Общероссийский математический портал

А. В. Пухликов, Бирациональные автоморфизмы трехмерных алгебраических многообразий с пучком поверхностей дель Пеццо, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1998, том 62, выпуск 1, 123–164

DOI: <https://doi.org/10.4213/im188>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 11:01:52

УДК 513.6

А. В. Пухликов

**Бирациональные автоморфизмы
трехмерных алгебраических многообразий
с пучком поверхностей дель Пеццо**

В статье доказана гипотеза В. А. Исковских о единственности пучка рациональных поверхностей на гладких трехмерных проективных многообразиях V , расслоенных морфизмом $\pi: V \rightarrow \mathbb{P}^1$ на поверхности дель Пеццо степени 1, 2, 3, при условии, что класс 1-циклов $(MK_V^2 - f)$, где K_V – канонический класс, f – класс прямой в слое, не является эффективным ни для какого $M \in \mathbb{Z}$. Это условие выполнено, если V достаточно сильно “закручено” по базе расслоения. Отсюда следует отсутствие структуры расслоения на коники на таких многообразиях и, в частности, их нерациональность. Рассмотрены некоторые многомерные обобщения доказанной теоремы: аналогичные утверждения справедливы для многообразий с пучком многообразий Фано степени 2 произвольной размерности и четырехмерных многообразий с пучком трехмерных квартик общего положения, для которых также получены аналогичные результаты.

Библиография: 15 наименований.

Введение

Настоящая работа посвящена изучению бирациональных отображений трехмерных алгебраических многообразий, расслоенных на поверхности дель Пеццо степени 1, 2, 3 над рациональной кривой. Проблема рациональности для пучков поверхностей дель Пеццо является классической. Хорошо известно [7] (см. также [4]), что при степени общего слоя $d \geq 5$ он рационален как поверхность над незамкнутым полем $\mathbb{C}(\mathbb{P}^1)$, так что и само трехмерное многообразие в этом случае рационально. Если степень общего слоя равна четырем, получаем класс многообразий, изученных в [1] с точки зрения их рациональности методом промежуточного якобиана. Для общих пучков кубических поверхностей имеются результаты о нерациональности, полученные методом вырождения Клеменса [2], однако отсутствуют какие-либо точные результаты. Наконец о пучках поверхностей степени 1 или 2 до сих пор не было известно ничего.

В [4] В. А. Исковских сформулировал гипотезу о “бirationальной жесткости” пучков поверхностей дель Пеццо степени 1, 2, 3, достаточно сильно “закрученных” по базе. Как отмечено в [4], эта гипотеза является точным аналогом теоремы В. Г. Саркисова о расслоениях на коники [14], [15]: в обоих случаях утверждается

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 96-01-00820.

единственность структуры расслоения на соответственно одномерные и двумерные “многообразия Фано”. В. А. Исковских предположил, что эта гипотеза может быть доказана методом максимальных особенностей, восходящим к работам М. Нётера и Дж. Фано, впервые реализованным на строгом современном уровне в [5]. Следуя обычной схеме исключения и откручивания максимальных особенностей [3], В. А. Исковских в [4] сделал первые шаги в ее реализации: разобрал случай максимальной кривой и простейший вариант бесконечно близкой максимальной особенности первого порядка (кривой на исключительном дивизоре раздутия точки, лежащей на самом многообразии). Дальше продвинуться не удалось: как будет видно из приводимого ниже доказательства, в общем случае невозможно подобрать пробный класс, исключаяющий максимальную особенность по каноническому образцу трехмерной квартики [5]. В рассматриваемой ситуации приходится по отдельности оценивать особенности двух кривых: “вертикальной” и “горизонтальной” компонент 1-цикла пересечения двух общих дивизоров из гипотетического пучка рациональных поверхностей, отличного от исходного пучка поверхностей дель Пеццо. Провести необходимые оценки с помощью умножения на какой-либо один специально подобранный пробный класс невозможно.

Однако существо метода “пробного класса”, предложенного в [5], состоит в некотором специальном способе подсчета кратностей упомянутого выше 1-цикла, и сам по себе этот способ вполне успешно работает и для пучков поверхностей дель Пеццо. В таком виде техника метода изложена лишь в [11], поэтому для удобства читателя мы кратко воспроизводим все необходимые построения по ходу дела. Таким образом, наше изложение вполне замкнуто.

Статья построена следующим образом. В § 1 описаны многообразия, бирациональный тип которых будет изучаться, введены необходимые обозначения и установлены некоторые элементарные факты. В § 2 сформулирован основной результат – единственность пучка рациональных поверхностей на многообразиях из рассматриваемого класса. Затем начато его доказательство: обсуждается условие обрыва присоединения и установлено существование максимальной особенности. § 3 посвящен максимальным кривым. Здесь мы следуем работам Ю. И. Манина [7], [8] и В. А. Исковских [4]. § 4–7 – это основная часть доказательства. Она распадается на три этапа: сначала устанавливается существование “сверхмаксимальной” особенности, для которой справедливо усиление “усиленного неравенства Нётера–Фано” (по терминологии [5]). Затем, следуя [10], [11], свойства “сверхмаксимальной” особенности выражаются в терминах ее разрешения. Наконец мы показываем, что существование “сверхмаксимальной” особенности приводит к противоречию. Это завершает доказательство нашей теоремы. При этом § 5–7 посвящены исключительно пучкам кубических поверхностей, точнее, самому трудному случаю, когда “сверхмаксимальная” особенность стягивается в точку, лежащую на прямой в слое пучка. § 8, 9 посвящены некоторым обобщениям полученных результатов в случае большей размерности: рассматриваются многообразия с пучками многообразий Фано (степени 2 в § 8 и трехмерных квартик в § 9 соответственно).

Завершение доказательства гипотезы В. А. Исковских позволяет подвести предварительные итоги результатов, полученных методом максимальных особенностей за двадцать пять лет, начиная с пионерской работы В. А. Исковских и Ю. И. Ма-

нина [5], реализовавшей на строгом современном уровне идеи Дж. Фано. В “стабильных”, т.е. достаточно “закрученных” по базе, случаях дано полное описание бирационального типа расслоений на коники и пучков поверхностей дель Пеццо. Для некоторых многообразий Фано, в том числе – с особенностями, также получены аналогичные результаты (см. обзор [6]). В ближайшее время, возможно, будет завершена совместная работа М. Рида, А. Корти и автора, в которой доказывалась бирациональная жесткость взвешенных гиперповерхностей индекса 1 (95 семейств). Все это позволяет выразить надежду на то, что методом максимальных особенностей – при условии его дальнейшего развития – могут быть получены полная бирациональная классификация и описание групп бирациональных автоморфизмов многообразий отрицательной кодаировой размерности, по крайней мере – в размерности три.

Результаты настоящей работы были предварительно заявлены в [12], [13].

§ 1. Многообразие с пучком поверхностей дель Пеццо

Предметом нашего изучения, как и в [4], являются гладкие трехмерные проективные многообразия V над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ (вообще говоря, все наши построения проходят для произвольного алгебраически замкнутого поля любой характеристики), обладающие морфизмом $\pi: V \rightarrow \mathbb{P}^1$, каждый слой которого – неприводимая приведенная поверхность дель Пеццо, а общий слой F_η – гладкая поверхность дель Пеццо над незамкнутым полем $\mathbb{C}(\mathbb{P}^1)$ с группой Пикара $\text{Pic } F_\eta = \mathbb{Z}K_{F_\eta}$. В частности, $\text{Pic } V = \mathbb{Z}K_V \oplus \mathbb{Z}F$, где F – слой морфизма π . Число

$$d = (K_V^2 \cdot F)$$

– степень слоя – предполагается равным 1, 2 или 3.

При $d = 1, 2$ относительно обильный пучок $\mathcal{O}_V(-\frac{2}{d}K_V)$ порождается на каждом слое своими сечениями и определяет двойное накрытие

$$\sigma: V \rightarrow X,$$

где при $d = 2$ $X = \mathbb{P}(\mathcal{E})$, $\mathcal{E} = \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(a_1) \oplus \mathcal{O}(a_2)$ – локально свободный пучок ранга 3 на $\mathbb{P}^1$, $0 \leq a_1 \leq a_2$, совпадающий с точностью до подкручивания на обратимый пучок с $\pi_*\mathcal{O}_V(-K_V)$, а при $d = 1$ $X \subset \mathbb{P}(\mathcal{E})$, $\mathcal{E}$ – локально свободный пучок ранга 4 на $\mathbb{P}^1$, $\mathcal{E} \cong \pi_*\mathcal{O}_V(-2K_V)$. Проекцию любого из этих многообразий на $\mathbb{P}^1$ снова обозначаем символом π . При $d = 1$ слой X над $t \in \mathbb{P}^1$ вкладывается в $\mathbb{P}^3$ как квадратичный конус.

Рассмотрим подробнее (как и в [4]) более наглядный случай $d = 2$. Пусть G – слой морфизма $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}^1$; тогда $\text{Pic } X = \mathbb{Z}L \oplus \mathbb{Z}G$, где L – класс тавтологического пучка $\mathcal{O}_{X/\mathbb{P}^1}(1)$, т.е. $\pi_*\mathcal{O}_X(L) = \mathcal{E}$. Отметим, что пучок $\mathcal{O}_X(L)$ порожден своими сечениями, т.е. $|L|$ – свободная линейная система. Морфизм σ разветвлен над (гладким) дивизором $D \sim 4L + 2mG$. Канонический класс многообразия V есть, таким образом,

$$K_V = \sigma^*(-L + (m + a_1 + a_2 - 2)G).$$

При $d = 3$ относительно обильный пучок $\mathcal{O}_V(-K_V)$ порождается на каждом слое своими сечениями и определяет вложение

$$V \hookrightarrow X,$$

где $X = \mathbb{P}(\mathcal{E})$, $\mathcal{E} = \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(a_1) \oplus \mathcal{O}(a_2) \oplus \mathcal{O}(a_3)$ – локально свободный пучок ранга 4 на $\mathbb{P}^1$, $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3$, совпадающий с точностью до подкручивания на обратимый пучок с $\pi_* \mathcal{O}_V(-K_V)$; см. [4]. Проекцию X на $\mathbb{P}^1$ снова обозначаем символом π .

Пусть G – слой морфизма $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}^1$; тогда $\text{Pic } X = \mathbb{Z}L \oplus \mathbb{Z}G$, где L – класс тавтологического пучка $\mathcal{O}_{X/\mathbb{P}^1}(1)$, т.е. $\pi_* \mathcal{O}_X(L) = \mathcal{E}$. Отметим, что пучок $\mathcal{O}_X(L)$ порожден своими сечениями, т.е. $|L|$ – свободная линейная система. Класс многообразия V как дивизора на X есть $3L + mG$. Канонический класс многообразия V есть ограничение на V класса

$$-L + (m + a_1 + a_2 + a_3 - 2)G.$$

Вернемся к рассмотрению общего случая. Группа 1-циклов на V есть

$$A^2(V) = \mathbb{Z}s \oplus \mathbb{Z}f,$$

где s – класс сечения, f – класс прямой в слое:

$$(-K_V \cdot f) = (F \cdot s) = 1, \quad (F \cdot f) = 0.$$

В настоящей работе изучаются многообразия, удовлетворяющие следующему условию: класс 1-циклов $MK_V^2 - f$ не является эффективным ни для какого $M \in \mathbb{Z}$.

Сформулированное требование мы будем называть K^2 -условием.

Это условие выполнено, если V “достаточно сильно закручено” по базе $\mathbb{P}^1$. Оно заведомо выполнено, если справедливо неравенство

$$(K_V^2 \cdot L) \leq 0,$$

так как система $|L|$ свободна.

При $d = 2$ несложный подсчет приводит к неравенству

$$2m \geq 4 - a_1 - a_2.$$

В частности, если $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$, т.е. $a_1 = a_2 = 0$, то получаем условие $m \geq 2$, т.е. дивизор ветвления D морфизма σ задается уравнением

$$p_{4,2m}(x_0, x_1, x_2; u, v) = 0$$

бистепени $(4, 2m)$, $m \geq 2$.

При $d = 3$ получаем неравенство

$$5m \geq 12 - 3(a_1 + a_2 + a_3).$$

В частности, если $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$, т.е. $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, то получаем условие $m \geq 3$, т.е. V задается в X уравнением

$$p_{3,m}(x_0, x_1, x_2, x_3; u, v) = 0$$

бистепени $(3, m)$, $m \geq 3$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Наши условия “закрученности” многообразия V по базе $\mathbb{P}^1$ по существу совпадают с предположениями гипотезы В. А. Исковских [4], а для случая $a_i = 0$, т.е. $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ при $d = 2$ и $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3$ при $d = 3$, в точности с ними совпадают. Некоторое различие условий данной работы и условий [4] связано с тем упоминавшимся выше обстоятельством, что в [4] принята точка зрения “пробного класса”, которая и диктует требования к изучаемым многообразиям. Мы же используем более гибкую технику подсчета кратностей в форме [11] (см. ниже).

Кроме того, при $d = 3$ по чисто техническим соображениям мы будем предполагать, что выполнено следующее условие общности положения: если слой $\pi^{-1}(t) \subset V$ над точкой $t \in \mathbb{P}^1$ – особая кубическая поверхность, то на ней лежит ровно одна особая точка – невырожденная квадратичная особенность, через которую проходят ровно шесть различных прямых, лежащих на кубике $\pi^{-1}(t) = F_t$.

Доказываемая ниже теорема без сомнения верна и без этого предположения. Однако в общем случае требуется рассматривать большое количество различных конфигураций и приспосабливать к ним конструкции § 5–7. Эта работа не доведена автором до конца, поэтому мы ограничимся рассмотрением ситуации общего положения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Неприводимая кривая $C \subset V$ *горизонтальная*, если $\pi(C) = \mathbb{P}^1$, и *вертикальная*, если $\pi(C)$ – точка.

(ii) Эффективный 1-цикл $Z \in A_{\mathbb{Q}}^2(V)$ *горизонтальный* (соответственно *вертикальный*), если таковой является каждая его неприводимая компонента.

(iii) *Степень* горизонтального 1-цикла Z есть число $(F \cdot Z)$, вертикального – $(-K_V \cdot Z)$. Обозначение: $\deg Z$ (в обоих случаях).

Слой V над точкой $t \in \mathbb{P}^1$ будем обозначать символом F_t . Для точки $x \in V$ слой $F \ni x$ также будет обозначаться через F_x .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. Пусть $C \subset V$ – неприводимая кривая, $x \in C$ – точка на ней. Тогда:

(i) если C горизонтальна или $d = 2, 3$, то

$$\text{mult}_x C \leq \deg C;$$

(ii) если C вертикальна и $d = 1$, то

$$\text{mult}_x C \leq 2 \deg C.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если C горизонтальна, то пересечем ее со слоем F_t . Если C вертикальна, то воспользуемся тем, что при $d = 1, 2$ для $M \gg 0$ линейная система дивизоров

$$\left| -\frac{2}{d}K_V + MF \right|$$

свободна и задает конечный морфизм (накрытие σ). Поэтому можно выбрать в этой системе дивизор D , содержащий точку x , но не содержащий кривую C целиком. Аналогичным образом рассуждаем при $d = 3$. Предложение доказано.

Пусть теперь $d = 3$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Прямую $L \subset V$ (т.е. вертикальную кривую степени 1 – настоящую прямую в $\mathbb{P}^3$) назовем *неспециальной*, если $L \cap \text{Sing } F = \emptyset$, где $F \supset L$ – слой морфизма π , содержащий L , и *специальной* в противном случае. Иными словами, в специальном случае на прямой лежит двойная точка слоя.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. Пусть $L \subset V$ – специальная прямая, $F \supset L$ – содержащий ее слой, $\sigma: \tilde{V} \rightarrow V$ – раздутие L , $\tilde{F}$ – собственный прообраз поверхности F на $\tilde{V}$. Тогда $\tilde{F}$ – неособая поверхность, изоморфная раздутию F в единственной двойной точке.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: прямые локальные вычисления.

Дадим еще определение “индекса пересечения” двух кривых на многообразии произвольной размерности.

Пусть R – неособая проективная кривая на алгебраическом многообразии Y , $R \cap \text{Sing } Y = \emptyset$, и $C \subset Y$ – произвольная неприводимая кривая, $C \neq R$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Индекс пересечения $(C \cdot R)$ кривых C и R есть целое число, которое можно задать любым из двух эквивалентных способов:

- 1) $(C \cdot R) = \sum_{x \in C \cap R} \text{mult}_x C$, где суммирование распространено на все точки пересечения C и R , включая бесконечно близкие;
- 2) $(C \cdot R) = (\tilde{C} \cdot E)$, где $\sigma: \tilde{Y} \rightarrow Y$ – раздутие кривой R с исключительным дивизором $E \subset \tilde{Y}$, а $\tilde{C} \subset \tilde{Y}$ – собственный прообраз кривой C .

Для любого 1-цикла Z на Y , не содержащего кривую R компонентой, индекс пересечения $(Z \cdot R)$ определим по линейности. Если $S \subset Y$ – неособая проективная поверхность, содержащая R и носитель Z , то получаем обычный индекс пересечения $(Z \cdot R)$ на S .

Введем еще одно обозначение: кратность, с которой неприводимая кривая C входит в 1-цикл Z , обозначается через $\text{mult}_C Z$.

§ 2. Формулировка основного результата

Зафиксируем многообразие V , удовлетворяющее K^2 -условию. Пусть V' – неособое в коразмерности 1 трехмерное проективное многообразие, расслоенное на рациональные поверхности:

$$\pi: V' \rightarrow \mathbb{P}^1,$$

F' – слой этого пучка. Сформулируем основной результат работы.

ТЕОРЕМА 2.1. *Любое бирациональное отображение $\chi: V \dashrightarrow V'$ (если таковые существуют) является послойным относительно пучков π, π' , т.е.*

$$\chi^{-1}(|F'|) = |F|.$$

Иными словами, существует изоморфизм базы $\alpha: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ такой, что $\pi' \circ \chi = \alpha \circ \pi$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Утверждение теоремы верно, и его доказательство проходит без каких-либо изменений, если предполагать, что $|F'|$ – пучок поверхностей отрицательной кодаировой размерности. Однако нетрудно убедиться, что этот факт, формально более сильный, ничего нового для описания бирационального типа многообразия V не дает. Поэтому мы говорим, следуя традиции [4], о пучках рациональных поверхностей.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. (i) *V обладает единственным пучком рациональных поверхностей. В частности, V не рационально и не имеет структуры расслоения на коники.*

(ii) *Факторгруппа группы $\text{Bir } V$ бирациональных автоморфизмов многообразия V по нормальной подгруппе бирациональных автоморфизмов, сохраняющих слои π , изоморфной группе $\text{Bir } F_\eta$ бирациональных автоморфизмов общего слоя, конечна, в общем случае тривиальна.*

Теорема сформулирована В. А. Исковских в качестве гипотезы [4]. Следствия (i) и (ii) следуют из теоремы очевидным образом. Они также сформулированы в упомянутой работе В. А. Исковских.

НАЧАЛО ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ. Пусть $|\chi|$ – собственный прообраз пучка $|F'|$ на V . Существуют однозначно определенные числа $n = n(\chi) \in \mathbb{Z}_+$ и $l \in \mathbb{Z}$ такие, что

$$|\chi| \subset |-n(\chi)K_V + lF|.$$

Если $n(\chi) = 0$, то $l = 1$ и утверждение теоремы выполнено.

Начиная с этого момента, предполагаем, что $n(\chi) \geq 1$. Очевидно, это равносильно тому, что χ не является послойным. Ниже будет показано, что данное предположение приводит к противоречию.

Отметим, прежде всего, что $l \geq 0$. В самом деле, пучок $|\chi|$ не имеет неподвижных компонент. Пусть $D_1, D_2 \in |\chi|$ – общие дивизоры; тогда $Z = (D_1 \bullet D_2)$ есть эффективный 1-цикл, класс которого есть

$$n^2 K_V^2 + 2nl(-K_V \cdot F) = n^2 K_V^2 + 2nldf.$$

В силу сделанного предположения l не может быть отрицательным.

Сделаем одно очевидное замечание. Если $\chi^* \in \text{Bir } F_\eta \subset \text{Bir } V$ – бирациональный автоморфизм, сохраняющий слои π , то условия $n(\chi) \geq 1$ и $n(\chi \circ \chi^*) \geq 1$, где $\chi \circ \chi^*: V \dashrightarrow V'$ – композиция, эквивалентны.

УСЛОВИЕ ОБРЫВА ПРИСОЕДИНЕНИЯ. Мы пользуемся языком дискретных нормирований в форме [10], [11]. Центр нормирования $\nu \in \mathcal{N}(V)$ обозначается через $Z(V, \nu)$. Если $Z(V, \nu)$ – точка, то содержащий ее слой пучка $|F|$ – кубическая поверхность – обозначается через F_ν . Злоупотребляя обозначениями, мы иногда пишем T вместо ν , если $\nu = \nu_T$, T – простой дивизор Вейля на некоторой модели $\tilde{V}$ поля $\mathbb{C}(V)$, $T \not\subset \text{Sing } \tilde{V}$, реализующий дискретное нормирование ν .

Для нормирования $\nu \in \mathcal{N}(V)$ положим

$$e(\nu) = \nu(|\chi|) - n\delta(\nu),$$

где $\delta(\nu) = K(V, \nu)$ – каноническая кратность (дискрепантность) ν , $n = n(\chi)$. Особенности системы $|\chi|$ – это нормирования с $\nu(|\chi|) > 0$. Максимальная особенность – это дискретное нормирование с $e(\nu) > 0$.

В предположениях предыдущего параграфа имеет место следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Максимальная особенность существует. Более того, реализуется один из двух случаев:*

- (i) *существует максимальная особенность $\nu \in \mathcal{N}(V)$ такая, что ее центр $Z(V, \nu)$ – кривая на V ;*
- (ii) *существует конечное множество максимальных особенностей $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}(V)$, центры которых $Z(V, \nu) = x(\nu)$ – точки на V , причем выполнено неравенство*

$$\sum_{t \in \mathbb{P}^1} \left(\max_{\{\nu \in \mathcal{M} \mid x(\nu) \in F_t = F_\nu\}} \frac{e(\nu)}{\nu(F_t)} \right) > l.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует обычной схеме [3], [5], в инвариантном виде реализованной в [10], [11]. Пусть $\tilde{V}$ – замкнутый график отображения $\chi, \varphi: \tilde{V} \rightarrow V$ и $\psi: \tilde{V} \rightarrow V'$ – соответствующие проекции, бирациональные морфизмы. Существует неособое открытое подмножество $Q \subset V'$, $\text{codim } V' \setminus Q \geq 2$, на котором $\psi^{-1}: V' \dashrightarrow \tilde{V}$ регулярно. Поскольку ψ – морфизм, $\psi^{-1}: Q \rightarrow W$ – бирациональный изоморфизм, $W \subset \tilde{V}$ – открытое неособое подмножество. Из пустоты линейных систем

$$|aF' + bK_{V'}|$$

при $b \geq 1$ и любых $a \in \mathbb{Z}$ немедленно следует, что

$$|aF'_Q + bK_Q| = \emptyset$$

при $b \geq 1$, и поэтому

$$|a\psi^*F'_W + bK_W| = \emptyset$$

при $b \geq 1$. С другой стороны, имеем бирациональный морфизм $\varphi: W \rightarrow V$ гладкого квазипроективного многообразия W . Пусть $\mathcal{L}$ – множество простых дивизоров Вейля на W , теряющих размерность на V . Очевидно,

$$K_W = \varphi^*K_V + \sum_{T \in \mathcal{L}} \delta(T)T,$$

где $\delta(T) \geq 1$, и

$$|\psi^* F'_W| \subset \left| -n\varphi^* K_V + l\varphi^* F - \sum_{T \in \mathcal{L}} \nu_T T \right|,$$

где $\nu_T = \nu_T(|\chi|) \geq 0$. Следовательно, линейная система дивизоров на W

$$\left| l\varphi^* F - \sum_{T \in \mathcal{L}} (\nu_T(|\chi|) - n\delta(T))T \right|$$

пуста. Поскольку $l \geq 0$, получаем существование максимальной особенности.

Обозначим через $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}$ множество всех максимальных особенностей в $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{M} = \{T \in \mathcal{L} | \nu_T(|\chi|) > n\delta(T)\}.$$

Предположим теперь, что центр любого нормирования $\nu_T \in \mathcal{M}$ — точка на V , т.е. случай (i) не реализуется.

Имеем пустоту линейной системы дивизоров

$$\left| l\varphi^* F - \sum_{T \in \mathcal{M}} e(T)T \right|.$$

ЛЕММА 2.1. Для любого $t \in \mathbb{P}^1$ дивизор

$$\varphi^* F_t - \sum_{\{T \in \mathcal{M} | x(\nu_T) \in F_t\}} \nu_T(F_t)T$$

эффективен на W .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эффективный дивизор $\varphi^* F_t$ содержит компоненту T , где $x(\nu_T) \in F_t$, с кратностью $\nu_T(F_t)$, что и требовалось.

Из леммы вытекает, что для любого $t \in \mathbb{P}^1$ $\mathbb{Q}$ -дивизор

$$\max_t \left(\frac{e(T)}{\nu_T(F_t)} \right) \varphi^* F_t - \sum_t e(T)T$$

является эффективным, где нижний индекс t обозначает, что операция $\max$ или $\sum$ распространяется только на те нормирования ν_T , центр которых $x(\nu_T) \in F_t$. Отсюда немедленно следует неравенство части (ii) нашего предложения. Доказательство завершено.

Дальнейшая работа построена по такому плану. В следующем параграфе разобраны максимальные кривые (случай (i) предложения). Здесь мы (с незначительными изменениями) следуем работам [7], [8] и [4]. Основная часть доказательства содержится в §4–7, где будет показано, что случай (ii) предложения приводит к противоречию.

§3. Максимальные кривые

Легко видеть, что если ν – максимальная особенность, то ее центр $C = Z(V, \nu)$ удовлетворяет неравенству

$$\text{mult}_C |\chi| > n(\chi).$$

Если C – кривая, то, таким образом, уже нормирование ν_C – максимальная особенность.

СЛУЧАЙ 1: C – горизонтальная кривая, $d = 1$.

Если $d = 1$, то получаем противоречие: ограничим $|\chi|$ на слой общего положения F – гладкую поверхность дель Пеццо. Тогда

$$|\chi|_F \subset |-nK_F|$$

– линейная система кривых без неподвижных компонент с базисной точкой $x \in C \cap F$ кратности $\nu > n$. Но $(K_F \cdot K_F) = 1$, так что для пары общих кривых $Z_1, Z_2 \in |\chi|_F$ имеем

$$n^2 = (Z_1 \cdot Z_2)_F \geq (Z_1 \cdot Z_2)_x \geq \nu^2.$$

Противоречие.

СЛУЧАЙ 2: C – горизонтальная кривая, $d = 2$.

Если $d = 2$, то это же рассуждение показывает, что система $|\chi|_F$ может иметь не более одной базисной точки кратности $\nu > n$, так что C – сечение морфизма π .

ЛЕММА 3.1. *C не содержится в дивизоре ветвления двойного накрытия σ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Пусть $x \in C \cap F$, $\bar{x} = \sigma(x) \in \mathbb{P}^2$, $\sigma: F \rightarrow \mathbb{P}^2$ – двойное накрытие, разветвленное над гладкой плоской кватрикой $R \subset \mathbb{P}^2$. Пусть $\bar{L} = T_{\bar{x}}R \subset \mathbb{P}^2$ – касательная прямая, $L = \sigma^{-1}(\bar{L})$. Кривая L может быть приводимой. Для общей кривой $Z \in |\chi|_F$ имеем

$$2n = (L \cdot Z)_F \geq (L \cdot Z)_x \geq 2\nu,$$

так как x – особая точка L и $|\chi|_F$ не имеет неподвижных компонент. Противоречие.

Положим $\bar{C} = \sigma(C) \subset X$, $C^* \subset V$ – вычетная компонента распадающейся кривой $\sigma^{-1}(\bar{C})$. Обозначим через x^* точку $C^* \cap F$, через $\bar{p}: \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ проекцию из точки $\bar{x}$, через $p: F \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ – композицию $\bar{p} \circ \sigma|_F$. Очевидно, слои p образуют пучок эллиптических кривых $|p|$ на F с двумя простыми (кратности 1) базисными точками x и x^* . Пусть $R \in |p|$ – общая кривая. Определим бирациональный автоморфизм $\tau_x \in \text{Bir } F$ поверхности F , полагая на R

$$\tau_x|_R$$

– отражение от точки x^* , т.е.

$$z + \tau_x(z) \sim 2x^*$$

на гладкой эллиптической кривой R . Наконец, определим инволюцию $\tau_C \in \text{Bir } V$, полагая для общего слоя F

$$\tau_C|_F = \tau_x,$$

$x = C \cap F$. Таким образом, инволюция τ_C действует в слоях пучка $|F|$.

ЛЕММА 3.2. Пусть $\alpha: V^* \rightarrow V$ – раздутие кривой C , $E = \alpha^{-1}(C)$ – исключительный дивизор, $\text{Pic } V^* = \mathbb{Z}h \oplus \mathbb{Z}e \oplus \mathbb{Z}F$, $h = -K_V$. Бирациональная инволюция τ_C продолжается до бирегулярной инволюции инвариантного открытого множества $V^* \setminus Y$, $\text{codim } Y \geq 2$, и ее действие на $\text{Pic } V^* / \mathbb{Z}F \cong \mathbb{Z}\bar{h} \oplus \mathbb{Z}\bar{e}$ дается соотношениями

$$\tau_C^* \bar{h} = 3\bar{h} - 4\bar{e}, \quad \tau_C^* \bar{e} = 2\bar{h} - 3\bar{e}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На общем слое F^* морфизма $\pi \circ \alpha: V^* \rightarrow \mathbb{P}^1$ (т.е. F^* – раздутие F в точке $x = C \cap F$) τ_x продолжается до бирегулярной инволюции $\tau_x \in \text{Aut } F^*$, ибо x не лежит ни на одной из прямых на F . На конечном множестве “плохих” слоев – там, где точка $C \cap F$ лежит на прямой или является особой точкой слоя, – τ_C действует как бирациональная инволюция. Остальные утверждения леммы теперь очевидны или проверяются прямыми вычислениями.

ОТКРУЧИВАНИЕ МАКСИМАЛЬНОЙ КРИВОЙ. Рассмотрим композицию $\chi \circ \tau_C: V \dashrightarrow V'$.

ЛЕММА 3.3. Имеет место соотношение

$$n(\chi \circ \tau_C) = 3n(\chi) - 2\nu_C(\chi) < n(\chi),$$

причем кривая C уже не является максимальной для композиции $\chi \circ \tau_C$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, линейная система $|\chi \circ \tau_C|$ есть собственный прообраз $|\chi|$ относительно τ_C . Соответственно собственный прообраз линейной системы $|\chi \circ \tau_C|$ на V^* есть результат применения τ_C к собственному прообразу линейной системы $|\chi|$ на V^* . Поэтому

$$\begin{aligned} n(\chi \circ \tau_C)h - \nu_C(\chi \circ \tau_C)e &= \tau_C^*(n(\chi)h - \nu_C(\chi)e) = \\ &= (3n(\chi) - 2\nu_C(\chi))h + \dots, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

СЛУЧАЙ 3: C – горизонтальная кривая, $d = 3$.

Прежде всего, ограничивая линейную систему $|\chi|$ на общий слой F , получаем с помощью того же рассуждения, что и выше, что $\deg C \leq 2$.

Разберем сначала случай $\deg C = 1$, т.е. C – сечение морфизма π . Для общей точки $t \in \mathbb{P}^1$ общая прямая $L \subset \mathbb{P}^3 = G_t$, содержащая точку $C \cap F_t$, пересекает кубическую поверхность F_t еще в двух различных точках x, y . Положим

$$\tau_C(x) = y.$$

Очевидно, этим определена бирациональная инволюция $\tau_C \in \text{Bir } F_\eta \subset \text{Bir } V$. Пусть $\alpha: V^* \rightarrow V$ – раздутие кривой C , $E = \alpha^{-1}(C)$ – исключительный дивизор, $\text{Pic } V^* = \mathbb{Z}h \oplus \mathbb{Z}e \oplus \mathbb{Z}F$, $h = -K_V$.

ЛЕММА 3.4. *Бирациональная инволюция τ_C продолжается до бирегулярной инволюции инвариантного открытого множества $V^* \setminus Y$, $\text{codim } Y \geq 2$, и ее действие на $\text{Pic } V^* / \mathbb{Z}F \cong \mathbb{Z}\bar{h} \oplus \mathbb{Z}\bar{e}$ дается соотношениями*

$$\tau_C^* \bar{h} = 3\bar{h} - 4\bar{e}, \quad \tau_C^* \bar{e} = 2\bar{h} - 3\bar{e}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [8].

Теперь откроем кривую C , т.е. рассмотрим композицию $\chi \circ \tau_C: V \dashrightarrow V'$.

ЛЕММА 3.5. *Имеет место соотношение*

$$n(\chi \circ \tau_C) = 2n(\chi) - \nu_C(\chi) < n(\chi),$$

причем кривая C уже не является максимальной для композиции $\chi \circ \tau_C$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Линейная система $|\chi \circ \tau_C|$ есть собственный прообраз $|\chi|$ относительно τ_C . Соответственно собственный прообраз линейной системы $|\chi \circ \tau_C|$ на V^* есть результат применения τ_C к собственному прообразу линейной системы $|\chi|$ на V^* . Поэтому

$$\begin{aligned} n(\chi \circ \tau_C)h - \nu_C(\chi \circ \tau_C)e &= \tau_C^*(n(\chi)h - \nu_C(\chi)e) = \\ &= (2n(\chi) - \nu_C(\chi))h + \dots, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Теперь пусть $\deg C = 2$, т.е. C – бисечение морфизма π . Инволюцию τ_C определим ее действием на общем слое F следующим образом (см. [8]). Пусть $\{a, b\} = C \cap F$ и $q = L_{ab} \cap F$ – третья точка пересечения прямой в $\mathbb{P}^3$, соединяющей точки a и b , с кубической поверхностью F . Точки q заметают кривую $C^* \subset V$ – сечение морфизма π , т.е. $q = C^* \cap F$. Пучок плоскостей P в $\mathbb{P}^3$, содержащих прямую L_{ab} , порождает пучок эллиптических кривых $Q_P = P \cap F$ на поверхности F . Положим

$$\tau_C|_{Q_P}(x) = y,$$

где $x + y \sim 2q$ на Q_P , т.е. τ_C – отражение на эллиптической кривой Q_P от точки x . Этим инволюция $\tau_C \in \text{Bir } F_\eta \subset \text{Bir } V$ определена.

Пусть $\alpha: V^* \rightarrow V$ – раздутие кривой C , $E = \alpha^{-1}(C)$ – исключительный дивизор, $\text{Pic } V^* = \mathbb{Z}h \oplus \mathbb{Z}e \oplus \mathbb{Z}F$, $h = -K_V$.

ЛЕММА 3.6. *Бирациональная инволюция τ_C продолжается до бирегулярной инволюции инвариантного открытого множества $V^* \setminus Y$, $\text{codim } Y \geq 2$, и ее действие на $\text{Pic } V^* / \mathbb{Z}F \cong \mathbb{Z}\bar{h} \oplus \mathbb{Z}\bar{e}$ дается соотношениями*

$$\tau_C^* \bar{h} = 5\bar{h} - 6\bar{e}, \quad \tau_C^* \bar{e} = 4\bar{h} - 5\bar{e}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится непосредственными вычислениями.

Рассмотрим композицию $\chi \circ \tau_C: V \dashrightarrow V'$.

ЛЕММА 3.7. *Имеет место соотношение*

$$n(\chi \circ \tau_C) = 5n(\chi) - 4\nu_C(\chi) < n(\chi),$$

причем кривая C уже не является максимальной для композиции $\chi \circ \tau_C$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится непосредственными вычислениями, как и выше.

Проведенные вычисления – это хорошо известные построения двумерной бирациональной геометрии над незамкнутыми полями [8], переведенные на язык трехмерного многообразия, расслоенного над $\mathbb{P}^1$.

СЛУЧАЙ 4: C – вертикальная кривая, $d = 1, 2$.

Пусть F – слой, содержащий кривую C . Поскольку

$$\emptyset \neq |\chi|_F \subset |-nK_F - \nu_C C|,$$

где $\nu_C > n$, получаем сразу, что $d = 2$ и C – прямая на поверхности дель Пешо F . Заметим, прежде всего, что C не может содержать особых точек поверхности F . Действительно, в противном случае любая кривая вида $\sigma^{-1}(L)$, где $L \subset \mathbb{P}^2$ – прямая ($\sigma: F \rightarrow \mathbb{P}^2$ – двойное накрытие), проходящая через эту особенность, будет сама иметь особенность в этой точке и потому окажется базисной для $|\chi|$.

Следовательно, $C + C^* = \sigma^{-1}(L)$, где $L = \sigma(C) \subset \mathbb{P}^2$ – прямая, и F неособа вдоль C, C^* . Положим

$$\nu^* = \text{mult}_{C^*} |\chi|_F, \quad \nu = \text{mult}_C |\chi|_F \geq \nu_C,$$

так что выполнена пара неравенств

$$((nh_F - \nu_C - \nu^* c^*) \cdot c) \geq 0, \quad ((nh_F - \nu_C - \nu^* c^*) \cdot c^*) \geq 0,$$

откуда немедленно вытекает, что $\nu, \nu^* \leq n$.

СЛУЧАЙ 5: C – вертикальная кривая, $d = 3$.

Проще всего исключить этот случай с помощью техники [10]. Прежде всего, легко видеть, что $C \subset F \subset \mathbb{P}^3$ – прямая или коника. Далее, пусть $x \in \mathbb{P}^3$ – общая точка, $S(x)$ – конус над C с вершиной x ,

$$C \cup R(x) = F \cap S(x),$$

$R(x)$ – вычетная кривая. В [10] было показано, что $(C \cdot R(x)) = \deg R(x)$ (в смысле данного в § 1 определения индекса пересечения). Отсюда и из неравенства $\text{mult}_C |\chi| > n$ следует, что $R(x)$ – базисная кривая линейной системы $|\chi|$. Значит, F – неподвижная компонента пучка $|\chi|$. Противоречие.

Суммируя полученные результаты, получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Существует послойный бирациональный автоморфизм*

$$\chi^* = \tau_{C_1} \circ \dots \circ \tau_{C_k}$$

такой, что линейная система $|\chi \circ \chi^*|$ не имеет максимальных кривых на V .

В самом деле, каждое откручивание уменьшает степень $n(\chi)$, которая вместе с тем остается не меньшей, чем 1.

§ 4. Бесконечно близкие особенности

По доказанному выполнено условие части (ii) предложения 2.1.

1. Сверхмаксимальная особенность. Возьмем пару общих дивизоров $D_1, D_2 \in |\chi|$ и рассмотрим эффективный 1-цикл

$$Z = (D_1 \bullet D_2).$$

Имеем разложение на вертикальную и горизонтальную составляющие:

$$Z = Z^v + Z^h.$$

В свою очередь, для вертикального цикла Z^v имеем разложение

$$Z^v = \sum_{t \in \mathbb{P}^1} Z_t^v,$$

где носитель цикла Z_t^v содержится в слое F_t .

ЛЕММА 4.1. *Имеет место неравенство*

$$\sum_{t \in \mathbb{P}^1} \deg Z_t^v \leq 2nld.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Класс всего цикла Z есть

$$(-nK_V + lF)^2 = n^2(K_V)^2 + 2nldf.$$

В силу K^2 -условия и эффективности 1-цикла Z^h получаем, что класс цикла Z^v есть γf , где $\gamma \leq 2nld$, что и требовалось доказать.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. *Существует максимальная особенность $T \in \mathcal{M}$ такая, что*

$$2nde(T) > \nu_T(F_T) \deg Z_t^v,$$

где $x(\nu_T) \in \pi^{-1}(t)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Максимальную особенность, удовлетворяющую предыдущему неравенству, назовем *сверхмаксимальной*.

Для доказательства теоремы осталось привести факт существования сверхмаксимальной особенности к противоречию.

Начиная с этого момента, фиксируем сверхмаксимальную особенность T . Слой F_T , содержащий точку $x(\nu_T) = Z(V, \nu_T)$, обозначаем просто через F , 1-цикл Z_t^v , $t = \pi(F)$, записываем просто как Z^v . Пишем e вместо $e(T)$, ν вместо ν_T , δ вместо $\delta(T)$ (дискрепантность).

2. Разрешение сверхмаксимальной особенности. Мы лишь напомним основные факты и обозначения. Подробности см. в [10], [11], однако они без труда восстанавливаются и по любой другой работе, относящейся к методу максимальных особенностей, начиная с [3], [5]. Пусть

$$\begin{array}{ccc} \varphi_{i,i-1}: V_i & \longrightarrow & V_{i-1} \\ \cup & & \cup \\ E_i & \longrightarrow & B_{i-1} \end{array}$$

– разрешение ν (см. [10], [11]), т.е. $\varphi_{i,i-1}$ раздувает неприводимый цикл B_{i-1} – центр $Z(V_{i-1}, \nu)$ нормирования ν на V_{i-1} , $E_i = \varphi_{i,i-1}^{-1}(B_{i-1})$ – исключительный дивизор, $1 \leq i \leq K$, и тройка $(V_K, \varphi_{K,0}, E_K)$ реализует ν , т.е. $\nu_{E_K} = \nu$. Напомним, что $\varphi_{i,j}$ для $i > j$ обозначает композицию

$$\varphi_{j+1,j} \circ \cdots \circ \varphi_{i,i-1}: V_i \rightarrow V_j,$$

$\varphi_{i,i} = \text{id}_{V_i}$ и $V_0 = V$. На множестве индексов $\{1, \dots, K\}$ вводится естественная структура ориентированного графа: вершины i и j соединены ориентированным ребром (стрелкой), если $i > j$ и $B_{i-1} \subset E_j^{i-1}$ (добавление верхнего индекса означает, как обычно, операцию взятия собственного прообраза на V_{i-1}). Соответствующее обозначение: $i \rightarrow j$. Полагаем $p(i, j)$ = (число путей из i в j), если $i \neq j$, и $p(i, i) = 1$ иначе. Наконец, $p(K, i)$ обозначаем через p_i .

Поскольку $\varphi_{i,i-1}(B_i) = B_{i-1}$, размерности $\dim B_i$ не убывают, так что первые $L \leq K$ центров раздутий – точки, затем (при $i \geq L + 1$, если $L \neq K$) раздуваются кривые. Имеем следующие представления:

$$\begin{aligned} \delta &= 2 \sum_{i=1}^L p_i + \sum_{i=L+1}^K p_i, \\ \nu(|\chi|) &= \sum_{i=1}^K p_i \text{mult}_{B_{i-1}} |\chi|^{i-1}. \end{aligned}$$

Положим

$$\begin{aligned} N &= \max\{i | 1 \leq i \leq L, B_{i-1} \in F^{i-1}\}, \\ \mu_i &= \text{mult}_{B_{i-1}} F^{i-1} \end{aligned}$$

для $i = 1, \dots, N$.

В терминах этих кратностей получаем оценку

$$\nu(F) \geq \sum_{i=1}^N \mu_i p_i.$$

Для удобства записи вычислений положим

$$\Sigma_0 = \sum_{i=1}^L p_i, \quad \Sigma_1 = \sum_{i=L+1}^K p_i.$$

Наконец, положим для $i = 1, \dots, L$

$$\begin{aligned} m_i^h &= \text{mult}_{B_{i-1}}(Z^h)^{i-1}, & m_i^v &= \text{mult}_{B_{i-1}}(Z^v)^{i-1}, \\ m_i &= \text{mult}_{B_{i-1}} Z^{i-1} = m_i^h + m_i^v. \end{aligned}$$

Отметим сразу, что, поскольку носитель 1-цикла Z^v содержится в F , все числа m_i^v обращаются в нуль при $L \geq i \geq N+1$.

3. Техника подсчета кратностей. Здесь мы, следуя [11], кратко воспроизводим технику подсчета кратностей – наиболее существенную часть метода, представляющую собой обобщение техники пробного класса В. А. Исковских и Ю. И. Манина [5]. На протяжении данного параграфа мы работаем в совершенно общей ситуации. Обозначения настоящего параграфа совершенно независимы от используемых в остальной части работы.

Пусть X – произвольное квазипроективное многообразие. Пусть $B \subset X$, $B \not\subset \text{Sing } X$ – неприводимый цикл коразмерности ≥ 2 , $\sigma_B: X(B) \rightarrow X$ – его раздутие, $E(B) = \sigma_B^{-1}(B)$ – исключительный дивизор. Пусть

$$Z = \sum m_i Z_i, \quad Z_i \subset E(B)$$

– k -цикл, $k \geq \dim B$. Определим *степень* Z равенством

$$\deg Z = \sum_i m_i \deg(Z_i \cap \sigma_B^{-1}(b)),$$

где $b \in B$ – точка общего положения, $\sigma_B^{-1}(b) \cong \mathbb{P}^{\text{codim } B-1}$ и степень справа есть обычная степень в проективном пространстве.

Отметим, что $\deg Z_i = 0$ тогда и только тогда, когда $\sigma_B(Z_i)$ есть собственное замкнутое подмножество B .

Наши последующие вычисления основаны на приводимом ниже утверждении.

Пусть D и Q – различные простые дивизоры Вейля на X , D^B и Q^B – их собственные прообразы на $X(B)$.

ЛЕММА 4.2. (i) *Предположим, что $\text{codim } B \geq 3$. Тогда*

$$D^B \bullet Q^B = (D \bullet Q)^B + Z,$$

где $\bullet$ обозначает эффективный алгебраический цикл теоретико-схемного пересечения, $\text{Supp } Z \subset E(B)$, и

$$\text{mult}_B(D \bullet Q) = (\text{mult}_B D)(\text{mult}_B Q) + \deg Z.$$

(ii) *Предположим, что $\text{codim } B = 2$. Тогда*

$$D^B \bullet Q^B = Z + Z_1,$$

где $\text{Supp } Z \subset E(B)$, $\text{Supp } \sigma_B(Z_1)$ не содержит B , и

$$D \bullet Q = [(\text{mult}_B D)(\text{mult}_B Q) + \deg Z] B + (\sigma_B)_* Z_1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $b \in B$ – точка общего положения, $S \ni b$ – росток неособой поверхности в общем положении с B , S^B – его собственный прообраз на $X(B)$. Получаем элементарную двумерную задачу: подсчитать индекс пересечения двух различных неприводимых кривых в гладкой точке на поверхности в терминах раздутия этой точки. Это уже тривиально. Лемма доказана.

Пусть $\nu \in \mathcal{N}(X)$ – геометрическое дискретное нормирование, $|\lambda|$ – линейная система дивизоров без неподвижных компонент. Необходимо получить оценку для кратности пересечения двух общих дивизоров из $|\lambda|$ вдоль центра нормирования ν на X .

Разделим разрешение $\varphi_{i,i-1}: X_i \rightarrow X_{i-1}$ на *нижнюю часть*, соответствующую индексам $i = 1, \dots, L \leq K$, для которых $\text{codim } B_{i-1} \geq 3$, и *верхнюю часть*, $i = L+1, \dots, K$, когда $\text{codim } B_{i-1} = 2$. Может случиться, что $L = K$ и верхняя часть пуста.

Пусть $D_1, D_2 \in |\lambda|$ – два различных общих дивизора. Определим последовательность циклов коразмерности 2 на многообразиях X_i , полагая

$$\begin{aligned} D_1 \bullet D_2 &= Z_0, \\ D_1^1 \bullet D_2^2 &= Z_0^1 + Z_1, \\ &\dots\dots\dots, \\ D_1^i \bullet D_2^i &= (D_1^{i-1} \bullet D_2^{i-1})^i + Z_i, \\ &\dots\dots\dots, \end{aligned}$$

где $Z_i \subset E_i$. Таким образом, для любого $i \leq L$ получаем

$$D_1^i \bullet D_2^i = Z_0^i + Z_1^i + \dots + Z_{i-1}^i + Z_i.$$

Для любых $j > i, j \leq L$ положим

$$m_{i,j} = \text{mult}_{B_{j-1}}(Z_i^{j-1})$$

(кратность неприводимого цикла вдоль меньшего цикла понимается в обычном смысле; для произвольного цикла мы продолжаем кратность по линейности).

Положим $d_i = \deg Z_i$.

Получаем следующую систему равенств:

$$\begin{aligned} \nu_1^2 + d_1 &= m_{0,1}, \\ \nu_2^2 + d_2 &= m_{0,2} + m_{1,2}, \\ &\dots\dots\dots, \\ \nu_i^2 + d_i &= m_{0,i} + \dots + m_{i,i-1}, \\ &\dots\dots\dots, \\ \nu_L^2 + d_L &= m_{0,L} + \dots + m_{L-1,L}. \end{aligned}$$

Теперь

$$d_L \geq \sum_{i=L+1}^K \nu_i^2 \deg(\varphi_{i-1,L})_* B_{i-1} \geq \sum_{i=L+1}^K \nu_i^2.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функцию $a: \{1, \dots, L\} \rightarrow \mathbb{R}_+$ назовем *согласованной со структурой ориентированного графа*, если

$$a(i) \geq \sum_{j \rightarrow i} a(j)$$

для любого $i = 1, \dots, L$.

Примеры: $a(i) = p_{Li}$, $a(i) = p_{Ki}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Пусть $a(\cdot)$ согласована со структурой ориентированного графа. Тогда

$$\sum_{i=1}^L a(i) m_{0,i} \geq \sum_{i=1}^L a(i) \nu_i^2 + a(L) \sum_{i=L+1}^K \nu_i^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножим i -е равенство приведенной выше системы на $a(i)$ и сложим все вместе. Справа для любого $i \geq 1$ получим выражение

$$\sum_{j \geq i+1} a(j) m_{i,j}.$$

Слева для любого $i \geq 1$ получим слагаемое $a(i) d_i$.

ЛЕММА 4.3. Если $m_{i,j} > 0$, то $i \rightarrow j$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $m_{i,j} > 0$, то некоторая компонента Z_i^{j-1} содержит B_{j-1} . Но $Z_i^{j-1} \subset E_i^{j-1}$. Лемма доказана.

Кроме того, можно сравнить кратности m_{ij} с соответствующими степенями.

ЛЕММА 4.4. Для любых $i \geq 1, j \leq L$ имеем

$$m_{i,j} \leq d_i.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Циклы B_a неособы в общей точке. Но поскольку $\varphi_{a,b}: B_a \rightarrow B_b$ сюръективно, можно считать кратности в точках общего положения. Поскольку кратности не возрастают при раздутии неособого цикла, все сводится к очевидному случаю гиперповерхности в проективном пространстве. Лемма доказана.

В итоге мы получаем следующую оценку:

$$\sum_{j \geq i+1} a(j) m_{i,j} = \sum_{\substack{j \geq i+1 \\ m_{i,j} \neq 0}} a(j) m_{i,j} \leq d_i \sum_{j \rightarrow i} a(j) \leq a(i) d_i.$$

Поэтому мы можем выбросить все $m_{i,*}$, $i \geq 1$, справа и все d_i , $i \geq 1$, слева, заменяя $=$ на $\leq$. Предложение доказано.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. *Имеет место следующее неравенство:*

$$\sum_{i=1}^L a(i)m_{0,i} \geq \sum_{i=1}^K a(i)\nu_i^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, $a(i) \leq a(L)$ при $i \geq L+1$.

СЛЕДСТВИЕ 4.3. *Имеет место следующее неравенство:*

$$\sum_{i=1}^L p_{Ki}m_{0,i} \geq \frac{\nu(|\chi|)^2}{\sum_{i=1}^K p_{Ki}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно проверить, что минимум правой части неравенства следствия 4.2 при ограничении

$$\sum_{i=1}^K p_{Ki}\nu_i = \nu(|\chi|)$$

достигается при

$$\nu_1 = \dots = \nu_K = \frac{\nu(|\chi|)}{\sum_{i=1}^K p_{Ki}}.$$

4. Завершение доказательства при $d = 1, 2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. *Имеет место неравенство*

$$\sum_{i=1}^L p_i m_i \geq \frac{(2\Sigma_0 n + \Sigma_1 n + e)^2}{\Sigma_0 + \Sigma_1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это получается элементарными вычислениями из неравенства предложения 4.1 с учетом определения числа e .

Перепишем это неравенство в развернутом виде:

$$(\Sigma_0 + \Sigma_1) \left(\sum_{i=1}^L p_i m_i^h + \sum_{i=1}^N p_i m_i^v \right) \geq (2\Sigma_0 + \Sigma_1)^2 n^2 + 2(2\Sigma_0 + \Sigma_1) n e + e^2.$$

Поскольку кратности $m_i^{h,v}$ не возрастают как функции индекса i , наше неравенство не ухудшится, если мы заменим их на $m_1^{h,v}$ соответственно.

Пусть теперь d равно 1 или 2. Согласно доказанному в § 1 имеем оценки

$$m_1^h \leq \deg Z^h = d n^2, \quad m_1^v \leq \frac{2}{d} \deg Z^v < \frac{4ne}{\nu(F)},$$

поскольку T – сверхмаксимальная особенность. Наконец, в силу выписанной выше оценки числа $\nu(F)$ имеем

$$\sum_{i=1}^N p_i m_i^v < \frac{4ne}{\nu(F)} \sum_{i=1}^N p_i \leq 4ne.$$

Комбинируя все эти оценки, получаем в итоге следующее строгое неравенство:

$$(2\Sigma_0^2 + 2\Sigma_0\Sigma_1 + \Sigma_1^2)n^2 - 2\Sigma_1ne + e^2 < 0,$$

что, очевидно, невозможно. Мы получили противоречие.

Теорема для пучков поверхностей дель Пеццо степени 1, 2 полностью доказана.

Начиная с этого момента, считаем, что $d = 3$.

Следующие три параграфа настоящей работы посвящены завершению доказательства теоремы для пучков кубических поверхностей.

§ 5. Существование прямой

1. Сверхмаксимальная особенность. Как и выше, символами $D, D_i \in |\chi|$ мы обозначаем общие дивизоры нашей линейной системы. Рассмотрим эффективный 1-цикл

$$Z = (D_1 \bullet D_2).$$

Имеем разложение на вертикальную и горизонтальную составляющие:

$$Z = Z^v + Z^h,$$

а для вертикального цикла Z^v имеем разложение

$$Z^v = \sum_{t \in \mathbb{P}^1} Z_t^v,$$

где носитель цикла Z_t^v содержится в слое F_t .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. *Существует максимальная особенность $\nu = \nu_T \in \mathcal{M}$ такая, что $x = x(\nu_T) = Z(V, \nu)$ – точка в слое $F = F_t$, лежащая на прямой $L \subset F$. Более того, если*

$$Z_t^v = C + kL,$$

где эффективный 1-цикл $C \subset F$ не содержит прямую L , то

$$(C \cdot L) < \frac{4ne}{\nu_T(F)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выше было показано, что если у линейной системы $|\chi|$ нет максимальных кривых, то она обладает сверхмаксимальной особенностью $\nu = \nu_T \in \mathcal{M}$, удовлетворяющей неравенству

$$\deg Z_t^v < \frac{2dne(T)}{\nu(F_t)},$$

где $x(\nu) \in F_t$ и d – степень общего слоя, поверхности дель Пеццо F_η . В нашем случае $d = 3$. Покажем, что сверхмаксимальная особенность ν удовлетворяет требованиям предложения.

Напомним, что мы пишем x вместо $x(\nu_T)$, e вместо $e(T)$, F вместо F_t , Z^v вместо Z_t^v .

ЛЕММА 5.1. *Имеет место неравенство*

$$\text{mult}_x Z^v \geq \frac{4ne}{\nu_T(F)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В противном случае дословное повторение рассуждений § 4 приводит к противоречию: единственный факт, на котором они были основаны, – это неравенство

$$\text{mult}_x Z^v < \frac{4ne}{\nu_T(F)}.$$

Если оно выполняется, то сверхмаксимальная особенность не может существовать. Лемма доказана.

2. Существование прямой.

ЛЕММА 5.2. *Через точку $x \in F$ проходит хотя бы одна прямая $L \subset F \subset \mathbb{P}^3$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Тогда точка x – неособая на кубической поверхности $F \subset \mathbb{P}^3$. Более того, кривая $R = T_x F \cap F$ неприводима, имеет степень 3 и кратность точно 2 в точке x . Если $C \subset F$ – любая другая кривая, то

$$\deg C = (C \cdot R) \geq (C \cdot R)_x \geq 2 \text{mult}_x C.$$

Итак, для любой кривой $Q \subset F$ имеем

$$\text{mult}_x Q \leq \frac{2}{3} \deg Q.$$

Следовательно,

$$\text{mult}_x Z^v \leq \frac{2}{3} \deg Z^v < \frac{4ne}{\nu(F)}.$$

Противоречие.

Пусть $x \in F$ – неособая точка. Через x могут проходить k прямых, лежащих на F , $1 \leq k \leq 3$. Если $\text{mult}_x(F \cap T_x F) = 2$, то $k \leq 2$ и для любой кривой $C \subset F$, отличной от этих k прямых, имеем неравенство

$$2 \text{mult}_x C \leq \deg C.$$

Если $\text{mult}_x(F \cap T_x F) = 3$, то это неравенство усиливается:

$$3 \text{mult}_x C \leq \deg C.$$

3. Случай единственной прямой. Предположим, что через точку x проходит ровно одна прямая, лежащая на F . В этом случае точка x неособа на F и $T_x F \cap F = L + Q$, где $Q \subset F$ – неособая коника. Рассуждения, приведенные выше, показывают, что для любой кривой $C \subset F$, $C \neq L$, имеет место неравенство

$$\text{mult}_x C \leq \frac{1}{2} \deg C.$$

Если записать $Z^v = C + kL$, где C – эффективный 1-цикл, не содержащий L , то

$$k + \frac{1}{2} \deg C \geq \frac{4ne}{\nu(F)},$$

$$k + \deg C < \frac{6ne}{\nu(F)}.$$

Отсюда следует, что

$$\deg C < \frac{4ne}{\nu(F)}.$$

Поскольку $(C \cdot L) \leq \deg C$, предложение 5.1 в этом случае доказано.

4. Случай двух прямых. Предположим, что через точку x проходят ровно две прямые L_1 и L_2 , лежащие на F . В этом случае x неособа на F и $T_x F \cap F = L_1 + L_2 + L_3$, где L_3 – прямая, отличная от L_1, L_2 , $x \notin L_3$. Отметим, что одна из точек $L_i \cap L_3$, $i = 1, 2$, может быть особой на F . Предположим сначала, что это не так. Распишем $Z^v = Q + k_1 L_1 + k_2 L_2 + k_3 L_3$ и положим $d = \deg Q$, $d_i = (Q \cdot L_i)$, $m = \text{mult}_x Q$. Имеем набор из четырех неравенств:

$$2m \leq d,$$

$$k_1 + k_2 + k_3 + d < \frac{6ne}{\nu(F)},$$

$$d_1 + d_2 + d_3 = d,$$

$$k_1 + k_2 + m \geq \frac{4ne}{\nu(F)}.$$

Легко видеть, что найдется $i \in \{1, 2\}$ такое, что для $\{j\} = \{1, 2\} \setminus \{i\}$

$$k_j + k_3 + d_i < \frac{4ne}{\nu(F)}.$$

В самом деле, в противном случае для любого $i \in \{1, 2\}$ верно противоположное неравенство. Сложим их и прибавим четвертое неравенство. Получим

$$2(k_1 + k_2 + k_3) + m + d_1 + d_2 \geq \frac{12ne}{\nu(F)}.$$

Это противоречит второму неравенству. Итак, для определенности считаем, что $\nu(F)(k_2 + k_3 + d_1) < 4ne$. Полагая $L = L_1$, $C = Q + k_2 L_2 + k_3 L_3$, получаем в точности утверждение нашего предложения.

Если, наконец, точка $L_1 \cap L_3$ особая на F , то вместо равенства $d_1 + d_2 + d_3 = d$ следует использовать неравенство $d_1 + d_2 \leq d$, где $d_1 = (Q \cdot L_1)$ понимается в смысле § 1 настоящей работы. Фактически наши рассуждения основаны именно на этом неравенстве.

5. Случай трех прямых. Пусть через точку x проходят ровно три прямые L_i , $i = 1, 2, 3$, лежащие на F . Снова x неособа на F и $T_x F \cap F = L_1 + L_2 + L_3$. Распишем 1-цикл $Z^v = Q + k_1 L_1 + k_2 L_2 + k_3 L_3$ и положим $d = \deg Q$, $d_i = (Q \cdot L_i)$, $m = \text{mult}_x Q$. Снова имеем набор неравенств:

$$\begin{aligned} 3m &\leq d, \\ k_1 + k_2 + k_3 + d &< \frac{6ne}{\nu(F)}, \\ d_1 + d_2 + d_3 &= d, \\ k_1 + k_2 + k_3 + m &\geq \frac{4ne}{\nu(F)}. \end{aligned}$$

Такой же элементарной арифметикой, как и выше, получаем, что для некоторого $i \in \{1, 2, 3\}$ и $\{j, l\} = \{1, 2, 3\} \setminus \{i\}$ выполнено неравенство

$$k_j + k_l + d_i < \frac{4ne}{\nu(F)}.$$

Полагая $L = L_i$, $C = k_j L_j + k_l L_l + Q$, получаем то, что нужно.

6. Случай шести прямых. В этом случае $x \in F$ – двойная точка (невырожденная простейшая особенность). Здесь ссылки на лемму 5.1 недостаточно. Необходимо в деталях проследить, как работает техника подсчета кратностей.

Напомним основные обозначения:

$$\begin{array}{ccc} \varphi_{i,i-1}: V_i & \longrightarrow & V_{i-1} \\ \cup & & \cup \\ E_i & \longrightarrow & B_{i-1} \end{array}$$

– разрешение ν , т.е. $\varphi_{i,i-1}$ раздувает неприводимый цикл B_{i-1} – центр $Z(V_{i-1}, \nu)$ нормирования ν на V_{i-1} , $E_i = \varphi_{i,i-1}^{-1}(B_{i-1})$ – исключительный дивизор, $1 \leq i \leq K$, $\nu_{E_K} = \nu$. Первые $L \leq K$ центров раздутий – точки, затем раздуваются накрывающие друг друга кривые. На множестве индексов $\{1, \dots, K\}$ вводится естественная структура ориентированного графа, $p(i, j)$ обозначает число путей из i в j , если $i \neq j$, $p(i, i) = 1$. Из шести прямых $L_i \ni x$ выделим одну (пусть это будет L_1) такую, что

$$B_1 \notin L_i^1$$

при $i \neq 1$, если B_1 – точка. Такая прямая заведомо существует. Теперь распишем

$$Z^v = kL_1 + R + Q,$$

где R состоит из кратных прямых L_i , $i \neq 1$, а 1-цикл Q прямых, проходящих через x , не содержит. Определим целые числа M и N условиями

$$\begin{aligned} B_{i-1} &\in L_1^{i-1}, & i = 1, \dots, M, \\ B_{i-1} &\in F^{i-1}, & i = 1, \dots, N, \end{aligned}$$

$M \leq N \leq L$, и положим

$$q_i = \text{mult}_{B_{i-1}} Q^{i-1}$$

при $i = 1, \dots, N$. Очевидно, $q_1 \geq q_2 \geq \dots$ и

$$d = \deg Q \geq q_1 + q_2 + \dots + q_N$$

(поскольку Q не содержит прямую L_1 компонентой). Теперь если выполнено неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^M p_i \right) k + p_1 \deg R + \sum_{i=1}^N p_i q_i < 4ne,$$

то мы немедленно получаем противоречие с помощью техники подсчета кратностей, дословно повторяя рассуждения § 4. Стало быть, выполнено противоположное неравенство. Поскольку $2q_2 \leq d$, тем более выполнено неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^M p_i \right) k + \frac{1}{2} \left(2p_1 + \sum_{i=2}^N p_i \right) (\deg R + \deg Q) \geq 4ne.$$

Сравнивая его с неравенством

$$\left(2p_1 + \sum_{i=2}^N p_i \right) (k + \deg R + \deg Q) < 6ne,$$

выполненным в силу определения сверхмаксимальной особенности, получаем оценку

$$k > \frac{2ne}{\nu(F)}.$$

Полагая $C = R + Q$, завершаем доказательство предложения.

Отметим, что более тонкие рассуждения (использующие лишь свойства чисел p_j) позволяют усилить в последнем случае оценку числа $(C \cdot L)$, однако для доказательства нашего основного результата достаточно неравенства из формулировки предложения 5.1.

§ 6. Основная конструкция

1. Описание основной конструкции. Бесконечную последовательность раздутий

$$\begin{array}{ccc} \sigma_i: V^{(i)} & \longrightarrow & V^{(i-1)} \\ \cup & & \cup \\ E^{(i)} & \longrightarrow & L_{i-1} \end{array}$$

$i \geq 1$, начинающуюся с $V^{(0)} = V$, где L_{i-1} – центр i -го раздутия, а $E^{(i)} = \sigma_i^{-1}(L_{i-1})$ – исключительный дивизор, $L_0 = L$, назовем *лестницей*, ассоциированной с прямой L , если выполнены следующие условия:

L_i – кривая для всех $i \in \mathbb{Z}_+$, $E^{(i)}$ – линейчатая поверхность типа $\mathbb{F}_1$ над L_{i-1} и $L_i \subset E^{(i)}$ – исключительное сечение (т.е. (-1) -кривая).

Очевидно, что этим описанием лестница определяется однозначно. Чуть ниже будет показано, что она существует. Ее начальный отрезок, состоящий из раздутий σ_i для $1 \leq i \leq M$, будем называть (конечной) *лестницей длины M* .

Доказательство существования лестницы удобно провести одновременно с доказательством ее некоторых свойств.

Для удобства обозначений пусть $E^{(0)} = F$ – слой морфизма π , содержащий прямую L . Операцию взятия собственного прообраза на i -й ступеньке (т.е. на $V^{(i)}$) обозначаем добавлением верхнего индекса i в скобках. Например, собственный прообраз поверхности $E^{(i)}$ на $V^{(j)}$ при $j \geq i$ записывается как $E^{(i,j)}$. Положим также:

s_i – класс L_i в $A^2(V^{(i)})$, $s_0 = f$;

$f_i \in A^2(V^{(i)})$ – класс слоя линейчатой поверхности $E^{(i)}$ над точкой L , принадлежащей L_{i-1} .

Злоупотребляя обозначениями, мы будем понимать иногда s_i и f_i как численные классы кривых на линейчатой поверхности $E^{(i)}$:

$$A^1 E^{(i)} = \text{Pic } E^{(i)} = \mathbb{Z}s_i \oplus \mathbb{Z}f_i,$$

так что, в частности, осмысленны записи вида

$$(s_i \cdot s_i) = -1, \quad (s_i \cdot f_i) = 1$$

и т.д.

В этих обозначениях имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. (i) При $i \geq 2$ эффективный 1-цикл $(E^{(i-1,i)} \bullet E^{(i)})$ есть просто неприводимая кривая $E^{(i-1,i)} \cap E^{(i)}$, численный класс которой есть $(s_i + f_i)$. В частности, эта кривая не пересекается с $L_i \sim s_i$. Если прямая L неспециальна, то это утверждение выполнено и при $i = 1$. Если же L специальна, то 1-цикл $(F^{(1)} \bullet E^{(1)})$ есть приводимая кривая – сумма исключительного сечения L_1 и слоя над особой точкой поверхности F .

(ii) Имеют место равенства

$$(E^{(i)})^3 = 1, \quad (E^{(i)} \cdot L_i) = 0.$$

С учетом изоморфизма $L_i \cong \mathbb{P}^1$

$$\mathcal{N}_{L_i/V^{(i)}} \cong \mathcal{O}_{L_i} \oplus \mathcal{O}_{L_i}(-1).$$

Если однозначно определенная первая компонента в этом представлении соответствует исключительному сечению $L_{i+1} \subset E^{(i+1)} = \mathbb{P}(\mathcal{N}_{L_i/V^{(i)}})$, то в качестве второй компоненты можно взять одномерное подрасслоение, соответствующее как раз кривой $E^{(i,i+1)} \cap E^{(i+1)}$.

(iii) Классы s_i и f_i удовлетворяют соотношениям

$$\sigma^* s_{i-1} = s_i, \quad \sigma_* f_i = 0$$

при $i \geq 1$.

2. Доказательство в неспециальном случае. В предположении, что $L \cap \text{Sing } F = \emptyset$, дадим одновременное доказательство существования лестницы и предложения 6.1.

Рассмотрим первый шаг лестницы – морфизм

$$\sigma_1: V^{(1)} \rightarrow V^{(0)} = V,$$

раздувающий прямую $L_0 = L \subset F$. Имеем точную последовательность

$$0 \rightarrow \mathcal{N}_{L/F} \rightarrow \mathcal{N}_{L/V} \rightarrow \mathcal{O}_V(F)|_L \rightarrow 0,$$

которая может быть переписана в виде

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_L(-1) \rightarrow \mathcal{N}_{L/V} \rightarrow \mathcal{O}_L \rightarrow 0.$$

Следовательно, $E^{(1)}$ – линейчатая поверхность типа $\mathbb{F}_1$, $(E^{(1)})^3 = 1$, откуда $(E^{(1)} \cdot E^{(1)}) \sim (-s_1 - f_1)$ и $(E^{(0,1)} \cdot L_1) = ((F - E^{(1)}) \cdot s_1) = 0$. Тем самым все требования определения лестницы (i)–(iii) для первого раздутия выполнены.

Далее доказательство проводится индукцией по $i \geq 1$. Имеем точную последовательность

$$0 \rightarrow \mathcal{N}_{L_i/E^{(i)}} \rightarrow \mathcal{N}_{L_i/V^{(i)}} \rightarrow \mathcal{O}_{V^{(i)}}(E^{(i)})|_{L_i} \rightarrow 0.$$

С учетом доказанного она может быть переписана в виде

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{L_i}(-1) \rightarrow \mathcal{N}_{L_i/V^{(i)}} \rightarrow \mathcal{O}_{L_i} \rightarrow 0.$$

Снова отсюда следует, что $E^{(i+1)} = \mathbb{P}(\mathcal{N}_{L_i/V^{(i)}})$ есть линейчатая поверхность типа $\mathbb{F}_1$ и $(E^{(i+1)})^3 = 1$, так что

$$E^{(i+1)}|_{E^{(i+1)}} \sim (-s_{i+1} - f_{i+1}).$$

Поэтому $(E^{(i+1)} \cdot L_{i+1}) = 0$, (i) и (iii) выполнены очевидным образом. Доказательство завершено.

3. Доказательство в специальном случае. Предположим, что прямая L содержит двойную точку $p \in F$ слоя. Снова рассмотрим первое раздутие

$$\sigma_1: V^{(1)} \rightarrow V^{(0)} = V.$$

Как было отмечено выше, собственный прообраз слоя $F^{(1)} = E^{(0,1)}$ – уже неособая поверхность. Легко видеть, что $(F^{(1)} \bullet E^{(1)}) = L_1 + R$, где $R = \sigma_1^{-1}(p)$ – слой σ_1 над особой точкой, а L_1 – некоторое сечение линейчатой поверхности $E^{(1)}$. Поскольку $K_{F^{(1)}} = \sigma_1^* K_F$, имеем

$$(L_1 \cdot L_1)_{F^{(1)}} = -1,$$

откуда $(L_1 \cdot E^{(1)}) = 0$ и $(L_1 \cdot F^{(1)}) = 0$. Поскольку $E^{(1)}|_{E^{(1)}} = -F^{(1)}|_{E^{(1)}} = -(L_1 + R)$, получаем

$$(L_1 \cdot L_1)_{E^{(1)}} = -1,$$

так что $E^{(1)}$ есть линейчатая поверхность типа $\mathbb{F}_1$ и условия (i)–(iii) предложения 6.1 выполнены.

Дальнейшие рассуждения (при $i \geq 2$) дословно повторяют неспециальный случай.

Доказательство существования лестницы и предложения 6.1 завершено.

ЗАМЕЧАНИЕ. (i) Поскольку $E^{(i-1,i)}$ не пересекается с L_i (при $i \geq 1$ в неспециальном и при $i \geq 2$ в специальном случае), имеем

$$E^{(i-1,i)} = E^{(i-1,i+1)} = \dots = E^{(i-1,j)} = \dots$$

для любого $j \geq i$. В частности, если $C \subset E^{(i-1)}$ – кривая, отличная от исключительного сечения L_{i-1} , то ее собственный прообраз на всех $V^{(j)}$, $j \geq i$, один и тот же:

$$C^{(i)} = C^{(i+1)} = \dots = C^{(j)}.$$

(ii) Злоупотребляя терминологией, назовем неприводимую кривую $C \subset E^{(i)}$, $i \geq 1$, *горизонтальной*, если $\sigma_i(C) = L_{i-1}$, и *вертикальной*, если $\sigma_i(C)$ – точка на L_{i-1} . Соответственно определим горизонтальные и вертикальные 1-циклы, носитель которых содержится в $E^{(i)}$. Степень горизонтальной кривой C есть $\deg C = \deg \sigma_i|_C = (C \cdot f_i)$, степень вертикальной кривой C есть $\deg C = (C \cdot L_i) = 1$. Степень горизонтального и вертикального 1-цикла с носителем в $E^{(i)}$ определим как пересечение с f_i и L_i соответственно. В частности, степень вертикального 1-цикла есть просто количество входящих в него прямых-слоев. Отметим, что если эффективный горизонтальный 1-цикл C не содержит компонентой исключительное сечение L_i , то его класс в $A^1(E^{(i)})$ или $A^2(V^{(i)})$ есть $\alpha s_i + \beta f_i$, где $\alpha \geq 1$ и $\beta \geq \alpha$.

(iii) Очевидно, граф последовательности раздутий σ_i есть цепь. В частности,

$$K_{V^{(M)}} = \sigma_{M,0}^* K_V + \sum_{i=1}^M \sigma_{M,i}^* E^{(i)}$$

(где $\sigma_{i,j}$, как всегда, обозначает композицию $\sigma_{j+1} \circ \dots \circ \sigma_i$) и каноническая кратность (дискрепантность) нормирования $\nu_{E^{(i)}}$ есть i . В неспециальном случае

$$\sigma_{M,0}^* F = F^{(M)} + \sum_{i=1}^M E^{(i,M)},$$

а в специальном при $M \geq 2$

$$\sigma_{M,0}^* F = F^{(M)} + E^{(1,M)} + 2 \sum_{i=2}^M E^{(i,M)}.$$

В специальном случае $F^{(1)} \cap E^{(1)}$ есть приводимая кривая $L_1 + R$, $R = \sigma_1^{-1}(p)$ – слой над двойной точкой поверхности F . Кроме L , на F лежит еще ровно пять (в силу условия общности положения) прямых, проходящих через p . Пусть Q – одна из них, $Q^{(1)} \subset F^{(1)}$ – ее собственный прообраз на $V^{(1)}$. Легко видеть, что точка

$$(Q^{(1)} \cap E^{(1)}) \in R$$

не лежит на исключительном сечении L_1 .

§ 7. Завершение доказательства

Согласно доказанному в § 4 центр $x = Z(V, \nu)$ лежит на прямой $L \subset F$ и

$$(C \cdot L) < \frac{4ne}{\nu(F)}, \quad Z^v = C + kL.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.1. *Существует конечная L -лестница длины $M \geq 1$ такая, что выполнены следующие условия:*

(i) для $i = 0, \dots, M-1$ центр $Z(V^{(i)}, \nu)$ нормирования ν на $V^{(i)}$ есть точка $x_i \in L_i$, $x_0 = x$;

(ii) центр $Z(V^{(M)}, \nu)$ есть либо:

A) точка $x_M \notin L_M$, $x_M \notin E^{(M-1, M)}$;

B) прямая $B = \sigma_M^{-1}(x_{M-1})$ — слой линейчатой поверхности $E^{(M)}$;

C) точка $x_M = E^{(M-1, M)} \cap \sigma_M^{-1}(x_{M-1})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $Z(V^{(i)}, \nu) \subset E^{(i)}$, то $i = K(V, E^{(i)}) \leq K(V, \nu)$. Следовательно, существует такое $M \geq 1$, что для $i = 0, \dots, (M-1)$ выполнено условие (i), а для $i = M$ оно не выполнено. Теперь центр $Z(V^{(M)}, \nu)$ есть либо кривая (и тогда реализуется случай B)), либо точка x_M , не лежащая на L_M (случай A) или C)). Предложение доказано.

Зафиксируем построенную лестницу длины M .

Введем новый параметр d_F , полагая его равным 1, если имеет место неспециальный случай, и 2 иначе. Обозначим $E^{(M)} \subset V^{(M)}$ через E в случаях A) и B) и $E^{(M)}$ через E_+ и $E^{(M-1, M)}$ через E_- в случае C).

1. Неравенство Нётера–Фано в терминах лестницы. Обозначим через $|\chi|^{(i)}$ собственный прообраз системы $|\chi|$ на $V^{(i)}$ и положим

$$\lambda_i = \text{mult}_{L_{i-1}} |\chi|^{(i-1)},$$

$n \geq \lambda_1 \geq \dots$ Пусть

$$\begin{array}{ccc} \varphi_{i,i-1}: V_i & \longrightarrow & V_{i-1} \\ \cup & & \cup \\ E_i & \longrightarrow & B_{i-1} \end{array}$$

$i = 1, \dots, K$, $V_0 = V^{(M)}$, — разрешение нормирования $\nu \in \mathcal{N}(V^{(M)})$. Введем ряд обозначений:

$$\nu_i = \text{mult}_{B_{i-1}} |\chi|^{i-1}$$

— кратность собственного прообраза системы $|\chi|$ на V_{i-1} вдоль раздуваемого цикла;

$p_i = p(E_K, E_i)$ — число путей в ориентированном графе нормирования $\nu = \nu_{E_K}$ из E_K в E_i (здесь ν рассматривается как дискретное нормирование на многообразии $V_0 = V^{(M)}$);

$N^* = \max\{i | 1 \leq i \leq K, B_{i-1} \subset E^{i-1}\}$ в случаях A) и B);

$L = \max\{i | 1 \leq i \leq K, B_{i-1} \text{ — точка}\}$ (так что при $j \leq L$ B_{j-1} — точка, а при $j \geq L+1$ B_{j-1} — кривая) в случаях A) и C);

$N = \min\{N^*, L\}$ в случае А);

$N = N^*$ в случае В);

$N_{\pm}^* = \max\{i | 1 \leq i \leq K, B_{i-1} \subset E_{\pm}^{i-1}\}$ в случае С), где знак $+$ или $-$ слева и справа выбирается один и тот же;

$N_{\pm} = \min\{N_{\pm}^*, L\}$ (справа минимум из двух чисел);

$\Sigma_0 = \sum_{i=1}^L p_i$, $\Sigma_1 = \sum_{i=L+1}^K p_i$ в случаях А) и С);

$\Sigma = \sum_{i=1}^K p_i$ в случае В);

$\Sigma^* = \sum_{i=1}^{N^*} p_i$, $\Sigma_* = \sum_{i=1}^N p_i$ в случаях А) или В);

$\Sigma_{\pm}^* = \sum_{i=1}^{N_{\pm}^*} p_i$, $\Sigma_{\pm} = \sum_{i=1}^{N_{\pm}} p_i$ в случае С).

Очевидно, в этих обозначениях имеем

$$\nu(E) = \varepsilon = \Sigma^*, \quad \nu(E_{\pm}) = \varepsilon_{\pm} = \Sigma_{\pm}^*.$$

В неспециальном случае А) или В) при $M \geq 2$ и в специальном случае А) или В) при $M \geq 3$

$$\nu(F) = d_F \varepsilon,$$

а если реализуется случай С) (при тех же ограничениях на M), то

$$\nu(F) = d_F(\varepsilon_+ + \varepsilon_-).$$

В случае А) или В) имеем

$$\nu(|\chi|) = \nu_E(|\chi|)\nu(E) + \nu(|\chi|^{(M)})$$

и

$$K(V, \nu) = K(V, \nu_E)\nu(E) + K(V^{(M)}, \nu),$$

так что неравенство Нётера–Фано принимает вид

$$\sum_{i=1}^K p_i \nu_i = \varepsilon \sum_{i=1}^M (n - \lambda_i) + n \sum_{i=1}^K p_i \delta_i + e.$$

Аналогичным образом, в случае С) неравенство Нётера–Фано имеет вид

$$\sum_{i=1}^K p_i \nu_i = \varepsilon_+ \sum_{i=1}^M (n - \lambda_i) + \varepsilon_- \sum_{i=1}^{M-1} (n - \lambda_i) + n \sum_{i=1}^K p_i \delta_i + e.$$

2. Техника подсчета кратностей. Как всегда, пусть $D_i^{(M)}$, $i = 1, 2$, – собственные прообразы общих дивизоров из пучка $|\chi|$. Пусть

$$Z^{(M)} = (D_1^{(M)} \bullet D_2^{(M)})$$

– эффективный 1-цикл их теоретико-схемного пересечения. Положим

$$m_i = \text{mult}_{B_{i-1}}(Z^{(M)})^{i-1}$$

для $i \leq L$ в случаях А) и С). Согласно технике подсчета кратностей имеем для случая А) оценку

$$\sum_{i=1}^L p_i m_i \geq \frac{(2\Sigma_0 n + \Sigma_1 n + \varepsilon \sum_{i=1}^M (n - \lambda_i) + e)^2}{\Sigma_0 + \Sigma_1},$$

а для случая С) оценку

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^L p_i m_i &\geq \frac{1}{\Sigma_0 + \Sigma_1} \\ &\times \left(2\Sigma_0 n + \Sigma_1 n + \varepsilon_+ \sum_{i=1}^M (n - \lambda_i) + \varepsilon_- \sum_{i=1}^{M-1} (n - \lambda_i) + e \right)^2. \end{aligned}$$

В случае В) мы, очевидно, имеем: прямая B входит в 1-цикл $Z^{(M)}$ с кратностью, не меньшей, чем $\sum_{i=1}^K \nu_i^2$, причем кратности ν_i удовлетворяют неравенствам

$$\nu_i \geq \sum_{j \rightarrow i} \nu_j$$

(здесь разрешение максимальной особенности ν представляет собой последовательность раздутий лежащих друг над другом кривых). Оценивая минимум этой квадратичной формы при указанных ограничениях и с учетом неравенства Нёте-ра-Фано, получаем

$$\text{mult}_B Z^{(M)} \geq \frac{\left(\Sigma n + \varepsilon \sum_{i=1}^M (n - \lambda_i) + e \right)^2}{\sum_{i=1}^K p_i^2}.$$

3. Цикл $Z^{(M)}$ в терминах лестницы. Теперь для того, чтобы завершить доказательство теоремы, необходимо оценить сверху левые части двух полученных выше основных неравенств. Соответствующие выкладки довольно утомительны, хотя геометрически вполне прозрачны. Возвращаясь к нашей основной конструкции – лестнице, – введем ряд новых понятий и обозначений, связанных с линейной системой $|\chi|$. Прежде всего положим

$$z_i = (D_1^{(i)} \cdot D_2^{(i)}) \in A^2 V^{(i)}$$

– класс эффективного 1-цикла

$$Z^{(i)} = (D_1^{(i)} \bullet D_2^{(i)}).$$

На “нулевом” этаже нашей лестницы мы имеем разложение

$$Z = Z^v + Z^h.$$

Проследим, как меняется 1-цикл $Z^{(k)}$ при переходе от $k = i - 1$ к $k = i$. Естественно, компоненты цикла $Z^{(i-1)}$, отличные от L_{i-1} , присутствуют в $Z^{(i)}$ уже своими собственными прообразами. Вместо кривой L_{i-1} , входящей в $Z^{(i-1)}$ с некоторой кратностью k_{i-1} , цикл $Z^{(i)}$ содержит эффективный подцикл, носитель которого содержится в исключительном дивизоре $E^{(i)}$. Разобьем этот подцикл на три части:

- 1) $C_h^{(i)}$ включает все кривые, горизонтальные относительно морфизма $\sigma_i: E^{(i)} \rightarrow L_{i-1}$ и отличные от исключительного сечения L_i ;
- 2) $C_v^{(i)}$ включает все вертикальные кривые, т.е. слои σ_i над точками кривой L_{i-1} ;
- 3) исключительное сечение L_i с некоторой кратностью $k_i \in \mathbb{Z}_+$.

Для единообразия обозначений положим: $C_h^{(0)}$ – часть цикла Z^v , отличная от прямой L . Положим также

$$d_{h,v}^{(i)} = \deg C_{h,v}^{(i)}$$

(см. замечание (ii) предыдущего параграфа). Теперь имеем следующее представление циклов $Z^{(i)}$:

$$\begin{aligned} Z^{(0)} &= Z^h + Z^v = Z^h + C_h^{(0)} + k_0 L, \\ Z^{(1)} &= (Z^h)^{(1)} + C_h^{(0,1)} + C_h^{(1)} + C_v^{(1)} + k_1 L_1, \\ &\dots\dots\dots \\ Z^{(i)} &= (Z^h)^{(i)} + C_h^{(0,a)} + C_h^{(1,2)} + C_v^{(1,2)} + \dots \\ &\dots + C_h^{(i-1,i)} + C_v^{(i-1,i)} + C_h^{(i)} + C_v^{(i)} + k_i L_i. \end{aligned}$$

Здесь $a = 1$ в неспециальном и $a = 2$ в специальном случаях. Мы пишем, например, $C_h^{(1,2)}$ вместо $C_h^{(1,i)}$ в силу замечания (i) § 6.

4. Подсчет класса z_M . Очевидно, класс цикла $C_v^{(i)}$ в $A^1 V^{(i)}$ есть $d_v^{(i)} f_i$, а класс цикла $C_h^{(i)}$ есть $d_h^{(i)} s_i + \beta_i f_i$, где коэффициенты удовлетворяют важному неравенству

$$\beta_i \geq d_h^{(i)}$$

(см. замечание (ii) § 6). Далее, класс цикла $C_v^{(i,i+1)}$ есть $d_v^{(i)} (f_i - f_{i+1})$, а класс цикла $C_h^{(i,i+1)}$ есть

$$d_h^{(i)} s_i + \beta_i f_i - (\beta_i - d_h^{(i)}) f_{i+1}.$$

Полагая

$$\alpha_i = ((Z^h)^{(i-1)} \cdot L_{i-1})$$

в смысле данного в начале работы определения “индекса пересечения” кривых, можем записать

$$z_i^h = z_{i-1}^h - \alpha_i f_i,$$

где z_i^h есть численный класс горизонтального цикла $(Z^h)^{(i)}$.

ЛЕММА 7.1. *Имеет место неравенство*

$$\alpha_i \leq \deg Z^h = 3n^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $L \subset F$, а $\deg Z^h$ есть $(Z^h \cdot F)$, это очевидно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.2. *Классы z_i удовлетворяют цепочке соотношений*

$$z_i = z_{i-1} - (2\lambda_i n + \lambda_i^2) f_i - \lambda_i^2 s_i.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} z_i &= (D^{(i)})^2 = (D^{(i-1)} - \lambda_i E^{(i)})^2 \\ &= z_{i-1} - 2\lambda_i (D^{(i-1)} \cdot L_{i-1}) f_i - \lambda_i^2 (s_i + f_i). \end{aligned}$$

Из доказанного в § 6 следует, что для любого $j \in \mathbb{Z}_+$ $(D^{(j)} \cdot L_j) = (D \cdot L) = n$, что и требовалось доказать.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.3. *При $i \geq 2$ в неспециальном и при $i \geq 3$ в специальном случаях целые числа k_i , α_i , β_i и $d_{h,v}^{(i)}$ удовлетворяют системе соотношений*

$$d_v^{(i)} + \beta_i = \alpha_i + d_v^{(i-1)} + (\beta_{i-1} - d_h^{(i-1)}) - 2\lambda_i n - \lambda_i^2.$$

При $i = 1$ в неспециальном и в специальном случаях имеем

$$d_v^{(1)} + \beta_1 = \alpha_1 + (C_h^{(0)} \cdot L) - 2\lambda_1 n - \lambda_1^2,$$

а при $i = 2$ в специальном случае имеем

$$d_v^{(2)} + \beta_2 = \alpha_2 + d_v^{(1)} + (\beta_1 - d_h^{(1)}) + (C_h^{(0,1)} \cdot L_1) - 2\lambda_2 n - \lambda_2^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимо явно расписать класс цикла $Z^{(i)}$ в терминах введенных нами параметров и воспользоваться предыдущим предложением. Соответствующие выкладки элементарны.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.4. *При любом $i \geq 1$ в неспециальном случае имеет место неравенство*

$$d_v^{(i)} + \beta_i \leq (C_h^{(0)} \cdot L) + \sum_{j=1}^i (3n^2 - 2\lambda_j n - \lambda_j^2).$$

В специальном случае при $i \geq 2$

$$\begin{aligned} d_v^{(i)} + \beta_i &\leq (C_h^{(0)} \cdot L) + (C_h^{(0,1)} \cdot L_1) + \sum_{j=1}^i (3n^2 - 2\lambda_j n - \lambda_j^2), \\ d_v^{(1)} + \beta_1 &\leq (C_h^{(0)} \cdot L) + 3n^2 - 2\lambda_1 n - \lambda_1^2. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимо i раз применить неравенство предыдущего предложения и воспользоваться последней леммой.

5. Завершение доказательства: случай А). В случае А) ясно, что из всех кривых, содержащихся в дивизоре $\bigcup_{i=0}^M E^{(i,M)}$, точку x_M могут содержать только те, которые целиком лежат в $E^{(M)}$ и отличны от исключительного сечения L_M . Значит, мы вправе написать

$$Z^{(M)} = (Z^h)^{(M)} + C_v^{(M)} + C_h^{(M)} + \dots,$$

где многоточие обозначает сумму кривых, не содержащих точку x_M . Положим

$$\begin{aligned} W &= C_v^{(M)} + C_h^{(M)}, \\ m_i^v &= \text{mult}_{B_{i-1}} W^{i-1}, \\ m_i^h &= \text{mult}_{B_{i-1}} (Z^h)^{(M), i-1} \end{aligned}$$

для $i \leq L$, так что $m_i = m_i^v + m_i^h$. Очевидно, кратности m_i^v обращаются в нуль при $N+1 \leq i \leq L$. Далее, $m_i^{h,v} \leq m_1^{h,v}$, и, как и в лемме 7.1, имеем $m_1^h \leq 3n^2$. Наконец, $m_1^v \leq d_v^{(M)} + d_h^{(M)} \leq d_v^{(M)} + \beta_M$, так что в итоге получаем

$$\begin{aligned} 3n^2 \Sigma_0 + \Sigma_* \left((C_h^{(0)} \cdot L) + \sum_{i=1}^M (3n^2 - 2\lambda_i n - \lambda_i^2) \right) \\ \geq \sum_{i=1}^L p_i m_i^h + \sum_{i=1}^N p_i m_i^v \geq \\ \geq \frac{\left(2\Sigma_0 n + \Sigma_1 n + \varepsilon \sum_{i=1}^M (n - \lambda_i) + e \right)^2}{\Sigma_0 + \Sigma_1}, \end{aligned}$$

если реализуется неспециальный случай. В специальном случае при $M \geq 2$ к $(C_h^{(0)} \cdot L)$ нужно еще добавить $(C_h^{(0,1)} \cdot L_1)$.

Обратимся к неспециальному случаю. Если заменить Σ_* на $\varepsilon = \Sigma^*$, неравенство может лишь усилиться, а если заменить $\varepsilon(C_h^{(0)} \cdot L)$ на $4ne$, то оно станет строгим. Перенесем все в правую часть и рассмотрим полученное выражение как квадратичную форму от λ_i на области $0 \leq \lambda_i \leq n$. В силу симметрии ее минимум достигается на диагонали, т.е. при $\lambda_i = \lambda$, $0 \leq \lambda \leq n$. Заменим все λ_i на это значение λ , при этом строгое неравенство сохранится. В итоге получаем $\Phi < 0$, где выражение Φ может быть с помощью элементарной арифметики преобразовано к виду

$$\begin{aligned} \Phi &= (\Sigma_0^2 + \Sigma_0 \Sigma_1 + \Sigma_1^2) n^2 + M \varepsilon \Sigma_0 (n - \lambda)^2 \\ &\quad - M \varepsilon \Sigma_1 (n - \lambda)(n + \lambda) \\ &\quad + M^2 \varepsilon^2 (n - \lambda)^2 - 2e \Sigma_1 n + 2M \varepsilon e (n - \lambda) + e^2. \end{aligned}$$

Поскольку $\lambda \leq n$, можно заменить $(n + \lambda)$ на $2n$ с сохранением строгого неравенства. Нетрудно, однако, проверить, что последнее выражение есть сумма полного квадрата

$$(\Sigma_1 n - M \varepsilon (n - \lambda) - e)^2$$

и нескольких неотрицательных слагаемых. Поэтому оно не может быть отрицательным, что и завершает доказательство в рассматриваемом случае.

В специальном случае при $M \geq 2$ рассуждения проводятся по той же самой схеме. Необходимо учесть, что здесь $\nu(F) = 2\varepsilon$, так что теперь уже слагаемое $\varepsilon((C_h^{(0)} \cdot L) + (C_h^{(0,1)} \cdot L_1))$ можно заменить в левой части на $4ne$. Оставшаяся часть вычислений уже ничем не отличается от предыдущего случая. При $M = 1$ вычисления еще проще.

6. Завершение доказательства: случай В). Как и выше, мы проследим во всех подробностях лишь неспециальный случай. С одной стороны, имеем неравенство

$$d_v^{(M)} \leq (C_h^{(0)} \cdot L) + \sum_{i=1}^M (3n^2 - 2\lambda_i n - \lambda_i^2).$$

С другой стороны, верна оценка

$$d_v^{(M)} \geq \text{mult}_B Z^{(M)},$$

а последняя кратность, в свою очередь, была оценена выше с помощью техники Исковских–Манина. Легко видеть, что

$$\sum_{i=1}^K p_i^2 \leq p_1 \Sigma \leq \varepsilon \Sigma.$$

Как и выше, можно считать, что все λ_i равны λ , $0 \leq \lambda \leq n$. Заменяя $\varepsilon(C_h^{(0)} \cdot L)$ на $4ne$, получаем строгое неравенство

$$0 > \Sigma^2 n^2 - 2\Sigma ne + M^2 \varepsilon^2 (n - \lambda)^2 + e^2 + 2M\varepsilon(n - \lambda)e - M\varepsilon(n - \lambda)\Sigma(n + \lambda),$$

которое останется справедливым, если заменить $(n + \lambda)$ на $2n$. Но полученное выражение есть полный квадрат

$$(\Sigma n - M\varepsilon(n - \lambda) - e)^2.$$

Противоречие.

В специальном случае рассуждаем точно так же. К $(C_h^{(0)} \cdot L)$ добавляется еще одно слагаемое $(C_h^{(0,1)} \cdot L_1)$, однако кратность $\nu(F) = 2\varepsilon$ возрастает вдвое, так что в итоге приходим к тому же самому строгому неравенству. Противоречие завершает рассмотрение случая В).

7. Завершение доказательства: случай С). Предположим сначала, что либо имеет место неспециальный случай, либо специальный и $M \geq 3$, либо, наконец, специальный случай с $M = 2$, но точка $x = Z(V, \nu)$ не есть особая точка слоя F .

Здесь ясно, что из всех кривых, содержащихся в дивизоре

$$\bigcup_{i=0}^M E^{(i,M)},$$

точку x_M могут содержать только те, которые либо целиком лежат в $E^{(M)}$ и отличны от исключительного сечения L_M (как в случае А)), либо целиком лежат в $E^{(M-1,M)}$ и отличны от исключительного сечения $E^{(M-1,M)} \cap E^{(M)}$ (которое уже учтено в первой группе). Таким образом,

$$Z^{(M)} = (Z^h)^{(M)} + W_- + W_+ + \dots,$$

где W_+ обозначает сумму кривых, содержащихся в $E_+ = E^{(M)}$ и отличных от L_M , W_- есть 1-цикл $C_v^{(M-1,M)} + C_h^{(M-1,M)}$, а многочлен обозначает сумму всех остальных кривых, не содержащих точку x_M . Пусть m_i^h обозначает то же, что и в случае А), и

$$m_i^\pm = \text{mult}_{B_{i-1}} W_\pm^{i-1},$$

$i = 1, \dots, L$, так что $m_i = m_i^+ + m_i^- + m_i^h$. Очевидно, кратности $m_i^\pm$ обращаются в нуль при $N_\pm + 1 \leq i \leq L$. Как и в случае А), имеем $m_i^{h,\pm} \leq m_1^{h,\pm}$, $m_1^h \leq 3n^2$, $m_1^+ \leq d_v^{(M)} + \beta_M$, $m_1^- \leq d_v^{(M-1)} + \beta_{M-1}$, так что в итоге получаем

$$\begin{aligned} & 3n^2 \Sigma_0 + \Sigma_+ \left((C_h^{(0)} \cdot L) + \sum_{i=1}^M (3n^2 - 2\lambda_i n - \lambda_i^2) \right) \\ & + \Sigma_- \left((C_h^{(0)} \cdot L) + \sum_{i=1}^{M-1} (3n^2 - 2\lambda_i n - \lambda_i^2) \right) \\ & \geq \sum_{i=1}^L p_i m_i^h + \sum_{i=1}^{N_+} p_i m_i^+ + \sum_{i=1}^{N_-} p_i m_i^- \\ & \geq \frac{1}{\Sigma_0 + \Sigma_1} \left(2\Sigma_0 n + \Sigma_1 n + \varepsilon_- \sum_{i=1}^{M-1} (n - \lambda_i) + \varepsilon_+ \sum_{i=1}^M (n - \lambda_i) + e \right)^2, \end{aligned}$$

если реализуется неспециальный случай. В специальном случае при $M \geq 2$ к $(C_h^{(0)} \cdot L)$ нужно еще добавить $(C_h^{(0,1)} \cdot L_1)$.

Обратимся к неспециальному случаю. Если заменить $\Sigma_\pm$ на $\varepsilon_\pm = \Sigma_\pm^*$, неравенство может лишь усилиться, а если заменить $(\varepsilon_+ + \varepsilon_-)(C_h^{(0)} \cdot L)$ на $4ne$, оно станет строгим. Перенесем все в правую часть и рассмотрим полученное выражение как квадратичную форму от двух групп переменных λ_i^+ и λ_i^- , где мы заменяем λ_i на $\lambda_i^\pm$ в зависимости от того, стоит ли эта переменная под знаком $\sum_{i=1}^{M-1}$ (и тогда ставим λ_i^-) или $\sum_{i=1}^M$ (и тогда ставим λ_i^+), на области $0 \leq \lambda_i^\pm \leq n$. В силу симметрии ее минимум достигается на диагональной плоскости, т.е. при $\lambda_i^\pm = \lambda_\pm$, $0 \leq \lambda_\pm \leq n$. Заменяем все $\lambda_i^\pm$ на $\lambda_\pm$, при этом строгое неравенство сохранится. В итоге получаем

$$\Phi < 0,$$

где выражение Φ может быть с помощью элементарной арифметики преобразовано к следующему виду, где для удобства восприятия полагаем $M - 1 = M_-$, $M = M_+$:

$$\begin{aligned}\Phi = & (\Sigma_0^2 + \Sigma_0 \Sigma_1 + \Sigma_1^2) n^2 + M_- \varepsilon_- \Sigma_0 (n - \lambda_-)^2 + M_+ \varepsilon_+ \Sigma_0 (n - \lambda_+)^2 \\ & - M_- \varepsilon_- \Sigma_1 (n - \lambda_-)(n + \lambda_-) - M_+ \varepsilon_+ \Sigma_1 (n - \lambda_+)(n + \lambda_+) \\ & + (M_- \varepsilon_- (n - \lambda_-) + M_+ \varepsilon_+ (n - \lambda_+))^2 - 2e \Sigma_1 n \\ & + 2M_- \varepsilon_- (n - \lambda_-) e + 2M_+ \varepsilon_+ (n - \lambda_+) e + e^2.\end{aligned}$$

Поскольку $\lambda_{\pm} \leq n$, можно заменить $(n + \lambda_{\pm})$ на $2n$ с сохранением строгого неравенства. Теперь нетрудно проверить, что последнее выражение есть сумма полного квадрата

$$(\Sigma_1 n - M_- \varepsilon_- (n - \lambda_-) - M_+ \varepsilon_+ (n - \lambda_+) - e)^2$$

и нескольких неотрицательных слагаемых. Снова получаем противоречие, завершающее доказательство в рассматриваемом случае.

В специальном случае рассуждаем точно так же с учетом того, что $\nu(F) = 2(\varepsilon_- + \varepsilon_+)$.

Если, наконец, реализуется специальный случай с $M = 1$ и $x = Z(V, \nu)$ не есть особая точка слоя F , то с упрощениями проходят предыдущие рассуждения.

Осталось рассмотреть специальный случай с $M = 1$ или $M = 2$, когда точка x есть особенность слоя. Случай $M = 1$ проще. При $M = 2$ точка x_M есть пересечение трех дивизоров:

$$x_2 = F^{(2)} \cap E^{(1,2)} \cap E^{(2)}$$

(пересечение трансверсальное). Соответственно

$$Z^{(2)} = (Z^h)^{(2)} + C_h^{(0,2)} + C_h^{(1,2)} + C_v^{(1,2)} + C_h^{(2)} + C_v^{(2)} + k_2 L_2,$$

где все 1-циклы, кроме последнего, могут содержать точку x_2 .

Данный случай единственный, когда формально не проходят предыдущие построения (из-за дополнительного вклада, который дает 1-цикл $C_h^{(0,2)} \subset F^{(2)}$). Однако общая схема, по которой были разобраны случаи А)–С) выше, работает и здесь. Наметим основные шаги рассуждений.

С сохранением предыдущих обозначений положим: $N^* = \max\{i | 1 \leq i \leq K, B_{i-1} \subset E^{i-1}\}$, $N = \min\{N^*, L\}$; $\Sigma^* = \varepsilon = \sum_{i=1}^{N^*} p_i$, $\Sigma_* = \sum_{i=1}^N p_i \leq \Sigma^*$. Положим также

$$m_i^0 = \text{mult}_{B_{i-1}}(C_h^{(0,2)})^{i-1}$$

для $1 \leq i \leq L$. Очевидно, $m_i^0 = 0$ при $i \geq N + 1$.

Теперь имеем представление

$$\sum_{i=1}^L p_i m_i = \sum_{i=1}^L p_i m_i^h + \sum_{i=1}^{N_-} p_i m_i^- + \sum_{i=1}^{N_+} p_i m_i^+ + \sum_{i=1}^N p_i m_i^0.$$

Четыре слагаемых в правой части могут быть оценены сверху соответственно так:

$$\begin{aligned}
 &\leq 3\Sigma_0 n^2, \\
 &\leq \varepsilon_- ((C_h^{(0)} \cdot L) + (3n^2 - 2n\lambda_1 - \lambda_1^2)), \\
 &\leq \varepsilon_+ \left((C_h^{(0)} \cdot L) + (C_h^{(0,1)} \cdot L_1) + \sum_{i=1}^2 (3n^2 - 2n\lambda_i - \lambda_i^2) \right), \\
 &\leq \varepsilon m_1^0 \leq \varepsilon (C_h^{(0,1)} \cdot L_1).
 \end{aligned}$$

Данный случай формально не вписывается в проведенные выше построения именно из-за четвертой компоненты. Однако здесь возрастает и кратность

$$\nu(F) = 2\varepsilon_+ + \varepsilon_- + \varepsilon.$$

Таким образом, мы снова вправе заменить совокупность всех слагаемых, содержащих $(C_h^{(0)} \cdot L)$ и $(C_h^{(0,1)} \cdot L_1)$, на $4ne$. Дальнейшие рассуждения уже дословно повторяют выкладки для “регулярного” случая С). При $M = 1$ проходят эти же рассуждения с существенными упрощениями.

Доказательство основной теоремы проведено полностью.

§ 8. Многомерное обобщение

Доказанная теорема автоматически переносится на пучки многообразий Фано степени 2 произвольной размерности (см. [9]). А именно, пусть $X = \mathbb{P}(\mathcal{E})$, где $\mathcal{E}$ – локально свободный пучок ранга $k + 1$ на $\mathbb{P}^1$,

$$\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \bigoplus_{i=1}^k \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i),$$

$0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_k$, L – класс тавтологического пучка и G – класс слоя $\cong \mathbb{P}^k$ в $\text{Pic } X = \mathbb{Z}L \oplus \mathbb{Z}G$. Пусть

$$\sigma: V \rightarrow X$$

– двойное накрытие с гладким дивизором ветвления $D \sim 2kL + 2mG$. Обозначая естественную проекцию на $\mathbb{P}^1$ через π , получаем представление гладкого проективного многообразия V в виде пучка $\pi: V \rightarrow \mathbb{P}^1$ многообразий Фано степени 2. Очевидно, $\text{Pic } V = \mathbb{Z}K_V \oplus \mathbb{Z}F$, где $|F| = |\pi|$ – пучок слоев, и

$$K_V = \sigma^*(-L + (a_1 + \dots + a_k - 2 + m)G),$$

так что

$$\pi_*(\mathcal{O}_V(-K_V)) \cong \mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \left(-\sum_{i=1}^k a_i + 2 - m \right).$$

Если коэффициенты a_i удовлетворяют неравенству

$$m \geq 2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k a_i,$$

то линейная система

$$|-MK_V - F|$$

имеет неподвижную компоненту или пуста для любого $M \in \mathbb{Z}$, и численный класс коразмерности 2

$$M(-K_V)^2 - f,$$

где $f = \sigma^*g$, $g \in A^2(X)$ – класс гиперплоскости в слое расслоения $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}^1$, не является эффективным ни для какого $M \in \mathbb{Z}$. Предположим, что эти условия выполнены.

Пусть $\pi': V' \rightarrow \mathbb{P}^1$ – неособое в коразмерности 1 многообразие, расслоенное над $\mathbb{P}^1$, причем общий слой π' имеет отрицательную кодацирову размерность.

Имеет место

ТЕОРЕМА 8.1. *Любое бирациональное отображение*

$$\chi: V \dashrightarrow V'$$

является послыйным, т.е. существует изоморфизм $\alpha: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ такой, что $\pi' \circ \chi = \alpha \circ \pi$.

Доказательство почти дословно повторяет проведенное в § 2–4 доказательство первой теоремы. Все оценки на кратности (теперь уже циклов коразмерности 2 на V) сохраняют силу (см. [9]). При $\dim V \geq 4$ уже не существует откручивающих автоморфизмов, ибо все максимальные циклы исключаются – так, как это сделано в [9]. В частности, имеет место

СЛЕДСТВИЕ 8.1. *Группа бирациональных автоморфизмов многообразия V , $\text{Bir } V$, конечна, в общем случае изоморфна циклической группе $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. На многообразии V нет других пучков многообразий отрицательной кодацировой размерности и нет структур расслоения на многообразия отрицательной кодацировой размерности над базой размерности 2 и выше. В частности, V не рационально.*

План доказательства теоремы стандартный: сначала аргументами [9] и § 3 настоящей работы исключаются максимальные циклы, затем по образцу § 4 приводится к противоречию факт существования сверхмаксимальной особенности. Получающиеся оценки оказываются в случае большой размерности даже более сильными, чем в трехмерном случае. Никаких дополнительных рассуждений здесь не требуется.

§ 9. Многообразие с пучком трехмерных квартик

В заключение рассмотрим еще один класс многообразий, поддающихся изучению развитым выше методом (и, по-видимому, предельный для нашей техники). Пусть

$$\mathcal{E} = \bigoplus_{i=0}^4 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i),$$

$0 = a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_4$, – локально свободный пучок ранга 5 на $\mathbb{P}^1$, $X = \mathbb{P}(\mathcal{E})$ – его проективизация, $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ – расслоение на проективные пространства $\mathbb{P}^4$. Как и выше, пусть L – класс тавтологического пучка, G – класс слоя в $\text{Pic } X = \mathbb{Z}L \oplus \mathbb{Z}G$.

Пусть V – гладкая гиперповерхность в X , класс которой в $\text{Pic } X$ есть $4L + mG$, $\text{Pic } V = (\text{Pic } X)|_V$. Очевидно, проекция $\pi: V \rightarrow \mathbb{P}^1$ расслаивает V на трехмерные кватрики. Будем предполагать, что выполнены следующие условия общности положения:

(а) если $x \in V_t = \pi^{-1}(t)$ – неособая точка слоя V_t – трехмерной кватрики в $G_t \cong \mathbb{P}^4$, то пересечение $V_t \cap T_x V_t$ – поверхность степени 4 в $T_x V_t \cong \mathbb{P}^3$, имеющая в точке x кратность точно 2;

(б) если $x \in V_t$ – особая точка слоя V_t , то она является невырожденной двойной точкой (простейшей особенностью), и V_t – факториальное трехмерное многообразие, т.е. каждый дивизор Вейля является дивизором Картье ($\text{Pic } V_t = \mathbb{Z}h$, где h – класс гиперплоского сечения).

Допустимость требований (а) и (б) обусловлена тем, что в пространстве кватрик в $\mathbb{P}^4$ подмножество кватрик W , для которых найдется гладкая точка $x \in W$ такая, что

$$\text{mult}_x(W \cap T_x W) \geq 3,$$

имеет коразмерность 3, а общая особая кватрика удовлетворяет условию (б).

Вводя понятия горизонтального и вертикального циклов по аналогии с § 1, положим для вертикального цикла коразмерности 2 – поверхности Z на кватрике V_t : степень $Z = \deg Z = (K_V^2 \cdot Z) =$ (степень Z в проективном пространстве $\mathbb{P}^4$).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.1. Пусть выполнены условия (а) и (б), и пусть $Z \subset V_t$ – неприводимая вертикальная поверхность, $x \in Z$. Тогда:

(i) если $x \in V_t$ – неособая точка слоя, то

$$\text{mult}_x Z \leq \frac{1}{2} \deg Z;$$

(ii) если $x \in V_t$ – двойная точка слоя, то

$$\text{mult}_x Z \leq \frac{2}{3} \deg Z,$$

если только Z не есть пересечение $V_t \cap T_x V_t$ многообразия V_t со своим касательным конусом в точке x .

Более того, пусть $\sigma: \tilde{V}_t \rightarrow V_t$ – раздутие точки x , $E = \sigma^{-1}(x) \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ – исключительная поверхность, $y \in E$ – произвольная точка. Тогда если y не лежит на собственном прообразе прямой на V_t , проходящей через точку x , то

$$\text{mult}_x Z + \text{mult}_y \tilde{Z} \leq \deg Z,$$

где $\tilde{Z}$ – собственный прообраз поверхности Z на $\tilde{V}_t$. В частности,

$$\text{mult}_y \tilde{Z} \leq \frac{1}{2} \deg Z.$$

Если же точка y лежит на собственном прообразе прямой на V_t , то имеет место неравенство

$$3 \deg Z \geq 2 \text{mult}_x Z + 4 \text{mult}_y \tilde{Z}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Установим (i). Предположим противное: $2 \operatorname{mult}_x Z > \deg Z$. Рассмотрим сечение Z общей гиперплоскостью в $\mathbb{P}^4$, содержащей точку x – кривую C . Очевидно, $2 \operatorname{mult}_x C > \deg C$, где степень понимается в смысле проективного пространства $\mathbb{P}^4$. Пусть $H = T_x V_t \cap V_t$ – сечение V_t касательной гиперплоскостью. Имеем

$$\deg C = (C \cdot H) \geq (C \cdot H)_x \geq 2 \operatorname{mult}_x C,$$

если только C не содержится в $T_x V_t$. Значит, $Z \subset T_x V_t$, и потому $Z = T_x V_t \cap V_t$. Получаем противоречие с условием (a).

Доказательство первого утверждения части (ii) получается аналогичным образом с использованием квадратичного касательного конуса в особой точке $x \in V_t$ вместо касательной гиперплоскости, как это было сделано выше.

Докажем, наконец, последнее утверждение. Пусть $R \subset \mathbb{P}^4$ – (единственная) прямая, проходящая через точку x в направлении y . Рассмотрим сначала случай $R \not\subset V_t$. Общая плоскость $P \supset R$ пересекает кватрику V_t по плоской кватрике C_P с двойной точкой x , причем ее собственный прообраз $\tilde{C}_P$ содержит точку y . Если $dh - \nu e$ – класс поверхности $\tilde{Z}$ в $\operatorname{Pic} \tilde{V}_t$, то $\operatorname{mult}_x Z = 2\nu$, $\deg Z = 4d$ и

$$\begin{aligned} 4d - 2\nu &= \deg Z - \operatorname{mult}_x Z = (\tilde{Z} \cdot \tilde{C}_P) \geq \\ &\geq (\tilde{Z} \cdot \tilde{C}_P)_y \geq \operatorname{mult}_y \tilde{Z}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Если $R \subset V_t$ – одна из 24-х прямых, рассмотрим гиперплоскость $H \subset \mathbb{P}^4$, касающуюся квадратичного конуса $T_x V_t$ вдоль прямой R . Если $P \subset H$, $P \supset R$ – общая плоскость, то $P \cap V_t = R \cup C_P$, где C_P – вычетная плоская кубика, содержащая точку x . Более того, ее собственный прообраз $\tilde{C}_P$ содержит точку y . Если $C_P \not\subset Z$, то

$$\begin{aligned} 3d - \nu &= \frac{3}{4} \deg Z - \frac{1}{2} \operatorname{mult}_x Z = (\tilde{Z} \cdot \tilde{C}_P) \geq \\ &\geq (\tilde{Z} \cdot \tilde{C}_P)_y \geq \operatorname{mult}_y \tilde{Z}, \end{aligned}$$

что и требовалось. Если $C_P \subset Z$, то $Z = H \cap V_t$, потому что кривые C_P заматают $H \cap V_t$. Но уже

$$\operatorname{mult}_x(H \cap V_t) = 2 \leq \frac{1}{2} \deg(H \cap V_t).$$

Противоречие завершает доказательство предложения.

Предположим, что коэффициент m удовлетворяет неравенству

$$m \geq \max \left(2 - \sum_{i=1}^3 a_i, \frac{1}{7} \left(16 - 4 \sum_{i=1}^4 a_i \right) \right).$$

Тогда нетрудно проверить, что выполнены условия:

(i) линейная система дивизоров

$$|-MK_V - F|$$

имеет неподвижную компоненту или пуста при любом $M \in \mathbb{Z}_+$, $F \in \text{Pic } V$ – класс слоя π ;

(ii) $M(K_V^2) + (F \cdot K_V)$ – неэффективный цикл коразмерности 2 для любого $M \in \mathbb{Z}$. Зафиксируем многообразие, для которого выполнены эти условия и условия общности положения (a),(b).

Пусть $\pi': V' \rightarrow \mathbb{P}^1$ – четырехмерное проективное многообразие, неособое в коразмерности 1, расслоенное на трехмерные многообразия отрицательной кодаировой размерности.

ТЕОРЕМА 9.1. *Всякое бирациональное отображение*

$$\chi: V \dashrightarrow V'$$

является послыйным относительно π, π' , т.е. $\pi' \circ \chi = \alpha \circ \pi$ для некоторого изоморфизма $\alpha: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$.

СЛЕДСТВИЕ 9.1. *V имеет единственную структуру пучка трехмерных многообразий отрицательной кодаировой размерности и не имеет структуры расслоения на коники или рациональные поверхности. Группа бирациональных автоморфизмов $\text{Bir } V$ конечна, в общем случае тривиальна.*

Доказательство теоремы проводится по той же схеме, что и доказательства двух предыдущих теорем, с учетом тех оценок на кратности вертикальных 2-циклов, которые были получены выше. Максимальные циклы на V исключаются, как в [3], [5] или [10]. Ключевой этап рассуждений – исключение сверхмаксимальной особенности – почти дословно повторяет § 4. Решающее неравенство, дающее искомое противоречие (конец § 4 работы) в случае пучка квартик выглядит так:

$$(5\Sigma_0^2 + 4\Sigma_0\Sigma_1 + \Sigma_2^2)n^2 + (2\Sigma_0 - 2\Sigma_2)ne + e^2 < 0,$$

что, очевидно, невозможно. Детали оставляем читателю.

Список литературы

1. Алексеев В. А. Условия рациональности трехмерных многообразий с пучком поверхностей дель Пеццо степени 4 // Матем. заметки. 1987. Т. 41. № 5. С. 724–730.
2. Bardelli F. Polarized mixed Hodge structures: On irrationality of threefolds via degeneration // Ann. Mat. Pura et Appl. 1984. V. 137. P. 287–369.
3. Исковских В. А. Бирациональные автоморфизмы трехмерных алгебраических многообразий. Современные проблемы математики. Т. 12. М.: ВИНТИ, 1978. С. 159–236.
4. Исковских В. А. О проблеме рациональности для трехмерных алгебраических многообразий, расслоенных на поверхности дель Пеццо // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова. 1995. Т. 208. С. 128–138.
5. Исковских В. А., Манин Ю. И. Трехмерные квартики и контрпримеры к проблеме Люрота // Матем. сб. 1971. Т. 86. № 1. С. 140–166.

6. *Iskovskikh V. A., Pukhlikov A. V.* Birational automorphisms of multi-dimensional algebraic varieties // Algebraic Geometry 1. J. Math. Sci. 1996. V. 82. № 4. P. 3528–3613.
7. *Манин Ю. И.* Рациональные поверхности над совершенными полями // Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. 1966. V. 30. P. 56–97.
8. *Манин Ю. И.* Кубические формы. М.: Наука, 1972.
9. *Пухликов А. В.* Бирациональные автоморфизмы двойного пространства и двойной квадррики // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1988. Т. 52. № 1. С. 229–239.
10. *Пухликов А. В.* Замечание о теореме В. А. Исковских и Ю. И. Манина о трехмерной квартике // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова. 1995. Т. 208. С. 278–289.
11. *Pukhlikov A. V.* Essentials of the method of maximal singularities Warwick Preprint 31, 1996.
12. *Pukhlikov A. V.* Birational automorphisms of three-dimensional Del Pezzo fibrations Warwick Preprint 30, 1996.
13. *Pukhlikov A. V.* Birational automorphisms of three-dimensional algebraic varieties with a pencil of cubic surfaces. Preprint MPI, 1996.
14. *Саркисов В. Г.* Бирациональные автоморфизмы расслоений на коники // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1980. Т. 44. № 4. С. 918–945.
15. *Саркисов В. Г.* О структурах расслоений на коники // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1982. Т. 46. № 2. С. 371–408.

Институт системного анализа РАН,
Москва, Россия

Поступило в редакцию
29.V.1996