Общероссийский математический портал

С. Г. Танкеев, О следах Фробениуса, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1998, том 62, выпуск 1, 165–200

DOI: <https://doi.org/10.4213/im189>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 16:22:12

УДК 512.6

С. Г. Танкеев

О следах Фробениуса

В статье обсуждается одно диофантово свойство следов Фробениуса, ассоциированных с абелевым многообразием над числовым полем k и дается его приложение к доказательству гипотезы Мамфорда–Тэйта для $4p$ -мерного абелева многообразия J над k , где p – простое число, $p \geq 17$, $\text{Cent}(\text{End}(J \otimes \bar{k})) = \mathbb{Z}$ или (при некоторых слабых ограничениях) $\text{End}^0(J \otimes \bar{k})$ является минимальным квадратичным расширением поля $\mathbb{Q}$.

Библиография: 23 наименования.

§ 0. Введение

0.1. Пусть J – абелево многообразие над числовым полем $k \subset \mathbb{C}$, $[k : \mathbb{Q}] < \infty$. Предположим, что l – простое число,

$$\rho_l : \text{Gal}(\bar{k}/k) \rightarrow \text{GL}(H_{\text{et}}^1(J \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l))$$

– естественное l -адическое представление.

Хорошо известно, что ρ_l неразветвлено вне конечного множества T неархимедовых точек поля k . Мы обозначаем через $F_{\bar{v}} \in \text{Gal}(\bar{k}/k)$ элемент Фробениуса, ассоциированный с точкой $\bar{v}$ поля $\bar{\mathbb{Q}}$, лежащей над неразветвленной точкой v поля k . Класс сопряженности $\rho_l(F_{\bar{v}}^{-1})$ зависит только от v , характеристический полином $\rho_l(F_{\bar{v}}^{-1})$ лежит в $\mathbb{Z}[t] \subset \mathbb{Q}_l[t]$ и все его корни имеют абсолютную величину $(\text{Norm}_{k/\mathbb{Q}}(v))^{1/2}$.

Пусть S – множество неархимедовых точек k . Напомним, что плотность Дирихле множества S во множестве всех неархимедовых точек поля k определяется как

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} \text{Card}\{v \in S \mid \text{Norm}_{k/\mathbb{Q}}(v) \leq x\}$$

(если такой предел существует). Плотность $\{v \mid \text{Norm}_{k/\mathbb{Q}}(v) = p_v\}$ равна 1 (см. [4, гл. 8, п. 2.4]).

Следующий результат хорошо известен.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 95-01-00631). Статья была написана во время стажировки в Институте Макса Планка в 1995–96 г. Автор хотел бы выразить признательность сотрудникам института за гостеприимство.

0.2. ТЕОРЕМА КАПА [6, п. 2.1], [13, п. 2.7.1]. *Предположим, что для некоторого натурального числа n $l^n > 2 \dim_k J$ и все точки l^n -кручения в $J(\bar{k})$ рациональны над k . Тогда множество $\{v \mid v - \text{неразветвленная точка поля } k, \text{ Norm}_{k/\mathbb{Q}}(v) = p_v - \text{простое число и } p_v \text{ не делит } \text{Tr}(\rho_l(F_v^{-1}))\}$ имеет плотность 1.*

Эта теорема играет важную роль в доказательстве следующей теоремы.

0.3. ТЕОРЕМА СЕРРА [6, п. 6]. *Пусть J – простое абелево многообразие над числовым полем k . Если $\dim_k J$ – нечетное число и $\text{End}(J \otimes \bar{k}) = \mathbb{Z}$, то для J верны гипотезы Ходжа [9], [10], Тэйта [21] и Мамфорда–Тэйта [11].*

Обзор техники Серра содержится в [6].

Мы хотим распространить теорему Серра в область четных размерностей.

Пусть Δ – множество всех собственных чисел $\rho_l(F_v^{-1})$ (без учета кратностей). Группа Галуа $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ действует естественным образом на Δ и на $\Delta \cdot \Delta$. Для каждого элемента $\eta \in \Delta \cdot \Delta$ мы определяем отображение $T_\eta: \Delta \rightarrow \bar{\mathbb{Q}}^\times$ формулой $T_\eta(\delta) = \eta\delta^{-1}$. Это отображение является модификацией отображения $T_\gamma^0: \Delta \rightarrow \bar{\mathbb{Q}}^\times$ в [6, п. 5.2], которое определено формулой $T_\gamma^0(\delta) = \gamma^2\delta^{-1}$ для $\gamma \in \Delta$. Очевидно, для любого элемента $\sigma \in \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$

$$\text{Card}(T_{\sigma(\eta)}(\Delta) \cap \Delta) = \text{Card}(T_{\sigma(\eta)}(\sigma(\Delta)) \cap \sigma(\Delta)) = \text{Card}(T_\eta(\Delta) \cap \Delta),$$

и, следовательно, для любой константы c множество

$$\{\eta \in \Delta \cdot \Delta \mid \text{Card}(T_\eta(\Delta) \cap \Delta) = c\} \text{ является } \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})\text{-инвариантным. (0.3.1)}$$

Таким образом, мы имеем хороший инструмент для вычисления $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -инвариантных подмножеств в $\Delta \cdot \Delta$, который используется, например, в [18]–[20].

С другой стороны, некоторые (не все) элементы множества $\Delta \cdot \Delta$ являются собственными числами $\rho_l^{\wedge 2}(F_v^{-1})$, где

$$\rho_l^{\wedge 2}: \text{Gal}(\bar{k}/k) \rightarrow \text{GL}(H_{\text{et}}^2(J \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l)) = \text{GL}(\wedge^2 H_{\text{et}}^1(J \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l))$$

– естественное l -адическое представление. Следовательно, имеет смысл посмотреть на след оператора $\rho_l^{\wedge 2}(F_v^{-1})$.

0.4. ТЕОРЕМА. *Пусть J – некоторое d -мерное абелево многообразие над числовым полем k . Предположим, что для некоторого натурального числа n $l^n > d(2d - 1)$, все точки l^n -кручения в $J(\bar{k})$ рациональны над k и k содержит все корни степени l^n из единицы. Если $d \geq 2$, то множество $\{v \mid v - \text{неразветвленная точка поля } k, \text{ Norm}_{k/\mathbb{Q}}(v) = p_v - \text{простое число и } p_v \text{ не делит } \text{Tr}(\rho_l^{\wedge 2}(F_v^{-1}))\}$ имеет плотность 1.*

Основная идея доказательства аналогична идее, которая используется А. Огасом при доказательстве существования многих обыкновенных редукций абелевой

поверхности над числовым полем [13, п. 2.7 – 2.10]. Конечно, мы используем теоремы Г. Фалтинга [8].

Предположим, что J имеет хорошую редукцию J_v в неархимедовой точке v поля k . Очевидно, $\mathrm{Tr}(\rho_l^{\wedge 2}(F_v^{-1}))$ совпадает со следом линейного оператора в 2-мерных гомологиях J_v , индуцированного эндоморфизмом Фробениуса абелева многообразия J_v над простым полем $\mathbb{F}_{p_v}$.

0.5. Напомним, что абелево многообразие J имеет обыкновенную редукцию в неархимедовой точке v поля k с полем вычетов $k(v) = \mathbb{F}_{q_v}$ характеристики p_v тогда и только тогда, когда специальный слой J_v минимальной модели Нерона J является абелевым многообразием и выполняются следующие эквивалентные условия:

(0.5.1) p_v -ранг J_v равен $\dim_{k(v)} J_v$;

(0.5.2) для любого собственного числа δ эндоморфизма Фробениуса l -адического модуля Тэйта $T_l(J_v \otimes_{k(v)} \overline{k(v)})(l \neq p_v)$ и для любой точки w поля $\overline{\mathbb{Q}}$ над p_v выполняется следующее соотношение:

$$\frac{w(\delta)}{w(q_v)} \in \{0, 1\}$$

(см. [7, п. 2]).

0.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Абелево многообразие J над числовым полем k имеет много обыкновенных редукций тогда и только тогда, когда существует такое множество S неархимедовых точек поля k , что J имеет обыкновенную редукцию в каждой точке $v \in S$, и плотность S положительна.

Мы рассмотрим некоторые следствия теоремы 0.4. Обозначим через $(\mathrm{Lie} \mathrm{Im}(\rho_l))^{ss}$ полупростую часть редуктивной алгебры Ли $\mathrm{Lie} \mathrm{Im}(\rho_l)$. Следующий результат первоначально был доказан в [20, теоремы 1.14, 1.16, 1.17] при дополнительном предположении, что J имеет много обыкновенных редукций.

0.7. ТЕОРЕМА. *Предположим, что p – простое число. Пусть J – простое $4p$ -мерное абелево многообразие над числовым полем k .*

Предположим, что $\mathrm{End}(J \otimes \overline{k}) = \mathbb{Z}$ и $p \geq 17$. Тогда $(\mathrm{Lie} \mathrm{Im}(\rho_l))^{ss} \otimes \overline{\mathbb{Q}}_l$ является полупростой алгеброй Ли типа C_{4p} , для J верны общая гипотеза Ходжа, гипотезы Тэйта и Мамфорда–Тэйта.

Предположим, что $\mathrm{End}^0(J \otimes \overline{k})$ – неопределенная кватернионная алгебра с делением над $\mathbb{Q}$ и $p \neq 2$, $p \neq 5$. Тогда $(\mathrm{Lie} \mathrm{Im}(\rho_l))^{ss} \otimes \overline{\mathbb{Q}}_l$ является полупростой алгеброй Ли типа C_{2p} , для J верны общая гипотеза Ходжа, гипотезы Тэйта и Мамфорда–Тэйта.

Предположим, что $\mathrm{End}^0(J \otimes \overline{k})$ – определенная кватернионная алгебра с делением над $\mathbb{Q}$ и $p \neq 2$. Тогда $(\mathrm{Lie} \mathrm{Im}(\rho_l))^{ss} \otimes \overline{\mathbb{Q}}_l$ является полупростой алгеброй Ли типа D_{2p} , для J верна гипотеза Мамфорда–Тэйта.

0.8. Предположим, что $\text{End}^0(J \otimes \bar{k}) = K$ – мнимое квадратичное расширение поля $\mathbb{Q}$. Тогда $K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ – прямая сумма двух копий поля $\mathbb{C}$, индексированных двумя различными вложениями σ, τ поля K в $\mathbb{C}$, $\text{Lie}(J_{\mathbb{C}}) = M_{\sigma} \oplus M_{\tau}$, где $M_{\sigma} = \{v \in \text{Lie}(J_{\mathbb{C}}) \mid e \cdot v = \sigma(e)v \text{ для всех } e \in K\}$, $M_{\tau} = \{v \in \text{Lie}(J_{\mathbb{C}}) \mid e \cdot v = \tau(e)v \text{ для всех } e \in K\}$, $\dim_k J = n_{\sigma} + n_{\tau}$, $n_{\sigma} = \dim_{\mathbb{C}} M_{\sigma} \geq 1$, $n_{\tau} = \dim_{\mathbb{C}} M_{\tau} \geq 1$ [16, теорема 5]. Следующий результат является более сильным вариантом теоремы 1.18 из [20].

0.9. ТЕОРЕМА. *Предположим, что p – простое число, $p \geq 17$. Пусть J – абсолютно простое $4p$ -мерное абелево многообразие над числовым полем k . Предположим, что $\text{End}^0(J \otimes \bar{k})$ – мнимое квадратичное расширение поля $\mathbb{Q}$. Тогда $(\text{Lie Im}(\rho_l))^{ss} \otimes \overline{\mathbb{Q}_l}$ является полупростой алгеброй Ли типа A_{2p-1} или $A_3 \times A_{p-1}$. Если J имеет много обыкновенных редукций, то $(\text{Lie Im}(\rho_l))^{ss} \otimes \overline{\mathbb{Q}_l}$ является полупростой алгеброй Ли типа A_{2p-1} , существует канонический изоморфизм полупростых частей*

$$[\text{Lie Im}(\rho_l)]^{ss} \simeq [\text{Lie}[\text{MT}(J_{\mathbb{C}})(\mathbb{Q}_l)]]^{ss};$$

более того, для $n_{\sigma} \neq 2p$ он продолжается до изоморфизма

$$\text{Lie Im}(\rho_l) \simeq \text{Lie}[\text{MT}(J_{\mathbb{C}})(\mathbb{Q}_l)],$$

и в этом случае $\mathbb{Q}_l$ -пространство $H_{\text{et}}^{2r}(J \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l(r))^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}$ порождается классами когомологий пересечений дивизоров.

§ 1. О следе Фробениуса в 2-х гомологиях абелева многообразия

1.1. Мы рассмотрим здесь доказательство теоремы 0.4.

Предположим, что $\text{Tr}(\rho_l^{\wedge 2}(F_v^{-1})) = p_v \cdot b_v$, где b_v – целое число. По теореме А. Вейля [12, гл. 4, § 21, теорема 4] абсолютная величина b_v не превышает

$$d(2d-1) = \dim_{\mathbb{Q}_l} H_{\text{et}}^2(J \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l).$$

Более того, мы можем предполагать, что p_v неразветвлено в k . Из соотношения $\text{Norm}_{k/\mathbb{Q}}(v) = p_v$ следует, что p_v полностью распадается в k . Следовательно, мы имеем

$$k \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_{p_v} \simeq \mathbb{Q}_{p_v} \times \cdots \times \mathbb{Q}_{p_v}. \quad (1.1.1)$$

По условию теоремы k содержит все корни степени l^n из единицы. С другой стороны, хорошо известно, что $(\mathbb{Q}_{p_v}^{\times})_{\text{tors}} \simeq \mathbb{Z}/(p_v-1)\mathbb{Z}$. Из (1.1.1) следует, что $l^n \mid (p_v-1)$ и, следовательно,

$$p_v \equiv 1 \pmod{l^n}. \quad (1.1.2)$$

По условию теоремы все точки порядка l^n в $J(\bar{k})$ рациональны над k . Поэтому $\rho_l|_{\text{Gal}(\bar{k}/k)}$ тривиально по модулю l^n и, следовательно, $\rho_l^{\wedge 2}|_{\text{Gal}(\bar{k}/k)}$ также тривиально по модулю l^n . Значит,

$$p_v \cdot b_v \equiv d(2d-1) \pmod{l^n}. \quad (1.1.3)$$

Ясно, что соотношения (1.1.1)–(1.1.3) и неравенство $l^n > d(2d - 1)$ дают соотношения

$$\begin{aligned} d(2d - 1) \bmod l^n &= b_v \bmod l^n, \\ b_v &= d(2d - 1), \\ \mathrm{Tr}(\rho_l^{\wedge 2}(F_{\bar{v}}^{-1})) &= p_v \cdot b_v = p_v \cdot d(2d - 1). \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

Этот след является суммой $d(2d - 1)$ комплексных чисел, равных по абсолютной величине p_v . Из соотношения (1.1.4) следует, что каждое число в действительности совпадает с p_v , и все собственные числа оператора $\rho_l^{\wedge 2}(F_{\bar{v}}^{-1})$ равны p_v . В этой ситуации

$$\mathrm{Tr}(\rho_l^{\wedge 2}(F_{\bar{v}}^{-1})) = d(2d - 1) \mathrm{Tr}(\chi_l^{-1}(F_{\bar{v}}^{-1})), \quad (1.1.5)$$

где $\chi_l: \mathrm{Gal}(\bar{k}/k) \rightarrow \mathbb{Z}_l^\times$ – циклотомический характер, определенный естественным действием группы $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ на 1-мерном модуле Тейта $\mathbb{Z}_l(1) = T_l(\mu)$, ассоциированным с группой корней степени l^* из единицы в $\bar{k}$.

1.2. Фиксируем k -поляризацию на J . Обозначим через

$$\Psi: H_{\mathrm{et}}^1(J \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l) \times H_{\mathrm{et}}^1(J \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l) \rightarrow \mathbb{Q}_l(-1)$$

индуцированную невырожденную альтернированную форму на пространстве $H_{\mathrm{et}}^1(J \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l)$. Известно, что спаривание Вейля $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ -эquivариантно, поэтому

$$\Psi(\sigma x, \sigma y) = \chi_l^{-1}(\sigma) \cdot \Psi(x, y)$$

для всех $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$, $x, y \in H_{\mathrm{et}}^1(J \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l)$. Из этого соотношения следует, что $\mathrm{Ker}(\rho_l) \subset \mathrm{Ker}(\chi_l)$. Поэтому мы можем рассматривать χ_l как характер группы $\mathrm{Im}(\rho_l)$. Значит,

$$f(s) = \mathrm{Tr}(s^{\wedge 2}) - d(2d - 1) \mathrm{Tr}(\chi_l^{-1}(s))$$

– аналитическая функция на компактной l -адической группе Ли $\mathrm{Im}(\rho_l)$. В силу (1.1.5) эта функция обращается в нуль на множестве $\{\rho_l(F_{\bar{v}}^{-1})|v - \text{неразветвленная точка поля } k, \mathrm{Norm}_{k/\mathbb{Q}}(v) = p_v - \text{простое число и } p_v \text{ делит } \mathrm{Tr}(\rho_l^{\wedge 2}(F_{\bar{v}}^{-1}))\}$.

Предположим сначала, что множество нулей Z_f функции f совпадает со всей группой $\mathrm{Im}(\rho_l)$. Из теорем Г. Фалтингса [8] следует, что ρ_l и $\rho_l^{\wedge 2}$ – полупростые представления. Так как два полупростых представления в характеристике нуль изоморфны, если и только если они имеют одинаковые следы, то мы имеем соотношение $\rho_l^{\wedge 2} = (\chi_l^{-1})^{\oplus d(2d-1)}$ и

$$\dim_{\mathbb{Q}_l} H_{\mathrm{et}}^2(J \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l(1))^{\mathrm{Im}(\rho_l)} = d(2d - 1). \quad (1.2.1)$$

С другой стороны, в силу результатов Г. Фалтингса [8]

$$\mathrm{End}_{\mathrm{Im}(\rho_l)} H_{\mathrm{et}}^1(J \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l) \simeq \mathrm{End}(J) \otimes \mathbb{Q}_l.$$

Согласно хорошо известным теоремам Тэйта [22, теоремы 3 и 4] это соотношение дает

$$H_{\text{et}}^2(J \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l(1))^{\text{Im}(\rho_l)} \simeq NS(J) \otimes \mathbb{Q}_l. \quad (1.2.2)$$

Из (1.2.1), (1.2.2) следует, что $\mathbb{Q}_l$ -пространство $H_{\text{et}}^2(J \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l(1))$ порождается алгебраическими классами когомологий. Поскольку $\text{rank}(NS(J \otimes_k \mathbb{C})) \leq h^{1,1}(J \otimes_k \mathbb{C})$, то мы имеем равенство $h^{2,0}(J \otimes_k \mathbb{C}) = 0$. Это возможно только в случае, когда J – эллиптическая кривая.

В нашей ситуации $\dim_k J \geq 2$. Поэтому множество нулей Z_f функции f является аналитической гиперповерхностью на компактной группе Ли $\text{Im}(\rho_l)$ и инвариантно относительно сопряжения. Пусть μ – мера Хаара на $\text{Im}(\rho_l)$, для которой полная масса $\text{Im}(\rho_l)$ равна 1. Хорошо известно, что $\mu(Z_f) = 0$ [15, гл. 1, п. 2.2, упражнение]. По теореме Чеботарёва о плотности множество $\{v \mid v \text{ – неразветвленная точка } k, \text{ Norm}_{k/\mathbb{Q}}(v) = p_v \text{ – простое число и } \rho_l(F_v^{-1}) \in Z_f\}$ имеет плотность нуль. Поэтому $\{v \mid v \text{ – неразветвленная точка } k, \text{ Norm}_{k/\mathbb{Q}}(v) = p_v \text{ – простое число и } p_v \text{ делит } \text{Tr}(\rho_l^{\wedge 2}(F_v^{-1}))\}$ имеет плотность нуль. Это доказывает утверждение.

1.3. СЛЕДСТВИЕ. Пусть J – некоторое d -мерное абелево многообразие над числовым полем k . Предположим, что для некоторого натурального числа n $l^n > d(2d - 1)$, все точки порядка l^n в $J(\bar{k})$ рациональны над k и k содержит все корни степени l^n из единицы. Если $d \geq 2$, то множество $\{v \mid v \text{ – неразветвленная точка } k, \text{ Norm}_{k/\mathbb{Q}}(v) = p_v \text{ – простое число и } p_v \text{ не делит след линейного оператора в } 2\text{-х гомологиях } J_v, \text{ индуцированного эндоморфизмом Фробениуса абелева многообразия } J_v \text{ над простым полем } \mathbb{F}_{p_v}\}$ имеет плотность 1.

§ 2. Циклы на простом абелевом многообразии размерности $4p$ над числовым полем

2.1. Мы рассмотрим здесь доказательство теоремы 0.7.

Предположим, что $\text{End}(J \otimes \bar{k}) = \mathbb{Z}$ и $p \geq 17$. Пусть $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, \dots\}$ – множество всех положительных натуральных чисел. Прежде всего мы определим множество исключительных чисел

$$\begin{aligned} \text{Ex}(1) &= \left\{ 4^l, \frac{1}{2} \binom{4l+2}{2l+1}^{2m-1}, 2^{8lm+4l-4m-3}, 4^l(m+1)^{2l+1} \mid l, m \in \mathbb{N}^+ \right\} \\ &= \{4, 10, 16, 32, 64, 108, 126, 256, 500, 512, 864, 1024, \\ &\quad 1372, 1716, 2048, \dots\}. \end{aligned}$$

Легко проверить, что для любого простого числа p число $4p$ не является исключительным [20, лемма 4.3]. Поэтому $\text{Lie Hg}(J_{\mathbb{C}}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = \text{sp}_{8p}$, и общая гипотеза Ходжа верна для $J_{\mathbb{C}} \times \dots \times J_{\mathbb{C}}$, где $\text{Hg}(J_{\mathbb{C}})$ – группа Ходжа комплексного абелева многообразия $J_{\mathbb{C}} = J \otimes_k \mathbb{C}$ [19, теорема 1.1].

Мы также напомним следующий классификационный результат.

2.2. ТЕОРЕМА [17, теорема 2], [18, теорема 2.2], [19, теорема 4.1], [20, теорема 2.2]. *Предположим, что g – простая алгебра Ли ранга n над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль, $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ – фундаментальные веса, $E = E(n_1\omega_1 + \dots + n_m\omega_m)$ – неприводимый g -модуль со старшим весом $n_1\omega_1 + \dots + n_m\omega_m$, где $n_i \in \mathbb{N}$.*

Пусть p – простое число.

Предположим, что $\deg E = p$.

Если E – ортогональное представление, то тройка (тип g , E , p) принимает следующие значения:

$$(A_1, E((p-1)\omega_1), p), \quad p \geq 3, \quad (2.2.1)$$

$$(B_{(p-1)/2}, E(\omega_1), p), \quad p \geq 5, \quad (2.2.2)$$

$$(G_2, E(\omega_1), 7). \quad (2.2.3)$$

Более того, старший вес g -модуля E является радикальным весом.

Если E – симплектическое представление, то тройка (тип g , E , p) принимает следующее значение:

$$(A_1, E(\omega_1), 2). \quad (2.2.4)$$

Если $E \neq E^$, то тройка (тип g , E , p) принимает следующие значения:*

$$(A_{p-1}, E(\omega_1), p), (A_{p-1}, E(\omega_{p-1}), p), \quad p \geq 3. \quad (2.2.5)$$

Предположим, что $\deg E = 2p$.

Если E – ортогональное представление, то тройка (тип g , E , p) принимает следующие значения:

$$(B_2, E(2\omega_2), 5), \quad (2.2.6)$$

$$(B_2, E(2\omega_1), 7), \quad (2.2.7)$$

$$(C_3, E(\omega_2), 7), \quad (2.2.8)$$

$$(G_2, E(\omega_2), 7), \quad (2.2.9)$$

$$(F_4, E(\omega_4), 13), \quad (2.2.10)$$

$$(D_p, E(\omega_1), p), \quad p \geq 3. \quad (2.2.11)$$

Более того, в (2.2.6)–(2.2.10) старший вес g -модуля E является радикальным весом.

Если E – симплектическое представление, то тройка (тип g , E , p) принимает следующие значения:

$$(A_1, E((2p-1)\omega_1), p), \quad (2.2.12)$$

$$(C_3, E(\omega_3), 7), \quad (2.2.13)$$

$$(C_p, E(\omega_1), p). \quad (2.2.14)$$

Если $E \neq E^*$, то тройка (тип g , E , p) принимает следующие значения:

$$(A_2, E(2\omega_1), 3), \quad (A_2, E(2\omega_2), 3), \quad (2.2.15)$$

$$(A_2, E(3\omega_1), 5), \quad (A_2, E(3\omega_2), 5), \quad (2.2.16)$$

$$(A_3, E(2\omega_1), 5), \quad (A_3, E(2\omega_3), 5), \quad (2.2.17)$$

$$(A_4, E(\omega_2), 5), \quad (A_4, E(\omega_3), 5), \quad (2.2.18)$$

$$(A_{2p-1}, E(\omega_1), p), \quad (A_{2p-1}, E(\omega_{2p-1}), p). \quad (2.2.19)$$

Предположим, что $\deg E = 4p$.

Если E – ортогональное представление, то тройка (тип g , E , p) принимает следующие значения:

$$(A_2, E(\omega_1 + \omega_2), 2), \quad (2.2.20)$$

$$(A_3, E(2\omega_2), 5), \quad (2.2.21)$$

$$(B_3, E(\omega_3), 2), \quad (2.2.22)$$

$$(B_4, E(2\omega_1), 11), \quad (2.2.23)$$

$$(C_5, E(\omega_2), 11), \quad (2.2.24)$$

$$(D_4, E(\omega_2), 7), \quad (2.2.25)$$

$$(D_4, E(\omega_3), 2), \quad (2.2.26)$$

$$(D_4, E(\omega_4), 2), \quad (2.2.27)$$

$$(F_4, E(\omega_1), 13), \quad (2.2.28)$$

$$(D_{2p}, E(\omega_1), p). \quad (2.2.29)$$

Более того, в (2.2.20), (2.2.21), (2.2.23)–(2.2.25), (2.2.28) старший вес g -модуля E является радикальным весом.

Если E – симплектическое представление, то тройка (тип g , E , p) принимает следующие значения:

$$(A_1, E((4p-1)\omega_1), p), \quad (2.2.30)$$

$$(A_5, E(\omega_3), 5), \quad (2.2.31)$$

$$(B_2, E(3\omega_2), 5), \quad (2.2.32)$$

$$(C_{2p}, E(\omega_1), p). \quad (2.2.33)$$

Если $E \neq E^*$, то тройка (тип g , E , p) принимает следующие значения:

$$(A_2, E(6\omega_1), 7), \quad (A_2, E(6\omega_2), 7), \quad (2.2.34)$$

$$(A_3, E(\omega_1 + \omega_2), 5), \quad (A_3, E(\omega_2 + \omega_3), 5), \quad (2.2.35)$$

$$(A_3, E(3\omega_1), 5), \quad (A_3, E(3\omega_3), 5), \quad (2.2.36)$$

$$(A_6, E(2\omega_1), 7), \quad (A_6, E(2\omega_6), 7), \quad (2.2.37)$$

$$(A_7, E(\omega_2), 7), \quad (A_7, E(\omega_6), 7), \quad (2.2.38)$$

$$(A_{4p-1}, E(\omega_1), p), \quad (A_{4p-1}, E(\omega_{4p-1}), p). \quad (2.2.39)$$

Эта теорема следует из формулы Г. Вейля [3, гл. 8].

2.3. Пусть G_{V_l} – алгебраическая оболочка $\mathrm{Im}(\rho_l) \subset \mathrm{GL}(V_l)$, где

$$V_l = H_{\mathrm{et}}^1(J \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l).$$

По теореме Ф. А. Богомолова [1] $\mathrm{Lie} \mathrm{Im}(\rho_l) = \mathrm{Lie}(G_{V_l})$ и G_{V_l} содержит группу G_m гомотетий. В силу теорем Г. Фалтингса [8] G_{V_l} редуктивна и

$$\mathrm{End}_{G_{V_l}}(V_l) = \mathrm{End}(J) \otimes \mathbb{Q}_l.$$

Пусть $g_l = \mathrm{Lie} \mathrm{Im}(\rho_l)$. Обозначим через g_l^{ss} полупростую часть алгебры Ли g_l . По теореме Ж.-П. Серра [6, теорема 3.10] ранг G_{V_l} (соответственно g_l) не зависит от l . В рассматриваемом случае мы можем считать, что $G_{V_l} = S_{V_l} \cdot G_m$, где $S_{V_l} = [G_{V_l}, G_{V_l}]$ – коммутант G_{V_l} [6, п. 1.2.2b].

2.4. Предположим, что v – неархимедова точка k , в которой J имеет хорошую редукцию. Пусть $\bar{v}$ – некоторое продолжение v на $\bar{k}$, и пусть $F_{\bar{v}} \in \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ – элемент Фробениуса. Хорошо известно, что характеристический полином $\rho_l(F_{\bar{v}}^{-1})$ совпадает с характеристическим полиномом эндоморфизма Фробениуса π_v редукции J_v многообразия J в точке v . Мы обозначаем через Δ множество всех собственных чисел $\rho_l(F_{\bar{v}}^{-1})$ (без учета кратностей). Пусть Γ_v – мультипликативная подгруппа $\bar{\mathbb{Q}}^\times$, порожденная Δ .

Хорошо известно, что $\mathbb{Q}[\pi_v] = \prod K_i$, где K_i – числовые поля. Мультипликативная группа $\mathbb{Q}[\pi_v]^\times$ определяет $\mathbb{Q}$ -тор $T_{\pi_v} = \prod R_{K_i/\mathbb{Q}}(G_{mK_i})$, где $R_{K_i/\mathbb{Q}}$ – функторы ограничения скаляров по Вейлю. Пусть H_v – наименьшая алгебраическая подгруппа T_{π_v} , определенная над $\mathbb{Q}$, для которой $\pi_v \in H_v(\mathbb{Q})$. Хорошо известно, что H_v – группа мультипликативного типа. Связная компонента единицы в H_v называется *тором Фробениуса* T_v . Она может рассматриваться как $\mathbb{Q}$ -модель связной компоненты 1 в замыкании Зариского множества $\{\rho_l(F_{\bar{v}}^{-1})^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ в G_{V_l} (см. [6, п. 3b]).

2.5. Как легкое следствие теоремы 0.4 и [6, предложения 3.6, 5.2.1, лемма 2.1, следствие 3.8] мы имеем следующий результат.

После замены k на некоторое конечное расширение мы можем считать, что для некоторого множества S плотности 1 во множестве всех неархимедовых точек k и для всех $v \in S$ выполняются следующие условия:

- 1) для фиксированного целого $n \geq 2$, удовлетворяющего неравенству $l^n > (2\dim_k J)^2$, все точки порядка l^n в $J(\bar{k})$ рациональны над k , и k содержит все корни степени l^n из единицы;
- 2) $p_v = \mathrm{char}(k(v)) > (2\dim_k J)^2$;
- 3) $\mathrm{Norm}_{k/\mathbb{Q}}(v) = p_v$;
- 4) следы Фробениуса $\mathrm{Tr}(\rho_l(F_{\bar{v}}^{-1}))$ и $\mathrm{Tr}(\rho_l^{\wedge 2}(F_{\bar{v}}^{-1}))$ не делятся на p_v ;
- 5) Γ_v не имеет кручения, G_{V_l} связна и $\rho_l(F_{\bar{v}}^{-1}) \in T_v(\bar{\mathbb{Q}}_l)$;
- 6) тор Фробениуса T_v является максимальным тором в G_{V_l} и

$$\mathrm{rank}(\Gamma_v) = \dim(T_v) = \mathrm{rank}(G_{V_l}).$$

2.6. Хорошо известно, что $V_l \otimes \overline{\mathbb{Q}_l}$ – абсолютно неприводимый симплектический $g_l^{ss} \otimes \overline{\mathbb{Q}_l}$ -модуль.

Предположим, что алгебра Ли $g_l^{ss} \otimes \overline{\mathbb{Q}_l}$ проста. Из соотношения $\dim_k J = 4p \notin \text{Ex}(1)$ следует, что $g_l^{ss} \otimes \overline{\mathbb{Q}_l}$ – алгебра Ли типа C_{4p} [18, пп. 1.3 – 1.8]. С другой стороны, $\text{Lie Hg}(J_{\mathbb{C}}) \otimes \overline{\mathbb{Q}_l} \subset \text{sp}(V_l \otimes \overline{\mathbb{Q}_l})$. По теореме Пятацкого–Шапиро–Делиня–Борового [14], [2] существует каноническое вложение

$$\text{Lie Im}(\rho_l) \subset \text{Lie}[\text{MT}(J_{\mathbb{C}})(\mathbb{Q}_l)] = \mathbb{Q}_l \times \text{Lie}[\text{Hg}(J_{\mathbb{C}})(\mathbb{Q}_l)].$$

Поэтому существует канонический изоморфизм алгебр Ли

$$\text{Lie Im}(\rho_l) \simeq \text{Lie}[\text{MT}(J_{\mathbb{C}})(\mathbb{Q}_l)].$$

Это соотношение влечет эквивалентность обычной гипотезы Ходжа для $J_{\mathbb{C}}$ и гипотезы Тэйта для J .

2.7. Далее мы можем считать, что алгебра Ли $g_l^{ss} \otimes \overline{\mathbb{Q}_l}$ не является простой.

Пусть $f: S \rightarrow S_{V_l} \otimes \overline{\mathbb{Q}_l}$ – универсальное накрытие, где $S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_q$ – произведение простых односвязных алгебраических $\mathbb{Q}_l$ -групп. Изогения f продолжается до изогении

$$f: G_m \times S_1 \times \cdots \times S_q \rightarrow G_m \cdot (S_{V_l} \otimes \overline{\mathbb{Q}_l}) = G_{V_l} \otimes \overline{\mathbb{Q}_l},$$

определенной формулой $f((a, s)) = a \cdot f(s)$ для $a \in G_m$, $s \in S_1 \times \cdots \times S_q$.

В силу (2.5.6) тор Фробениуса T_v является максимальным тором в G_{V_l} . Поэтому

$$T = (f^{-1}(T_v \otimes \overline{\mathbb{Q}_l}))^0 \subset G_m \times S_1 \times \cdots \times S_q$$

– максимальный подтор. Рассмотрим канонические проекции

$$\begin{aligned} \text{pr}_0: G_m \times S_1 \times \cdots \times S_q &\rightarrow G_m, \\ \text{pr}_i: G_m \times S_1 \times \cdots \times S_q &\rightarrow S_i. \end{aligned}$$

Очевидно, $T = \text{pr}_0(T) \times \text{pr}_1(T) \times \cdots \times \text{pr}_q(T)$.

С другой стороны,

$$V_l \otimes \overline{\mathbb{Q}_l} = W_1 \otimes \cdots \otimes W_q,$$

где W_1 – неприводимый $G_m \times S_1$ -модуль, W_2 – неприводимый S_2 -модуль, $\dots$, W_q – неприводимый S_q -модуль. Пусть

$$\begin{aligned} \rho_1: G_m \times S_1 &\rightarrow \text{GL}(W_1), \\ \rho_i: S_i &\rightarrow \text{GL}(W_i), \quad i \geq 2, \end{aligned}$$

– соответствующие представления. Мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} G_m \times S_1 \times \cdots \times S_q & \xrightarrow{\rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_q} & \mathrm{GL}(W_1 \otimes \cdots \otimes W_q) \\ \downarrow f & & \parallel \\ G_{V_l} \otimes \overline{\mathbb{Q}_l} & \subset & \mathrm{GL}(W_1 \otimes \cdots \otimes W_q). \end{array}$$

В силу (2.5.5) $\rho_l(F_{\overline{v}}^{-1}) \in T_v(\overline{\mathbb{Q}_l})$, поэтому существует такой элемент

$$\tau_{\overline{v}} = (\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_q) \in \mathrm{pr}_0(T) \times \mathrm{pr}_1(T) \times \cdots \times \mathrm{pr}_q(T),$$

что

$$(\rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_q)(\tau_{\overline{v}}) = f(\tau_{\overline{v}}) = \rho_l(F_{\overline{v}}^{-1}).$$

Мы видим, что любое собственное число оператора $\rho_l(F_{\overline{v}}^{-1})$ имеет вид $\chi_0^{(0)}(\tau_0) \times \chi_i^{(1)}(\tau_1) \cdots \chi_j^{(q)}(\tau_q)$, где $\chi_k^{(m)} \in X(\mathrm{pr}_m(T))$ – некоторые характеры.

2.8. В силу (2.5.1) $\mathrm{Im}(\rho_l) \subset \{x \in \mathrm{End} T_l(J \otimes \overline{k}) \mid x \in 1 + l^n \mathrm{End} T_l(J \otimes \overline{k})\}$. Поэтому для любого $x \in \mathrm{Im}(\rho_l)$ определен l -адический логарифм $\log x$.

Пусть μ – мера Хаара на $\mathrm{Im}(\rho_l)$, нормализованная условием $\mu(\mathrm{Im}(\rho_l)) = 1$. Хорошо известно, что $X = \{x \in \mathrm{Im}(\rho_l) \mid \log x \text{ – регулярный элемент в } \mathrm{Lie} \mathrm{Im}(\rho_l)\}$ открыто и всюду плотно в $\mathrm{Im}(\rho_l)$. Его граница ∂X – замкнутое аналитическое подмножество. Поэтому $\mu(\partial X) = 0$ [15, п. 2.2]. Более того, множество X инвариантно относительно сопряжения в $\mathrm{Im}(\rho_l)$. По теореме Чеботарёва плотность $\{v \mid \rho_l(F_{\overline{v}}^{-1}) \in X\}$ равна $\mu(X) = 1 - \mu(\partial X) = 1$ [15, п. 2.2, следствие 2]. Поэтому мы можем считать, что для v выполняются условия (2.5.1)–(2.5.6), и $\log \rho_l(F_{\overline{v}}^{-1})$ – регулярный элемент в $\mathrm{Lie} \mathrm{Im}(\rho_l)$.

С другой стороны, любой W_i является симплектическим или ортогональным S_i -модулем. Из теоремы 2.2 и неравенства $p \geq 17$ следует, что пара (тип $g_l^{ss} \otimes \mathbb{Q}_l$, $V_l \otimes \overline{\mathbb{Q}_l}$) принимает одно из следующих значений:

$$(C_2 \times D_p, E(\omega_1^{(1)} + \omega_1^{(2)})), \quad (2.8.1)$$

$$(A_1 \times A_1 \times C_p, E(\omega_1^{(1)} + \omega_1^{(2)} + \omega_1^{(3)})), \quad (2.8.2)$$

$$(A_1 \times D_{2p}, E(\omega_1^{(1)} + \omega_1^{(2)})), \quad (2.8.3)$$

$$(A_1 \times D_p, E(3\omega_1^{(1)} + \omega_1^{(2)})), \quad (2.8.4)$$

$$(A_1 \times A_1, E(7\omega_1^{(1)} + (p-1)\omega_1^{(2)})), \quad (2.8.5)$$

$$(A_1 \times B_{(p-1)/2}, E(7\omega_1^{(1)} + \omega_1^{(2)})), \quad (2.8.6)$$

$$(C_4 \times A_1, E(\omega_1^{(1)} + (p-1)\omega_1^{(2)})), \quad (2.8.7)$$

$$(C_4 \times B_{(p-1)/2}, E(\omega_1^{(1)} + \omega_1^{(2)})), \quad (2.8.8)$$

$$(A_1 \times A_1 \times A_1 \times A_1, E(\omega_1^{(1)} + \omega_1^{(2)} + \omega_1^{(3)} + (p-1)\omega_1^{(4)})), \quad (2.8.9)$$

$$(A_1 \times A_1 \times A_1 \times B_{(p-1)/2}, E(\omega_1^{(1)} + \omega_1^{(2)} + \omega_1^{(3)} + \omega_1^{(4)})), \quad (2.8.10)$$

$$(A_1 \times A_1 \times A_1, E(\omega_1^{(1)} + \omega_1^{(2)} + (2p-1)\omega_1^{(3)})), \quad (2.8.11)$$

где индекс (i) показывает, что соответствующий фундаментальный вес относится к i -му множителю.

2.9. Рассмотрим случай $(C_2 \times D_p, E(\omega_1^{(1)} + \omega_1^{(2)}))$. В силу (2.5.6) мы можем считать, что $\Delta = \{\lambda \alpha_{1,2}^{\pm 1} \beta_j^{\pm 1} \mid j = 1, \dots, p\}$, где $\lambda, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \dots, \beta_p$ мультипликативно независимы (другими словами, эти числа порождают мультипликативную подгруппу в $\overline{\mathbb{Q}}^\times$ ранга $p + 3$).

2.10. ЛЕММА. *Следующие подмножества в $\Delta \cdot \Delta \text{ Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -инвариантны:*

$$\begin{aligned} &\{\lambda^2\}, \quad \{\lambda^2 \alpha_1^{\pm 1} \alpha_2^{\pm 1}\}, \quad \{\lambda^2 \alpha_{1,2}^{\pm 2}\}, \quad \{\lambda^2 \beta_i^{\pm 1} \beta_j^{\pm 1} \mid i \neq j\}, \\ &\{\lambda^2 \beta_i^{\pm 2}\}, \quad \{\lambda^2 \alpha_1^{\pm 1} \alpha_2^{\pm 1} \beta_i^{\pm 1} \beta_j^{\pm 1} \mid i \neq j\}, \\ &\{\lambda^2 \alpha_1^{\pm 1} \alpha_2^{\pm 1} \beta_i^{\pm 2}\}, \quad \{\lambda^2 \alpha_{1,2}^{\pm 2} \beta_i^{\pm 1} \beta_j^{\pm 1} \mid i \neq j\}, \\ &\{\lambda^2 \alpha_{1,2}^{\pm 2} \beta_i^{\pm 2}\}. \end{aligned}$$

Более того, $\lambda^2 = \pm p_v$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\eta \in \Delta \cdot \Delta$. Мы можем считать, что

$$\eta \in \{\lambda^2, \lambda^2 \alpha_1^2, \lambda^2 \alpha_1 \alpha_2, \lambda^2 \beta_1^2, \lambda^2 \alpha_1^2 \beta_1^2, \lambda^2 \alpha_1 \alpha_2 \beta_1^2, \lambda^2 \beta_1 \beta_2, \lambda^2 \alpha_1^2 \beta_1 \beta_2, \lambda^2 \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2\}.$$

Если $\delta \in \Delta$, то $T_\eta(\delta) = \eta \delta^{-1}$, поэтому

$$\begin{aligned} T_{\lambda^2}(\delta) \in \Delta &\Leftrightarrow \delta \in \Delta, \quad T_{\lambda^2 \alpha_1^2}(\delta) \in \Delta \Leftrightarrow \delta \in \{\lambda \alpha_1 \beta_j^{\pm 1} \mid j = 1, \dots, p\}, \\ T_{\lambda^2 \alpha_1 \alpha_2}(\delta) \in \Delta &\Leftrightarrow \delta \in \{\lambda \alpha_{1,2} \beta_j^{\pm 1} \mid j = 1, \dots, p\}, \quad T_{\lambda^2 \beta_1^2}(\delta) \in \Delta \Leftrightarrow \delta \in \{\lambda \alpha_{1,2}^{\pm 1} \beta_1\}, \\ T_{\lambda^2 \alpha_1^2 \beta_1^2}(\delta) \in \Delta &\Leftrightarrow \delta \in \{\lambda \alpha_1 \beta_1\}, \quad T_{\lambda^2 \alpha_1 \alpha_2 \beta_1^2}(\delta) \in \Delta \Leftrightarrow \delta \in \{\lambda \alpha_{1,2} \beta_1\}, \\ T_{\lambda^2 \beta_1 \beta_2}(\delta) \in \Delta &\Leftrightarrow \delta \in \{\lambda \alpha_{1,2}^{\pm 1} \beta_{1,2}\}, \quad T_{\lambda^2 \alpha_1^2 \beta_1 \beta_2}(\delta) \in \Delta \Leftrightarrow \delta \in \{\lambda \alpha_1 \beta_{1,2}\}, \\ T_{\lambda^2 \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2}(\delta) \in \Delta &\Leftrightarrow \delta \in \{\lambda \alpha_{1,2} \beta_{1,2}\}. \end{aligned}$$

Ясно, что

$$\begin{aligned} \text{Card}(T_{\lambda^2}(\Delta) \cap \Delta) &= \text{Card}(\Delta) = 8p, & \text{Card}(T_{\lambda^2 \alpha_1^2}(\Delta) \cap \Delta) &= 2p, \\ \text{Card}(T_{\lambda^2 \alpha_1 \alpha_2}(\Delta) \cap \Delta) &= 4p, & \text{Card}(T_{\lambda^2 \beta_1^2}(\Delta) \cap \Delta) &= 4, \\ \text{Card}(T_{\lambda^2 \alpha_1^2 \beta_1^2}(\Delta) \cap \Delta) &= 1, & \text{Card}(T_{\lambda^2 \alpha_1 \alpha_2 \beta_1^2}(\Delta) \cap \Delta) &= 2, \\ \text{Card}(T_{\lambda^2 \beta_1 \beta_2}(\Delta) \cap \Delta) &= 8, & \text{Card}(T_{\lambda^2 \alpha_1^2 \beta_1 \beta_2}(\Delta) \cap \Delta) &= 2, \\ \text{Card}(T_{\lambda^2 \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2}(\Delta) \cap \Delta) &= 4. \end{aligned}$$

$\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -инвариантность

$$\begin{aligned} &\{\lambda^2\}, \quad \{\lambda^2 \alpha_1^{\pm 1} \alpha_2^{\pm 1}\}, \quad \{\lambda^2 \alpha_{1,2}^{\pm 2}\}, \quad \{\lambda^2 \beta_i^{\pm 1} \beta_j^{\pm 1} \mid i \neq j\}, \quad \{\lambda^2 \alpha_{1,2}^{\pm 2} \beta_i^{\pm 2}\}, \\ &\{\lambda^2 \beta_i^{\pm 2}\} \cup \{\lambda^2 \alpha_1^{\pm 1} \alpha_2^{\pm 1} \beta_i^{\pm 1} \beta_j^{\pm 1} \mid i \neq j\}, \end{aligned}$$

$$\{\lambda^2 \alpha_1^{\pm 1} \alpha_2^{\pm 1} \beta_i^{\pm 2}\} \cup \{\lambda^2 \alpha_{1,2}^{\pm 2} \beta_i^{\pm 1} \beta_j^{\pm 1} \mid i \neq j\}$$

следует из (0.3.1).

Поскольку $\{\lambda^2 \alpha_1^{\pm 1} \alpha_2^{\pm 1} \beta_i^{\pm 1} \beta_j^{\pm 1} \mid i \neq j\} = \{\lambda^2 \alpha_1^{\pm 1} \alpha_2^{\pm 1}\} \cdot \{\lambda^2 \beta_i^{\pm 1} \beta_j^{\pm 1} \mid i \neq j\} \times \{\lambda^{-2}\}$ и каждый множитель в этом разложении $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -инвариантен, мы получаем $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -инвариантность множеств $\{\lambda^2 \alpha_1^{\pm 1} \alpha_2^{\pm 1} \beta_i^{\pm 1} \beta_j^{\pm 1} \mid i \neq j\}$ и $\{\lambda^2 \beta_i^{\pm 2}\}$. $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -инвариантность других множеств следует из того факта, что все множители в разложениях

$$\begin{aligned} \{\lambda^2 \alpha_1^{\pm 1} \alpha_2^{\pm 1} \beta_i^{\pm 2}\} &= \{\lambda^2 \alpha_1^{\pm 1} \alpha_2^{\pm 1}\} \cdot \{\lambda^2 \beta_i^{\pm 2}\} \cdot \{\lambda^{-2}\}, \\ \{\lambda^2 \alpha_{1,2}^{\pm 2} \beta_i^{\pm 1} \beta_j^{\pm 1} \mid i \neq j\} &= \{\lambda^2 \alpha_{1,2}^{\pm 2}\} \cdot \{\lambda^2 \beta_i^{\pm 1} \beta_j^{\pm 1} \mid i \neq j\} \cdot \{\lambda^{-2}\} \end{aligned}$$

$\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -инвариантны.

Соотношение $\lambda^2 = \pm p_v$ следует из того факта, что $\lambda^2 \in \mathbb{Q}$ имеет абсолютную величину p_v . Лемма доказана.

2.11. Очевидно, множество всех собственных чисел $\rho_l^{\wedge 2}(F_v^{-1})$ совпадает с

$$\Delta \cdot \Delta - \{\lambda^2 \alpha_{1,2}^{\pm 2} \beta_i^{\pm 2}\}.$$

В силу теоремы 0.4 мы можем считать, что p_v не делит $\text{Tr}(\rho_l^{\wedge 2}(F_v^{-1}))$. Из соображений симметрии видно, что кратность $\eta \in \{\lambda^2 \alpha_1^{\pm 1} \alpha_2^{\pm 1}\}$ как собственного числа оператора $\rho_l^{\wedge 2}(F_v^{-1})$ не зависит от выбора η . Это верно для других $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -инвариантных подмножеств, определенных в формулировке леммы 2.10. Мы получаем из этой леммы, что $\text{Tr}(\rho_l^{\wedge 2}(F_v^{-1}))$ является суммой целых чисел следующих типов:

$$\begin{aligned} \lambda^2, \sum \lambda^2 \alpha_1^{\pm 1} \alpha_2^{\pm 1}, \sum \lambda^2 \alpha_{1,2}^{\pm 2}, \sum_{i \neq j} \lambda^2 \beta_i^{\pm 1} \beta_j^{\pm 1}, \sum \lambda^2 \beta_i^{\pm 2}, \\ \sum_{i \neq j} \lambda^2 \alpha_1^{\pm 1} \alpha_2^{\pm 1} \beta_i^{\pm 1} \beta_j^{\pm 1}, \sum \lambda^2 \alpha_1^{\pm 1} \alpha_2^{\pm 1} \beta_i^{\pm 2}, \sum_{i \neq j} \lambda^2 \alpha_{1,2}^{\pm 2} \beta_i^{\pm 1} \beta_j^{\pm 1}. \end{aligned}$$

Поэтому p_v не делит хотя бы одну из этих сумм.

2.12. Предположим, что p_v не делит $\sum \lambda^2 \alpha_1^{\pm 1} \alpha_2^{\pm 1}$. Тогда для любой точки w поля $\overline{\mathbb{Q}}$, лежащей над p_v ,

$$w\left(\sum \lambda^2 \alpha_1^{\pm 1} \alpha_2^{\pm 1}\right) = 0.$$

Поэтому существует такой элемент $x_w \in \{\lambda^2 \alpha_1^{\pm 1} \alpha_2^{\pm 1}\}$, что $w(x_w) = 0$. Значит,

$$0 = w(x_w) = \frac{1}{2} \{w(x_w \beta_1^2) + w(x_w \beta_1^{-2})\}.$$

Поскольку слагаемые в последних скобках неотрицательны в силу соотношений $x_w \beta_1^{\pm 2} \in \Delta \cdot \Delta$, то мы имеем равенства

$$w(x_w \beta_1^2) = w(x_w \beta_1^{-2}) = 0.$$

В итоге $w(\beta_1) = 0$ для всех $w|p_v$. Поэтому β_1 — корень из 1 [23, подлемма 3.4.0], что противоречит мультипликативной независимости β_1 .

Значит, p_v делит $\sum \lambda^2 \alpha_1^{\pm 1} \alpha_2^{\pm 1}$. Из соотношения $\lambda^2 = \pm p_v$ следует, что $\sum \alpha_1^{\pm 1} \times \alpha_2^{\pm 1}$ — целое число.

Аналогично доказывается, что $\sum \alpha_{1,2}^{\pm 2}$ — целое число.

2.13. Предположим, что p_v не делит $\sum_{i \neq j} \lambda^2 \beta_i^{\pm 1} \beta_j^{\pm 1}$. В этом случае для любой точки w поля $\overline{\mathbb{Q}}$, лежащей над p_v ,

$$w\left(\sum_{i \neq j} \lambda^2 \beta_i^{\pm 1} \beta_j^{\pm 1}\right) = 0.$$

Поэтому существует такой элемент $x_w \in \{\lambda^2 \beta_i^{\pm 1} \beta_j^{\pm 1}\}$, что $w(x_w) = 0$. В итоге

$$0 = w(x_w) = \frac{1}{2} \{w(x_w \alpha_1^2) + w(x_w \alpha_1^{-2})\}.$$

Поскольку слагаемые в последних скобках неотрицательны в силу соотношений $x_w \alpha_1^{\pm 2} \in \Delta \cdot \Delta$, то мы имеем равенства

$$w(x_w \alpha_1^2) = w(x_w \alpha_1^{-2}) = 0.$$

Значит, $w(\alpha_1) = 0$ для всех $w|p_v$. Поэтому α_1 – корень из 1 [23, подлемма 3.4.0], что противоречит мультипликативной независимости α_1 .

Поэтому p_v делит $\sum_{i \neq j} \lambda^2 \beta_i^{\pm 1} \beta_j^{\pm 1}$, и $\sum_{i \neq j} \beta_i^{\pm 1} \beta_j^{\pm 1}$ – целое число.

Аналогично доказывается, что $\sum \beta_i^{\pm 2}$ – целое число.

2.14. Рассмотрим разложение

$$\sum_{i \neq j} \lambda^2 \alpha_1^{\pm 1} \alpha_2^{\pm 1} \beta_i^{\pm 1} \beta_j^{\pm 1} = \left(\sum \lambda^2 \alpha_1^{\pm 1} \alpha_2^{\pm 1}\right) \cdot \left(\sum_{i \neq j} \beta_i^{\pm 1} \beta_j^{\pm 1}\right).$$

Мы доказали, что p_v делит первый множитель в этом разложении, а второй множитель – целое число. Поэтому p_v делит произведение.

Разложения

$$\begin{aligned} \sum \lambda^2 \alpha_1^{\pm 1} \alpha_2^{\pm 1} \beta_i^{\pm 2} &= \left(\sum \lambda^2 \alpha_1^{\pm 1} \alpha_2^{\pm 1}\right) \cdot \left(\sum \beta_i^{\pm 2}\right), \\ \sum_{i \neq j} \lambda^2 \alpha_{1,2}^{\pm 2} \beta_i^{\pm 1} \beta_j^{\pm 1} &= \left(\sum \lambda^2 \alpha_{1,2}^{\pm 2}\right) \cdot \left(\sum_{i \neq j} \beta_i^{\pm 1} \beta_j^{\pm 1}\right) \end{aligned}$$

показывают, что p_v делит каждую из левых частей.

Следовательно, p_v делит $\text{Tr}(\rho_l^{\wedge 2}(F_v^{-1}))$ вопреки нашим предположениям. Это исключает случай $(C_2 \times D_p, E(\omega_1^{(1)} + \omega_1^{(2)}))$.

2.15. Поскольку структура Δ не различает случаи $(C_2 \times D_p, E(\omega_1^{(1)} + \omega_1^{(2)}))$ и $(A_1 \times A_1 \times C_p, E(\omega_1^{(1)} + \omega_1^{(2)} + \omega_1^{(3)})) = (D_2 \times C_p, E(\omega_1^{(1)} + \omega_1^{(2)}))$, то мы исключаем случай $(A_1 \times A_1 \times C_p, E(\omega_1^{(1)} + \omega_1^{(2)} + \omega_1^{(3)}))$ тем же способом.

2.16. Рассмотрим случай $(A_1 \times D_{2p}, E(\omega_1^{(1)} + \omega_1^{(2)}))$. В силу (2.5.6) мы можем считать, что $\Delta = \{\lambda \alpha_1^{\pm 1} \beta_i^{\pm 1} \mid i = 1, \dots, 2p\}$, где $\lambda, \alpha_1, \beta_1, \dots, \beta_{2p}$ мультипликативно независимы. Доказательство следующего результата аналогично доказательству леммы 2.10.

2.17. ЛЕММА. *Следующие подмножества $\Delta \cdot \Delta \subset \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -инвариантны:*

$$\begin{aligned} &\{\lambda^2\}, \quad \{\lambda^2 \alpha_1^{\pm 2}\}, \quad \{\lambda^2 \beta_i^{\pm 1} \beta_j^{\pm 1} \mid i \neq j\}, \quad \{\lambda^2 \beta_i^{\pm 2}\}, \\ &\{\lambda^2 \alpha_1^{\pm 2} \beta_i^{\pm 1} \beta_j^{\pm 1} \mid i \neq j\}, \quad \{\lambda^2 \alpha_1^{\pm 2} \beta_i^{\pm 2}\}. \end{aligned}$$

Более того, $\lambda^2 = \pm p_v$.

2.18. Очевидно, множество всех собственных чисел оператора $\rho_l^{\wedge 2}(F_v^{-1})$ совпадает с $\Delta \cdot \Delta - \{\lambda^2 \alpha_1^{\pm 2} \beta_i^{\pm 2}\}$.

В силу теоремы 0.4 мы можем считать, что p_v не делит $\text{Tr}(\rho_l^{\wedge 2}(F_v^{-1}))$. Очевидно, что этот след является суммой целых чисел следующих типов:

$$\lambda^2, \quad \sum \lambda^2 \alpha_1^{\pm 2}, \quad \sum_{i \neq j} \lambda^2 \beta_i^{\pm 1} \beta_j^{\pm 1}, \quad \sum \lambda^2 \beta_i^{\pm 2}, \quad \sum_{i \neq j} \lambda^2 \alpha_1^{\pm 2} \beta_i^{\pm 1} \beta_j^{\pm 1}.$$

Поэтому p_v не делит хотя бы одну из этих сумм. Действуя, как в шп. 2.12–2.14, мы докажем, что

$$\sum \alpha_1^{\pm 2}, \quad \sum_{i \neq j} \beta_i^{\pm 1} \beta_j^{\pm 1}, \quad \sum \beta_i^{\pm 2}, \quad \sum_{i \neq j} \alpha_1^{\pm 2} \beta_i^{\pm 1} \beta_j^{\pm 1}$$

– целые числа. Поэтому p_v делит $\text{Tr}(\rho_l^{\wedge 2}(F_v^{-1}))$ вопреки нашим предположениям. Это исключает случай $(A_1 \times D_{2p}, E(\omega_1^{(1)} + \omega_1^{(2)}))$.

2.19. Рассмотрим вариант $(A_1 \times D_p, E(3\omega_1^{(1)} + \omega_1^{(2)}))$. В силу (2.5.6) мы можем считать, что $\Delta = \{\lambda \alpha_1^{\pm 1, \pm 3} \beta_i^{\pm 1} \mid i = 1, \dots, p\}$, где $\lambda, \alpha_1, \beta_1, \dots, \beta_p$ мультипликативно независимы.

2.20. ЛЕММА. *Следующие подмножества $\Delta \cdot \Delta \subset \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -инвариантны:*

$$\begin{aligned} &\{\lambda^2\}, \quad \{\lambda^2 \alpha_1^{\pm 2}\}, \quad \{\lambda^2 \alpha_1^{\pm 4}\}, \quad \{\lambda^2 \alpha_1^{\pm 6}\}, \quad \{\lambda^2 \beta_i^{\pm 1} \beta_j^{\pm 1} \mid i \neq j\}, \quad \{\lambda^2 \alpha_1^{\pm 2} \beta_i^{\pm 1} \beta_j^{\pm 1} \mid i \neq j\}, \\ &\{\lambda^2 \alpha_1^{\pm 4} \beta_i^{\pm 1} \beta_j^{\pm 1} \mid i \neq j\}, \quad \{\lambda^2 \alpha_1^{\pm 6} \beta_i^{\pm 1} \beta_j^{\pm 1} \mid i \neq j\}, \quad \{\lambda^2 \beta_i^{\pm 2}\}, \\ &\{\lambda^2 \alpha_1^{\pm 2} \beta_i^{\pm 2}\}, \quad \{\lambda^2 \alpha_1^{\pm 4} \beta_i^{\pm 2}\}, \quad \{\lambda^2 \alpha_1^{\pm 6} \beta_i^{\pm 2}\}. \end{aligned}$$

Более того, $\lambda^2 = \pm p_v$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\eta \in \Delta \cdot \Delta$. Мы можем считать, что

$$\eta \in \{\lambda^2, \lambda^2\alpha_1^2, \lambda^2\alpha_1^4, \lambda^2\alpha_1^6, \lambda^2\beta_1^2, \lambda^2\alpha_1^2\beta_1^2, \lambda^2\alpha_1^4\beta_1^2, \lambda^2\alpha_1^6\beta_1^2, \\ \lambda^2\beta_1\beta_2, \lambda^2\alpha_1^2\beta_1\beta_2, \lambda^2\alpha_1^4\beta_1\beta_2, \lambda^2\alpha_1^6\beta_1\beta_2\}.$$

Если $\delta \in \Delta$, то $T_\eta(\delta) = \eta\delta^{-1}$, поэтому

$$\begin{aligned} T_{\lambda^2}(\delta) \in \Delta &\Leftrightarrow \delta \in \Delta, & T_{\lambda^2\alpha_1^2}(\delta) \in \Delta &\Leftrightarrow \delta \in \{\lambda\alpha_1^{\pm 1,3}\beta_i^{\pm 1} \mid i = 1, \dots, p\}, \\ T_{\lambda^2\alpha_1^4}(\delta) \in \Delta &\Leftrightarrow \delta \in \{\lambda\alpha_1^{1,3}\beta_i^{\pm 1} \mid i = 1, \dots, p\}, \\ T_{\lambda^2\alpha_1^6}(\delta) \in \Delta &\Leftrightarrow \delta \in \{\lambda\alpha_1^3\beta_i^{\pm 1} \mid i = 1, \dots, p\}, \\ T_{\lambda^2\beta_1^2}(\delta) \in \Delta &\Leftrightarrow \delta \in \{\lambda\alpha_1^{\pm 1, \pm 3}\beta_1\}, & T_{\lambda^2\alpha_1^2\beta_1^2}(\delta) \in \Delta &\Leftrightarrow \delta \in \{\lambda\alpha_1^{\pm 1,3}\beta_1\}, \\ T_{\lambda^2\alpha_1^4\beta_1^2}(\delta) \in \Delta &\Leftrightarrow \delta \in \{\lambda\alpha_1^{1,3}\beta_1\}, & T_{\lambda^2\alpha_1^6\beta_1^2}(\delta) \in \Delta &\Leftrightarrow \delta \in \{\lambda\alpha_1^3\beta_1\}, \\ T_{\lambda^2\beta_1\beta_2}(\delta) \in \Delta &\Leftrightarrow \delta \in \{\lambda\alpha_1^{\pm 1, \pm 3}\beta_{1,2}\}, & T_{\lambda^2\alpha_1^2\beta_1\beta_2}(\delta) \in \Delta &\Leftrightarrow \delta \in \{\lambda\alpha_1^{\pm 1,3}\beta_{1,2}\}, \\ T_{\lambda^2\alpha_1^4\beta_1\beta_2}(\delta) \in \Delta &\Leftrightarrow \delta \in \{\lambda\alpha_1^{1,3}\beta_{1,2}\}, & T_{\lambda^2\alpha_1^6\beta_1\beta_2}(\delta) \in \Delta &\Leftrightarrow \delta \in \{\lambda\alpha_1^3\beta_{1,2}\}. \end{aligned}$$

Ясно, что

$$\begin{aligned} \text{Card}(T_{\lambda^2}(\Delta) \cap \Delta) &= \text{Card}(\Delta) = 8p, & \text{Card}(T_{\lambda^2\alpha_1^2}(\Delta) \cap \Delta) &= 6p, \\ \text{Card}(T_{\lambda^2\alpha_1^4}(\Delta) \cap \Delta) &= 4p, & \text{Card}(T_{\lambda^2\alpha_1^6}(\Delta) \cap \Delta) &= 2p, \\ \text{Card}(T_{\lambda^2\beta_1^2}(\Delta) \cap \Delta) &= 4, & \text{Card}(T_{\lambda^2\alpha_1^2\beta_1^2}(\Delta) \cap \Delta) &= 3, \\ \text{Card}(T_{\lambda^2\alpha_1^4\beta_1^2}(\Delta) \cap \Delta) &= 2, & \text{Card}(T_{\lambda^2\alpha_1^6\beta_1^2}(\Delta) \cap \Delta) &= 1, \\ \text{Card}(T_{\lambda^2\beta_1\beta_2}(\Delta) \cap \Delta) &= 8, & \text{Card}(T_{\lambda^2\alpha_1^2\beta_1\beta_2}(\Delta) \cap \Delta) &= 6, \\ \text{Card}(T_{\lambda^2\alpha_1^4\beta_1\beta_2}(\Delta) \cap \Delta) &= 4, & \text{Card}(T_{\lambda^2\alpha_1^6\beta_1\beta_2}(\Delta) \cap \Delta) &= 2. \end{aligned}$$

$\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -инвариантность

$$\begin{aligned} &\{\lambda^2\}, \{\lambda^2\alpha_1^{\pm 2}\}, \{\lambda^2\alpha_1^{\pm 4}\}, \{\lambda^2\alpha_1^{\pm 6}\}, \\ &\{\lambda^2\beta_i^{\pm 2}\} \cup \{\lambda^2\alpha_1^{\pm 4}\beta_i^{\pm 1}\beta_j^{\pm 1} \mid i \neq j\}, \{\lambda^2\alpha_1^{\pm 2}\beta_i^{\pm 2}\}, \\ &\{\lambda^2\alpha_1^{\pm 4}\beta_i^{\pm 2}\} \cup \{\lambda^2\alpha_1^{\pm 6}\beta_i^{\pm 1}\beta_j^{\pm 1} \mid i \neq j\}, \{\lambda^2\alpha_1^{\pm 6}\beta_i^{\pm 2}\}, \\ &\{\lambda^2\beta_i^{\pm 1}\beta_j^{\pm 1} \mid i \neq j\}, \{\lambda^2\alpha_1^{\pm 2}\beta_i^{\pm 1}\beta_j^{\pm 1} \mid i \neq j\} \end{aligned}$$

следует из (0.3.1). Поскольку

$$\{\lambda^2\alpha_1^{\pm 4}\beta_i^{\pm 1}\beta_j^{\pm 1} \mid i \neq j\} = \{\lambda^2\alpha_1^{\pm 4}\} \cdot \{\lambda^2\beta_i^{\pm 1}\beta_j^{\pm 1} \mid i \neq j\} \cdot \{\lambda^{-2}\}$$

и каждый множитель в этом разложении $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -инвариантен, мы получаем $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -инвариантность множеств $\{\lambda^2\alpha_1^{\pm 4}\beta_i^{\pm 1}\beta_j^{\pm 1} \mid i \neq j\}$ и $\{\lambda^2\beta_i^{\pm 2}\}$. Разложение

$$\{\lambda^2\alpha_1^{\pm 6}\beta_i^{\pm 1}\beta_j^{\pm 1} \mid i \neq j\} = \{\lambda^2\alpha_1^{\pm 6}\} \cdot \{\lambda^2\beta_i^{\pm 1}\beta_j^{\pm 1} \mid i \neq j\} \cdot \{\lambda^{-2}\}$$

дает $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -инвариантность множеств $\{\lambda^2\alpha_1^{\pm 6}\beta_i^{\pm 1}\beta_j^{\pm 1} \mid i \neq j\}$ и $\{\lambda^2\alpha_1^{\pm 4}\beta_i^{\pm 2}\}$, что и требовалось доказать.

2.21. Очевидно, что множество всех собственных чисел $\rho_l^{\wedge 2}(F_v^{-1})$ совпадает с $\Delta \cdot \Delta - \{\lambda^2 \alpha_1^{\pm 6} \beta_i^{\pm 2}\}$.

В силу теоремы 0.4 можно считать, что p_v не делит $\text{Tr}(\rho_l^{\wedge 2}(F_v^{-1}))$. Очевидно, что этот след является суммой целых чисел следующих типов:

$$\begin{aligned} & \lambda^2, \sum \lambda^2 \alpha_1^{\pm 2}, \sum \lambda^2 \alpha_1^{\pm 4}, \sum \lambda^2 \alpha_1^{\pm 6}, \sum_{i \neq j} \lambda^2 \beta_i^{\pm 1} \beta_j^{\pm 1}, \\ & \sum_{i \neq j} \lambda^2 \alpha_1^{\pm 2} \beta_i^{\pm 1} \beta_j^{\pm 1}, \sum_{i \neq j} \lambda^2 \alpha_1^{\pm 4} \beta_i^{\pm 1} \beta_j^{\pm 1}, \sum_{i \neq j} \lambda^2 \alpha_1^{\pm 6} \beta_i^{\pm 1} \beta_j^{\pm 1}, \\ & \sum \lambda^2 \beta_i^{\pm 2}, \sum \lambda^2 \alpha_1^{\pm 2} \beta_i^{\pm 2}, \sum \lambda^2 \alpha_1^{\pm 4} \beta_i^{\pm 2}. \end{aligned}$$

Поэтому p_v не делит хотя бы одну из этих сумм. Действуя, как в п. 2.12, мы докажем, что

$$\sum \alpha_1^{\pm 2}, \sum \alpha_1^{\pm 4}, \sum \alpha_1^{\pm 6}$$

— целые числа. Действуя, как в п. 2.13, мы докажем, что

$$\begin{aligned} & \sum_{i \neq j} \beta_i^{\pm 1} \beta_j^{\pm 1}, \sum_{i \neq j} \alpha_1^{\pm 2} \beta_i^{\pm 1} \beta_j^{\pm 1}, \sum_{i \neq j} \alpha_1^{\pm 4} \beta_i^{\pm 1} \beta_j^{\pm 1}, \\ & \sum \beta_i^{\pm 2}, \sum \alpha_1^{\pm 2} \beta_i^{\pm 2}, \sum \alpha_1^{\pm 4} \beta_i^{\pm 2} \end{aligned}$$

— целые числа. Разложение

$$\sum_{i \neq j} \lambda^2 \alpha_1^{\pm 6} \beta_i^{\pm 1} \beta_j^{\pm 1} = \lambda^2 \cdot \left(\sum \alpha_1^{\pm 6} \right) \cdot \left(\sum_{i \neq j} \beta_i^{\pm 1} \beta_j^{\pm 1} \right)$$

показывает, что p_v делит левую часть. Поэтому p_v делит $\text{Tr}(\rho_l^{\wedge 2}(F_v^{-1}))$ вопреки нашему предположению. Это исключает случай $(A_1 \times D_p, E(3\omega_1^{(1)} + \omega_1^{(2)}))$.

2.22. Рассмотрим случаи (2.8.5)–(2.8.10). Ясно, что $\dim_{\overline{\mathbb{Q}_l}} W_q = p$ и $\dim_{\overline{\mathbb{Q}_l}} W_1 \otimes \cdots \otimes W_{q-1} = 8$.

2.23. ЛЕММА. В обозначениях п. 2.7 предположим, что выполняется одно из следующих условий:

- 1) S_1 — простая односвязная группа Ли типа A_1 , $W_1 = E(7\omega_1^{(1)})$;
- 2) S_1 — простая односвязная группа Ли типа C_4 , $W_1 = E(\omega_1^{(1)})$;
- 3) $S_1 \times S_2 \times S_3$ — полупростая односвязная группа Ли типа $A_1 \times A_1 \times A_1$, $W_1 \otimes W_2 \otimes W_3 = E(\omega_1^{(1)} + \omega_1^{(2)} + \omega_1^{(3)})$.

Тогда старший вес S_q -модуля W_q не является радикальным весом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что

$$\Delta = \{\lambda\alpha_i^{\pm 1} \mid i = 1, \dots, 4\} \cdot \{\beta_j \mid j = 1, \dots, p\},$$

где $\lambda, \alpha_1, \dots, \alpha_4$ соответствуют $G_m \times S_1 \times \dots \times S_{q-1}$ и $\beta_1, \dots, \beta_p$ соответствуют S_q . Мы не предполагаем, что эти числа мультипликативно независимы. Пусть $\Phi = \{\lambda\alpha_i^{\pm 1} \mid i = 1, \dots, 4\}$, $\Psi = \{\beta_j \mid j = 1, \dots, p\}$.

Предположим, что старший вес S_q -модуля W_q является радикальным весом. В этом случае нуль является весом $\text{Lie}(S_q)$ -модуля W_q [3, гл. 8, § 7, упражнение 3]. Поэтому $1 \in \Psi$ и $\Phi \subset \Gamma_v$. С другой стороны, $\beta_j = (\lambda\alpha_1\beta_j)/(\lambda\alpha_1) \in \Gamma_v$. Поэтому $\Psi \subset \Gamma_v$. Мы обозначаем через Γ_Φ (соответственно Γ_Ψ) мультипликативную подгруппу в Γ_v , порожденную множеством Φ (соответственно Ψ). В силу (2.5.5), (2.5.6) Γ_Φ и Γ_Ψ — абелевы группы без кручения положительного ранга.

Ясно, что $\text{rank}(\Gamma_\Phi) \leq 1 + \text{rank} X(\text{pr}_1(T) \times \dots \times \text{pr}_{q-1}(T))$, $\text{rank}(\Gamma_\Psi) \leq \text{rank} X(\text{pr}_q(T))$, $\Gamma_v \subset \Gamma_\Phi \cdot \Gamma_\Psi$. Поэтому соотношения

$$\begin{aligned} \text{rank}(\Gamma_v) &\leq \text{rank}(\Gamma_\Phi \cdot \Gamma_\Psi) \leq \text{rank}(\Gamma_\Phi) + \text{rank}(\Gamma_\Psi) \\ &\leq 1 + \text{rank} X(\text{pr}_1(T) \times \dots \times \text{pr}_{q-1}(T)) + \text{rank} X(\text{pr}_q(T)) \\ &= \text{rank} X(T) = \text{rank} X(T_v \otimes \overline{\mathbb{Q}}_l) = \text{rank}(\Gamma_v) \end{aligned}$$

дают соотношения

$$\begin{aligned} \text{rank}(\Gamma_\Phi) &= 1 + \text{rank} X(\text{pr}_1(T) \times \dots \times \text{pr}_{q-1}(T)) \\ &= \text{rank} G_m \times S_1 \times \dots \times S_{q-1} \geq 2, \end{aligned} \quad (2.24.1)$$

$$\begin{aligned} \text{rank}(\Gamma_\Psi) &= \text{rank} X(\text{pr}_q(T)) = \text{rank} S_q, \\ \text{rank}(\Gamma_v) &= \text{rank}(\Gamma_\Phi \cdot \Gamma_\Psi) = \text{rank}(\Gamma_\Phi) + \text{rank}(\Gamma_\Psi). \end{aligned} \quad (2.24.2)$$

Следовательно,

$$\Gamma_\Phi \cap \Gamma_\Psi = (1). \quad (2.24.3)$$

Следуя [6, п. 5.2], для каждого $\gamma \in \Delta$ мы определяем $T_\gamma^0: \Delta \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}^\times$ формулой $T_\gamma^0(\delta) = \gamma^2\delta^{-1}$. Очевидно, что для любого $\sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$

$$\text{Card}(T_{\sigma(\gamma)}^0(\Delta) \cap \Delta) = \text{Card}(T_\gamma^0(\sigma(\Delta)) \cap \sigma(\Delta)) = \text{Card}(T_\gamma^0(\Delta) \cap \Delta),$$

и, следовательно, для любой константы c множество

$$\{\gamma \in \Delta \mid \text{Card}(T_\gamma^0(\Delta) \cap \Delta) = c\} \quad (2.24.4)$$

$\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -инвариантно. Рассмотрим случай (2.23.1). В этой ситуации можно считать, что

$$\Phi = \{\lambda\alpha_1^{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7}\}.$$

Мы утверждаем, что

$$\gamma \in \{\lambda\alpha_1^{\pm 1}\} \Leftrightarrow \text{Card}(T_\gamma^0(\Delta) \cap \Delta) \geq 7p. \quad (2.24.5)$$

Действительно, можно считать, что $\gamma \in \{\lambda\alpha_1\beta_i, \lambda\alpha_1^3\beta_i, \lambda\alpha_1^5\beta_i, \lambda\alpha_1^7\beta_i \mid i = 1, \dots, p\}$. Для $\delta \in \Delta$ мы имеем $T_\gamma^0(\delta) = \gamma^2\delta^{-1}$. Поэтому мультипликативная независимость λ, α_1 (которая следует из (2.24.1)) и (2.24.3) дают соотношение

$$T_{\lambda\alpha_1\beta_i}^0(\delta) = (\lambda\alpha_1\beta_i)^2 \cdot \delta^{-1} \in \Delta \Leftrightarrow \delta \in \{\lambda\alpha_1^{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7} \cdot \beta_i^2 \cdot \Psi\} \cap \Delta.$$

Очевидно, что

$$\text{Card}(T_{\lambda\alpha_1\beta_i}^0(\Delta) \cap \Delta) \geq 7p \Leftrightarrow \beta_i^2 \cdot \Psi = \Psi.$$

Поскольку $1 \in \Psi$, то мы имеем соотношение $(\beta_i^2 \cdot \Psi = \Psi) \Rightarrow (\beta_i^2 \in \Psi, \beta_i^3 \in \Psi, \dots, \beta_i^r \in \Psi \text{ для всех натуральных } r)$. Следовательно, β_i – корень из единицы, $\beta_i = 1$ (так как Γ_Ψ не имеет кручения), $\gamma = \lambda\alpha_1$. С другой стороны,

$$T_{\lambda\alpha_1^3\beta_i}^0(\delta) = (\lambda\alpha_1^3\beta_i)^2 \cdot \delta^{-1} \in \Delta \Leftrightarrow \delta \in \{\lambda\alpha_1^{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7} \cdot \beta_i^2 \cdot \Psi\} \cap \Delta,$$

и $\text{Card}(T_{\lambda\alpha_1^3\beta_i}^0(\Delta) \cap \Delta) \leq 5p$. Ясно, что для $r \geq 3$ $\text{Card}(T_{\lambda\alpha_1^r\beta_i}^0(\Delta) \cap \Delta) < 7p$. Это доказывает утверждение (2.24.5). В силу (2.24.4) множество $\{\lambda\alpha_1^{\pm 1}\}$ $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -инвариантно. Следовательно, $\lambda\alpha_1 + \lambda\alpha_1^{-1} \in \mathbb{Z}$. Более того, $\lambda\alpha_1 + \lambda\alpha_1^{-1} \neq 0$, иначе мы имели бы $\lambda\alpha_1 = (-1)\lambda\alpha_1^{-1} \in \Gamma_v$ и $(-1) \in \Gamma_v$, что противоречит условию (2.5.5). С другой стороны, абсолютная величина $\lambda\alpha_1 + \lambda\alpha_1^{-1}$ не превышает $2\sqrt{p_v}$. Следовательно, для $p_v \gg 0$ мы получаем соотношение $\lambda\alpha_1 + \lambda\alpha_1^{-1} \neq 0 \pmod{p_v}$. Поэтому для любой точки w поля $\overline{\mathbb{Q}}$, лежащей над p_v ,

$$w\left(\sum \lambda\alpha_1^{\pm 1}\right) = 0.$$

Ясно, что существует такой элемент $x_w \in \{\lambda\alpha_1^{\pm 1}\}$, что $w(x_w) = 0$. Значит,

$$0 = w(x_w) = \frac{1}{2}\{w(x_w\beta_j) + w(x_w\beta_j^{-1})\}. \quad (2.24.6)$$

Поскольку слагаемые в последних скобках неотрицательны в силу соотношений $x_w\beta_j^{\pm 1} \in \Delta$, то мы имеем равенства

$$w(x_w\beta_j) = w(x_w\beta_j^{-1}) = 0.$$

Значит, $w(\beta_j) = 0$ для всех $w|p_v$. Поэтому $\forall j$ β_j – корень из 1 [23, подлемма 3.4.0], что противоречит соотношению (2.24.2).

Рассмотрим случай (2.23.2). В этой ситуации мы можем считать, что

$$\Phi = \{\lambda\alpha_i^{\pm 1} \mid i = 1, \dots, 4\},$$

где $\lambda, \alpha_1, \dots, \alpha_4$ мультипликативно независимы. Мы утверждаем, что

$$\gamma \in \Phi \Leftrightarrow \text{Card}(T_\gamma^0(\Delta) \cap \Delta) \geq p. \quad (2.24.7)$$

Действительно, можно считать, что $\gamma = \lambda\alpha_1\beta_i$, $\delta = \lambda\alpha_j^a\beta_k^b$, где $a, b \in \{\pm 1\}$. Мы имеем $T_\gamma^0(\delta) = \gamma^2\delta^{-1}$. Поэтому мультипликативная независимость $\lambda, \alpha_1, \dots, \alpha_4$ (которая следует из (2.24.1)) и (2.24.3) дают соотношение

$$\begin{aligned} T_{\lambda\alpha_1\beta_i}^0(\delta) &= (\lambda\alpha_1\beta_i)^2 \cdot (\lambda\alpha_j^a\beta_k^b)^{-1} = \lambda\alpha_1^2\alpha_j^{-a}\beta_i^2\beta_k^{-b} \in \Delta \\ &\Leftrightarrow (\lambda\alpha_1^2\alpha_j^{-a} \in \Phi \text{ и } \beta_i^2\beta_k^{-b} \in \Psi) \Leftrightarrow (\alpha_j^a = \alpha_1 \text{ и } \beta_i^2\beta_k^{-b} \in \Psi) \\ &\Leftrightarrow (\delta = \lambda\alpha_1\beta_k^b \text{ и } \beta_i^2\beta_k^{-b} \in \Psi). \end{aligned}$$

Ясно, что

$$\text{Card}(T_\gamma^0(\Delta) \cap \Delta) \geq p = \text{Card}(\Psi) \Leftrightarrow \beta_i^2 \cdot \Psi = \Psi.$$

Мы знаем, что $\beta_i^2 \cdot \Psi = \Psi \Leftrightarrow \beta_i = 1$. Это доказывает утверждение (2.24.7). Более того, $\Phi = \{\gamma \in \Delta \mid \text{Card}(T_\gamma^0(\Delta) \cap \Delta) \geq p\}$ является $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -инвариантным множеством. По условию (2.5.4)

$$\text{Tr}(\rho_l(\mathbb{F}_v^{-1})) = \sum_{\beta \in \Psi} \left(\sum_{x \in \Phi} x \right) \beta \neq 0.$$

Поэтому $\sum_{x \in \Phi} x \neq 0$, и абсолютная величина этого целого числа не превышает $8\sqrt{p_v}$. Для $p_v \gg 0$ мы получаем соотношение $\sum_{x \in \Phi} x \neq 0 \pmod{p_v}$. Для любой точки w поля $\overline{\mathbb{Q}}$, лежащей над p_v ,

$$w\left(\sum_{x \in \Phi} x\right) = 0.$$

Следовательно, существует такой элемент $x_w \in \Phi$, что $w(x_w) = 0$. В итоге мы получаем соотношение (2.24.6) в новой ситуации. Мы уже знаем, что это соотношение влечет соотношение $\text{rank}(\Psi) = 0$, что противоречит соотношению (2.24.2).

Рассмотрим случай (2.23.3). В этой ситуации можно считать, что

$$\Phi = \{\lambda\alpha_1^{\pm 1}\alpha_2^{\pm 1}\alpha_3^{\pm 1} \mid i = 1, 2, 3\},$$

где $\lambda, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ мультипликативно независимы. Мы утверждаем, что

$$\gamma \in \Phi \Leftrightarrow \text{Card}(T_\gamma^0(\Delta) \cap \Delta) \geq p. \quad (2.24.8)$$

Действительно, можно считать, что

$$\gamma = \lambda \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \beta_i, \quad \delta = \lambda \alpha_1^{a_1} \alpha_2^{a_2} \alpha_3^{a_3} \beta_k^b,$$

где $a_1, a_2, a_3, b \in \{\pm 1\}$. Мы имеем $T_\gamma^0(\delta) = \gamma^2 \delta^{-1}$. Поэтому мультипликативная независимость $\lambda, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (которая следует из (2.24.1)) и (2.24.3) дают соотношение

$$\begin{aligned} T_{\lambda \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \beta_i}^0(\delta) &= (\lambda \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \beta_i)^2 \cdot (\lambda \alpha_1^{a_1} \alpha_2^{a_2} \alpha_3^{a_3} \beta_k^b)^{-1} \\ &= \lambda \alpha_1^{2-a_1} \alpha_2^{2-a_2} \alpha_3^{2-a_3} \beta_i^2 \beta_k^{-b} \in \Delta \\ &\Leftrightarrow (\lambda \alpha_1^{2-a_1} \alpha_2^{2-a_2} \alpha_3^{2-a_3} \in \Phi \text{ и } \beta_i^2 \beta_k^{-b} \in \Psi) \\ &\Leftrightarrow (\alpha_j^{a_j} = \alpha_j \text{ для всех } j \text{ и } \beta_i^2 \beta_k^{-b} \in \Psi) \\ &\Leftrightarrow (\delta = \lambda \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \beta_k^b \text{ и } \beta_i^2 \beta_k^{-b} \in \Psi). \end{aligned}$$

Ясно, что

$$\text{Card}(T_\gamma^0(\Delta) \cap \Delta) \geq p = \text{Card}(\Psi) \Leftrightarrow \beta_i^2 \cdot \Psi = \Psi.$$

Мы уже знаем, что $\beta_i^2 \cdot \Psi = \Psi \Leftrightarrow \beta_i = 1$. Это доказывает утверждение (2.24.8). Более того, множество $\Phi = \{\gamma \in \Delta \mid \text{Card}(T_\gamma^0(\Delta) \cap \Delta) \geq p\}$ $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -инвариантно. Мы получаем противоречие, как выше. Лемма доказана.

Таким образом, случаи (2.8.5)–(2.8.10) исключены.

2.24. Рассмотрим случай

$$(A_1 \times A_1 \times A_1, E(\omega_1^{(1)} + \omega_1^{(2)} + (2p-1)\omega_1^{(3)})) = (D_2 \times A_1, E(\omega_1^{(1)} + (2p-1)\omega_1^{(2)})).$$

В силу (2.5.6) мы можем считать, что $\Delta = \{\lambda \alpha_{1,2}^{\pm 1} \beta_1^{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm (2p-1)}\}$, где $\lambda, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ мультипликативно независимы.

2.25. ЛЕММА. Для любого натурального числа m ($0 \leq m \leq 2p-1$) следующие подмножества $\Delta \cdot \Delta$ $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -инвариантны:

$$\{\lambda^2 \beta_1^{\pm 2m}\}, \quad \{\lambda^2 \alpha_1^{\pm 1} \alpha_2^{\pm 1} \beta_1^{\pm 2m}\}, \quad \{\lambda^2 \alpha_{1,2}^{\pm 2} \beta_1^{\pm 2m}\}.$$

Более того, $\lambda^2 = \pm p_v$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\eta \in \Delta \cdot \Delta$. Можно считать, что

$$\eta \in \{\lambda^2 \beta_1^{2m}, \lambda^2 \alpha_1^2 \beta_1^{2m}, \lambda^2 \alpha_1 \alpha_2 \beta_1^{2m}\}.$$

Если $\delta \in \Delta$, то $T_\eta(\delta) = \eta \delta^{-1}$, поэтому

$$T_{\lambda^2 \beta_1^{2m}}(\delta) \in \Delta \Leftrightarrow \\ \delta \in \{\lambda \alpha_{1,2}^{\pm 1} \beta_1^r \mid r - \text{нечетное целое число}, |r| \leq 2p-1, |2m-r| \leq 2p-1\},$$

$$\text{Card}(T_{\lambda^2 \beta_1^{2m}}(\Delta) \cap \Delta) = 8p - 4m,$$

$$T_{\lambda^2 \alpha_1^2 \beta_1^{2m}}(\delta) \in \Delta \Leftrightarrow \\ \delta \in \{\lambda \alpha_{1,2} \beta_1^r \mid r - \text{нечетное целое число}, |r| \leq 2p-1, |2m-r| \leq 2p-1\},$$

$$\text{Card}(T_{\lambda^2 \alpha_1^2 \beta_1^{2m}}(\Delta) \cap \Delta) = 2p - m,$$

$$T_{\lambda^2 \alpha_1 \alpha_2 \beta_1^{2m}}(\delta) \in \Delta \Leftrightarrow \\ \delta \in \{\lambda \alpha_{1,2} \beta_1^r \mid r - \text{нечетное целое число}, |r| \leq 2p-1, |2m-r| \leq 2p-1\},$$

$$\text{Card}(T_{\lambda^2 \alpha_1 \alpha_2 \beta_1^{2m}}(\Delta) \cap \Delta) = 4p - 2m.$$

Легко видеть, что

$$\eta \in \{\lambda^2\} \Leftrightarrow \text{Card}(T_\eta(\Delta) \cap \Delta) = 8p, \\ \eta \in \{\lambda^2 \beta_1^{\pm 2}\} \Leftrightarrow \text{Card}(T_\eta(\Delta) \cap \Delta) = 8p - 4.$$

В силу (0.3.1) $\{\lambda^2\}$ и $\{\lambda^2 \beta_1^{\pm 2}\}$ являются $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -инвариантными множествами. Соотношение $\lambda^2 = \pm p_v$ следует из того, что $\lambda^2 \in \mathbb{Q}$ имеет абсолютную величину p_v . Более того, $\{\beta_1^{\pm 2}\}$ является $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -инвариантным множеством. Поэтому для любого целого m множество $\{\beta_1^{\pm 2m}\}$ $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -инвариантно.

С другой стороны,

$$\eta \in \{\lambda^2 \alpha_1^{\pm 1} \alpha_2^{\pm 1}, \lambda^2 \beta_1^{\pm 2p}\} \Leftrightarrow \text{Card}(T_\eta(\Delta) \cap \Delta) = 4p.$$

Поскольку $\{\lambda^2 \beta_1^{\pm 2p}\}$ $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -инвариантно, мы видим, что $\{\lambda^2 \alpha_1^{\pm 1} \alpha_2^{\pm 1}\}$ также инвариантно относительно действия $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$.

Ясно, что

$$\eta \in \{\lambda^2 \alpha_{1,2}^{\pm 2}, \lambda^2 \alpha_1^{\pm 1} \alpha_2^{\pm 1} \beta_1^{\pm 2p}\} \Leftrightarrow \text{Card}(T_\eta(\Delta) \cap \Delta) = 2p.$$

Поскольку $\{\lambda^2 \beta_1^{\pm 2p}\}$ и $\{\lambda^2 \alpha_1^{\pm 1} \alpha_2^{\pm 1}\}$ $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -инвариантны, то мы видим, что $\{\lambda^2 \alpha_{1,2}^{\pm 2}\}$ также $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -инвариантно. Лемма доказана.

2.26. Очевидно, что множество всех собственных чисел $\rho_l^{\wedge 2}(F_{\bar{v}}^{-1})$ совпадает с $\Delta \cdot \Delta - \{\lambda^2 \alpha_{1,2}^{\pm 2} \beta_1^{\pm(4p-2)}\}$.

В силу теоремы 0.4 можно считать, что p_v не делит $\text{Tr}(\rho_l^{\wedge 2}(F_{\bar{v}}^{-1}))$. Очевидно, этот след является суммой целых чисел следующих типов:

$$\begin{aligned} & \lambda^2, \quad \sum \lambda^2 \alpha_1^{\pm 1} \alpha_2^{\pm 1}, \quad \sum \lambda^2 \alpha_{1,2}^{\pm 2}, \\ & \lambda^2(\beta_1^{2m} + \beta_1^{-2m}), \quad \left(\sum \lambda^2 \alpha_1^{\pm 1} \alpha_2^{\pm 1} \right) (\beta_1^{2m} + \beta_1^{-2m}), \quad 1 \leq m \leq 2p-1, \\ & \left(\sum \lambda^2 \alpha_{1,2}^{\pm 2} \right) (\beta_1^{2m} + \beta_1^{-2m}), \quad 1 \leq m \leq 2p-2. \end{aligned}$$

Поэтому p_v не делит хотя бы одну из этих сумм. Действуя, как в пп. 2.12, 2.13, мы докажем, что

$$\sum \alpha_1^{\pm 1} \alpha_2^{\pm 1}, \quad \sum \alpha_{1,2}^{\pm 2}, \quad (\beta_1^{2m} + \beta_1^{-2m}), \quad 1 \leq m \leq 2p-1,$$

– целые числа. Поэтому p_v делит $\text{Tr}(\rho_l^{\wedge 2}(F_{\bar{v}}^{-1}))$, что противоречит нашему предположению. Это исключает случай $(A_1 \times A_1 \times A_1, E(\omega_1^{(1)} + \omega_1^{(2)} + (2p-1)\omega_1^{(3)}))$.

2.27. Далее мы можем считать, что $\text{End}^0(J \otimes \bar{k})$ – кватернионная алгебра с делением над $\mathbb{Q}$. Этот случай полностью исследован в [20, теоремы 1.16, 1.17]. Теорема 0.7 доказана.

§ 3. Об l -адическом представлении, ассоциированном с абелевым многообразием 4-го типа по классификации Альберта

3.1. Мы рассмотрим здесь доказательство теоремы 0.9. После замены k некоторым конечным расширением можно считать, что для J выполняются условия (2.5.1)–(2.5.6). В этом случае $G_{V_l} = S_{V_l} \cdot G_m$, где S_{V_l} – связная компонента единицы $G_{V_l} \cap \text{SL}(V_l)$. В силу результатов Г. Фалтинга [8]

$$\text{End}_{S_{V_l}}(V_l) = \text{End}_{G_{V_l}}(V_l) \simeq \text{End}(J) \otimes \mathbb{Q}_l. \quad (3.1.1)$$

Согласно хорошо известным теоремам Тэйта [22, теоремы 3, 4] это соотношение дает

$$1 = \text{rank NS}(J) = \dim_{\mathbb{Q}_l}(\wedge^2 V_l)^{S_{V_l}}. \quad (3.1.2)$$

Лемма Шура и (3.1.1), (3.1.2) дают разложение $V_l \otimes \overline{\mathbb{Q}_l} = U \oplus U^*$, где U и U^* – $4p$ -мерные неприводимые неизоморфные дуальные $\text{Lie } S_{V_l} \otimes \overline{\mathbb{Q}_l}$ -модули,

$$\dim_{\mathbb{Q}_l} \text{Cent}(\text{Lie}(S_{V_l})) \leq 1. \quad (3.1.3)$$

3.2. Из теоремы 2.2 и неравенства $p \geq 17$ следует, что пара (тип $g_l^{ss} \otimes \overline{\mathbb{Q}_l}, U$) принимает одно из следующих значений:

$$(A_{4p-1}, E(\omega_{1,4p-1})), \quad (3.2.1)$$

$$(D_{2p}, E(\omega_1)), \quad (3.2.2)$$

$$(C_{2p}, E(\omega_1)), \quad (3.2.3)$$

$$(A_1, E((4p-1)\omega_1)), \quad (3.2.4)$$

$$(A_1 \times C_p, E(\omega_1^{(1)} + \omega_1^{(2)})), \quad (3.2.5)$$

$$(A_1 \times D_p, E(\omega_1^{(1)} + \omega_1^{(2)})), \quad (3.2.6)$$

$$(A_1 \times A_1, E(\omega_1^{(1)} + (2p-1)\omega_1^{(2)})), \quad (3.2.7)$$

$$(A_1 \times A_1 \times A_1, E(\omega_1^{(1)} + \omega_1^{(2)} + (p-1)\omega_1^{(3)})), \quad (3.2.8)$$

$$(A_1 \times A_1 \times B_{(p-1)/2}, E(\omega_1^{(1)} + \omega_1^{(2)} + \omega_1^{(3)})), \quad (3.2.9)$$

$$(A_1 \times A_1, E(3\omega_1^{(1)} + (p-1)\omega_1^{(2)})), \quad (3.2.10)$$

$$(A_1 \times B_{(p-1)/2}, E(3\omega_1^{(1)} + \omega_1^{(2)})), \quad (3.2.11)$$

$$(C_2 \times A_1, E(\omega_1^{(1)} + (p-1)\omega_1^{(2)})), \quad (3.2.12)$$

$$(C_2 \times B_{(p-1)/2}, E(\omega_1^{(1)} + \omega_1^{(2)})), \quad (3.2.13)$$

$$(A_1 \times A_{2p-1}, E(\omega_1^{(1)} + \omega_{1,2p-1}^{(2)})), \quad (3.2.14)$$

$$(A_1 \times A_1 \times A_{p-1}, E(\omega_1^{(1)} + \omega_1^{(2)} + \omega_{1,p-1}^{(3)})), \quad (3.2.15)$$

$$(C_2 \times A_{p-1}, E(\omega_1^{(1)} + \omega_{1,p-1}^{(2)})), \quad (3.2.16)$$

$$(A_1 \times A_{p-1}, E(3\omega_1^{(1)} + \omega_{1,p-1}^{(2)})), \quad (3.2.17)$$

$$(A_3 \times A_1, E(\omega_{1,3}^{(1)} + (p-1)\omega_1^{(2)})), \quad (3.2.18)$$

$$(A_3 \times B_{(p-1)/2}, E(\omega_{1,3}^{(1)} + \omega_1^{(2)})), \quad (3.2.19)$$

$$(A_3 \times A_{p-1}, E(\omega_{1,3}^{(1)} + \omega_{1,p-1}^{(2)})). \quad (3.2.20)$$

3.3. Рассмотрим случай (3.2.1). Мы видим, что $g_l^{ss} \otimes \overline{\mathbb{Q}_l}$ – алгебра Ли типа A_{4p-1} и $\text{Lie Hg}(J_{\mathbb{C}}) \otimes \overline{\mathbb{Q}_l} \subset \text{gl}(U)$. По теореме Пятацкого–Шапиро–Делиня–Борового [14], [2] существует каноническое вложение

$$\text{Lie Im}(\rho_l) \subset \text{Lie}[\text{MT}(J_{\mathbb{C}})(\mathbb{Q}_l)] = \mathbb{Q}_l \times \text{Lie}[\text{Hg}(J_{\mathbb{C}})(\mathbb{Q}_l)].$$

Поэтому существует канонический изоморфизм полупростых частей

$$[\text{Lie Im}(\rho_l)]^{ss} \simeq [\text{Lie}[\text{MT}(J_{\mathbb{C}})(\mathbb{Q}_l)]]^{ss}. \quad (3.3.1)$$

Более того, если $n_{\sigma} \neq 2p$, то $n_{\sigma} \neq n_{\tau}$, и $\dim_{\mathbb{Q}_l} \text{Cent}(G_{V_l}) \geq 2$ [5, п. 3.1, шаг 3]. Поэтому изоморфизм (3.3.1) продолжается до изоморфизма

$$\text{Lie Im}(\rho_l) \simeq \text{Lie}[\text{MT}(J_{\mathbb{C}})(\mathbb{Q}_l)].$$

Значит, для J верна гипотеза Мамфорда–Тэйта,

$$\dim_{\mathbb{Q}_l} \text{Cent}(S_{V_l}) = 1 = \dim_{\mathbb{Q}_l} \text{Cent}[\text{Hg}(J_{\mathbb{C}})(\mathbb{Q}_l)].$$

Поэтому

$$\dim_{\mathbb{Q}_l} H_{\text{et}}^{2r}(J \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l(r))^{\text{Gal}(\bar{k}/k)} \leq 1$$

[19, теорема 1.1]. Следовательно, $\mathbb{Q}_l$ -пространство $H_{\text{et}}^{2r}(J \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l(r))^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}$ порождается классами когомологий пересечений дивизоров.

3.4. Мы хотим исключить все случаи (3.2.2)–(3.2.19) с помощью следующей процедуры.

Заметим прежде всего, что в случаях (3.2.2)–(3.2.13) существует изоморфизм $g_l^{ss} \otimes \overline{\mathbb{Q}_l}$ -модулей $U \simeq U^*$. Поэтому соотношение (3.1.3) влечет соотношения

$$U = E(\omega)(\chi), \quad U^* = E(\omega)(-\chi), \quad (3.4.1)$$

где ω – старший вес $g_l^{ss} \otimes \overline{\mathbb{Q}_l}$ -модуля U и $\chi \neq 0$ – старший вес $\text{Cent}(\text{Lie}(S_{V_l} \otimes \overline{\mathbb{Q}_l}))$ -модуля U .

3.5. Рассмотрим случаи (3.2.2), (3.2.3). Из (3.4.1) следует, что

$$\Delta = \{\lambda \alpha_1^{\pm 1} \beta_i^{\pm 1} \mid i = 1, \dots, 2p\},$$

где $\lambda, \alpha_1, \beta_1, \dots, \beta_{2p}$ мультипликативно независимы. Поэтому структура множества Δ в этих случаях совпадает со структурой Δ в случае (2.8.3). Это исключает варианты (3.2.2), (3.2.3).

3.6. Рассмотрим случай (3.2.4). В силу (3.4.1) можно считать, что $\Delta = \{\lambda \alpha_1^{\pm 1} \times \beta_1^{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(4p-1)}\}$, где $\lambda, \alpha_1, \beta_1$ мультипликативно независимы.

3.7. ЛЕММА. Для любого натурального m ($0 \leq m \leq 4p-1$) следующие подмножества $\Delta \cdot \Delta \subset \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -инвариантны:

$$\{\lambda^2 \beta_1^{\pm 2m}\}, \quad \{\lambda^2 \alpha_1^{\pm 2} \beta_1^{\pm 2m}\}.$$

Более того, $\lambda^2 = \pm p_v$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\eta \in \Delta \cdot \Delta$. Можно считать, что

$$\eta \in \{\lambda^2 \beta_1^{2m}, \lambda^2 \alpha_1^2 \beta_1^{2m}\}.$$

Если $\delta \in \Delta$, то $T_\eta(\delta) = \eta \delta^{-1}$, поэтому

$$T_{\lambda^2 \beta_1^{2m}}(\delta) \in \Delta \Leftrightarrow \delta \in \{\lambda \alpha_1^{\pm 1} \beta_1^r \mid r - \text{нечетное целое число}, |r| \leq 4p - 1, |2m - r| \leq 4p - 1\},$$

$$\text{Card}(T_{\lambda^2 \beta_1^{2m}}(\Delta) \cap \Delta) = 8p - 2m,$$

$$T_{\lambda^2 \alpha_1^2 \beta_1^{2m}}(\delta) \in \Delta \Leftrightarrow \delta \in \{\lambda \alpha_1 \beta_1^r \mid r - \text{нечетное целое число}, |r| \leq 4p - 1, |2m - r| \leq 4p - 1\},$$

$$\text{Card}(T_{\lambda^2 \alpha_1^2 \beta_1^{2m}}(\Delta) \cap \Delta) = 4p - m.$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \eta \in \{\lambda^2\} &\Leftrightarrow \text{Card}(T_\eta(\Delta) \cap \Delta) = 8p, \\ \eta \in \{\lambda^2 \beta_1^{\pm 2}\} &\Leftrightarrow \text{Card}(T_\eta(\Delta) \cap \Delta) = 8p - 2. \end{aligned}$$

В силу (0.3.1) $\{\lambda^2\}$ и $\{\lambda^2 \beta_1^{\pm 2}\}$ – $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -инвариантные множества. Соотношение $\lambda^2 = \pm p_v$ следует из того факта, что $\lambda^2 \in \mathbb{Q}$ имеет абсолютную величину p_v . Более того, $\{\beta_1^{\pm 2}\}$ является $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -инвариантным множеством. Поэтому $\{\beta_1^{\pm 2m}\}$ – $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -инвариантное множество для любого натурального m .

С другой стороны,

$$\eta \in \{\lambda^2 \alpha_1^{\pm 2}, \lambda^2 \beta_1^{\pm 4p}\} \Leftrightarrow \text{Card}(T_\eta(\Delta) \cap \Delta) = 4p.$$

Поскольку $\{\lambda^2 \beta_1^{\pm 4p}\}$ – $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -инвариантное множество, мы видим, что $\{\lambda^2 \alpha_1^{\pm 2}\}$ также $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -инвариантно. Следовательно, $\{\lambda^2 \alpha_1^{\pm 2} \beta_1^{\pm 2m}\}$ – $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -инвариантное множество. Лемма доказана.

3.8. Очевидно, множество всех собственных чисел оператора $\rho_l^{\wedge 2}(F_v^{-1})$ совпадает с $\Delta \cdot \Delta - \{\lambda^2 \alpha_1^{\pm 2} \beta_1^{\pm(8p-2)}\}$.

В силу теоремы 0.4 мы можем считать, что p_v не делит $\text{Tr}(\rho_l^{\wedge 2}(F_v^{-1}))$. Очевидно, что этот след является суммой целых чисел следующих типов:

$$\begin{aligned} \lambda^2, \quad \sum \lambda^2 \alpha_1^{\pm 2}, \quad \lambda^2(\beta_1^{2m} + \beta_1^{-2m}), \quad 1 \leq m \leq 4p - 1, \\ \left(\sum \lambda^2 \alpha_1^{\pm 2} \right) (\beta_1^{2m} + \beta_1^{-2m}), \quad 1 \leq m \leq 4p - 2. \end{aligned}$$

Поэтому p_v не делит хотя бы одну из этих сумм. Действуя, как в пп. 2.12, 2.13, мы докажем, что

$$\sum \alpha_1^{\pm 2}, \quad (\beta_1^{2m} + \beta_1^{-2m}), \quad 1 \leq m \leq 4p - 1,$$

– целые числа. Поэтому p_v делит $\text{Tr}(\rho_l^{\wedge 2}(F_v^{-1}))$, что противоречит нашему предположению. Это исключает случай (3.2.4).

3.9. Рассмотрим случаи (3.2.5), (3.2.6). В силу (3.4.1) мы можем считать, что $\Delta = \{\lambda\alpha_1^{\pm 1}\alpha_2^{\pm 1}\beta_i^{\pm 1} \mid i = 1, \dots, p\}$, где $\lambda, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \dots, \beta_p$ мультипликативно независимы. Пусть $\gamma_1 = \alpha_1\alpha_2$, $\gamma_2 = \alpha_1^{-1}\alpha_2$. Очевидно,

$$\Delta = \{\lambda\gamma_{1,2}^{\pm 1}\beta_i^{\pm 1} \mid i = 1, \dots, p\},$$

где $\lambda, \gamma_1, \gamma_2, \beta_1, \dots, \beta_p$ мультипликативно независимы. Поэтому структура Δ идентична структуре Δ в случае (2.8.1). Это исключает варианты (3.2.5), (3.2.6).

3.10. Рассмотрим случай (3.2.7). В силу (3.4.1) можно считать, что

$$\Delta = \{\lambda\alpha_1^{\pm 1}\alpha_2^{\pm 1}\beta_1^{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(2p-1)}\},$$

где $\lambda, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ мультипликативно независимы. Пусть $\gamma_1 = \alpha_1\alpha_2$, $\gamma_2 = \alpha_1^{-1}\alpha_2$. Очевидно, что $\Delta = \{\lambda\gamma_{1,2}^{\pm 1}\beta_1^{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(2p-1)}\}$, где $\lambda, \gamma_1, \gamma_2, \beta_1$ мультипликативно независимы. Действуя, как в п. 2.26, 2.27, мы можем исключить этот вариант.

3.11. Рассмотрим случаи (3.2.8), (3.2.9). В этой ситуации можно считать, что $\Phi = \{\lambda\alpha_1^{\pm 1}\alpha_2^{\pm 1}\alpha_3^{\pm 1}\}$, где $\lambda, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ мультипликативно независимы, $\Psi = \{\beta_j \mid j = 1, \dots, p\}$. Действуя, как в п. 2.24, мы можем исключить эти варианты.

3.12. Рассмотрим случаи (3.2.10), (3.2.11). В силу (3.4.1) можно считать, что $\Delta = \{\lambda\alpha_1^{\pm 1}\alpha_2^{\pm 1, \pm 3}\} \cdot \{\beta_1, \dots, \beta_p\}$, где $\lambda, \alpha_1, \alpha_2$ мультипликативно независимы, $1 \in \{\beta_1, \dots, \beta_p\}$. Пусть $\Phi = \{\lambda\alpha_1^{\pm 1}\alpha_2^{\pm 1, \pm 3}\}$, $\Psi = \{\beta_1, \dots, \beta_p\}$. Мы знаем, что $1 \in \Psi$. Поэтому $\Phi \subset \Gamma_v$, $\Psi \subset \Gamma_v$. В обозначениях п. 2.24 имеем: Γ_Φ и Γ_Ψ – абелевы группы без кручения положительного ранга,

$$\Gamma_\Phi \cap \Gamma_\Psi = (1). \quad (3.12.1)$$

Мы утверждаем, что

$$\gamma \in \{\lambda\alpha_1^{\pm 1}\alpha_2^{\pm 1}\} \Leftrightarrow \text{Card}(T_\gamma^0(\Delta) \cap \Delta) \geq 3p. \quad (3.12.2)$$

Действительно, можно считать, что $\gamma \in \{\lambda\alpha_1\alpha_2\beta_i, \lambda\alpha_1\alpha_2^3\beta_i \mid i = 1, \dots, p\}$. Для $\delta \in \Delta$ мы имеем $T_\gamma^0(\delta) = \gamma^2\delta^{-1}$. Поэтому мультипликативная независимость $\lambda, \alpha_1, \alpha_2$ и (3.12.1) дают соотношение

$$T_{\lambda\alpha_1\alpha_2\beta_i}^0(\delta) = (\lambda\alpha_1\alpha_2\beta_i)^2 \cdot \delta^{-1} \in \Delta \Leftrightarrow \delta \in \{\lambda\alpha_1\alpha_2^{\pm 1, \pm 3} \cdot \beta_i^2 \cdot \Psi\} \cap \Delta.$$

Очевидно, что

$$\text{Card}(T_{\lambda\alpha_1\alpha_2\beta_i}^0(\Delta) \cap \Delta) \geq 3p \Leftrightarrow \beta_i^2 \cdot \Psi = \Psi.$$

Из рассуждений п. 2.24 следует, что соотношение $\beta_i^2 \cdot \Psi = \Psi$ влечет равенство $\beta_i = 1$. Поэтому $\gamma = \lambda\alpha_1\alpha_2$. С другой стороны,

$$T_{\lambda\alpha_1\alpha_2^3\beta_i}^0(\delta) = (\lambda\alpha_1\alpha_2^3\beta_i)^2 \cdot \delta^{-1} \in \Delta \Leftrightarrow \delta \in \{\lambda\alpha_1\alpha_2^3 \cdot \beta_i^2 \cdot \Psi\} \cap \Delta$$

и $\text{Card}(T_{\lambda\alpha_1\alpha_2^3\beta_i}^0(\Delta) \cap \Delta) \leq p$. Это доказывает утверждение (3.12.2). В силу (2.24.4) множество $\{\lambda\alpha_1^{\pm 1}\alpha_2^{\pm 1}\}$ является $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -инвариантным. Поэтому $\sum \lambda\alpha_1^{\pm 1}\alpha_2^{\pm 1} \in \mathbb{Z}$. Более того, $\sum \lambda\alpha_1^{\pm 1}\alpha_2^{\pm 1} \neq 0$; иначе мы имели бы

$$0 = \lambda(\alpha_1 + \alpha_1^{-1})(\alpha_2 + \alpha_2^{-1})$$

и, следовательно, $\alpha_1 = -\alpha_1^{-1}$ или $\alpha_2 = -\alpha_2^{-1}$; предположим, например, что $\alpha_1 = -\alpha_1^{-1}$; тогда

$$\lambda\alpha_1\alpha_2 = -\lambda\alpha_1^{-1}\alpha_2 \in \Delta, \quad \lambda\alpha_1^{-1}\alpha_2 \in \Delta, \quad -1 = \lambda\alpha_1\alpha_2/(\lambda\alpha_1^{-1}\alpha_2) \in \Gamma_v,$$

что противоречит условию (2.5.5).

С другой стороны, абсолютная величина числа $\sum \lambda\alpha_1^{\pm 1}\alpha_2^{\pm 1}$ не превышает $4\sqrt{p_v}$. Поэтому для $p_v \gg 0$ мы получаем соотношение $\sum \lambda\alpha_1^{\pm 1}\alpha_2^{\pm 1} \neq 0 \pmod{p_v}$. Следовательно, для любой точки w поля $\overline{\mathbb{Q}}$, лежащей над p_v ,

$$w\left(\sum \lambda\alpha_1^{\pm 1}\alpha_2^{\pm 1}\right) = 0.$$

Поэтому существует такой элемент $x_w \in \{\lambda\alpha_1^{\pm 1}\alpha_2^{\pm 1}\}$, что $w(x_w) = 0$. В итоге мы получаем соотношение (2.24.6) в новой ситуации. Следовательно, $\forall j$ β_j – корень из единицы, что противоречит соотношению $\text{rank}(\Gamma_\Psi) \geq 1$. Поэтому случаи (3.2.10), (3.2.11) исключены.

3.13. Рассмотрим случаи (3.2.12), (3.2.13). В силу (3.4.1) можно считать, что $\Delta = \{\lambda\alpha_1^{\pm 1}\alpha_{2,3}^{\pm 1}\} \cdot \{\beta_1, \dots, \beta_p\}$, где $\lambda, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ мультипликативно независимы, $1 \in \{\beta_1, \dots, \beta_p\}$. Пусть $\Phi = \{\lambda\alpha_1^{\pm 1}\alpha_{2,3}^{\pm 1}\}$, $\Psi = \{\beta_1, \dots, \beta_p\}$. В обозначениях п. 2.24 имеем: Γ_Φ и Γ_Ψ – абелевы группы без кручения положительного ранга,

$$\Gamma_\Phi \cap \Gamma_\Psi = (1). \quad (3.13.1)$$

Мы утверждаем, что соотношение (2.24.8) выполняется в этой новой ситуации. Действительно, можно считать, что $\gamma \in \{\lambda\alpha_1\alpha_2\beta_i \mid i = 1, \dots, p\}$. Для $\delta \in \Delta$ имеем $T_\gamma^0(\delta) = \gamma^2\delta^{-1}$. Поэтому мультипликативная независимость $\lambda, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и (3.13.1) дают соотношение

$$T_{\lambda\alpha_1\alpha_2\beta_i}^0(\delta) = (\lambda\alpha_1\alpha_2\beta_i)^2 \cdot \delta^{-1} \in \Delta \Leftrightarrow \delta \in \{\lambda\alpha_1\alpha_2 \cdot \beta_i^2 \cdot \Psi\} \cap \Delta.$$

Легко видеть, что

$$\text{Card}(T_{\lambda\alpha_1\alpha_2\beta_i}^0(\Delta) \cap \Delta) \geq p \Leftrightarrow \beta_i^2 \cdot \Psi = \Psi \Leftrightarrow \beta_i = 1.$$

Поэтому утверждение (2.24.8) доказано. Следовательно, мы можем исключить варианты (3.2.12), (3.2.13) с помощью рассуждений п. 2.24.

3.14. Рассмотрим случай (3.2.14). Можно считать, что $U = E(\omega_1^{(1)} + \omega_1^{(2)})(\chi)$, $U^* = E(\omega_1^{(1)} + \omega_{2p-1}^{(2)})(-\chi)$, где χ – старший вес $\text{Cent}(\text{Lie}(S_{V_l} \otimes \overline{\mathbb{Q}}_l))$ -модуля U . После замены p на $2p$ мы можем использовать рассуждения [19, пп. 4.20–4.26], чтобы исключить этот вариант.

3.15. Рассмотрим случаи (3.2.15), (3.2.16).

Предположим, например, что $\chi \neq 0$. В этой ситуации

$$\begin{aligned} \Delta = & \{\lambda\alpha_1\beta_{1,2}^{\pm 1}\} \cdot \{\delta_1, \dots, \delta_{p-1}, (\delta_1\delta_2 \dots \delta_{p-1})^{-1}\} \\ & \cup \{\lambda\alpha_1^{-1}\beta_{1,2}^{\pm 1}\} \cdot \{\delta_1^{-1}, \dots, \delta_{p-1}^{-1}, \delta_1\delta_2 \dots \delta_{p-1}\}, \end{aligned}$$

где $\lambda, \alpha_1, \beta_1, \beta_2, \delta_1, \dots, \delta_{p-1}$ мультипликативно независимы. Следующая лемма вытекает из (0.3.1).

3.16. ЛЕММА. *Перечисленные ниже подмножества $\Delta \cdot \Delta$ $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -инвариантны:*

$$\begin{aligned} & \{\lambda^2\}, \quad \{\lambda^2\beta_1^{\pm 1}\beta_2^{\pm 1}\}, \quad \{\lambda^2\beta_{1,2}^{\pm 2}\}, \\ & \{\lambda^2\delta_i\delta_j^{-1} \mid i \neq j\} \cup \{\lambda^2(\delta_1 \dots \delta_i^2 \dots \delta_{p-1})^{\pm 1}\} \\ & \quad \cup \{\lambda^2(\alpha_1^2\delta_i\delta_j)^{\pm 1} \mid i \neq j\} \cup \{\lambda^2(\alpha_1^2(\delta_1 \dots \delta_i^{\wedge} \dots \delta_{p-1})^{-1})^{\pm 1}\}, \\ & \{\lambda^2\beta_1^{\pm 1}\beta_2^{\pm 1}\delta_i\delta_j^{-1} \mid i \neq j\} \cup \{\lambda^2\beta_1^{\pm 1}\beta_2^{\pm 1}(\delta_1 \dots \delta_i^2 \dots \delta_{p-1})^{\pm 1}\} \\ & \quad \cup \{\lambda^2\beta_1^{\pm 1}\beta_2^{\pm 1}(\alpha_1^2\delta_i\delta_j)^{\pm 1} \mid i \neq j\} \\ & \quad \cup \{\lambda^2\beta_1^{\pm 1}\beta_2^{\pm 1}(\alpha_1^2(\delta_1 \dots \delta_i^{\wedge} \dots \delta_{p-1})^{-1})^{\pm 1}\}, \\ & \{\lambda^2(\alpha_1^2\delta_i^2)^{\pm 1}\} \cup \{\lambda^2(\alpha_1^2(\delta_1 \dots \delta_{p-1})^{-2})^{\pm 1}\}, \\ & \{\lambda^2\beta_{1,2}^{\pm 2}\delta_i\delta_j^{-1} \mid i \neq j\} \cup \{\lambda^2\beta_{1,2}^{\pm 2}(\delta_1 \dots \delta_i^2 \dots \delta_{p-1})^{\pm 1}\} \\ & \quad \cup \{\lambda^2\beta_{1,2}^{\pm 2}(\alpha_1^2\delta_i\delta_j)^{\pm 1} \mid i \neq j\} \cup \{\lambda^2\beta_{1,2}^{\pm 2}(\alpha_1^2(\delta_1 \dots \delta_i^{\wedge} \dots \delta_{p-1})^{-1})^{\pm 1}\}, \\ & \{\lambda^2\beta_1^{\pm 1}\beta_2^{\pm 1}(\alpha_1^2\delta_i^2)^{\pm 1}\} \cup \{\lambda^2\beta_1^{\pm 1}\beta_2^{\pm 1}(\alpha_1^2(\delta_1 \dots \delta_{p-1})^{-2})^{\pm 1}\}, \\ & \{\lambda^2\beta_{1,2}^{\pm 2}(\alpha_1^2\delta_i^2)^{\pm 1}\} \cup \{\lambda^2\beta_{1,2}^{\pm 2}(\alpha_1^2(\delta_1 \dots \delta_{p-1})^{-2})^{\pm 1}\}, \end{aligned}$$

где $\delta_i^{\wedge}$ означает, что δ_i пропущена. Более того, $\lambda^2 = \pm p_v$.

Действительно, легко видеть, что

$$\begin{aligned} \text{Card}(T_{\lambda^2}(\Delta) \cap \Delta) &= 8p, \\ \text{Card}(T_{\lambda^2\beta_1^{\pm 1}\beta_2^{\pm 1}}(\Delta) \cap \Delta) &= 4p, \\ \text{Card}(T_{\lambda^2\beta_{1,2}^{\pm 2}}(\Delta) \cap \Delta) &= 2p, \\ \text{Card}(T_{\lambda^2\delta_i\delta_j^{-1}}(\Delta) \cap \Delta) &= \text{Card}(T_{\lambda^2(\delta_1 \dots \delta_i^2 \dots \delta_{p-1})^{\pm 1}}(\Delta) \cap \Delta) \\ &= \text{Card}(T_{\lambda^2(\alpha_1^2\delta_i\delta_j)^{\pm 1}}(\Delta) \cap \Delta) = \text{Card}(T_{\lambda^2(\alpha_1^2(\delta_1 \dots \delta_i^{\wedge} \dots \delta_{p-1})^{-1})^{\pm 1}}(\Delta) \cap \Delta) = 8, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Card}(T_{\lambda^2 \beta_1^{\pm 1} \beta_2^{\pm 1} \delta_i \delta_j^{-1}}(\Delta) \cap \Delta) &= \text{Card}(T_{\lambda^2 \beta_1^{\pm 1} \beta_2^{\pm 1} (\delta_1 \dots \delta_i^2 \dots \delta_{p-1})^{\pm 1}}(\Delta) \cap \Delta) \\
&= \text{Card}(T_{\lambda^2 \beta_1^{\pm 1} \beta_2^{\pm 1} (\alpha_1^2 \delta_i \delta_j)^{\pm 1}}(\Delta) \cap \Delta) \\
&= \text{Card}(T_{\lambda^2 \beta_1^{\pm 1} \beta_2^{\pm 1} (\alpha_1^2 (\delta_1 \dots \delta_i^{\wedge} \dots \delta_{p-1})^{-1})^{\pm 1}}(\Delta) \cap \Delta) \\
&= 4 = \text{Card}(T_{\lambda^2 (\alpha_1^2 \delta_i^2)^{\pm 1}}(\Delta) \cap \Delta) = \text{Card}(T_{\lambda^2 (\alpha_1^2 (\delta_1 \dots \delta_{p-1})^{-2})^{\pm 1}}(\Delta) \cap \Delta), \\
\text{Card}(T_{\lambda^2 \beta_{1,2}^{\pm 2} \delta_i \delta_j^{-1}}(\Delta) \cap \Delta) &= \text{Card}(T_{\lambda^2 \beta_{1,2}^{\pm 2} (\delta_1 \dots \delta_i^2 \dots \delta_{p-1})^{\pm 1}}(\Delta) \cap \Delta) \\
&= \text{Card}(T_{\lambda^2 \beta_{1,2}^{\pm 2} (\alpha_1^2 \delta_i \delta_j)^{\pm 1}}(\Delta) \cap \Delta) \\
&= \text{Card}(T_{\lambda^2 \beta_{1,2}^{\pm 2} (\alpha_1^2 (\delta_1 \dots \delta_i^{\wedge} \dots \delta_{p-1})^{-1})^{\pm 1}}(\Delta) \cap \Delta) = \\
&= 2 = \text{Card}(T_{\lambda^2 \beta_1^{\pm 1} \beta_2^{\pm 1} (\alpha_1^2 \delta_i^2)^{\pm 1}}(\Delta) \cap \Delta) \\
&= \text{Card}(T_{\lambda^2 \beta_1^{\pm 1} \beta_2^{\pm 1} (\alpha_1^2 (\delta_1 \dots \delta_{p-1})^{-2})^{\pm 1}}(\Delta) \cap \Delta), \\
\text{Card}(T_{\lambda^2 \beta_{1,2}^{\pm 2} (\alpha_1^2 \delta_i^2)^{\pm 1}}(\Delta) \cap \Delta) &= \text{Card}(T_{\lambda^2 \beta_{1,2}^{\pm 2} (\alpha_1^2 (\delta_1 \dots \delta_{p-1})^{-2})^{\pm 1}}(\Delta) \cap \Delta) = 1.
\end{aligned}$$

Далее мы используем некоторые разложения, аналогичные разложениям п. 2.10.

3.17. Очевидно, что множество всех собственных чисел $\rho_l^{\wedge 2}(F_v^{-1})$ совпадает с $\Delta \cdot \Delta - \{\lambda^2 \beta_{1,2}^{\pm 2} (\alpha_1^2 \delta_i^2)^{\pm 1}\} - \{\lambda^2 \beta_{1,2}^{\pm 2} (\alpha_1^2 (\delta_1 \dots \delta_{p-1})^{-2})^{\pm 1}\}$.

В силу теоремы 0.4 мы можем считать, что p_v не делит $\text{Tr}(\rho_l^{\wedge 2}(F_v^{-1}))$. Из соображений симметрии следует, что кратность $\eta \in \{\lambda^2 \beta_1^{\pm 1} \beta_2^{\pm 1}\}$ как собственного числа $\rho_l^{\wedge 2}(F_v^{-1})$ не зависит от выбора η . Это верно для других $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -инвариантных подмножеств, которые определены в утверждении леммы 3.16. Мы выводим из этой леммы, что $\text{Tr}(\rho_l^{\wedge 2}(F_v^{-1}))$ является суммой целых чисел следующих типов:

$$\begin{aligned}
&\lambda^2, \quad \sum \lambda^2 \beta_1^{\pm 1} \beta_2^{\pm 1}, \quad \dots, \quad \sum \lambda^2 \beta_1^{\pm 1} \beta_2^{\pm 1} (\alpha_1^2 \delta_i^2)^{\pm 1} \\
&\quad + \sum \lambda^2 \beta_1^{\pm 1} \beta_2^{\pm 1} (\alpha_1^2 (\delta_1 \dots \delta_{p-1})^{-2})^{\pm 1}.
\end{aligned}$$

Поэтому p_v не делит хотя бы одну из этих сумм.

Предположим, что p_v не делит $\sum \lambda^2 \beta_1^{\pm 1} \beta_2^{\pm 1}$. Тогда для любой точки w поля $\overline{\mathbb{Q}}$, лежащей над p_v , существует такой элемент $x_w \in \{\lambda^2 \beta_1^{\pm 1} \beta_2^{\pm 1}\}$, что $w(x_w) = 0$. Поэтому

$$0 = w(x_w) = \frac{1}{2} \{w(x_w \delta_1 \delta_2^{-1}) + w(x_w \delta_1^{-1} \delta_2)\}.$$

Поскольку слагаемые в последних скобках неотрицательны в силу соотношений $x_w (\delta_1 \delta_2^{-1})^{\pm 1} \in \Delta \cdot \Delta$, то мы имеем равенства

$$w(x_w \delta_1 \delta_2^{-1}) = w(x_w \delta_1^{-1} \delta_2) = 0.$$

Значит, $w(\delta_1 \delta_2^{-1}) = 0$ для всех $w|p_v$. Поэтому $\delta_1 \delta_2^{-1}$ – корень из 1 [23, подлемма 3.4.0], что противоречит мультипликативной независимости чисел δ_1, δ_2 .

Следовательно, p_v делит $\sum \lambda^2 \beta_1^{\pm 1} \beta_2^{\pm 1}$. Из соотношения $\lambda^2 = \pm p_v$ мы выводим, что $\sum \beta_1^{\pm 1} \beta_2^{\pm 1}$ – целое число.

Аналогично доказывается, что $\sum \beta_{1,2}^{\pm 2}$ – целое число.

Используя соотношение

$$w(x_w) = \frac{1}{2} \{w(x_w \beta_1^2) + w(x_w \beta_1^{-2})\}$$

для

$$\begin{aligned} x_w \in \{ \lambda^2 \delta_i \delta_j^{-1} \mid i \neq j \} \cup \{ \lambda^2 (\delta_1 \dots \delta_i^2 \dots \delta_{p-1})^{\pm 1} \} \\ \cup \{ \lambda^2 (\alpha_1^2 \delta_i \delta_j)^{\pm 1} \mid i \neq j \} \cup \{ \lambda^2 (\alpha_1^2 (\delta_1 \dots \delta_i^\wedge \dots \delta_{p-1})^{-1})^{\pm 1} \}, \end{aligned}$$

мы выводим, что

$$\begin{aligned} \sum_{i \neq j} \delta_i \delta_j^{-1} + \sum (\delta_1 \dots \delta_i^2 \dots \delta_{p-1})^{\pm 1} + \sum_{i \neq j} (\alpha_1^2 \delta_i \delta_j)^{\pm 1} \\ + \sum (\alpha_1^2 (\delta_1 \dots \delta_i^\wedge \dots \delta_{p-1})^{-1})^{\pm 1} \end{aligned}$$

– целое число. Аналогичными рассуждениями доказывается, что

$$\sum (\alpha_1^2 \delta_i^2)^{\pm 1} + \sum (\alpha_1^2 (\delta_1 \dots \delta_{p-1})^{-2})^{\pm 1}$$

– целое число. Поэтому $\sum \beta_1^{\pm 1} \beta_2^{\pm 1} (\alpha_1^2 \delta_i^2)^{\pm 1} + \sum \beta_1^{\pm 1} \beta_2^{\pm 1} (\alpha_1^2 (\delta_1 \dots \delta_{p-1})^{-2})^{\pm 1}$ – целое число. Следовательно, p_v делит $\text{Tr}(\rho_l^{\wedge 2}(F_v^{-1}))$, что противоречит нашим предположениям. Мы можем исключить случай $\chi = 0$ такими же рассуждениями.

3.18. Рассмотрим случай (3.2.17). Предположим, например, что $\chi \neq 0$. В этой ситуации

$$\begin{aligned} \Delta = \{ \lambda \alpha_1 \beta_1^{\pm 1, \pm 3} \} \cdot \{ \delta_1, \dots, \delta_{p-1}, (\delta_1 \delta_2 \dots \delta_{p-1})^{-1} \} \\ \cup \{ \lambda \alpha_1^{-1} \beta_1^{\pm 1, \pm 3} \} \cdot \{ \delta_1^{-1}, \dots, \delta_{p-1}^{-1}, \delta_1 \delta_2 \dots \delta_{p-1} \}, \end{aligned}$$

где $\lambda, \alpha_1, \beta_1, \delta_1, \dots, \delta_{p-1}$ мультипликативно независимы. Следующая лемма вытекает из (0.3.1).

3.19. ЛЕММА. *Перечисленные ниже подмножества $\Delta \cdot \Delta \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -инвариантны:*

$$\begin{aligned} \{ \lambda^2 \}, \quad \{ \lambda^2 \beta_1^{\pm 2} \}, \quad \{ \lambda^2 \beta_1^{\pm 4} \}, \quad \{ \lambda^2 \beta_1^{\pm 6} \}, \\ \{ \lambda^2 \delta_i \delta_j^{-1} \mid i \neq j \} \cup \{ \lambda^2 (\delta_1 \dots \delta_i^2 \dots \delta_{p-1})^{\pm 1} \} \\ \cup \{ \lambda^2 (\alpha_1^2 \delta_i \delta_j)^{\pm 1} \mid i \neq j \} \cup \{ \lambda^2 (\alpha_1^2 (\delta_1 \dots \delta_i^\wedge \dots \delta_{p-1})^{-1})^{\pm 1} \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \{\lambda^2 \beta_1^{\pm 2} \delta_i \delta_j^{-1} \mid i \neq j\} \cup \{\lambda^2 \beta_1^{\pm 2} (\delta_1 \dots \delta_i^2 \dots \delta_{p-1})^{\pm 1}\} \\
& \cup \{\lambda^2 \beta_1^{\pm 2} (\alpha_1^2 \delta_i \delta_j)^{\pm 1} \mid i \neq j\} \cup \{\lambda^2 \beta_1^{\pm 2} (\alpha_1^2 (\delta_1 \dots \delta_i^\wedge \dots \delta_{p-1})^{-1})^{\pm 1}\}, \\
& \{\lambda^2 \beta_1^{\pm 4} \delta_i \delta_j^{-1} \mid i \neq j\} \cup \{\lambda^2 \beta_1^{\pm 4} (\delta_1 \dots \delta_i^2 \dots \delta_{p-1})^{\pm 1}\} \\
& \cup \{\lambda^2 \beta_1^{\pm 4} (\alpha_1^2 \delta_i \delta_j)^{\pm 1} \mid i \neq j\} \cup \{\lambda^2 \beta_1^{\pm 4} (\alpha_1^2 (\delta_1 \dots \delta_i^\wedge \dots \delta_{p-1})^{-1})^{\pm 1}\}, \\
& \{\lambda^2 \beta_1^{\pm 6} \delta_i \delta_j^{-1} \mid i \neq j\} \cup \{\lambda^2 \beta_1^{\pm 6} (\delta_1 \dots \delta_i^2 \dots \delta_{p-1})^{\pm 1}\} \\
& \cup \{\lambda^2 \beta_1^{\pm 6} (\alpha_1^2 \delta_i \delta_j)^{\pm 1} \mid i \neq j\} \cup \{\lambda^2 \beta_1^{\pm 6} (\alpha_1^2 (\delta_1 \dots \delta_i^\wedge \dots \delta_{p-1})^{-1})^{\pm 1}\}, \\
& \{\lambda^2 (\alpha_1^2 \delta_i^2)^{\pm 1}\} \cup \{\lambda^2 (\alpha_1^2 (\delta_1 \dots \delta_{p-1})^{-2})^{\pm 1}\}, \\
& \{\lambda^2 \beta_1^{\pm 2} (\alpha_1^2 \delta_i^2)^{\pm 1}\} \cup \{\lambda^2 \beta_1^{\pm 2} (\alpha_1^2 (\delta_1 \dots \delta_{p-1})^{-2})^{\pm 1}\}, \\
& \{\lambda^2 \beta_1^{\pm 4} (\alpha_1^2 \delta_i^2)^{\pm 1}\} \cup \{\lambda^2 \beta_1^{\pm 4} (\alpha_1^2 (\delta_1 \dots \delta_{p-1})^{-2})^{\pm 1}\}, \\
& \{\lambda^2 \beta_1^{\pm 6} (\alpha_1^2 \delta_i^2)^{\pm 1}\} \cup \{\lambda^2 \beta_1^{\pm 6} (\alpha_1^2 (\delta_1 \dots \delta_{p-1})^{-2})^{\pm 1}\},
\end{aligned}$$

где $\delta_i^\wedge$ означает, что δ_i пропущена. Более того, $\lambda^2 = \pm p_v$.

3.20. Очевидно, что множество всех собственных чисел $\rho_l^{\wedge 2}(F_v^{-1})$ совпадает с $\Delta \cdot \Delta - \{\lambda^2 \beta_1^{\pm 6} (\alpha_1^2 \delta_i^2)^{\pm 1}\} - \{\lambda^2 \beta_1^{\pm 6} (\alpha_1^2 (\delta_1 \dots \delta_{p-1})^{-2})^{\pm 1}\}$. Поэтому мы можем исключить случай (3.2.17) рассуждениями п. 3.17.

3.21. Рассмотрим случаи (3.2.18), (3.2.19).

Предположим, например, что $\chi \neq 0$. В этой ситуации

$$\Delta = \{\lambda \alpha_1 \{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, (\alpha_2 \alpha_3 \alpha_4)^{-1}\} \cup \lambda \alpha_1^{-1} \{\alpha_2^{-1}, \alpha_3^{-1}, \alpha_4^{-1}, \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4\}\} \cdot \{\beta_1, \dots, \beta_p\},$$

где $\lambda, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ мультипликативно независимы, $1 \in \{\beta_1, \dots, \beta_p\}$. Пусть

$$\begin{aligned}
\Phi &= \lambda \alpha_1 \{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, (\alpha_2 \alpha_3 \alpha_4)^{-1}\} \cup \lambda \alpha_1^{-1} \{\alpha_2^{-1}, \alpha_3^{-1}, \alpha_4^{-1}, \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4\}, \\
\Psi &= \{\beta_1, \dots, \beta_p\}.
\end{aligned}$$

В обозначениях п. 2.24 имеем: Γ_Φ и Γ_Ψ – абелевы группы без кручения положительного ранга, $\Gamma_\Phi \cap \Gamma_\Psi = (1)$. Мы утверждаем, что

$$\gamma \in \Phi \Leftrightarrow \text{Card}(T_\gamma^0(\Delta) \cap \Delta) \geq p. \quad (3.21.1)$$

Действительно, можно считать, что $\gamma \in \{\lambda \alpha_1 \alpha_2 \beta_i, \lambda \alpha_1 (\alpha_2 \alpha_3 \alpha_4)^{-1} \beta_i \mid i = 1, \dots, p\}$. Поэтому мультипликативная независимость $\lambda, \alpha_1, \dots, \alpha_4$ и соотношение $\Gamma_\Phi \cap \Gamma_\Psi = (1)$ дают соотношение

$$T_{\lambda \alpha_1 \alpha_2 \beta_i}^0(\delta) = (\lambda \alpha_1 \alpha_2 \beta_i)^2 \cdot \delta^{-1} \in \Delta \Leftrightarrow \delta \in \{\lambda \alpha_1 \alpha_2 \beta_i^2 \cdot \Psi\} \cap \Delta.$$

Ясно, что

$$\text{Card}(T_{\lambda \alpha_1 \alpha_2 \beta_i}^0(\Delta) \cap \Delta) \geq p = \text{Card}(\Psi) \Leftrightarrow \beta_i^2 \cdot \Psi = \Psi \Leftrightarrow \beta_i = 1$$

и

$$\text{Card}(T_{\lambda \alpha_1 (\alpha_2 \alpha_3 \alpha_4)^{-1} \beta_i}^0(\Delta) \cap \Delta) \geq p = \text{Card}(\Psi) \Leftrightarrow \beta_i^2 \cdot \Psi = \Psi \Leftrightarrow \beta_i = 1.$$

Поэтому утверждение (3.21.1) доказано. Мы видим, что соотношение (2.24.7) выполняется в этой новой ситуации. Следовательно, можно исключить случаи (3.2.18), (3.2.19) рассуждениями п. 2.24.

3.22. Рассмотрим, наконец, случай (3.2.20). Предположим, например, что $\chi \neq 0$. В этой ситуации

$$\Delta = \lambda\alpha_1 \cdot \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, (\beta_1\beta_2\beta_3)^{-1}\} \cdot \{\delta_1, \dots, \delta_{p-1}, (\delta_1\delta_2 \dots \delta_{p-1})^{-1}\} \\ \cup \lambda\alpha_1^{-1} \cdot \{\beta_1^{-1}, \beta_2^{-1}, \beta_3^{-1}, \beta_1\beta_2\beta_3\} \cdot \{\delta_1^{-1}, \dots, \delta_{p-1}^{-1}, \delta_1\delta_2 \dots \delta_{p-1}\},$$

где $\lambda, \alpha_1, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \delta_1, \dots, \delta_{p-1}$ мультипликативно независимы. Следующий результат вытекает из (0.3.1).

3.23. ЛЕММА. *Перечисленные ниже подмножества $\Delta \cdot \Delta \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -инвариантны:*

$$\{\lambda^2\}, \quad \{\lambda^2\beta_k\beta_l^{-1} \mid k \neq l\} \cup \{\lambda^2(\beta_1\beta_k^2\beta_3)^{\pm 1}\}, \\ \{\lambda^2\delta_i\delta_j^{-1} \mid i \neq j\} \cup \{\lambda^2(\delta_1 \dots \delta_i^2 \dots \delta_{p-1})^{\pm 1}\}, \\ \{\lambda^2(\beta_k\beta_l)^{\pm 1}(\alpha_1^2\delta_i\delta_j)^{\pm 1} \mid k \neq l, i \neq j\} \\ \cup \{\lambda^2(\beta_k\beta_l)^{\pm 1}(\alpha_1^2(\delta_1 \dots \delta_i^\wedge \dots \delta_{p-1})^{-1})^{\pm 1} \mid k \neq l\}, \\ \{\lambda^2\beta_k\beta_l^{-1}\delta_i\delta_j^{-1} \mid k \neq l, i \neq j\} \cup \{\lambda^2\beta_k\beta_l^{-1}(\delta_1 \dots \delta_i^2 \dots \delta_{p-1})^{\pm 1} \mid k \neq l\}, \\ \{\lambda^2(\beta_1\beta_k^2\beta_3)^{\pm 1}\delta_i\delta_j^{-1} \mid i \neq j\} \cup \{\lambda^2(\beta_1\beta_k^2\beta_3)^{\pm 1}(\delta_1 \dots \delta_i^2 \dots \delta_{p-1})^{\pm 1}\}, \\ \{\lambda^2(\alpha_1^2\beta_k^2\delta_i\delta_j)^{\pm 1} \mid i \neq j\} \cup \{\lambda^2(\alpha_1^2\beta_k^2(\delta_1 \dots \delta_i^\wedge \dots \delta_{p-1})^{-1})^{\pm 1}\} \\ \cup \{\lambda^2(\beta_k\beta_l)^{\pm 1}(\alpha_1^2\delta_i^2)^{\pm 1} \mid k \neq l\} \cup \{\lambda^2(\beta_k\beta_l)^{\pm 1}(\alpha_1^2(\delta_1 \dots \delta_{p-1})^{-2})^{\pm 1} \mid k \neq l\} \\ \cup \{\lambda^2(\alpha_1^2(\beta_1\beta_2\beta_3)^{-2}\delta_i\delta_j)^{\pm 1} \mid i \neq j\} \\ \cup \{\lambda^2(\alpha_1^2(\beta_1\beta_2\beta_3)^{-2}(\delta_1 \dots \delta_i^\wedge \dots \delta_{p-1})^{-1})^{\pm 1}\}, \\ \{\lambda^2(\alpha_1^2\beta_k^2\delta_i^2)^{\pm 1}\} \cup \{\lambda^2(\alpha_1^2\beta_k^2(\delta_1 \dots \delta_{p-1})^{-2})^{\pm 1}\} \\ \cup \{\lambda^2(\alpha_1^2(\beta_1\beta_2\beta_3)^{-2}\delta_i^2)^{\pm 1}\} \cup \{\lambda^2(\alpha_1^2(\beta_1\beta_2\beta_3)^{-2}(\delta_1 \dots \delta_{p-1})^{-2})^{\pm 1}\},$$

где $\delta_i^\wedge$ означает, что δ_i пропущена. Более того, $\lambda^2 = \pm p_v$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, легко видеть, что

$$\text{Card}(T_{\lambda^2}(\Delta) \cap \Delta) = 8p, \\ \text{Card}(T_{\lambda^2\beta_k\beta_l^{-1}}(\Delta) \cap \Delta) = \text{Card}(T_{\lambda^2(\beta_1\beta_k^2\beta_3)^{\pm 1}}(\Delta) \cap \Delta) = 2p, \\ \text{Card}(T_{\lambda^2\delta_i\delta_j^{-1}}(\Delta) \cap \Delta) = \text{Card}(T_{\lambda^2(\delta_1 \dots \delta_i^2 \dots \delta_{p-1})^{\pm 1}}(\Delta) \cap \Delta) = 8, \\ \text{Card}(T_{\lambda^2(\beta_k\beta_l)^{\pm 1}(\alpha_1^2\delta_i\delta_j)^{\pm 1}}(\Delta) \cap \Delta) \\ = \text{Card}(T_{\lambda^2(\beta_k\beta_l)^{\pm 1}(\alpha_1^2(\delta_1 \dots \delta_i^\wedge \dots \delta_{p-1})^{-1})^{\pm 1}}(\Delta) \cap \Delta) = 4, \\ \text{Card}(T_{\lambda^2\beta_k\beta_l^{-1}\delta_i\delta_j^{-1}}(\Delta) \cap \Delta) = \text{Card}(T_{\lambda^2(\beta_1\beta_k^2\beta_3)^{\pm 1}\delta_i\delta_j^{-1}}(\Delta) \cap \Delta) \\ = \text{Card}(T_{\lambda^2\beta_k\beta_l^{-1}(\delta_1 \dots \delta_i^2 \dots \delta_{p-1})^{\pm 1}}(\Delta) \cap \Delta)$$

$$\begin{aligned}
&= \text{Card}(T_{\lambda^2(\beta_1\beta_k^2\beta_3)^{\pm 1}(\delta_1\ldots\delta_i^2\ldots\delta_{p-1})^{\pm 1}}(\Delta) \cap \Delta) \\
&= \text{Card}(T_{\lambda^2(\alpha_1^2\beta_k^2\delta_i\delta_j)^{\pm 1}}(\Delta) \cap \Delta) \\
&= \text{Card}(T_{\lambda^2(\alpha_1^2\beta_k^2(\delta_1\ldots\delta_i^\wedge\ldots\delta_{p-1})^{-1})^{\pm 1}}(\Delta) \cap \Delta) \\
&= \text{Card}(T_{\lambda^2(\beta_k\beta_l)^{\pm 1}(\alpha_1^2\delta_i^2)^{\pm 1}}(\Delta) \cap \Delta) \\
&= \text{Card}(T_{\lambda^2(\beta_k\beta_l)^{\pm 1}(\alpha_1^2(\delta_1\ldots\delta_{p-1})^{-2})^{\pm 1}}(\Delta) \cap \Delta) \\
&= \text{Card}(T_{\lambda^2(\alpha_1^2(\beta_1\beta_2\beta_3)^{-2}\delta_i\delta_j)^{\pm 1}}(\Delta) \cap \Delta) \\
&= \text{Card}(T_{\lambda^2(\alpha_1^2(\beta_1\beta_2\beta_3)^{-2}(\delta_1\ldots\delta_i^\wedge\ldots\delta_{p-1})^{-1})^{\pm 1}}(\Delta) \cap \Delta) = 2, \\
&\text{Card}(T_{\lambda^2(\alpha_1^2\beta_k^2\delta_i^2)^{\pm 1}}(\Delta) \cap \Delta) \\
&= \text{Card}(T_{\lambda^2(\alpha_1^2\beta_k^2(\delta_1\ldots\delta_{p-1})^{-2})^{\pm 1}}(\Delta) \cap \Delta) \\
&= \text{Card}(T_{\lambda^2(\alpha_1^2(\beta_1\beta_2\beta_3)^{-2}\delta_i^2)^{\pm 1}}(\Delta) \cap \Delta) \\
&= \text{Card}(T_{\lambda^2(\alpha_1^2(\beta_1\beta_2\beta_3)^{-2}(\delta_1\ldots\delta_{p-1})^{-2})^{\pm 1}}(\Delta) \cap \Delta) = 1.
\end{aligned}$$

3.24. Очевидно, что множество всех собственных чисел $\rho_i^{\wedge^2(F_v^{-1})}$ равно

$$\begin{aligned}
&\Delta \cdot \Delta - \{\lambda^2(\alpha_1^2\beta_k^2\delta_i^2)^{\pm 1}\} - \{\lambda^2(\alpha_1^2\beta_k^2(\delta_1\ldots\delta_{p-1})^{-2})^{\pm 1}\} \\
&- \{\lambda^2(\alpha_1^2(\beta_1\beta_2\beta_3)^{-2}\delta_i^2)^{\pm 1}\} - \{\lambda^2(\alpha_1^2(\beta_1\beta_2\beta_3)^{-2}(\delta_1\ldots\delta_{p-1})^{-2})^{\pm 1}\}.
\end{aligned}$$

С другой стороны, элементы $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -инвариантного множества

$$\begin{aligned}
&\{\lambda^2(\beta_k\beta_l)^{\pm 1}(\alpha_1^2\delta_i\delta_j)^{\pm 1} \mid k \neq l, i \neq j\} \\
&\cup \{\lambda^2(\beta_k\beta_l)^{\pm 1}(\alpha_1^2(\delta_1\ldots\delta_i^\wedge\ldots\delta_{p-1})^{-1})^{\pm 1} \mid k \neq l\}
\end{aligned}$$

имеют очень “смешанную” мультипликативную структуру. Поэтому мы не можем использовать здесь обычную технику пп. 2.12, 2.13, 3.17.

3.25. Предположим, что J имеет много обыкновенных редукций. В этой ситуации мы можем выбрать v так, что выполняются условия (2.5.1)–(2.5.6) и дополнительное условие

$$\frac{w(\Delta \cdot \Delta)}{w(p_v^2)} \subset \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}, \quad (3.25.1)$$

где w – произвольная точка поля $\overline{\mathbb{Q}}$, лежащая над p_v . Это следует из (0.5.2).

Предположим, что

$$\frac{w(\lambda^2\beta_1\beta_2^{-1})}{w(p_v^2)} = 0$$

для некоторой точки $w|p_v$. Тогда для любого $\sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$

$$\frac{(\sigma w)(\sigma(\lambda^2\beta_1\beta_2^{-1}))}{(\sigma w)(p_v^2)} = 0,$$

поэтому из полученного выше соотношения

$$\sigma(\lambda^2 \beta_1 \beta_2^{-1}) \in \{\lambda^2 \beta_k \beta_l^{-1} \mid k \neq l\} \cup \{\lambda^2 (\beta_1 \beta_k^2 \beta_3)^{\pm 1}\}$$

и из транзитивности естественного действия $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ на $\{w \mid w - \text{точка поля } \overline{\mathbb{Q}}, \text{ лежащая над } p_v\}$ следует, что $\forall w|p_v \exists x_w \in \{\lambda^2 \beta_k \beta_l^{-1} \mid k \neq l\} \cup \{\lambda^2 (\beta_1 \beta_k^2 \beta_3)^{\pm 1}\}$ такой, что $w(x_w) = 0$.

Поэтому $\forall w \mid p_v$

$$0 = w(x_w) = \frac{1}{2} \{w(x_w \delta_1 \delta_2^{-1}) + w(x_w \delta_1^{-1} \delta_2)\}.$$

Поскольку слагаемые в последних скобках неотрицательны в силу соотношений $x_w(\delta_1 \delta_2^{-1})^{\pm 1} \in \Delta \cdot \Delta$, то мы имеем равенства

$$w(x_w \delta_1 \delta_2^{-1}) = w(x_w \delta_1^{-1} \delta_2) = 0.$$

Значит, $w(\delta_1 \delta_2^{-1}) = 0$ для всех $w|p_v$. Следовательно, $\delta_1 \delta_2^{-1}$ – корень из 1 [23, подлемма 3.4.0], что противоречит мультипликативной независимости чисел δ_1, δ_2 .

Предположим, что

$$\frac{w(\lambda^2 \beta_1 \beta_2^{-1})}{w(p_v^2)} = 1$$

для некоторой точки w . Пусть ρ – комплексное сопряжение, определенное некоторым фиксированным вложением $\overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$. Хорошо известно, что

$$\frac{w(\lambda^2 \beta_1 \beta_2^{-1})}{w(p_v^2)} + \frac{(\rho w)(\lambda^2 \beta_1 \beta_2^{-1})}{(\rho w)(p_v^2)} = 1$$

[18, (3.16.2)]. Поэтому в нашей ситуации мы приходим к невозможному соотношению

$$\frac{(\rho w)(\lambda^2 \beta_1 \beta_2^{-1})}{(\rho w)(p_v^2)} = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{w(\lambda^2 (\beta_1 \beta_2^{-1})^{\pm 1})}{w(p_v^2)} = \frac{1}{2}$$

для всех точек $w|p_v$. Значит, $\beta_1 \beta_2^{-1}$ – корень из 1 [23, подлемма 3.4.0], что противоречит предположению о мультипликативной независимости чисел β_1, β_2 . Значит, $g_l^{ss} \otimes \overline{\mathbb{Q}_l}$ не является алгеброй Ли типа $A_3 \times A_{p-1}$. Теорема 0.9 доказана.

Список литературы

1. *Bogomolov F. A.* Sur l'algebricité des représentations l -adiques // C. R. Acad. Sci. Paris 1980. V. 290. P. 701–703.
2. *Боровой М. В.* Схемы Шимуры–Делиня $M_{\mathbb{C}}(G, h)$ и рациональные классы когомологий типа (p, p) на абелевых многообразиях // Вопросы теории групп и гомологической алгебры. Ярославль: Изд-во ЯрГУ, 1977. С. 3–53.
3. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. М.: Мир, 1976 (гл. 1–3); 1972 (гл. 4–6); 1978 (гл. 7–8).
4. *Cassels J. W. S., Frohlich A. (Eds.)* Algebraic number theory. Proc. International Conf., Brighton, 1965, London: Academic Press, and Washington, D.C.: Thompson, 1967.

5. *Chi W.* On the l -adic representations attached to simple abelian varieties of type IV // Bull. Austral. Math. Soc. 1991. V. 44. P. 71–78.
6. *Chi W.* l -adic and λ -adic representations associated to abelian varieties defined over number fields // Amer. J. Math. 1992. V. 114. P. 315–353.
7. *Deligne P.* Variétés abéliennes ordinaires sur un corps fini // Invent. Math. 1969. V. 8. P. 238–243.
8. *Faltings G.* Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern // Invent. Math. 1983. V. 73. P. 349–366.
9. *Grothendieck A.* Hodge’s general conjecture is false for trivial reasons // Topology. 1969. V. 8. P. 299–303.
10. *Hodge W. V. D.* The topological invariants of algebraic varieties // Proc. Internat. Congr. Math. (Cambridge, MA, 1950). V. 1. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1952. P. 182–192.
11. *Mumford D.* Families of abelian varieties // Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups. Proc. Sympos. Pure Math. V. 9. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1966. P. 347–352.
12. *Мамфорд Д.* Абелевы многообразия. М.: Мир, 1971.
13. *Ogus A.* Hodge cycles and crystalline cohomology: Hodge cycles, motives, and Shimura varieties // Lecture Notes in Math. 1982. V. 900. P. 357–414.
14. *Пятецкий-Шапиро И. И.* Взаимоотношения между гипотезами Тэйта и Ходжа для абелевых многообразий // Матем. сб. 1971. Т. 85. С. 610–620.
15. *Serre J.-P.* Abelian l -adic representations and elliptic curves. N. Y.: Benjamin, 1968.
16. *Shimura G.* On analytic families of polarized abelian varieties and automorphic functions // Ann. Math. 1963. V. 78. P. 149–192.
17. *Танкеев С. Г.* Циклы на простых абелевых многообразиях простой размерности над числовыми полями // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1987. Т. 51. № 6. С. 1214–1227.
18. *Танкеев С. Г.* Алгебраические циклы на абелевом многообразии без комплексного умножения // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 3. С. 103–126.
19. *Танкеев С. Г.* Циклы на абелевых многообразиях и исключительные числа // Изв. РАН. Сер. матем. 1996. Т. 60. № 2. С. 159–194.
20. *Танкеев С. Г.* Алгебраические циклы на простом $4p$ -мерном абелевом многообразии над числовым полем. (В печати.)
21. *Tate J.* Algebraic cycles and poles of zeta functions // Arithmetical Algebraic Geometry. N. Y.: Harper and Row, 1965. P. 93–110.
22. *Tate J.* Endomorphisms of abelian varieties over finite fields // Invent. Math. 1966. V. 2. P. 134–144.
23. *Заргин Ю. Г.* Веса простых алгебр Ли в когомологиях алгебраических многообразий // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1984. Т. 48. № 2. С. 264–304.

Владимирский государственный университет,
ул. Горького, 87,
Владимир, 600026, Россия.
E-mail: tankeev-rtf@vpti.vladimir.su

Поступило в редакцию
5.III.1996 г.