Общероссийский математический портал

Д. П. Желобенко, Дифференциальные операторы и дифференциальное исчисление в квантовых группах, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1998, том 62, выпуск 4, 25–50

DOI: <https://doi.org/10.4213/im191>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 18:10:27

УДК 513.88+519.46

Д. П. Желобенко

Дифференциальные операторы и дифференциальное исчисление в квантовых группах

Исследуются абстрактные дифференциальные операторы в биалгебрах и алгебрах Хопфа (квантовых группах). Доказаны теоремы плотности и некоторые структурные теоремы для алгебр дифференциальных операторов, определяемых дуальными парами алгебр Хопфа A , B . Отмечена связь с квантовым дублем В. Дринфельда и с дифференциальной геометрией в квантовых группах.

Библиография: 20 наименований.

Введение

Алгебры Хопфа (квантовые группы) давно уже стали предметом интенсивного исследования, особенно с 1985 г., с тех пор, как В. Дринфельдом [8] были обнаружены новые содержательные примеры алгебр Хопфа (отличных от коммутативных или кокоммутативных). Безусловно, алгебры Хопфа представляют собой яркий пример “неоклассики” в современной математике, и не только благодаря своей замечательной родословной (включающей связь с квантовой физикой), но в значительной степени благодаря их собственному совершенству. Достаточно вспомнить дуальные пары алгебр Хопфа, ассоциированные с полупростыми комплексными алгебрами Ли (или с алгебрами Каца–Мули) [7], [9], [10], связь с уравнением Янга–Бакстера и скобками Пуассона [7], конструкцию квантового дубля В. Дринфельда [7], [9], обобщение теории двойственности Таннаки–Крейна [14], кристаллические методы Г. Люстига [13] и М. Кашивары [11], [12] в теории представлений квантовых групп, их влияние на классическую теорию представлений [17] и т.д.

В 1989 г. С.Л. Вороновичем [15] было показано, что каждая алгебра Хопфа A обладает богатой дифференциально-геометрической структурой, определяемой в терминах дифференциальных форм, ассоциированных с правыми (левыми) идеалами алгебры A . С тех пор появилось большое количество работ по дифференциальному исчислению в квантовых группах. В [16] была отмечена роль квантового дубля В. Дринфельда в дифференциальном исчислении, а именно в описании присоединенного действия в алгебре внешних дифференциальных форм. Для левых (правых) идеалов конечной коразмерности рассматривалась двойственность между касательными и кокасательными расслоениями в квантовых группах (см., например, [4]). По-видимому, особый интерес для дальнейших исследований представляют “квантовые алгебры Ли”, ассоциированные с квантовыми группами [5].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 95-01-00233).

Предметом исследования в данной статье являются “дифференциальные операторы”, естественно возникающие в теории алгебр Хопфа и имеющие непосредственное отношение к дифференциальному исчислению в смысле [15]. Показано, что с каждой дуальной парой алгебр Хопфа A, B естественно связаны некоторые алгебры дифференциальных операторов, имеющие тесную аналогию с классическими алгебрами Вейля (т.е. с алгебрами дифференциальных операторов в евклидовых пространствах). Показано, что дифференциальная геометрия С. Л. Вороновича естественно излагается в терминах дифференциальных операторов, т.е. левоинвариантных (правоинвариантных) векторных полей на квантовых группах. Разумеется, эта конструкция сводится к стандартной двойственности между касательными и кокасательными расслоениями в квантовых группах. С другой стороны, именно при этом подходе проясняется роль квантового дубля В. Дринфельда в дифференциальной геометрии квантовых групп.

Следует отметить, что дифференциальные операторы в алгебрах Хопфа рассматривались эпизодически еще до появления общей концепции квантовых групп [8]. В известной мере эта конструкция относится к области математического фольклора. Одно из первых формальных определений содержится в краткой заметке С. П. Новикова [19], в связи с предложенным им общим понятием алгебр Милнора.

План изложения в данной статье сводится к следующему. В § 1 определяются алгебры дифференциальных операторов в биалгебрах и квантовых группах. В § 2 для этих алгебр устанавливаются некоторые аналоги теоремы плотности Джекобсона. В § 3 исследуются структурные свойства дифференциальных алгебр. В § 4 рассматривается действие квантового дубля В. Дринфельда, ассоциированного с дуальной парой алгебр Хопфа. В § 5 излагается общая схема дифференциального исчисления в терминах векторных полей. В § 6 устанавливается связь этой схемы с дифференциальным исчислением С. Л. Вороновича. В § 7 изложены элементарные свойства дифференциальных операторов, связанные со слабыми топологиями в алгебрах Хопфа.

Таким образом, содержание этой статьи сводится к элементарному введению в дифференциальное исчисление на квантовых группах. В известной степени эта статья может рассматриваться как продолжение конструкции [3], связанной с описанием дифференциальных операторов в градуированных алгебрах. Связь с этой конструкцией рассматривается в § 3.

Краткое изложение результатов статьи можно найти в [18]. См. также [20].

§ 1. Алгебра $D(A)$

1.1. Пусть A – биалгебра над полем k . Напомним, что A есть ассоциативная алгебра с единицей, снабженная коумножением $\Delta: A \rightarrow A \otimes A$ и коединицей $\varepsilon: A \rightarrow k$, где Δ, ε суть морфизмы алгебр с единицей, связанные условием коассоциативности

$$(\Delta \otimes 1)\Delta = (1 \otimes \Delta)\Delta \quad (1.1)$$

и условием согласованности

$$(\varepsilon \otimes 1)\Delta = (1 \otimes \varepsilon)\Delta = 1. \quad (1.2)$$

Здесь тензорные степени алгебры A рассматриваются как алгебры (с покомпонентным умножением) и каждая из алгебр $A \otimes 1$, $1 \otimes A$ отождествляется с алгеброй A .

Условие коассоциативности позволяет определить индуктивные “степени” оператора Δ , в том числе морфизм $\Delta^2: A \rightarrow A \otimes A \otimes A$, определяемый равенством (1.1). В дальнейшем мы будем использовать следующие символы Шведлера:

$$\Delta x = x_1 \otimes x_2, \quad \Delta^2 x = x_1 \otimes x_2 \otimes x_3 \quad (1.3)$$

(заменяющие сумму слагаемых вида $x_1^i \otimes x_2^i$ и т.д.). Условие (1.2) в этих обозначениях принимает следующий вид:

$$\varepsilon(x_1)x_2 = x_1\varepsilon(x_2) = x \quad (1.4)$$

для всех $x \in A$.

Биалгебра A называется *алгеброй Хопфа*, если в ней определен обратимый *антипод* $\gamma: A \rightarrow A$, удовлетворяющий соотношению

$$\gamma(x_1)x_2 = x_1\gamma(x_2) = \varepsilon(x) \quad (1.5)$$

для всех $x \in A$.

Здесь γ определяется первоначально как эндоморфизм векторного пространства A . Однако из условия (1.5) следует, что γ есть антиавтоморфизм алгебры A (см., например, [10]).

1.2. Биалгебры A, B над полем k называются *дуальными* друг другу, если существует невырожденная билинейная форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на $A \otimes B$, удовлетворяющая следующим соотношениям двойственности:

$$\langle x, 1 \rangle = \varepsilon(x), \quad \langle 1, y \rangle = \varepsilon(y), \quad (1.6)$$

$$\langle x, yz \rangle = \langle \Delta x, y \otimes z \rangle, \quad \langle xy, z \rangle = \langle x \otimes y, \Delta z \rangle \quad (1.7)$$

для всех x, y, z (из A или B). Здесь мы используем одинаковые обозначения для операций Δ, ε в алгебрах A и B .

Невырожденность формы $\langle \cdot, \cdot \rangle$ позволяет определить каноническое вложение $B \rightarrow A^*$ (аналогично $A \rightarrow B^*$), так что форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$ совпадает с сужением на $A \otimes B$ канонической билинейной формы, определенной в $A \otimes A^*$. Мы будем, как правило, использовать обозначение $y(x)$ (аналогично $x(y)$) для значения линейного функционала $y \in A^*$ на элементе $x \in A$.

Известно [7], что все дуальные биалгебры $B \subset A^*$ содержатся в наибольшей дуальной биалгебре $A^+ \subset A^*$. Если A и B – алгебры Хопфа, то антиподы в A и B связаны соотношением сопряженности, т.е.

$$\langle \gamma x, y \rangle = \langle x, \gamma y \rangle \quad (1.8)$$

для всех $x \in A$, $y \in B$.

Напомним [7], что алгебра A^+ состоит из всех функционалов $f \in A^*$, для которых $\mu^*(f) \in A^* \otimes A^*$, где $\mu^*: A^* \rightarrow (A \otimes A)^*$ – отображение, сопряженное к операции умножения $\mu: A \otimes A \rightarrow A$. При этом $\Delta = \mu^*$ есть операция коумножения в алгебре A^+ .

1.3. Пусть A, B – дуальные биалгебры, и пусть $a \in \text{End } A$, $b \in \text{End } B$ – операторы, сопряженные друг другу относительно формы $\langle \cdot, \cdot \rangle$, т.е.

$$\langle ax, y \rangle = \langle x, by \rangle \quad (1.9)$$

для всех $x \in A$, $y \in B$. Из невырожденности формы $\langle \cdot, \cdot \rangle$ следует в этом случае однозначность операций сопряжения $a' = b$, $b' = a$.

В частности, пусть $a \in A$. Поскольку A есть алгебра с единицей, мы можем отождествить элемент a с оператором левого умножения $l_a x = ax$ в алгебре A . Аналогично, каждый элемент $b \in B$ отождествляется с оператором $l_b \in \text{End } B$. Легко проверить, что каждый из этих операторов обладает сопряженным относительно формы $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Например, имеем

$$b'x = b(x_1)x_2 \quad (1.10)$$

для каждого $b \in B$, где $x \in A$, $\Delta x = x_1 \otimes x_2$. Заменяя в этом определении операторы l_a операторами правого умножения $r_a x = xa$, условимся также использовать обозначения $\bar{a}x = xa$, $\bar{b}y = yb$ ($x \in A$, $y \in B$). Соответствующий аналог соотношения (1.10) имеет вид

$$\bar{b}'x = x_1 b(x_2). \quad (1.11)$$

Используя правило двойственности (1.7), легко проверить, что каждый из операторов $\partial = b'$, $\bar{\partial} = \bar{b}'$ удовлетворяет следующему тождеству Лейбница:

$$\partial(xy) = \partial_1(x)\partial_2(y) \quad (1.12)$$

для всех $x, y \in A$, где положено $\partial_i = b'_i, \bar{\partial}_i = \bar{b}'_i$ ($i = 1, 2$) при $\Delta b = b_1 \otimes b_2$.

Заметим также, что алгебра A есть левый B -модуль относительно операторов $b * x = \bar{b}'x$ и правый B -модуль относительно операторов $x * b = b'x$. Таким образом, A есть B -бимодуль. Аналогично, алгебра B есть A -бимодуль с операторами $a * y = \bar{a}'y$, $y * a = a'y$ ($a \in A$, $y \in B$).

1.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть A – биалгебра над полем k с фиксированной дуальной биалгеброй B . Условимся отождествлять элементы $a \in A$, $b \in B$ с соответствующими операторами l_a, l_b , так что $A \subset \text{End } A$, $B \subset \text{End } B$, и пусть $D(A) = \text{Diff}(A, B)$ – подалгебра в $\text{End } A$, порожденная подалгебрами A, B' .

Заметим, что правило Лейбница (1.12) может быть записано как соотношение коммутации между операторами $\partial = b' \in B'$, $x = l_x \in A$, а именно

$$\partial x = \partial_1(x) \partial_2. \quad (1.13)$$

Используя (1.13), находим, что алгебра $D(A)$ натянута на элементы вида ab' ($a \in A$, $b \in B$). Иначе говоря, имеем

$$D(A) = AB'. \quad (1.14)$$

Варьируя в этом определении операторы l_a, l_b с операторами r_a, r_b , получаем также следующие подалгебры в $\text{End } A$, родственные $D(A)$:

$$\bar{D}(A) = A\bar{B}', \quad D(\bar{A}) = \bar{A}B', \quad \bar{D}(\bar{A}) = \bar{A}\bar{B}'. \quad (1.15)$$

Здесь $\bar{A}, \bar{B}$ – подалгебры в $\text{End } A, \text{End } B$ соответственно, состоящие из операторов r_a, r_b ($a \in A$, $b \in B$).

Элементы алгебры (1.14) (либо (1.15)) называются *дифференциальными операторами типа (A, B)* в алгебре A . Соответственно алгебры (1.14), (1.15) называются *дифференциальными алгебрами типа (A, B)* .

Элементы алгебры $\bar{B}'$ (соответственно B') называются *левоинвариантными* (*правоинвариантными*) *дифференциальными операторами* в алгебре A .

1.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $x \in A$, и пусть $l(x)$ (соответственно $r(x)$) – линейная оболочка элементов x_1^i (соответственно x_2^i), определяемых разложением $\Delta x = x_1 \otimes x_2$, при условии, что дополнительные элементы x_2^i (соответственно x_1^i) линейно независимы. Подпространство $l(x)$ (соответственно $r(x)$) называется *левым* (*правым*) *ростком элемента x* .

Заметим, что это определение корректно, поскольку можно считать, что элементы x_2^i (соответственно x_1^i) составляют часть некоторого фиксированного базиса F векторного пространства A . Очевидно, это определение не зависит от выбора F . Ясно также, что $\dim l(x), \dim r(x) < \infty$.

1.6. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Левый (правый) росток элемента $x \in A$ есть циклический $\bar{B}'$ -модуль (B' -модуль), порожденный элементом x :*

$$\bar{B}'x = l(x), \quad B'x = r(x) \quad (1.16)$$

для всех $x \in A$.

Действительно, если элементы x_1^i ($i = 1, \dots, n$) линейно независимы, то существуют дуальные элементы $b_i \in B$ ($i = 1, \dots, n$), т.е. $b_j(x_1^i) = \delta_{ij}$ для всех $i, j = 1, \dots, n$. Поэтому из равенства (1.10) следует $B'x = r(x)$. Аналогично, из равенства (1.11) следует $\bar{B}'x = l(x)$.

§ 2. Теоремы плотности

2.1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Коммутант алгебры $D(A)$ в $\text{End } A$ скалярен, т.е. совпадает с $k \cdot 1$.*

Действительно, если оператор $f \in \text{End } A$ перестановочен со всеми l_a ($a \in A$), то $f = r_a$ при $a = f(1)$. Перестановочность такого оператора со всеми $\partial = b' \in B'$ означает, что $\partial(xa) = \partial(x)a$ для всех $x \in A$. Полагая $x = 1$, получаем

$$\langle a, b \rangle = \langle \partial a, 1 \rangle = \varepsilon(a) \langle 1, b \rangle$$

для всех $b \in B$, т.е. $a = \varepsilon(a)1$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Очевидно, аналоги этого утверждения справедливы для всех дифференциальных алгебр (1.15).

2.2. ТЕОРЕМА. *Пусть A есть алгебра Хопфа, и пусть $D(A) = \text{Diff}(A, B)$ – дифференциальная алгебра, определенная в п. 1.4 (либо одна из алгебр (1.15)). Тогда имеем:*

- (i) $D(A)$ -модуль A абсолютно прост;
- (ii) алгебра $D(A)$ плотна в $\text{End } A$ в алгебраическом смысле, а именно для каждого конечномерного подпространства $F \subset A$ имеем

$$D(A)|_F = \text{End } A|_F. \quad (2.1)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Как известно из общей теории модулей, утверждения (i), (ii) равносильны (см., например, [2]). Импликация (i) $\Rightarrow$ (ii) известна под названием теоремы плотности Джекобсона. Утверждение (ii) равносильно следующему:

- (iii) для каждого набора линейно независимых элементов $x_i \in A$ ($i = 1, \dots, n$) и каждого набора элементов $y_i \in A$ ($i = 1, \dots, n$) существует оператор $a \in D(A)$ такой, что $ax_i = y_i$ для всех $i = 1, \dots, n$.

Утверждение (ii) допускает следующую квантовомеханическую трактовку: каждая “наблюдаемая” $f \in \text{End } A$ есть “функция” (в аппроксимативном смысле) от операторов “рождения” ($a \in A$) и “уничтожения” ($\partial \in B'$).

Доказательство излагается в п. 2.3 (см. также п. 2.4).

2.3. Пусть $0 \neq x_0 \in A$. Применяя к элементу x_0 подходящий оператор $\partial = b' \in B'$ и пользуясь соотношением $\varepsilon(\partial x_0) = \langle x_0, b \rangle$, находим, что в пространстве $r(x_0)$ содержится элемент $x = \partial x_0$, для которого $\varepsilon(x) \neq 0$. Изменяя нормировку, можем считать, что $\varepsilon(x) = 1$. Но тогда из равенства (1.5) находим

$$1 = \gamma(x_1)x_2 \in Ar(x) \subset Ar(x_0). \quad (2.2)$$

С другой стороны, используя (1.14), (1.16) (для алгебры B'), получаем следующее общее правило:

$$D(A)x = Ar(x). \quad (2.3)$$

Применяя это правило к элементу x_0 и используя (2.2), получаем $D(A)x_0 = A$. Иначе говоря, каждый циклический подмодуль $D(A)x_0$ при $x_0 \neq 0$ совпадает со всем пространством A . Отсюда заключаем, что A есть простой $D(A)$ -модуль.

Используя скалярность коммутанта $D(A)$ (предложение 2.1), получаем (i), откуда также следует (ii) (см. [2, теорема 3.6]).

2.4. ЗАМЕЧАНИЕ. Абсолютная простота $D(A)$ -модуля A может быть доказана непосредственно, если заметить, что все предыдущие рассуждения сохраняются при замене поля k его произвольным расширением $\tilde{k}$. В частности, в п. 1.5 можно по-прежнему считать, что $F \subset A$, откуда следует аналог предложения 1.6 для алгебры $\tilde{A} = A \otimes \tilde{k}$. Поэтому $D(\tilde{A})$ -модуль $\tilde{A}$ прост (для всех $\tilde{k}$), т.е. $D(A)$ -модуль A абсолютно прост.

2.5. Существуют интересные примеры биалгебр (без антипода), для которых выполняется аналог теоремы плотности п. 2.2. Для изложения этих примеров нам понадобится ряд вспомогательных определений.

Пусть A – ассоциативная алгебра с единицей, градуированная подпространствами A_α ($\alpha \in \Gamma$), где Γ – некоторая аддитивная группа. Алгебра A называется *стандартной* (или алгеброй полиномиального типа) [3], если выполняются следующие условия:

(а) Γ – упорядоченная группа, порожденная системой π , состоящей из положительных образующих α_i ($i \in I$);

(б) алгебра A порождается однородными элементами x_i ($i \in I$) со степенями однородности $\alpha_i = \deg x_i$.

Оператор $a \in \text{End } A$ называется *однородным степени $\alpha \in \Gamma$* , если $aA_\beta \subset A_{\alpha+\beta}$ для всех $\beta \in \Gamma$. Линейная оболочка $E(A)$ однородных операторов $a \in \text{End } A$ есть градуированная алгебра (подалгебра в $\text{End } A$). Ясно также, что отображение $a \mapsto l_a$ (см. п. 1.3) определяет вложение градуированных алгебр $A \rightarrow E(A)$.

Мы будем рассматривать в $E(A)$ подкрученные коммутаторы $[\cdot, \cdot]_\tau$, определяемые на однородных элементах $x, y \in E(A)$ по правилу

$$[x, y]_\tau = xy - \tau(\alpha, \beta)yx, \quad (2.4)$$

где $\deg x = \alpha$, $\deg y = \beta$, $\tau : \Gamma \times \Gamma \rightarrow k$ – фиксированный бихарактер группы Γ . Заметим, что $\tau(\alpha, 0) = \tau(0, \beta) = 1$ для всех $\alpha, \beta \in \Gamma$.

Условимся говорить, что A есть *алгебра типа (Γ, π, τ)* , если A удовлетворяет условиям (а), (б) и в алгебре $E(A)$ фиксирован подкрученный коммутатор $[\cdot, \cdot]_\tau$.

2.6. Пусть A есть алгебра типа (Γ, π, τ) . Алгебра A называется *вполне дифференцируемой* [3], если существуют операторы $\partial_i \in E(A)$, удовлетворяющие соотношениям

$$[\partial_i, x_j]_\tau = \delta_{ij}, \quad \partial_i(1) = 0 \quad (2.5)$$

для всех $i, j \in I$.

Легко проверить [3], что в этом случае в алгебре A существует единственная невырожденная форма $(\cdot, \cdot)$, удовлетворяющая условию нормировки $(1, 1) = 1$ и условию контравариантности следующего вида:

$$(x_i f, g) = (f, \partial_i g), \quad (\partial_i f, g) = (f, x_i g) \quad (2.6)$$

для всех $f, g \in A$ и всех $i \in I$. Более того, форма $(\cdot, \cdot)$ симметрична, т.е. $(f, g) = (g, f)$ для всех $f, g \in A$. Форма $(\cdot, \cdot)$ называется *канонической билинейной формой* в алгебре A .

Алгебра A называется *невырожденной* [3], если каноническая форма $(\cdot, \cdot)$ невырождена в A .

2.7. ПРЕДЛОЖЕНИЕ [3]. Для каждой тройки (Γ, π, τ) (см. п. 2.5) существует единственная, с точностью до изоморфизма, невырожденная алгебра A типа (Γ, π, τ) . A именно

$$A = F/N, \quad (2.7)$$

где F – свободная алгебра типа (Γ, π, τ) , N – ее идеал, определяемый как ядро билинейной формы $(\cdot, \cdot)$. Более того, алгебра (2.7) есть самодуальная биалгебра относительно формы $(\cdot, \cdot)$.

2.8. Легко проверить, что алгебра $D(A)$ для алгебры (2.7) порождается элементами x_i, ∂_i ($i \in I$), и также

$$D(A) = AD = DA, \quad (2.8)$$

где $D = A'$ – подалгебра с образующими ∂_i ($i \in I$). Помимо этого алгебра $D(A)$ обладает следующей фильтрацией:

$$D_\alpha(A) = \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} AD_{-\beta}, \quad (2.9)$$

где $\alpha \geq 0$. Операторы $a \in D_\alpha(A)$ называются *дифференциальными операторами порядка $\leq \alpha$* .

2.9. ТЕОРЕМА. Пусть A есть невырожденная алгебра типа (Γ, π, τ) . Тогда для каждого конечномерного подпространства $F \subset A$, порожденного элементами степени $\leq \alpha$, имеем

$$D_\alpha(A)|_F = \text{End } A|_F. \quad (2.10)$$

Доказательство этой теоремы, изложенное в [3] для случая $\text{card } I < \infty$, переносится на общий случай без существенных изменений.

Таким образом, для алгебры (2.7) выполняется усиленный (градуированный) аналог теоремы плотности п. 2.2.

2.10. ЗАМЕЧАНИЕ. В [3] отмечен еще один вариант теоремы плотности для алгебры (2.7). A именно каждый оператор $f \in E(A)$ есть сумма ряда, сходящегося на элементах $x \in A$, с частичными суммами $f_\alpha \in D_\alpha(A)$.

Доказательство этого результата, изложенного в [3] для случая $\text{card } I < \infty$, также легко переносится на общий случай.

§ 3. Структурные теоремы

3.1. ТЕОРЕМА. Пусть A, B – дуальная пара алгебр Хопфа. Тогда:

(i) отображение $x \otimes y \mapsto xy$ определяет следующий изоморфизм векторных пространств:

$$D(A) = AB' \approx A \otimes B'; \quad (3.1)$$

(ii) аналоги этого утверждения справедливы для всех дифференциальных алгебр (1.15);

(iii) если алгебра A коммутативна или кокоммутативна (т.е. B коммутативна), то алгебра $D(A)$ абсолютно проста.

Доказательство излагается в пп. 3.2–3.6.

3.2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (i). Предположим, что в алгебре $D(A)$ выполняется следующее соотношение между элементами $a_i \in A$, $\partial_i \in B'$:

$$\sum_{i=1}^n a_i \partial_i = 0. \quad (3.2)$$

Условимся считать (не ограничивая общности), что элементы a_i ($i = 1, \dots, n$) линейно независимы. Умножая (3.2) слева на $\bar{A}$, справа на $\bar{B}'$ и используя перестановочность левых и правых умножений, получаем

$$\sum_{i=1}^n a_i W \partial_i = 0, \quad (3.3)$$

где $W = \bar{D}(\bar{A})$ в обозначениях (1.15). Применяя это равенство к элементу $x \in A$, фиксируем базис e_j ($j = 1, \dots, m$) в линейной оболочке элементов $\partial_i x$ ($i = 1, \dots, n$). Имеем

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i c_{ij} W e_j = 0, \quad (3.4)$$

где c_{ij} – коэффициенты элемента $\partial_i x$ относительно базиса e_j . Используя теорему плотности п. 2.2 для алгебры W , находим элементы $w_j \in W$ ($j = 1, \dots, m$), удовлетворяющие соотношениям $w_j(e_k) = \delta_{jk}$ для всех $j, k = 1, \dots, m$. Подставляя эти элементы в (3.4), находим

$$\sum_{i=1}^n a_i c_{ij} = 0, \quad (3.5)$$

т.е. $c_{ij} = 0$ для всех i, j . В результате $\partial_i x = 0$ для всех x , т.е. $\partial_i = 0$ для всех $i = 1, \dots, n$.

Полученный результат означает, что в алгебре $D(A)$ отсутствуют нетривиальные соотношения (3.2), что равносильно утверждению (i). Аналогично проверяется (ii).

3.3. Пусть A – алгебра Хопфа, X – произвольный A -бимодуль. Как известно (см., например, [10]), операторы

$$\pi(a)x = a_1x\tilde{a}_2, \quad (3.6)$$

где $a \in A$, $x \in X$, $\Delta a = a_1 \otimes a_2$, $\tilde{a} = \gamma a$, определяют представление алгебры A в пространстве X . Если X есть алгебра, то

$$\pi(a)(xy) = \pi(a_1)x \cdot \pi(a_2)y \quad (3.7)$$

для всех $a \in A$ и всех $x, y \in X$.

3.4. ЛЕММА. Пусть π – представление алгебры B' в $D(A)$, определяемое по правилу (3.6) для элементов $x \in D(A)$. Тогда для каждой пары $x \in A$, $\partial \in B'$ оператор $\pi(\partial)x \in D(A)$ совпадает с оператором умножения на элемент $\partial(x) \in A$.

Доказательство сводится к прямой проверке с использованием соотношений (1.12), (1.5), (1.4). Имеем

$$[\pi(\partial)x]y = \partial_1x\tilde{\partial}_2y = \partial_1(x)\partial_2\tilde{\partial}_3(y) = \partial_1(x)\varepsilon(\partial_2)y = \partial(x)y$$

для всех $y \in A$, где $\partial_i = b'_i$ ($i = 1, 2, 3$), при $\partial = b' \in B$, $\tilde{\partial} = \tilde{b}'$, $\Delta b = b_1 \otimes b_2$, $\Delta^2 b = b_1 \otimes b_2 \otimes b_3$.

Здесь мы используем стандартные правила сдвига индексов ($i \mapsto i \pm 1$) при переходе от Δb к $\Delta^2 b$ (см., например, [10]).

3.5. ЛЕММА. Пусть I – идеал алгебры $D(A)$, удовлетворяющий хотя бы одному из соотношений $I \cap A \neq 0$, $I \cap B' \neq 0$. Тогда имеем $I = D(A)$.

Действительно, пусть $0 \neq x \in I \cap A$. Используя инвариантность идеала I относительно действия $\pi(B')$ и лемму п. 3.4, получаем $B'(x) \subset I$. Отсюда следует, что I содержит $AB'(x) = D(A)(x) = A$ (согласно теореме плотности п. 2.2). В результате $I = D(A)$.

Аналогично, если $I \cap B' \neq 0$, то $I' \cap B \neq 0$, откуда $I' = D(B)$, т.е. $I = D(B)' = D(A)$.

3.6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО(ii). Используя симметрию между A и B , можем считать, не ограничивая общности, что алгебра B коммутативна.

Пусть I – идеал алгебры $D(A)$. Запишем произвольный элемент идеала I в виде

$$x = \sum_{i=1}^n a_i \partial_i, \quad (3.8)$$

где $a_i \in A$, $\partial_i \in B'$ и сомножители a_i ($i = 1, \dots, n$) линейно независимы. Применяя к (3.8) преобразование $\pi(B')$ и используя коммутативность алгебры B , получаем следующее семейство элементов идеала I :

$$\pi(\partial)x = \sum_{i=1}^n \pi(\partial_1)a_i \cdot \pi(\partial_2)\partial_i = \sum_{i=1}^n \partial_1(a_i)\varepsilon(\partial_2)\partial_i = \sum_{i=1}^n \partial(a_i)\partial_i.$$

Здесь мы использовали лемму п. 3.4 и равенство $\pi(\partial)x = \varepsilon(\partial)x$ для элементов $\partial, x \in B'$ (вытекающее из коммутативности алгебры B), где $\varepsilon(\partial) = \varepsilon(b)$ при $\partial = b' \in B'$. Умножая полученное равенство слева на A , получаем

$$\sum_{i=1}^n D(A)(a_i) \cdot \partial_i \subset I.$$

Применяя теорему плотности п. 2.2 для алгебры $D(A)$, находим $\partial_i \subset I$ для всех $i = 1, \dots, n$. Поэтому либо $I = 0$, либо $I \cap B' \neq 0$, т.е. $I = D(A)$ (лемма п. 3.5). Следовательно, алгебра $D(A)$ проста.

Остается заметить, что все приведенные рассуждения сохраняются при замене поля k его произвольным расширением $\tilde{k}$ (см. п. 2.4). В результате получаем, что алгебра $D(A)$ абсолютно проста.

3.7. ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть A – произвольная алгебра Хопфа. Повторяя рассуждения п. 3.6, находим, что $D(A)$ не содержит нетривиальных идеалов, инвариантных относительно действия $\pi(\overline{B}')$ в алгебре $D(A)$.

3.8. ПРИМЕР. Пусть $\mathfrak{g}$ – симметризуемая алгебра Каца–Мули, и пусть $A = A_q(\mathfrak{g})$, $B = U_q(\mathfrak{g})$ – классическая пара алгебр Хопфа, ассоциированных с $\mathfrak{g}$ (см. [7], [10]). Напомним, что B есть квантовая оболочка Дринфельда–Джимбо алгебры $\mathfrak{g}$, $A = B^+$ – координатная алгебра, ассоциированная с алгеброй $\mathfrak{g}$. Заметим, что алгебра B изоморфна B' (относительно инволюции Шевалле в алгебре $\mathfrak{g}$). Поэтому, используя теорему 3.1, (i), получаем

$$D(A) \approx A_q(\mathfrak{g}) \otimes U_q(\mathfrak{g}).$$

Заметим, что для алгебр конечного типа ($\dim \mathfrak{g} < \infty$) координатная алгебра $A_q(\mathfrak{g})$ иногда обозначается $F_q(G)$, где G – алгебраическая группа, для которой $\mathfrak{g} = \text{Lie } G$ (см., например, [12]).

3.9. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть A, B – дуальная пара биалгебр, и пусть $W(A) = W(A, B)$ – ассоциативная алгебра с единицей, порожденная элементами $A \cup B'$ и определяющими соотношениями следующего вида:

$$xy = \mu(x, y), \quad x, y \in A \quad \text{или} \quad x, y \in B', \quad (3.9)$$

$$\partial x = \partial_1(x)\partial_2, \quad x \in A, \quad \partial \in B', \quad (3.10)$$

где μ означает операцию умножения в алгебрах A, B' . Условимся говорить, что $W(A)$ есть *алгебра Вейля*, ассоциированная с парой A, B .

Согласно (1.13) алгебра Вейля $W(A)$ действует в A посредством гомоморфизма $\varphi: W(A) \rightarrow D(A)$, определяемого на элементах $x \in A \cup B'$ по правилу $\varphi(x) = x$. Более того, $W(A)$ покрывает $D(A)$, т.е.

$$D(A) \approx W(A)/\ker \varphi. \quad (3.11)$$

3.10. ТЕОРЕМА. Пусть $W(A) = W(A, B)$ – алгебра Вейля, определенная в п. 3.9. Тогда:

- (i) каждая из алгебр A, B' изоморфна одноименной подалгебре в $W(A)$;
- (ii) отображение $x \otimes y \mapsto xy$ определяет следующий изоморфизм векторных пространств:

$$W(A) = AB' \approx A \otimes B'; \quad (3.12)$$

- (iii) если A – алгебра Хопфа, то $\ker \varphi = 0$, т.е. отображение φ определяет изоморфизм алгебр $W(A), D(A)$.

Действительно, пусть α – гомоморфизм накрытия $F \rightarrow W(A)$, где F – свободная алгебра, порожденная множеством $A \cup B'$. Тогда $\varphi \circ \alpha = 1$ на $A \cup B'$, откуда следует (i) (т.е. α есть вложение для пары A, B').

Для доказательства (ii) заметим, что любой одночлен от элементов $A \cup B'$ приводится к виду AB' посредством тождеств (3.10). Покажем, что это приведение единственно, откуда следует существование изоморфизма в (3.12). Воспользуемся следующими соотношениями коммутации в алгебре $W(A)$:

$$\partial xy = \partial_1(xy)\partial_2 = \partial_1(x)\partial_2(y)\partial_3, \quad (3.13)$$

$$\partial \delta x = \partial \delta_1(x)\delta_2 = \partial_1 \delta_1(x)\partial_2 \delta_2 \quad (3.14)$$

в обозначениях п. 3.4, где $x, y \in A$ и $\partial, \delta \in B'$. Соотношение (3.13) позволяет заключить, что перестановка элемента ∂ с произведением xy приводит к тому же результату, что и его последовательная перестановка с элементами x, y . Аналогично интерпретируется (3.14). Отсюда следует (ii).

Утверждение (iii) вытекает теперь из теоремы п. 3.1.

3.11. ЗАМЕЧАНИЕ. Утверждение (ii) выполняется также для биалгебр $A = F/N$, определенных в п. 2.7. Более того, в этом случае имеем (см. [3])

$$D(A) \approx A \otimes D \approx D \otimes A.$$

§ 4. Алгебра $Q(A)$

4.1. Пусть A – алгебра Хопфа. Операторы $\pi(x) = \text{ad}_x$ определяют *присоединенное действие* алгебры A в пространстве A :

$$\text{ad}_x y = x_1 y \tilde{x}_2, \quad (4.1)$$

где $x, y \in A$, $\Delta x = x_1 \otimes x_2$, $\tilde{x} = \gamma x$. С другой стороны, определим *присоединенное кодействие* $\text{Ad}: A \rightarrow A \otimes A$ следующим образом:

$$\text{Ad } x = x_1 \tilde{x}_3 \otimes x_2, \quad (4.2)$$

где $\Delta^2 x = x_1 \otimes x_2 \otimes x_3$. Отображение (4.2) порождает следующее семейство линейных операторов в алгебре A :

$$\text{Ad}_f x = f(x_1 \tilde{x}_3) x_2 \quad (4.3)$$

для всех $f \in A^*$.

Операторы (4.1)–(4.3) связаны между собой известными соотношениями двойственности. Мы приводим эти соотношения для полноты изложения.

4.2. ЛЕММА. Пусть A, B – дуальная пара алгебр Хопфа. Тогда:

(i) отображение $\text{ad}: A \otimes A \rightarrow A$, определяемое по правилу $(x, y) \mapsto \text{ad}_x y$, сопряжено отображению $\text{Ad}: A \rightarrow A \otimes A$, т.е.

$$\langle \text{ad}_x y, f \rangle = \langle x \otimes y, f \rangle \quad (4.4)$$

для всех $x, y \in A$ и всех $f \in B$;

(ii) отображение $\text{Ad}_f: A \rightarrow A$ сопряжено присоединенному действию $\text{ad}_f: B \rightarrow B$ алгебры B , т.е.

$$\langle \text{Ad}_f x, g \rangle = \langle x, \text{ad}_f g \rangle \quad (4.5)$$

для всех $x \in A$ и всех $f, g \in B$;

(iii) подпространство $L \subset A$ инвариантно относительно операторов (4.3) при $f \in B$ тогда и только тогда, когда $\text{Ad } L \subset A \otimes L$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО сводится к непосредственной проверке. Полагая $\Delta^2 f = f_1 \otimes f_2 \otimes f_3$, получаем

$$\langle \text{ad}_x y, f \rangle = f_1(x_1) f_2(y) f_3(\tilde{x}_2) = f_1 \tilde{f}_3(x) f_2(y) = \langle x \otimes y, \text{Ad } f \rangle.$$

Отсюда (изменяя роли A, B) получаем

$$\langle \text{Ad}_f x, g \rangle = f(x_1 \tilde{x}_3) g(x_2) = \langle \text{Ad } x, f \otimes g \rangle = \langle x, \text{ad}_f g \rangle.$$

Ясно также, что включение $\text{Ad } L \subset A \otimes L$ влечет инвариантность L относительно операторов (4.3) для всех $f \in A^*$. Обратно, пусть $\text{Ad}_f L \subset L$ для всех $f \in B$. Иначе говоря, для всякого элемента $z \in \text{Ad } L$, представленного в виде суммы элементов $x_i \otimes y_i$ ($i = 1, \dots, n$), имеем

$$\sum_{i=1}^n f(x_i)y_i \in L \quad (4.6)$$

для всех $f \in B$. Условимся считать, что элементы x_i ($i = 1, \dots, n$), входящие в это выражение, линейно независимы, и пусть f_i ($i = 1, \dots, n$) – дуальная система в B , т.е. $f_i(x_j) = \delta_{ij}$ для всех $i, j = 1, \dots, n$. Подставляя эти элементы в (4.6), находим $y_i \in L$ для всех $i = 1, \dots, n$, т.е. $z \in A \otimes L$.

4.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть A, B – дуальная пара алгебр Хопфа, и пусть $Q(A, B)$ – ассоциативная алгебра с единицей, порожденная элементами $A \cup B$ и определяющими соотношениями следующего вида:

$$xy = \mu(x, y), \quad x, y \in A \text{ или } x, y \in B, \quad (4.7)$$

$$fx = f_1(x_3)f_3(\tilde{x}_1)x_2f_2, \quad x \in A, \quad f \in B, \quad (4.8)$$

где использованы обозначения п. 4.2, т.е. $\Delta^2 x = x_1 \otimes x_2 \otimes x_3$, $\tilde{x} = \gamma x$, $\Delta^2 f = f_1 \otimes f_2 \otimes f_3$. Алгебра $Q(A, B)$ называется *квантовым дублем Дринфельда*, ассоциированным с парой A, B .

ЗАМЕЧАНИЕ. Существуют известные модификации в определении квантового дубля Дринфельда (см., например, [7], [9], [10]). Мы используем определение, согласованное с операторами (4.3), а также нестандартное обозначение $Q(A, B)$ (вместо $D(A, B)$, $\mathcal{Q}(A, B)$ и т.д.) во избежание возможного смешения с обозначением дифференциальных алгебр, введенных в п. 1.4.

Как известно, алгебра $Q(A, B)$ обладает структурой алгебры Хопфа, согласованной с исходными структурами в алгебрах A, B . Мы не станем приводить эти определения, поскольку в дальнейшем они не используются.

4.4. ТЕОРЕМА. Пусть $Q(A) = Q(A, B)$ – квантовый дубль Дринфельда, определенный в п. 4.3. Тогда:

(i) алгебра $Q(A)$ действует в пространстве A посредством операторов

$$a \cdot x = ax, \quad f \cdot x = \text{Ad}_{\tilde{f}} x, \quad (4.9)$$

где $a, x \in A, \quad f \in B$;

(ii) отображение $x \otimes y \mapsto xy$ определяет следующие изоморфизмы векторных пространств:

$$Q(A) = AB \approx A \otimes B, \quad Q(A) = BA \approx B \otimes A, \quad (4.10)$$

где исходные алгебры A , B отождествляются (соответственно) с подалгебрами $A \otimes 1$, $1 \otimes B$ и т.д.

Заметим вначале, что $f \mapsto \text{Ad}_f$ есть антипредставление алгебры B (см. (4.5)). Поэтому формулы (4.9) определяют представление алгебр A , B в пространстве A . Теперь для доказательства (i) достаточно проверить, что тождество (4.8) сохраняется при переходе к операторам (4.9), т.е. $f \cdot ax = fa \cdot x$ для всех $a, x \in A$ и всех $f \in B$. Действительно, имеем

$$\begin{aligned} f \cdot ax &= f(a_3 x_3 \tilde{x}_1 \tilde{a}_1) a_2 x_2 = f_1(a_3) f_3(\tilde{a}_1) f_2(x_3 \tilde{x}_1) a_2 x_2 \\ &= f_1(a_3) f_3(\tilde{a}_1) a_2 f_2 \cdot x = fa \cdot x. \end{aligned}$$

Доказательство (ii) аналогично доказательству теоремы п. 3.11. Детали рассуждения можно найти в [7], [9], [10].

4.5. СЛЕДСТВИЕ. Пусть N – ядро присоединенного представления $f \mapsto \text{ad}_f$ алгебры B , и пусть

$$\tilde{Q}(A) = Q(A)/N, \quad (4.11)$$

где N отождествляется с $1 \otimes N$ в алгебре $Q(A) \approx A \otimes B$. Тогда операторы (4.9) определяют в A структуру $\tilde{Q}(A)$ -модуля.

Соответственно B наделяется структурой сопряженного $Q(A)$ -модуля ($\tilde{Q}(A)$ -модуля). Согласно п. 4.2 этот модуль порождается операторами a' ($a \in A$), ad_f ($f \in B$).

ЗАМЕЧАНИЕ. Можно показать, по аналогии с п. 3.11, что A есть точный $\tilde{Q}(A)$ -модуль, т.е. операторы (4.9) определяют вложение $\tilde{Q}(A)$ в алгебру $\text{End } A$.

4.6. Условимся о некоторых обозначениях, используемых в дальнейшем. Мы будем рассматривать A^* как A -бимодуль с операторами

$$(a * f)(x) = f(xa), \quad (f * a)(x) = f(ax), \quad (4.12)$$

где $a, x \in A$, $f \in A^*$.

Для каждого подпространства $L \subset A$ пусть L^0 – его аннулятор в A^* (т.е. множество всех функционалов $f \in A^*$, равных нулю на L). Очевидно, элементы $f \in L^0$ допускают интерпретацию как линейные функционалы в A/L . При этом L^0 отождествляется с пространством, сопряженным к A/L .

Ясно также, что отображение $L \mapsto L^0$ переводит каждый левый (правый) идеал L алгебры A в правый (левый) подмодуль $L^0 \subset A^*$.

Очевидно, $L \subset L^{00}$. Если $\text{codim } L < \infty$, то $L = L^{00}$. Отсюда заключаем, что отображение $L \mapsto L^0$ определяет биекцию между левыми (правыми) идеалами $L \subset A$ конечной коразмерности и правыми (левыми) конечномерными подмодулями $L^0 \subset A^*$.

§ 5. Дифференциальные формы

5.1. В этом параграфе излагается общая схема дифференциального исчисления над алгеброй Хопфа A , в известном смысле двойственная к предложенной в [15]. В отличие от классического случая (многообразия, группы Ли) эта схема не единственна и связана с выбором специальных левых (правых) идеалов алгебры A .

Пусть $L \subset \ker \varepsilon$ – левый идеал алгебры A , и пусть $L_1 = k \cdot 1 \oplus L$. Тогда имеем

$$A/L = k \cdot 1 \oplus A/L_1, \quad (5.1)$$

где единичный элемент $1 \in A$ отождествляется со своим образом в A/L . Соответствующие сопряженные пространства (аннуляторы) L^0, L_1^0 связаны соотношением

$$L^0 = k \cdot \varepsilon \oplus L_1^0. \quad (5.2)$$

Фиксируем базис a_i ($i \in I$) векторного пространства A/L_1 , и пусть b_i ($i \in I$) – соответствующая координатная система в L_1^0 , так что

$$x = \sum_i b_i(x) a_i \quad (5.3)$$

для каждого $x \in A \bmod L_1$. Очевидно, a_i, b_i ($i \in I$) суть дуальные системы, т.е. $b_i(a_j) = \delta_{ij}$ для всех $i, j \in I$.

Пусть F – линейная оболочка системы b_i ($i \in I$), и пусть $F_1 = k \cdot \varepsilon \oplus F$. Нетрудно видеть (см. п. 5.2), что F_1 есть (правый) A -модуль относительно действия (4.16). Условимся говорить, что F_1 есть *касательный A -модуль*, определяемый идеалом L и базисом a_i ($i \in I$).

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $\text{codim } L < \infty$, то имеем $F_1 = L^0$, откуда следует, что в этом случае модуль F_1 не зависит от выбора базиса a_i ($i \in I$).

5.2. Условимся отождествлять элементы a_i ($i \in I$) с их фиксированными представителями в $\ker \varepsilon$. Разлагая элемент $y \in A \bmod L$ по базису $1, a_i$ ($i \in I$) с коэффициентами ε, b_i ($i \in I$) и используя включение $xL \subset L$ при $x \in A$, находим

$$b_i(xy) = f_i(x)\varepsilon(y) + \sum_j f_{ij}(x)b_j(y) \quad (5.4)$$

для всех $x, y \in A$ с коэффициентами $f_i, f_{ij} \in A^*$. Полагая $y = 1$, получаем $f_i = b_i$. Полагая $y = a_j$, получаем

$$f_{ij}(x) = b_i(xa_j) \quad (5.5)$$

для всех $x \in A$ и всех $i, j \in I$. Используя закон ассоциативности алгебры A и равенство (5.4), находим

$$f_{ij}(xy) = \sum_k f_{ik}(x)f_{kj}(y) \quad (5.6)$$

для всех $x, y \in A$ и всех $i, j \in I$. Ясно также, что $f_{ij}(1) = \delta_{ij}$ для всех $i, j \in I$.

Заметим, что система b_i ($i \in I$) локально конечна, т.е. удовлетворяет условию (α) для каждого $x \in A$ лишь конечное число значений $b_i(x)$ отлично от нуля.

Отсюда следует, согласно (5.5), что система $f = (f_{ij})$ локально конечна по столбцам, т.е. удовлетворяет условию

(β) для каждой пары $x \in A$, $j \in I$ лишь конечное число значений $f_{ij}(x)$ отлично от нуля.

Элемент b_i содержится в A^+ (см. п. 1.2) тогда и только тогда, когда выполняется более сильное условие конечности для матрицы f :

(γ_i) лишь конечное число функционалов f_{ij} ($j \in I$) отлично от нуля.

Очевидно, в этом случае соотношение (5.4) принимает следующий вид:

$$\Delta b_i = b_i \otimes 1 + \sum_j f_{ij} \otimes b_j,$$

где $1 \in A^+$ совпадает с единицей алгебры A (см. п. 1.2).

5.4. Для каждого $f \in A^*$ мы будем рассматривать соответствующие левоинвариантные (правоинвариантные) векторные поля $\partial(x) = f * x$ (соответственно $\bar{\partial}(x) = x * f$), т.е.

$$\partial(x) = x_1 f(x_2), \quad \bar{\partial}(x) = f(x_1) x_2 \quad (5.7)$$

в обозначениях п. 1.3. Заметим, что $f \in A^*$ восстанавливается по векторным полям (4.8) по правилу $f = \varepsilon \circ \partial = \varepsilon \circ \bar{\partial}$, т.е.

$$f(x) = \varepsilon(\partial(x)) = \varepsilon(\bar{\partial}(x)) \quad (5.8)$$

для всех $x \in A$.

Применяя (5.4), получаем следующие правила Лейбница для векторных полей $\partial_i(x) = b_i * x$:

$$\partial_i(xy) = \partial_i(x)y + \sum_j c_{ij}(x) \partial_j(y) \quad (5.9)$$

с коэффициентами $c_{ij}(x) = f_{ij} * x$. Аналогично, из равенства (5.6) следует

$$c_{ij}(xy) = \sum_k c_{ik}(x) c_{kj}(y) \quad (5.10)$$

для всех $x, y \in A$ и всех $i, j \in I$. Ясно также, что $\partial_i(1) = 0$, $c_{ij}(1) = \delta_{ij}$ для всех $i, j \in I$.

Соотношения (5.10) выполняются также при замене $\partial_i(x)$ на $\bar{\partial}_i(x) = x * b_i$ с коэффициентами $\bar{c}_{ij}(x) = x * f_{ij}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Аналогично можно было бы рассматривать правые идеалы $R \subset \ker \varepsilon$ алгебры A . Однако равенство $L = \gamma R$ устанавливает биекцию между левыми и правыми идеалами алгебры A .

5.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\Gamma = \Gamma(L)$ – свободный правый A -модуль с образующими ω_i ($i \in I$), т.е. множество всех элементов вида

$$\omega(x) = \sum_i \omega_i x_i \quad (5.11)$$

с коэффициентами $x_i \in A$ и покомпонентными операциями $x_i \mapsto x_i a$ ($a \in A$). Полагая

$$x\omega_j = \sum_i \omega_i c_{ij}(x) \quad (5.12)$$

в обозначениях п. 4.4, мы наделяем Γ структурой левого A -модуля. Таким образом, Γ наделяется структурой A -бимодуля.

Определим отображение $d: A \rightarrow \Gamma$, полагая

$$dx = \sum_i \omega_i \partial_i(x), \quad (5.13)$$

где ∂_i ($i \in I$) – векторные поля, определенные в п. 5.4. Используя (5.9), (5.12), находим

$$d(xy) = dx \cdot y + x \cdot dy \quad (5.14)$$

для всех $x, y \in A$.

Элементы бимодуля Γ называются *левыми дифференциальными формами* (первого порядка) над алгеброй A . Оператор $d: A \rightarrow \Gamma$ называется *левым полным дифференциалом* в алгебре A .

Аналогично, с заменой ∂_i, c_{ij} на $\bar{\partial}_i, \bar{c}_{ij}$ определяется бимодуль $\bar{\Gamma} = \bar{\Gamma}(L)$, состоящий из правых дифференциальных форм над алгеброй A .

ЗАМЕЧАНИЕ. Элементы ω_i ($i \in I$) преобразуются ковариантно базисными элементами a_i ($i \in I$) относительно перебора базиса в A/L (см. п. 5.1). В этом смысле определение $\Gamma(L)$ не зависит от выбора базиса в A/L .

5.6. ЛЕММА. Положим $\tilde{b}_i = b_i \circ \gamma$, $\tilde{f}_{ij} = f_{ij} \circ \gamma$, и пусть $\tilde{\partial}_i(x) = \tilde{b}_i * x$, $\tilde{c}_{ij}(x) = \tilde{f}_{ij} * x$ – соответствующие левинвариантные векторные поля. Тогда:

(i) операторные матрицы $c = (c_{ij})$, $\tilde{c} = (\tilde{c}_{ij})$ удовлетворяют соотношениям $\tilde{c}c = c\tilde{c} = 1$, т.е.

$$\sum_k \tilde{c}_{ik} c_{kj} = \sum_k c_{ik} \tilde{c}_{kj} = \delta_{ij} \quad (5.15)$$

для всех $i, j \in I$;

(ii) операторы $\partial_i, \tilde{\partial}_i$ удовлетворяют соотношениям

$$\partial_i = - \sum_j c_{ij} \tilde{\partial}_j, \quad \tilde{\partial}_i = - \sum_j \tilde{c}_{ij} \partial_j \quad (5.16)$$

для всех $i \in I$.

Доказательство сводится к прямой проверке (на элементах $x \in A$). Например, используя (5.10), получаем

$$\begin{aligned}\sum_k \tilde{c}_{ik} c_{kj}(x) &= \sum_k \tilde{c}_{ik} [x_1 f_{kj}(x_2)] = x_1 \sum_k f_{ik}(\tilde{x}_2) f_{kj}(x_3) \\ &= x_1 f_{ij}(\varepsilon(x_2)) = \delta_{ij} x_1 \varepsilon(x_2) = \delta_{ij} x,\end{aligned}$$

где положено $\Delta x = x_1 \otimes x_2$, $\Delta^2 x = x_1 \otimes x_2 \otimes x_3$. Аналогично, используя (5.9), получаем

$$\begin{aligned}\sum_j \tilde{c}_{ij} \partial_j(x) &= \sum_j \tilde{c}_{ij} [x_1 b_j(x_2)] = x_1 \sum_j f_{ij}(\tilde{x}_2) b_j(x_3) \\ &= x_1 [b_i(\varepsilon(x_2)) - b_i(\tilde{x}_2)] = -\tilde{\partial}_i(x).\end{aligned}$$

Точно так же проверяются остальные соотношения (5.15), (5.16).

5.7. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Элементы (5.11) однозначно записываются в следующем виде:*

$$\omega(x) = \sum_i \bar{x}_i \omega_i \quad (5.17)$$

с коэффициентами $\bar{x}_i = \sum_j \tilde{c}_{ij}(x_j)$. В частности, Γ есть свободный левый A -модуль. При этом

$$dx = - \sum_i \tilde{\partial}_i(x) \omega_i. \quad (5.18)$$

Доказательство сводится к элементарной проверке с использованием леммы п. 5.6.

5.8. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Элементы (5.11) могут быть записаны в виде суммы элементов вида $dx_k \cdot y_k$ (либо $x_k \cdot dy_k$), где $x_k, y_k \in A$, $k = 1, \dots, n$.*

Достаточно рассматривать базисные элементы ω_i ($i \in I$). Например, для модуля $\bar{\Gamma} = \bar{\Gamma}(L)$ имеем

$$\begin{aligned}\omega_j &= \sum_i \omega_i b_i(a_j) = \sum_i \omega_i b_i(a_{j1}) \varepsilon(a_{j2}) \\ &= \sum_i \omega_i b_i(a_{j1}) a_{j2} \tilde{a}_{j3} = \sum_j \omega_i \partial_i(a_{j1}) \tilde{a}_{j2} = da_{j1} \cdot \tilde{a}_{j2},\end{aligned}$$

где $\tilde{x} = \gamma x$. Аналогично, $\omega_j = \tilde{a}_{j1} \cdot da_{j2}$, где $\tilde{x} = \gamma^{-1}x$. Случай $\Gamma = \Gamma(L)$ рассматривается аналогично с использованием (5.18).

§ 6. Элементы геометрии

6.1. Напомним основные определения [15], связанные с дифференциальным исчислением (первого порядка) над алгеброй Хопфа A .

Бимодуль Γ над алгеброй A называется *дифференциальным исчислением первого порядка*, если он снабжен оператором $d: A \rightarrow \Gamma$ (полный дифференциал), удовлетворяющим соотношению (5.14), и если элементы $\omega \in \Gamma$ допускают представление в виде

$$\omega = \sum_{k=1}^n x_k dy_k, \quad (6.1)$$

где $x_k, y_k \in A$ ($k = 1, \dots, n$).

Бимодуль Γ называется *левоковариантным*, если он снабжен оператором $\delta: \Gamma \rightarrow A \otimes \Gamma$, удовлетворяющим соотношению

$$\delta(\omega) = \sum_{k=1}^n \Delta x_k (1 \otimes d) \Delta y_k \quad (6.2)$$

для элементов вида (6.1). Как показано в [15], оператор δ удовлетворяет также следующим соотношениям:

$$\delta(a\omega b) = \Delta(a)\delta(\omega)\Delta(b), \quad (6.3)$$

$$(\Delta \otimes 1)\delta = (1 \otimes \delta)\delta, \quad (\varepsilon \otimes 1)\delta = 1, \quad (6.4)$$

$$\delta d = (1 \otimes d)\delta, \quad (6.5)$$

где $a, b \in A$, $\omega \in \Gamma$.

Бимодуль A называется *правоковариантным*, если он снабжен оператором $\delta': \Gamma \rightarrow \Gamma \otimes A$, удовлетворяющим соотношению

$$\delta'(\omega) = \sum_{k=1}^n \Delta x_k (d \otimes 1) \Delta y_k \quad (6.6)$$

для элементов вида (6.1). В этом случае для оператора δ' также выполняются аналоги (6.3), (6.4), (6.6) с заменой $\Delta \otimes 1$ на $1 \otimes \Delta$ и т.д.

Бимодуль Γ называется *биковариантным*, если он одновременно левоинвариантен и правоинвариантен. Как показано в [15], операторы δ, δ' в этом случае связаны следующим соотношением согласованности:

$$(\delta \otimes 1)\delta' = (1 \otimes \delta')\delta. \quad (6.7)$$

Элемент $\omega \in \Gamma$ называется *левоинвариантным* (*правоинвариантным*), если $\delta\omega = 1 \otimes \omega$ (соответственно $\delta'\omega = \omega \otimes 1$). Подпространство левых (правых) инвариантов бимодуля Γ обозначается ${}_{\text{inv}}\Gamma$ (соответственно Γ_{inv}).

Условимся также говорить, что (Γ, d) есть *левоковариантное* (*правоковариантное*) *исчисление конечного ранга*, если $\dim({}_{\text{inv}}\Gamma) < \infty$ (соответственно $\dim(\Gamma_{\text{inv}}) < \infty$).

6.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Дифференциальное исчисление $\Gamma(L)$ (соответственно $\bar{\Gamma}(L)$), определенное в п. 5.5, левоковариантно (правоковариантно).*

Действительно, определим отображение $\delta: \Gamma(L) \rightarrow A \otimes \Gamma(L)$ по правилу $\delta\omega_i = 1 \otimes \omega_i$ с продолжением на весь бимодуль $\Gamma(L)$ по правилу (6.3). Легко проверить (см. п. 7.5), что $\Delta \circ \partial = (1 \otimes \partial) \circ \Delta$ для каждого левоинвариантного векторного поля $\partial(x) = f * x$ ($f \in A^*$). Отсюда следует (6.2), т.е. бимодуль $\Gamma(L)$ левоковариантен. Случай $\bar{\Gamma}(L)$ рассматривается аналогично (с определением $\delta'\omega_i = \omega_i \otimes 1$).

6.3. ТЕОРЕМА. *Пусть $\Gamma(L)$, $\bar{\Gamma}(L)$ – дифференциальные исчисления, определенные в п. 5.5. Тогда:*

- (i) *каждое левоковариантное (правоковариантное) дифференциальное исчисление первого порядка над алгеброй A совпадает с одним из $\Gamma(L)$ (соответственно $\bar{\Gamma}(L)$), где $L \subset \ker \varepsilon$ – левый идеал алгебры A ;*
- (ii) *дифференциальное исчисление $\Gamma(L)$ (аналогично $\bar{\Gamma}(L)$) биковариантно тогда и только тогда, когда идеал L Ad-инвариантен относительно действия (4.2).*

Действительно, (i) вытекает непосредственно из теоремы п. 2.1 (соответственно п. 2.3) статьи [15], где показано, что каждое левоковариантное (правоковариантное) дифференциальное исчисление (Γ, d) есть левый (правый) свободный A -модуль, базис которого определяется как произвольный базис векторного пространства ${}_{\text{inv}}\Gamma$ (соответственно Γ_{inv}). При этом соотношения Лейбница (5.9) возникают как следствия структурных соотношений (5.12), (5.14), определенных в (Γ, d) .

Заметим, что условия локальной конечности (α) , (β) (см. п. 5.2) содержатся (явно или неявно) в конструкции [15]. А именно условие (α) (соответственно (β)) следует из локальной конечности разложений (5.13) (соответственно (5.12)), определенных в (Γ, d) .

Помимо этого в [15] показано (теоремы 1.5, 1.6), что каждое левоковариантное (правоковариантное) дифференциальное исчисление (Γ, d) однозначно характеризуется некоторым правым идеалом $R \subset \ker \varepsilon$. Легко проверить, что $R = \gamma^{-1}L$ при $\Gamma = \Gamma(L)$. Согласно [15, теорема 1.8] бимодуль Γ биковариантен тогда и только тогда, когда идеал R ад-инвариантен в смысле [15], т.е. идеал L Ад-инвариантен относительно действия (4.2). Отсюда следует (ii).

6.4. СЛЕДСТВИЕ. *Отображение $L \mapsto \Gamma(L)$ (соответственно $L \mapsto \bar{\Gamma}(L)$) определяет сюръекцию множества конечномерных касательных A -модулей $F_1 = L^0$ на множество левоковариантных (правоковариантных) дифференциальных исчислений конечного ранга над алгеброй A .*

ЗАМЕЧАНИЕ. Отображение $L \mapsto \Gamma(L)$ можно рассматривать как биекцию на семейство дифференциальных исчислений, определенных в [15]. Однако остается открытым вопрос о совпадении (изоморфизме) дифференциальных исчислений $\Gamma(L_1)$, $\Gamma(L_2)$ при различных L_1, L_2 .

6.5. ТЕОРЕМА. *Дифференциальное исчисление $\Gamma(L)$ (аналогично $\bar{\Gamma}(L)$) биковариантно тогда и только тогда, когда L есть подпространство в $\ker \varepsilon$, инвариантное относительно действия квантового дубля $Q(A, B)$, где B – произвольная дуальная биалгебра алгебры A .*

Действительно, $Q(A, B)$ -инвариантность сводится к одновременной A -инвариантности и B -инвариантности, причем A -инвариантность означает, что L есть левый идеал алгебры A , в то время как B -инвариантность равносильна Ad -инвариантности идеала L (лемма 4.2, (iii)). Остается воспользоваться теоремой 6.3, (ii).

6.6. СЛЕДСТВИЕ. *Отображение $L \mapsto \Gamma(L)$ определяет сюръекцию множества конечномерных $Q(A, B)$ -модулей $F_1 \subset A^*$, содержащих ε , на множество биковариантных дифференциальных исчислений конечного ранга над алгеброй A .*

ЗАМЕЧАНИЕ. Случай $\text{codim } L < \infty$ рассматривался ранее в [4]. Связь с квантовым дублем (в несколько иных контекстах) рассматривалась в [16], [5] также при $\text{codim } L < \infty$. (См. [4]–[6], [15] относительно дальнейшего развития дифференциально-геометрических концепций в алгебрах Хопфа (дифференциальные формы произвольного порядка, квантовые алгебры Ли и т.д.).)

6.7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть (Γ, d) – дифференциальное исчисление первого порядка с оператором $\delta x = x_1 \otimes x_2$ (см. п. 6.1.), где $x \in \Gamma$. Положим

$$f'x = f(x_1)x_2$$

для элементов $f \in A^*$.

Заметим, что отображение $f \mapsto f'$ определяет антипредставление для каждой дуальной биалгебры $B \subset A^*$. Действительно, для каждой пары элементов $a, b \in B$ имеем

$$b'a'x = a(x_1)b'x_2 = a(x_1)b(x_2)x_3 = (ab)(x_1)x_2 = (ab)'x,$$

где использовано правило коассоциативности (6.3) для оператора $\delta^2 = (\Delta \otimes 1)\delta = (1 \otimes \delta)\delta$. Соответственно отображение (6.8) можно рассматривать как представление “противоположной” алгебры B' .

6.8. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Пространство Γ есть левый $D(A)$ -модуль с операторами $a \in A$, $\partial = b' \in B'$ (см. (6.8)). Оператор $d: A \rightarrow \Gamma$ сплетает представления алгебры B' в пространствах A, Γ .*

Действительно, для каждой пары $a \in A$, $b \in B$ имеем

$$b'ax = b(a_1x_1)a_2x_2 = b_1(a_1)b_2(x_1)a_2x_2 = b'_1(a)b'_2(x),$$

т.е. операторы $\partial = b' \in B'$ удовлетворяют тождеству Лейбница (3.10).

Отсюда следует, что операторы $a \in A$, $\partial = b' \in B'$ в пространстве Γ удовлетворяют структурным соотношениям алгебры $D(A) \approx W(A)$ (теорема п. 3.11), т.е. образуют представление алгебры $D(A)$.

Ясно также, что $\delta(dx) = x_1 \otimes dx_2$ для элементов $x \in A$ (см. п. 6.1). Поэтому

$$f'(dx) = f(x_1)dx_2 = d(f'x)$$

для элементов $f \in A^*$, где $f' \in \text{End } \Gamma$ (соответственно $f' \in \text{End } A$) в левой (правой) части этого равенства.

ЗАМЕЧАНИЕ. Связь между алгеброй $D(A)$ и ковариантными A -модулями (в частности, (Γ, d)) предполагается более детально рассмотреть в отдельной статье.

§ 7. Элементы топологии

7.1. Отметим связь дифференциальных операторов типа (A, B) со слабой топологией $\sigma(A, B)$ в пространстве A , определяемой посредством дуальной пары A, B .

Пусть $\text{End}_\sigma A$ – алгебра всех слабо непрерывных ($\sigma(A, B)$ -непрерывных) операторов в пространстве A . Как известно [1], оператор $a \in \text{End } A$ слабо непрерывен тогда и только тогда, когда он обладает сопряженным $a' \in \text{End } B$ (см. п. 1.3). Отсюда следует, что все дифференциальные операторы типа (A, B) слабо непрерывны, т.е. алгебры (1.14), (1.15) содержатся в $\text{End}_\sigma A$.

Мы будем рассматривать также операторы $e \in \text{End } A$, удовлетворяющие соотношениям Лейбница следующего вида:

$$e(xy) = \sum_i f_1^i x \otimes f_2^i y \equiv f_1 x \otimes f_2 y \quad (7.1)$$

для всех $x, y \in A$, где символы f_1, f_2 отождествляются с соответствующими семействами операторов f_1^i, f_2^i (по аналогии с п. 1.1).

7.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Для эндоморфизма $e \in \text{End } A$ следующие условия равносильны:

- (α) оператор e слабо непрерывен ($e \in \text{End}_\sigma A$);
- (β) оператор e удовлетворяет (7.1), где $f_1, f_2 \subset \text{End}_\sigma A$;
- (γ) оператор e удовлетворяет (7.1), где либо $f_1 \subset \text{End}_\sigma A$, либо $f_2 \subset \text{End}_\sigma A$.

Действительно, если (α) выполняется, то мы для каждой тройки $x, y \in A$, $z \in B$ имеем

$$\langle e(xy), z \rangle = \langle xy, w \rangle = \langle x, w_1 \rangle \langle y, w_2 \rangle, \quad (7.2)$$

где $w = e'z = w_1 \otimes w_2$. Условимся считать (см. п. 1.5), что элементы w_2^i ($i = 1, \dots, n$) суть базисные элементы пространства B , и пусть y_i ($i = 1, \dots, n$) – дуальная система в A , т.е. $\langle y_j, w_2^i \rangle = \delta_{ij}$ для всех $i, j = 1, \dots, n$. Тогда имеем

$$\langle x, w_1^i \rangle = \langle e(xy_i), z \rangle \quad (7.3)$$

для всех $i = 1, \dots, n$. Соотношение (7.2) принимает следующий вид:

$$e(xy) = \sum_{i=1}^n a_i(x)b_i(y), \quad (7.4)$$

где операторы $a_i(x) = e(xy_i)$, $b_i(y) = \langle y, w_2^i \rangle \cdot 1$ слабо непрерывны.

Таким образом, импликация $(\alpha) \Rightarrow (\beta)$ доказана. Импликация $(\beta) \Rightarrow (\gamma)$ тривиальна. Импликация $(\gamma) \Rightarrow (\alpha)$ вытекает из равенства

$$e(x) = f_1(x)f_2(1) = f_1(1)f_2(x) \quad (7.5)$$

для операторов (7.1).

7.3. СЛЕДСТВИЕ. Эндоморфизмы $e \in \text{End}_\sigma A$ удовлетворяют соотношениям следующего вида:

$$\Delta[e(x)] = e_1(x) \otimes e_2(x), \quad (7.6)$$

где $e_1, e_2 \in \text{End}_\sigma A$.

Действительно, (7.6) сопряжено соотношению (7.1) в алгебре B .

7.4. СЛЕДСТВИЕ. Алгебра $E = \text{End}_\sigma A$ есть коалгебра относительно каждого из следующих отображений:

$$\Delta e = e_1 \otimes e_2, \quad \Delta' e = f_1 \otimes f_2 \quad (7.7)$$

в обозначениях (7.1), (7.6). При этом операторы Δ, Δ' связаны соотношением сопряженности следующего вида:

$$\Delta' e = (\Delta e')' \quad (7.8)$$

для всех $e \in E$. Здесь $e \mapsto e'$ — операция сопряжения, $\text{End}_\sigma A \rightarrow \text{End}_\sigma B$.

7.5. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Преобразование Δ совпадает с одноименным оператором (1.3) на элементах $A \cup \bar{A}$ в алгебре E . Преобразование Δ действует на векторные поля $\partial(x) = f * x$, $\bar{\partial}(x) = x * f$ следующим образом:

$$\Delta \partial = 1 \otimes \partial, \quad \Delta \bar{\partial} = \bar{\partial} \otimes 1. \quad (7.9)$$

Преобразование Δ' действует на векторные поля $y = \partial, \bar{\partial}$ по правилу

$$\Delta' y = y_1 \otimes y_2 \quad (7.10)$$

в обозначениях (1.12).

Доказательство сводится к элементарной проверке. Например, имеем

$$\Delta \partial(x) = \Delta(x_1 f(x_2)) = x_1 \otimes x_2 f(x_3) = (1 \otimes \partial) \Delta x$$

для всех $x \in A$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Ясно также, что $\Delta'a = a \otimes 1$, $\Delta'\bar{a} = 1 \otimes \bar{a}$ для всех $a \in A$.

7.6. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Каждая из алгебр $D(A)$, $\overline{D}(A)$, $D(\bar{A})$, $\overline{D}(\bar{A})$ совпадает с множеством всех $e \in E$, удовлетворяющих соответственно соотношению $\Delta'e \in E \otimes B'$, $\Delta'e \in E \otimes \bar{B}'$, $\Delta'e \in B' \otimes E$, $\Delta'e \in \bar{B}' \otimes E$.

Действительно, все эти соотношения необходимы. С другой стороны, пусть $\Delta'e \in E \otimes B'$. Отсюда согласно (7.5) имеем $e \in AB' = D(A)$. Остальные соотношения рассматриваются аналогично.

7.7. Алгебра A^* . Пусть A – алгебра Хопфа. Заметим, что операция сопряжения позволяет наделять A^* структурой топологической алгебры Хопфа с обычным умножением и коумножением $\Delta: A^* \rightarrow A^* \hat{\otimes} A^*$, где символ $F \hat{\otimes} G$ означает локально конечное расширение подмножества $F \otimes G$ (естественно вложенного в $(A \otimes A)^*$), т.е. множество локально конечных функционалов следующего вида:

$$\varphi = \sum_i f_i \otimes g_i \quad (7.11)$$

с элементами $f_i \in F$, $g_i \in G$. При этом Δ есть гомоморфизм алгебры A^* в алгебру $A^* \hat{\otimes} A^*$, умножение в которой определяется как покомпонентное умножение рядов (7.11). Более того, элементы Δf ($f \in A^*$) допускают запись (7.11) с локально конечным семейством f_i (аналогично g_i).

7.8. Алгебра $D^\infty(A)$. Сохраним обозначения п. 7.7, и пусть $D^\infty(A)$ – векторное пространство линейных операторов следующего вида:

$$e = \sum_i a_i \partial_i, \quad (7.12)$$

где $a_i \in A$ и семейство $\partial_i = b'_i$ ($b_i \in A^*$) локально конечно. Используя конструкцию п. 7.7, легко установить, что $D^\infty(A)$ есть алгебра (подалгебра в $\text{End } A$).

Операторы (7.12) можно рассматривать как дифференциальные операторы “бесконечного порядка” в $\text{End } A$. Для алгебры $D^\infty(A)$ имеют место естественные аналогии теорем пп. 2.2, 3.1. Конструкция § 6 также естественно переносится на алгебру $D^\infty(A)$.

Список литературы

1. Бурбаки Н. Топологические векторные пространства. М.: ИЛ, 1959.
2. Диксмье Ж. Универсальные обертывающие алгебры. М.: Мир, 1977.
3. Желобенко Д. П. Дифференциальные операторы в градуированных алгебрах // Изв. РАН. Сер. матем. 1996. Т. 60. № 2. С. 49–72.
4. Ashieri P., Schupp P. Vector fields on quantum groups. Preprint q-alg./9505023. Univ. di Pisa, 1995.
5. Bernard D. Quantum Lie algebras and differential calculus on quantum groups // Progr. Theor. Phys. Suppl. 1990. V. 102. P. 49–66.
6. Bonechi F., Giachetti R., Maciocco R., Sorace E., Tarlini M. Quantum double and differential calculi. Preprint q-alg./9507004. Univ. di Firenze, 1995.

7. *Chari V., Pressley A.* A Guide to Quantum Groups. Cambridge U. P., 1995.
8. *Drinfeld V. G.* Quantum Groups // Proc. Intern. Congress of Math. Berkeley, 1986. Providence: AMS, 1987. (Рус. перевод: Зап. научных семин. ЛОМИ. 1986. Т. 155. С. 18–49.)
9. *De Concini C., Lybashenko V.* Quantum function algebra at roots of 1 // Adv. in Math. 1994. V. 108. № 2. P. 205–262.
10. *Joseph A.* Quantum Groups and Their Primitive Ideals. N. Y.: Springer, 1995.
11. *Kashiwara M.* Crystalizing the q -analogue of universal enveloping algebras // Comm. Math. Phys. 1990. V. 122. P. 249–260.
12. *Kashiwara M.* Global crystal bases of quantum groups. Preprint RIMS. Kyoto Univ., 1992.
13. *Lusztig G.* An Introduction to Quantum Groups. Birkhäuser, 1995.
14. *Woronowicz S. L.* Tannaka–Krein duality for compact matrix pseudogroups. Twisted $SU(N)$ groups // Invent. Math. 1988. V. 93. P. 35–76.
15. *Woronowicz S. L.* Differential calculus on compact matrix pseudogroups (quantum groups) // Comm. Math. Phys. 1989. V. 122. P. 125–170.
16. *Woronowicz S. L.* Quantum deformation of Lorentz group // Comm. Math. Phys. 1990. V. 130. P. 381–431.
17. *Zhelobenko D. P.* Crystal bases and the problem of reduction in classical and quantum modules // Adv. in Math. Sci. AMS Transl. (2). 1995. V. 169. P. 183–202.
18. *Zhelobenko D. P.* Differential operators on quantum groups and graded algebras // Proc. XXI Intern. Colloquium Group Theor. Methods in Physics. Goslar, 1996.
19. *Новиков С. П.* Различные удвоения алгебр Хопфа. Алгебры операторов на квантовых группах. Комплексные кобордизмы // УМН. 1992. Т. 47. № 5. С. 189–190.
20. *Zhelobenko D. P.* New aspects of differential calculus on quantum groups // Proc. V Wigner Symposium. Wien, 1997.

Поступило в редакцию
12.XII.1996