси Р.* Общая теория квантованных полей. М.: Мир, 1967.
6. *Kiselman C. O.* The partial Legendre transformation for plurisubharmonic functions // *Invent. Math.* 1978. V. 49. P. 137–148.
7. *Lelong P.* Fonctions plurisousharmoniques et formes différentielles positives. Paris–London–New York: Gordon and Breach, 1968.
8. *Loeb J. J.* Action d’une forme réelle d’un groupe de Lie complexe sur les fonctions plurisousharmoniques // *Ann. Inst. Fourier.* 1985. V. 35. P. 59–97.
9. *Лю Цзыкен.* Классические многообразия и классические области. Шанхай: Научно-техническое изд-во, 1963 (на китайском языке).
10. *Luna D.* Slices étales // *Bull. Soc. Math. France.* 1973. V. 33. P. 81–105.
11. *Schwarz G. W.* Invariant differential operators // *Proc. ICM–94.* Basel: Birkhäuser, 1995. P. 333–341.
12. *Schwarz G. W.* Lifting differential operators from orbit spaces // *Ann. Sci. École Norm. Sup.* 1995. V. 28. P. 253–306.
13. *Сергеев А. Г., Хаймцнер П.* Расширенный матричный диск является областью голоморфности // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1991. Т. 55. №3. С. 647–657.
14. *Владимиров В. С., Сергеев А. Г.* Комплексный анализ в трубе будущего // *Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления.* Т. 8. М.: ВИНТИ, 1985. С. 191–266.
15. *Snow D. M.* Reductive group actions on Stein spaces // *Math. Ann.* 1982. V. 259. P. 79–97.
16. *Струтер Р. Ф., Вайтман А. С.* РСТ, спин и статистика и все такое. М.: Наука, 1966.
17. *Владимиров В. С.* Аналитические функции нескольких комплексных переменных и квантовая теория поля // *Тр. МИАН.* 1975. Т. 135. С. 68–80.
18. *Vladimirov V. S.* Several complex variables in mathematical physics: Sémin. Lelong–Skoda // *Lecture Notes in Math.* 1982. V. 919. P. 358–386.
19. *Владимиров В. С., Жаринов В. В.* Аналитические методы в математической физике // *Тр. МИАН.* 1986. Т. 175. С. 113–133.
20. *Wightman A. S.* Quantum field theory and analytic functions of several complex variables // *J. Indian Math. Soc.* 1960/1961. V. 24. P. 625–677.
21. *Трушин В. Б., Завьялов Б. И.* О расширенной n -точечной трубе // *ТМФ.* 1976. Т. 27. С. 3–15.
22. *Zhou X. Y.* On orbit connectedness, orbit convexity, and envelopes of holomorphy // *Изв. РАН. Сер. матем.* 1994. V. 58. № 2. P. 196–205.

Институт математики
Китайской академии наук,
Пекин, Китай.
E-mail: xyzhou@math08.math.ac.cn.

Поступило в редакцию
3.VII.1997