Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Королёв, О первообразной функции Харди $Z(t)$,
Изв. РАН. Сер. матем., 2008, том 72, выпуск 3, 19–68

DOI: <https://doi.org/10.4213/im1916>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 13:02:14

УДК 511

М. А. Королёв

О первообразной функции Харди $Z(t)$

Доказаны асимптотические формулы для значений первообразной функции Харди $Z(t)$ в специальных точках. Получены правильные по порядку роста омега-теорема и оценка сверху первообразной функции $Z(t)$.

Библиография: 10 наименований.

Введение

Функция Харди $Z(t)$ определяется равенством

$$Z(t) = e^{i\theta(t)} \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right),$$

в котором

$$e^{i\theta(t)} = \pi^{-it/2} \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{it}{2}\right) \left| \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{it}{2}\right) \right|^{-1},$$

$\Gamma(s)$ – гамма-функция, а $\zeta(s)$ – дзета-функция Римана. Из этого определения и функционального уравнения для дзета-функции (см. [1, с. 20]) следует, что $Z(t)$ принимает вещественные значения при вещественных t , а вещественные нули $Z(t)$ совпадают с ординатами нулей $\zeta(s)$, лежащих на критической прямой $\operatorname{Re} s = 1/2$.

Для решения ряда задач теории дзета-функции Римана необходимо знать свойства первообразной для $Z(t)$, т. е. функции $F(T)$, определяемой равенством

$$F(T) = \int_{2\pi}^T Z(t) dt.$$

Примером такой задачи может служить теорема Харди о том, что дзета-функция имеет на критической прямой бесконечно много нулей. Один из способов ее доказательства, предложенный Г. Харди и Д. Литтлвудом и впервые опубликованный Э. Ландау (см. [2, с. 78–85], а также [3, примечание на с. 70]), основан на использовании неравенства

$$|F(2T) - F(T)| = \left| \int_T^{2T} Z(t) dt \right| < \int_T^{2T} |Z(t)| dt \quad (1)$$

(действительно, если бы функция $Z(t)$ сохраняла знак при $t \geq t_0 > 0$, то при достаточно больших T эти интегралы были бы равны).

Путем несложных рассуждений можно заключить, что интеграл в правой части (1) ограничен снизу величиной $0.5T$. Таким образом, доказательство теоремы Харди сводится к нахождению подходящей верхней границы величины $|F(T)|$ при $T \rightarrow +\infty$.

Первая такая оценка была получена Г. Харди и Д. Литтлвудом и имеет вид

$$|F(T)| \ll T^{7/8}. \quad (2)$$

Дальнейшие продвижения в решении проблем, касающихся распределения нулей $\zeta(s)$ на критической прямой, основаны на более сложных свойствах функций $F(T)$ и $Z(t)$ и не связаны с уточнением оценки (2). Задача уточнения оценки (2) была вновь рассмотрена А. Ивичем лишь в 2004 г. В работе [4] он доказал неравенство

$$|F(T)| \ll T^{1/4+\varepsilon}, \quad (3)$$

в котором ε – сколь угодно малое фиксированное число, $\varepsilon > 0$, а $T \geq T_0(\varepsilon) > 0$. Кроме того, А. Ивич предположил, что при неограниченном возрастании T справедлива следующая Ω -теорема:

$$F(T) = \Omega_{\pm}(\sqrt[4]{T}). \quad (4)$$

Соотношение (4) означает, что существуют две последовательности X_{ν} , Y_{ν} , $\nu = 1, 2, \dots$, положительных чисел такие, что $X_{\nu}, Y_{\nu} \rightarrow +\infty$ при $\nu \rightarrow +\infty$, и такие, что при всех ν справедливы неравенства

$$\int_{2\pi}^{X_{\nu}} Z(t) dt < -c \sqrt[4]{X_{\nu}}, \quad \int_{2\pi}^{Y_{\nu}} Z(t) dt > c \sqrt[4]{Y_{\nu}},$$

где c – абсолютная постоянная.

Цель настоящей работы состоит в доказательстве гипотезы Ивича (4) и в уточнении оценки (3) для величины $|F(T)|$. Именно, ниже приводятся доказательства следующих двух теорем.

ТЕОРЕМА 1. Пусть ϑ – произвольное фиксированное число с условием $0 \leq \vartheta < 1$, N – целое, $N \geq 1$, и пусть

$$\mathfrak{F}(N; \vartheta) = F(2\pi(N + \vartheta)^2) = \int_{2\pi}^{2\pi(N + \vartheta)^2} Z(t) dt.$$

Тогда при $N \rightarrow +\infty$ имеет место следующее равенство:

$$\mathfrak{F}(N; \vartheta) = \mathfrak{K}(\vartheta)(-1)^N \sqrt{N} + O(\sqrt[3]{N} \ln N),$$

где

$$\mathfrak{K}(\vartheta) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq \vartheta < \frac{1}{4}, \frac{3}{4} < \vartheta < 1, \\ 2\pi, & \text{если } \frac{1}{4} < \vartheta < \frac{3}{4}, \\ \frac{4\pi}{3}, & \text{если } \vartheta = \frac{1}{4}, \\ \frac{2\pi}{3}, & \text{если } \vartheta = \frac{3}{4}, \end{cases}$$

а постоянная в знаке O зависит от ϑ . В частности, справедливы следующие формулы:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(N; 0) &= O(\sqrt[3]{N} \ln N), \\ \mathfrak{F}(N; 0.25) &= (-1)^N \frac{4\pi}{3} \sqrt{N} + O(\sqrt[3]{N} \ln N), \\ \mathfrak{F}(N; 0.5) &= (-1)^N 2\pi \sqrt{N} + O(\sqrt[3]{N} \ln N), \\ \mathfrak{F}(N; 0.75) &= (-1)^N \frac{2\pi}{3} \sqrt{N} + O(\sqrt[3]{N} \ln N). \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 2. Для любого достаточно большого положительного T справедливо неравенство

$$\left| \int_{2\pi}^T Z(t) dt \right| < 18.2 \sqrt[4]{T}.$$

Простыми следствиями теоремы 1 будут доказательства:

- 1) гипотезы Ивичи для $F(T)$;
- 2) теоремы Харди о бесконечности нулей функции $Z(t)$.

Отметим, что в формулах теоремы 1 множитель $\mathfrak{K}(\vartheta)$ в главном члене асимптотики является разрывной функцией несмотря на то, что $F(T)$ – непрерывная функция параметра T . Например, при переходе от значений $T = 2\pi(N + \vartheta)^2$, $0 \leq \vartheta < 0.25$, к значению $T = 2\pi(N + 0.25)^2$ первообразная функции Харди совершает скачок на величину

$$(-1)^N \frac{4\pi}{3} \sqrt{N} + O(\sqrt[3]{N} \ln N).$$

Кажущееся противоречие объясняется тем, что формулы теоремы 1 являются асимптотическими лишь при фиксированных значениях ϑ , $0 \leq \vartheta < 1$, и перестают быть таковыми, например, при неограниченном приближении ϑ к 0.25.

Приведем в качестве примера составленную М. В. Королёвой табл. 1 значений величины $F(T_N)$ в точках $T_N = 2\pi(N + 0.25)^2$. Табл. 1 отражает особенность первообразной для $Z(t)$, подмеченную в теореме 1: перемену знака $F(T)$ при переходе от точки T_N к точке T_{N+1} . В правой колонке таблицы помещены значения главного члена асимптотической формулы для $F(T_N)$.

Таблица 1

N	T_N	$F(T_N)$	$\frac{4\pi}{3} (-1)^N \sqrt{N}$
1	3.125π	-4.542178	-4.188790
2	10.125π	5.562081	5.923844
3	21.125π	-8.158667	-7.255198
4	36.125π	10.496247	8.377580
5	55.125π	-14.068398	-9.366420
6	78.125π	9.417890	10.260399
7	105.125π	-9.927194	-11.082497
8	136.125π	11.243344	11.847688
9	171.125π	-11.907475	-12.566371
10	210.125π	12.655768	13.246118
11	253.125π	-15.830244	-13.892645
12	300.125π	14.614287	14.510395
13	351.125π	-15.419137	-15.102898
14	406.125π	15.574310	15.673018
15	465.125π	-20.555536	-16.223115

Коротко поясним идеи, лежащие в основе доказательства главных результатов, полученных в настоящей статье.

Главную роль при выводе асимптотических формул теоремы 1 играет лемма 7. Эта лемма дает “явное” выражение для интеграла

$$j = \int_c^b g(x) \exp\{2\pi i f(x)\} dx, \quad (5)$$

в котором функции $f(x)$, $g(x)$ и ряд их производных удовлетворяют некоторым естественным условиям роста, причем $f'(c) = 0$. При решении ряда задач теории чисел можно использовать “классический” вариант этой леммы, в котором интеграл j представляется суммой

$$\frac{1 + i g(c) \exp\{2\pi i f(c)\}}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{f''(c)}} + \theta R, \quad (6)$$

где $|\theta| \leq 1$, а R – некоторое положительное число, зависящее от f , g , b и c (см., например, [1, с. 73]). Если длина $b - c$ промежутка интегрирования достаточно велика, то формула (6) будет асимптотической с остаточным членом θR . Наиболее совершенный вариант леммы 7 (с вычисленными константами в остаточных членах) содержится в работе [5].

В рассматриваемой нами задаче при приближении функции Харди суммой

$$2 \sum_{n \leq \sqrt{t/(2\pi)}} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos(\theta(t) - t \ln n) \quad (7)$$

возникает целая серия интегралов (5), в которых $g(x) = 1$, а функция $f = f(n; x)$ и точка $c = c(n)$ зависят от параметра n , $n \leq \sqrt{t/(2\pi)}$. При этом с возрастанием n отрезок интегрирования становится настолько коротким, что формула (6) перестает быть асимптотической. Такой подход, использующий соотношение (6) и реализованный в работе [4], приводит в лучшем случае к оценке

$$|F(T)| = \left| \int_{2\pi}^T Z(t) dt \right| \ll T^{1/4} \ln T.$$

Для доказательства теорем 1 и 2 необходимо более точное выражение для интеграла (5), в котором был бы сохранен “явный вид” осциллирующего слагаемого θR . Именно такое выражение дается леммой 7.

“Явные формулы” леммы 7 позволяют записать интеграл $F(T)$ в виде линейной комбинации тригонометрических сумм специального вида (лемма 8). Для значений параметра T вида $2\pi(N + \vartheta)^2$, где $N \geq 1$ – целое, $0 \leq \vartheta < 1$ – фиксированное число, некоторые из этих сумм вносят вклад в главный член асимптотики для $F(T)$ (см. леммы 14 и 22). Оставшиеся слагаемые, входящие в остаточный член, взаимно погашаются, и их осцилляцию можно уловить с помощью метода Ван-дер-Корпута и его модификации (лемма 1). Оценки сверху таких сумм наряду с неравенствами лемм 16 и 23 используются в доказательстве теорем 1 и 2.

Разность $r(t)$ между функцией Харди $Z(t)$ и суммой (7) представляется асимптотическим рядом, первые k ($k \geq 0$) членов которого приближают $r(t)$ с точностью до слагаемого $O(t^{-(2k+1)/4})$ (см. [6]). Поскольку при $k = 1$ интеграл

от такого слагаемого имеет порядок

$$\int_{2\pi}^{2\pi(N+\vartheta)^2} t^{-3/4} dt \asymp \sqrt{N},$$

равный порядку главного члена в формуле (5), то для вычисления с необходимой точностью значений функции $F(T)$ приходится использовать явный вид первых двух членов разложения $r(t)$ в ряд (см. леммы 26 и 27).

Все остальные утверждения статьи (помимо перечисленных выше) имеют вспомогательный, “технический” характер.

§ 1. Вспомогательные утверждения

ЛЕММА 1. Пусть вещественная функция $g(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ со своими производными до третьего порядка включительно, пусть, кроме того, выполнены условия

$$b - a > 1, \quad c_1 A^{-1} \leq g^{(3)}(x) \leq c_2 A^{-1},$$

где c_1, c_2 – положительные постоянные, $A > 1$. Тогда для суммы

$$S = \sum_{a < x \leq b} \exp\{2\pi i g(x)\}$$

справедлива оценка $S \ll (b - a)A^{-1/6} + \sqrt{b - a}A^{1/6}$. Если при этом величина A удовлетворяет неравенству $A \leq (b - a)^2$, то имеет место оценка $S \ll (b - a)A^{-1/6}$.

Первая часть леммы 1 представляет собой частный случай теоремы И. Вандер-Корпута (см. [1, с. 362–363]). Доказательство второй оценки см. в работе [7].

ЛЕММА 2. Пусть $\tau^{2/3} < M \leq \tau$, $M < M_1 \leq 2M$. Тогда имеет место оценка

$$\sum_{M < n \leq M_1} \exp\{2\pi i \tau^2 \ln n\} \ll \sqrt{M} \tau^{1/3}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая S равным модулю суммы из условия леммы и взяв $g(x) = \tau^2 \ln x$, $a = M$, $b = M_1$, $c_1 = 1/4$, $c_2 = 2$, $A = M^3 \tau^{-2}$ в лемме 1, находим

$$S \ll M \frac{\tau^{1/3}}{\sqrt{M}} + \sqrt{M} \frac{\sqrt{M}}{\tau^{1/3}} \ll \sqrt{M} \tau^{1/3} (1 + \sqrt{M} \tau^{-2/3}) \ll \sqrt{M} \tau^{1/3}.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Пусть c – абсолютная постоянная, $0 < c < 1$, $0 < u \leq c\tau$, α, β, ϑ – произвольные вещественные числа, зависящие разве что от τ , $0 \leq \vartheta < 1$, и пусть $g(x) = \alpha(x + \vartheta) + \beta(x + \vartheta)^2 + \delta(x + \vartheta)$, где

$$\delta(x) = \frac{x^3}{3\tau} + \frac{x^4}{4\tau^2} + \cdots + \frac{x^\nu}{\nu\tau^{\nu-2}} + \cdots.$$

Тогда справедлива оценка

$$\sum_{0 < x \leq u} \exp\{2\pi i g(x)\} \ll \tau^{5/6}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим сначала, что производная $g^{(3)}(x)$ имеет вид

$$\begin{aligned} g^{(3)}(x) &= \delta^{(3)}(x + \vartheta) \\ &= \frac{2}{\tau} + \frac{6(x + \vartheta)}{\tau^2} + \cdots + \nu(\nu + 1) \frac{(x + \vartheta)^{\nu-1}}{\tau^\nu} + \cdots = \frac{2}{\tau} \left(1 - \frac{x + \vartheta}{\tau} \right)^{-3} \end{aligned}$$

и, следовательно, при $0 \leq x \leq u$ удовлетворяет неравенствам

$$\frac{2}{\tau} < g^{(3)}(x) \leq \frac{2}{\tau} \left(1 - c - \frac{1}{\tau} \right)^{-3} \leq \frac{2}{\tau} \left(\frac{1 - c}{2} \right)^{-3}.$$

Полагая $a = 0$, $b = u$, $c_1 = 2$, $c_2 = 16(1 - c)^{-3}$, $A = \tau$ в лемме 1, находим

$$\sum_{0 < x \leq u} \exp\{2\pi i g(x)\} \ll u\tau^{-1/6} + \sqrt{u}\tau^{1/6} \ll \tau^{5/6} + \tau^{2/3} \ll \tau^{5/6}.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Пусть c_1, c_2 – положительные абсолютные постоянные, $0 < c_1 < 1$, и пусть $F(x)$ и $G(x)$ – вещественные функции, удовлетворяющие на отрезке $[a, b]$ следующим условиям:

- 1) производные $F''(x)$ и $G'(x)$ непрерывны;
- 2) $|F'(x)| \leq c_1 < 1$;
- 3) $0 < F''(x) \leq c_2$;
- 4) существуют положительные числа H, U, c_3, c_4, c_5 такие, что $b - a \leq c_3 U$, $|G(x)| \leq c_4 H$, $|G'(x)| \leq c_5 H U^{-1}$.

Тогда имеет место равенство

$$\sum_{a < x \leq b} G(x) \exp\{2\pi i F(x)\} = \int_a^b G(u) \exp\{2\pi i F(u)\} du + O(H),$$

где постоянная в знаке O зависит от $c_1, \dots, c_5$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы см. в [1, с. 73].

ЛЕММА 5. При $N \rightarrow +\infty$ справедливо равенство

$$\sum_{n=1}^N (-1)^n \sqrt{n} = \frac{(-1)^N}{2} \sqrt{N} + O(1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть N – четное число, $N = 2K$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N (-1)^n \sqrt{n} &= \sum_{k=1}^K (\sqrt{2k} - \sqrt{2k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^K \frac{1}{\sqrt{2k} + \sqrt{2k-1}} = \sum_{k=1}^K \left(\frac{1}{2\sqrt{2k}} + O(k^{-3/2}) \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_1^K \frac{du}{\sqrt{u}} + O(1) = \sqrt{\frac{K}{2}} + O(1) = \frac{1}{2} \sqrt{N} + O(1). \end{aligned}$$

Если N – нечетное число, $N = 2K + 1$, то по доказанному выше имеем

$$\sum_{n=1}^N (-1)^n \sqrt{n} = \sum_{n=1}^{N-1} (-1)^n \sqrt{n} - \sqrt{N} = \frac{1}{2} \sqrt{N-1} - \sqrt{N} + O(1) = -\frac{1}{2} \sqrt{N} + O(1).$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 6 (приближенная формула $Z(t)$). При $t \geq t_0 > 0$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} Z(t) = 2 \operatorname{Re} \Psi(t) + (-1)^{m-1} \left(\frac{t}{2\pi} \right)^{-1/4} \Phi(z) \\ + \frac{(-1)^m}{12\pi^2} \left(\frac{t}{2\pi} \right)^{-3/4} \Phi^{(3)}(z) + O(t^{-5/6-1/492}), \end{aligned}$$

в котором $m = [\sqrt{t(2\pi)}]$, $z = 2(\sqrt{t/(2\pi)} - m) - 1$,

$$\begin{aligned} \Psi(t) = e^{-\pi i/8} \sum_{1 \leq n \leq m} \frac{1}{\sqrt{n}} \exp \left\{ i \left(\frac{t}{2} \ln \frac{t}{2\pi} - \frac{t}{2} - t \ln n \right) \right\}, \\ \Phi(z) = \frac{\cos \left(\frac{\pi z^2}{2} + \frac{3\pi}{8} \right)}{\cos(\pi z)} = \frac{\cos \left(2\pi \left(\frac{t}{2\pi} - (2m+1)\sqrt{\frac{t}{2\pi}} - \frac{1}{16} \right) \right)}{\cos \left(2\pi \sqrt{\frac{t}{2\pi}} \right)}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся равенством

$$\begin{aligned} Z(t) = 2 \sum_{n \leq m} \frac{\cos(\theta(t) - t \ln n)}{\sqrt{n}} + (-1)^{m-1} \left(\frac{t}{2\pi} \right)^{-1/4} \Phi(z) \\ + \frac{(-1)^m}{12\pi^2} \left(\frac{t}{2\pi} \right)^{-3/4} \Phi^{(3)}(z) + R(t), \end{aligned}$$

в котором последнее слагаемое при $t \geq 200$ удовлетворяет неравенству $|R(t)| \leq 0.053t^{-5/4}$,

$$\theta(t) = \frac{t}{2} \ln \frac{t}{2\pi} - \frac{t}{2} - \frac{\pi}{8} + \Delta(t),$$

и величина $\Delta(t)$ разлагается в бесконечный ряд по степеням t^{-1} :

$$\Delta(t) = \frac{1}{48} t^{-1} + \frac{7}{5760} t^{-3} + \dots$$

(см. [8], [9]). Заменяем в приведенной формуле удвоенный косинус суммой мнимых экспонент; получим

$$\begin{aligned} 2 \sum_{n \leq m} \frac{\cos(\theta(t) - t \ln n)}{\sqrt{n}} &= \sum_{n \leq m} \frac{1}{\sqrt{n}} (e^{i(\theta(t) - t \ln n)} + e^{-i(\theta(t) - t \ln n)}) \\ &= 2 \operatorname{Re} \left(e^{-\pi i/8} \sum_{n \leq m} \frac{1}{\sqrt{n}} \exp \left\{ i \left(\frac{t}{2} \ln \frac{t}{2\pi} - \frac{t}{2} - t \ln n \right) \right\} e^{i\Delta(t)} \right). \end{aligned}$$

Множитель $e^{i\Delta(t)}$ разлагается в бесконечный ряд по степеням t^{-1} , первые два члена которого равны 1 и $-(48it)^{-1}$ соответственно. Вклад в $Z(t)$ от слагаемых этого ряда, имеющих более высокий порядок, не превосходит

$$\sum_{n \leq m} \frac{1}{\sqrt{n}} O(t^{-2}) \ll t^{-7/4}.$$

Воспользовавшись оценкой

$$\sum_{n \leq m} n^{-1/2-it} \ll t^{27/164}$$

(см. [10, с.117]), нетрудно убедиться в том, что вклад от второго члена разложения $e^{i\Delta(t)}$ по порядку не превосходит величины $t^{-1+27/164} = t^{-5/6-1/492}$. Для завершения доказательства остается преобразовать выражение для $\Phi(z)$. Пользуясь тем, что

$$\frac{\pi z^2}{2} + \frac{3\pi}{8} = 2\pi \left(\frac{t}{2\pi} - (2m+1)\sqrt{\frac{t}{2\pi}} + \frac{7}{16} + m^2 + m \right), \quad \pi z = 2\pi \left(\sqrt{\frac{t}{2\pi}} - m \right) - \pi,$$

находим

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= -\frac{\cos\left(2\pi\left(\frac{t}{2\pi} - (2m+1)\sqrt{\frac{t}{2\pi}} + \frac{7}{16}\right)\right)}{\cos\left(2\pi\sqrt{\frac{t}{2\pi}}\right)} \\ &= \frac{\cos\left(2\pi\left(\frac{t}{2\pi} - (2m+1)\sqrt{\frac{t}{2\pi}} - \frac{1}{16}\right)\right)}{\cos\left(2\pi\sqrt{\frac{t}{2\pi}}\right)}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Через $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2, \mathfrak{I}_3$ обозначим интегралы по отрезку $2\pi \leq t \leq 2\pi(N+\vartheta)^2$ от функций

$$2 \operatorname{Re} \Psi(t), \quad (-1)^{m-1} \left(\frac{t}{2\pi} \right)^{-1/4} \Phi(z), \quad \frac{(-1)^m}{12\pi^2} \left(\frac{t}{2\pi} \right)^{-3/4} \Phi^{(3)}(z)$$

соответственно (обозначения Ψ, Φ, m и z здесь и далее имеют тот же смысл, что и в условии леммы 6). Таким образом, имеет место равенство

$$\mathfrak{F}(N; \vartheta) = \int_{2\pi}^{2\pi(N+\vartheta)^2} Z(t) dt = \mathfrak{I}_1 + \mathfrak{I}_2 + \mathfrak{I}_3.$$

ЛЕММА 7. Пусть $a < c < b$, и пусть функции $g(t)$ и $f(t)$ удовлетворяют на отрезке $[a, b]$ следующим условиям:

- 1) производные $g''(t)$ и $f^{(4)}(t)$ непрерывны;
- 2) $f''(t) > 0$;
- 3) $f'(c) = 0$.

Тогда для интегралов

$$I_1 = \int_a^b g(t) e^{2\pi i f(t)} dt, \quad I_2 = \int_a^c g(t) e^{2\pi i f(t)} dt, \quad I = \int_a^b g(t) e^{2\pi i f(t)} dt$$

справедливы равенства

$$I_r = A - B_r + \frac{1}{2\pi i} (C_r + D_r - E_r) + \frac{(-1)^{r-1}}{2\pi i} (H - K), \quad I = 2A - B + \frac{1}{2\pi i} (C + D - E),$$

где

$$\begin{aligned} A &= \frac{1+i}{2} \frac{g(c)e^{2\pi i f(c)}}{\sqrt{2f''(c)}}, \quad B_r = \frac{g(c)e^{2\pi i f(c)}}{\sqrt{2f''(c)}} \int_{\lambda_r}^{+\infty} \frac{e^{2\pi i u}}{\sqrt{u}} du, \quad r = 1, 2, \\ B &= B_1 + B_2, \quad \lambda_1 = f(b) - f(c), \quad \lambda_2 = f(a) - f(c), \\ C_1 &= \left(\frac{g(b)}{f'(b)} - \frac{g(c)}{\sqrt{2f''(c)}} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \right) e^{2\pi i f(b)}, \\ C_2 &= - \left(\frac{g(a)}{f'(a)} + \frac{g(c)}{\sqrt{2f''(c)}} \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} \right) e^{2\pi i f(a)}, \quad C = C_1 + C_2. \end{aligned}$$

Через D , D_1 , D_2 обозначены интегралы от произведения

$$g(c) \left(\frac{f''(t)}{(f'(t))^2} - \frac{|f'(t)|}{\sqrt{8f''(c)}(f(t) - f(c))^{3/2}} \right) e^{2\pi i f(t)},$$

взятые по отрезкам $[a, b]$, $[c, b]$ и $[a, c]$ соответственно, а через E , E_1 , E_2 – интегралы от функции

$$\frac{g'(t)f'(t) - (g(t) - g(c))f''(t)}{(f'(t))^2} e^{2\pi i f(t)},$$

взятые по тем же отрезкам. Наконец, слагаемые H и K определяются следующими равенствами:

$$H = \frac{g(c)}{3} \frac{f^{(3)}(c)}{(f''(c))^2} e^{2\pi i f(c)}, \quad K = \frac{g'(c)}{f''(c)} e^{2\pi i f(c)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим функцию $g(t)$ суммой $g(c) + (g(t) - g(c))$ и внесем мнимую экспоненту под знак дифференциала в I_1 ; получим

$$\begin{aligned} I_1 &= j_1 + j_2, \quad j_1 = g(c) \int_c^b e^{2\pi i f(t)} dt = \frac{g(c)}{2\pi i} \int_c^b \frac{de^{2\pi i f(t)}}{f'(t)}, \\ j_2 &= \int_c^b (g(t) - g(c)) e^{2\pi i f(t)} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_c^b \frac{g(t) - g(c)}{f'(t)} de^{2\pi i f(t)}. \end{aligned}$$

Производная $f'(t)$ имеет в точке $t = c$ нуль первого порядка. Вычтем из дроби $1/f'(t)$ функцию с такой же особенностью, интеграл от которой имеет более удобный для вычислений вид. Тогда

$$j_1 = \frac{g(c)}{2\pi i} \int_c^b \frac{de^{2\pi i f(t)}}{\sqrt{2f''(c)}\sqrt{f(t) - f(c)}} + \frac{g(c)}{2\pi i} \int_c^b \psi(t) de^{2\pi i f(t)}, \quad (8)$$

где

$$\psi(t) = \frac{1}{f'(t)} - \frac{1}{\sqrt{2f''(c)}\sqrt{f(t) - f(c)}}.$$

Первый интеграл заменой $u = f(t) - f(c)$ приводится к виду

$$\frac{g(c)e^{2\pi i f(c)}}{\sqrt{2f''(c)}} \int_0^{\lambda_1} \frac{e^{2\pi i u}}{\sqrt{u}} du = \frac{g(c)e^{2\pi i f(c)}}{\sqrt{2f''(c)}} \left(\int_0^{+\infty} - \int_{\lambda_1}^{+\infty} \right) \frac{e^{2\pi i u}}{\sqrt{u}} du = A - B_1.$$

Далее, функция $\psi(t)$ во втором интеграле из (8) имеет устранимую особенность в точке $t = c$, в чем можно убедиться, положив $t = c + x$ и устремив x к нулю:

$$\begin{aligned} \psi(c+x) &= (f'(c+x))^{-1} - (2f''(c)(f(c+x) - f(c)))^{-1/2} \\ &= \left(xf''(c) + \frac{x^2}{2}f^{(3)}(c) + O(x^3) \right)^{-1} \\ &\quad - \left(x^2(f''(c))^2 + \frac{x^3}{3}f''(c)f^{(3)}(c) + O(x^4) \right)^{-1/2} \\ &= -\frac{1}{3} \frac{f^{(3)}(c)}{(f''(c))^2} + O(x) \rightarrow -\frac{1}{3} \frac{f^{(3)}(c)}{(f''(c))^2} = \psi(c). \end{aligned}$$

Взяв второй интеграл в формуле (8) по частям и заметив, что

$$-\psi'(t) = \frac{f''(t)}{(f'(t))^2} - \frac{1}{\sqrt{8f''(c)}} \frac{f'(t)}{(f(t) - f(c))^{3/2}},$$

получим

$$\begin{aligned} j_1 &= A - B_1 + \frac{g(c)}{2\pi i} \psi(b)e^{2\pi i f(b)} - \frac{g(c)}{2\pi i} \psi(c)e^{2\pi i f(c)} - \frac{g(c)}{2\pi i} \int_c^b \psi'(t)e^{2\pi i f(t)} dt \\ &= A - B_1 + \frac{g(c)}{2\pi i} \frac{e^{2\pi i f(b)}}{f'(b)} - \frac{g(c)}{2\pi i} \frac{e^{2\pi i f(b)}}{\sqrt{2f''(c)}\sqrt{f(b) - f(c)}} \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \frac{g(c)}{3} \frac{f^{(3)}(c)}{(f''(c))^2} e^{2\pi i f(c)} + \frac{g(c)}{2\pi i} \int_c^b (-\psi'(t))e^{2\pi i f(t)} dt \\ &= A - B_1 + \frac{g(c)}{2\pi i} \frac{e^{2\pi i f(b)}}{f'(b)} - \frac{g(c)}{2\pi i} \frac{e^{2\pi i f(b)}}{\sqrt{2f''(c)}\sqrt{\lambda_1}} + \frac{1}{2\pi i} (D_1 + H). \end{aligned}$$

Левый конец промежутка интегрирования в j_2 также является устранимой особенностью подынтегральной функции, значение которой в этой точке равно пределу при $x \rightarrow 0$ дроби

$$\frac{g(c+x) - g(c)}{f'(c+x)} = \frac{g'(c)x + O(x^2)}{f''(c)x + O(x^2)} \rightarrow \frac{g'(c)}{f''(c)}.$$

Взяв интеграл j_2 по частям, будем иметь

$$\begin{aligned} j_2 &= \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{g(b)}{f'(b)} e^{2\pi i f(b)} - \frac{g(c)}{f'(b)} e^{2\pi i f(b)} - \frac{g'(c)}{f''(c)} e^{2\pi i f(c)} \right. \\ &\quad \left. - \int_c^b \frac{g'(t)f'(t) - (g(t) - g(c))f''(t)}{(f'(t))^2} e^{2\pi i f(t)} dt \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{g(b)}{f'(b)} e^{2\pi i f(b)} - \frac{g(c)}{f'(b)} e^{2\pi i f(b)} - K - E_1 \right). \end{aligned}$$

Суммируя выражения для j_1 и j_2 , получим

$$I_1 = j_1 + j_2 = A - B_1 + \frac{1}{2\pi i}(C_1 + D_1 - E_1 + H - K).$$

Доказательство второго тождества практически дословно повторяет приведенные выше рассуждения. Единственным отличием является то, что в качестве функции $\psi(t)$ следует брать сумму

$$\frac{1}{f'(t)} + \frac{1}{\sqrt{2f''(c)}\sqrt{f(t) - f(c)}}.$$

Складывая первые два тождества леммы и производя сокращения, приходем к формуле для интеграла I . Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пользуясь при положительном λ равенством

$$\int_{\lambda}^{+\infty} \frac{e^{2\pi i u}}{\sqrt{u}} du = -\frac{1}{2\pi i} \frac{e^{2\pi i \lambda}}{\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{4\pi i} \int_{\lambda}^{+\infty} \frac{e^{2\pi i u}}{u^{3/2}} du,$$

третьему тождеству леммы 7 можно придать следующую форму:

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b g(t) e^{2\pi i f(t)} dt = \frac{1 + i}{\sqrt{2}} \frac{g(c) e^{2\pi i f(c)}}{\sqrt{f''(c)}} \\ &\quad - \frac{1}{4\pi i} \frac{g(c) e^{2\pi i f(c)}}{\sqrt{f''(c)}} \left(\int_{\lambda_1}^{+\infty} + \int_{\lambda_2}^{+\infty} \right) \frac{e^{2\pi i u}}{u^{3/2}} du \\ &\quad + \frac{g(c)}{2\pi i} \int_a^b F(t) e^{2\pi i f(t)} dt - \frac{1}{2\pi i} \int_a^b G(t) e^{2\pi i f(t)} dt, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{f''(t)}{(f'(t))^2} - \frac{|f'(t)|}{\sqrt{8f''(c)}(f(t) - f(c))^{3/2}}, \\ G(t) &= \frac{g'(t)f'(t) - (g(t) - g(c))f''(t)}{(f'(t))^2}. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если $g(t) = 1$, то тождества леммы 7 принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} I_1 &= A - B_1 + \frac{1}{2\pi i}(C_1 + D_1 + H), \quad I_2 = A - B_2 + \frac{1}{2\pi i}(C_2 + D_2 - H), \\ I &= 2A - B + \frac{1}{2\pi i}(C + D). \end{aligned}$$

§ 2. Исследование интеграла $\mathfrak{I}_1$

ЛЕММА 8. При любом ϑ , $0 \leq \vartheta < 1$, и целом N справедливо равенство

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_1 &= \pi\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{8} \right) (-1)^N \sqrt{N} - 4\pi \operatorname{Re} (e^{-\pi i/8} W(N + \vartheta)) \\ &\quad + 2\theta_1 \left(|W_1(N + \vartheta)| + \int_1^{N+\vartheta} \tau^{-1} |W_2(\tau)| d\tau \right) + O(1), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 W(\tau) &= \sum_{n \leq \tau} (-1)^n \sqrt{n} \int_{\lambda}^{+\infty} \frac{e^{2\pi i u}}{\sqrt{u}} du, \\
 W_1(\tau) &= \sum_{n \leq \tau} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \left(\ln \frac{\tau}{n} \right)^{-1} - \sqrt{\frac{n}{\lambda}} \right) \exp \left\{ 2\pi i \tau^2 \ln \frac{\tau}{n} \right\}, \\
 W_2(\tau) &= \sum_{n \leq \tau} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \left(\ln \frac{\tau}{n} \right)^{-2} - \frac{\tau^2 \sqrt{n}}{\lambda^{3/2}} \ln \frac{\tau}{n} \right) \exp \left\{ 2\pi i \tau^2 \ln \frac{\tau}{n} \right\}, \\
 \lambda &= \lambda(n; \tau) = \tau^2 \left(\ln \frac{\tau}{n} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{n^2}{\tau^2} \right) \right), \quad |\theta_1| \leq 1,
 \end{aligned}$$

а постоянная в знаке O – абсолютная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь определением $\mathfrak{J}_1$, получаем

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{J}_1 &= 2 \operatorname{Re} \left(e^{-\pi i/8} \int_{2\pi}^{2\pi(N+\vartheta)^2} \sum_{n \leq \sqrt{t/(2\pi)}} \frac{1}{\sqrt{n}} \exp \left\{ i \left(\frac{t}{2} \ln \frac{t}{2\pi} - \frac{t}{2} - t \ln n \right) \right\} dt \right) \\
 &= 2 \operatorname{Re} \left(e^{-\pi i/8} \sum_{n \leq N} \frac{j(n)}{\sqrt{n}} \right),
 \end{aligned}$$

где

$$j(n) = \int_{2\pi n^2}^{2\pi(N+\vartheta)^2} e^{2\pi i f(t)} dt, \quad f(t) = f(n; t) = \frac{t}{4\pi} \ln \frac{t}{2\pi} - \frac{t}{4\pi} - \frac{t}{2\pi} \ln n.$$

К каждому из интегралов $j(n)$ применим лемму 7, положив в ней $c = 2\pi n^2$, $b = 2\pi(N + \vartheta)^2$; получим (в обозначениях леммы)

$$j(n) = A(n) - B_1(n) + \frac{1}{2\pi i} (C_1(n) + D_1(n) + H(n)).$$

Полагая величины $\Sigma_A, \Sigma_B, \dots, \Sigma_H$ равными вкладам в исходный интеграл $\mathfrak{J}_1$ слагаемых $A(n), B_1(n), \dots, H(n)$, $1 \leq n \leq N$, соответственно, будем иметь

$$\mathfrak{J}_1 = \Sigma_A - \Sigma_B + \frac{1}{2\pi} (\Sigma_C + \Sigma_D + \Sigma_H).$$

Заметим теперь, что при $c = 2\pi n^2$, $b = 2\pi \tau^2$, $n \leq \tau \leq N + \vartheta$, справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned}
 f(c) &= -\frac{n^2}{2}, \quad e^{2\pi i f(c)} = (-1)^n, \quad f''(c) = \frac{1}{8\pi^2 n^2}, \quad f^{(3)}(c) = -\frac{1}{16\pi^3 n^4}, \\
 f(b) &= \tau^2 \left(\ln \frac{\tau}{n} - \frac{1}{2} \right), \quad f'(b) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\tau}{n}, \\
 f(b) - f(c) &= \lambda(n; \tau) = \tau^2 \left(\ln \frac{\tau}{n} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{n^2}{\tau^2} \right) \right), \\
 e^{2\pi i f(b)} &= e^{-\pi i \tau^2} \exp \left\{ 2\pi i \tau^2 \ln \frac{\tau}{n} \right\}.
 \end{aligned}$$

Преобразуя суммы Σ_A , Σ_B , получаем

$$\begin{aligned}
 A(n) &= \frac{1+i}{2} \frac{e^{2\pi i f(c)}}{\sqrt{2f''(c)}} = (-1)^n \pi n (1+i) = (-1)^n \pi n \sqrt{2} e^{\pi i/4}, \\
 \Sigma_A &= 2\sqrt{2}\pi \operatorname{Re} \left(e^{\pi i/8} \sum_{n \leq N} (-1)^n \sqrt{n} \right) = 2\sqrt{2}\pi \operatorname{Re} \left(e^{\pi i/8} \left(\frac{(-1)^N}{2} \sqrt{N} + O(1) \right) \right) \\
 &= \pi\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{8} \right) (-1)^N \sqrt{N} + O(1), \\
 B_1(n) &= \frac{e^{2\pi i f(c)}}{\sqrt{2f''(c)}} \int_{\lambda}^{+\infty} \frac{e^{2\pi i u}}{\sqrt{u}} du = 2\pi (-1)^n n \int_{\lambda}^{+\infty} \frac{e^{2\pi i u}}{\sqrt{u}} du, \\
 \Sigma_B &= 4\pi \operatorname{Re}(e^{-\pi i/8} W), \quad W = \sum_{n \leq N} (-1)^n \sqrt{n} \int_{\lambda}^{+\infty} \frac{e^{2\pi i u}}{\sqrt{u}} du, \quad \lambda = \lambda(n; N + \vartheta).
 \end{aligned}$$

Далее, из равенства

$$\begin{aligned}
 C_1(n) &= \left(\frac{1}{f'(b)} - \frac{1}{\sqrt{2f''(c)} \sqrt{f(b) - f(c)}} \right) e^{2\pi i f(b)} \\
 &= 2\pi e^{-\pi i \tau^2} \left(\left(\ln \frac{\tau}{n} \right)^{-1} - \frac{n}{\sqrt{\lambda}} \right) \exp \left\{ 2\pi i \tau^2 \ln \frac{\tau}{n} \right\}
 \end{aligned}$$

следует оценка

$$\begin{aligned}
 |\Sigma_C| &\leq 2 \left| \sum_{n \leq N} \frac{C_1(n)}{\sqrt{n}} \right| \leq 4\pi |W_1(N + \vartheta)|, \\
 W_1(\tau) &= \sum_{n \leq \tau} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \left(\ln \frac{\tau}{n} \right)^{-1} - \sqrt{\frac{n}{\lambda}} \right) \exp \left\{ 2\pi i \tau^2 \ln \frac{\tau}{n} \right\}, \quad \lambda = \lambda(n; \tau).
 \end{aligned}$$

Полагая $\tau = \sqrt{t/(2\pi)}$, получаем $m \leq \tau \leq N + \vartheta$, $dt = 4\pi \tau d\tau$,

$$\begin{aligned}
 \frac{f''(t)}{(f'(t))^2} - \frac{1}{\sqrt{8f''(c)}} \frac{f'(t)}{(f(t) - f(c))^{3/2}} &= \frac{1}{2\tau^2} \left(\left(\ln \frac{\tau}{n} \right)^{-2} - \frac{n\tau^2}{\lambda^{3/2}} \ln \frac{\tau}{n} \right), \\
 D_1(n) &= 2\pi \int_n^{N+\vartheta} \tau^{-1} e^{-\pi i \tau^2} \left(\left(\ln \frac{\tau}{n} \right)^{-2} - \frac{\tau^2 n}{\lambda^{3/2}} \ln \frac{\tau}{n} \right) \exp \left\{ 2\pi i \tau^2 \ln \frac{\tau}{n} \right\} d\tau.
 \end{aligned}$$

Переходя к сумме Σ_D и меняя в ней порядок суммирования и интегрирования, найдем

$$\begin{aligned}
 |\Sigma_D| &= 4\pi \left| \operatorname{Re} \left(i e^{-\pi i/8} \int_1^{N+\vartheta} \tau^{-1} e^{-\pi i \tau^2} W_2(\tau) d\tau \right) \right| \leq 4\pi \int_1^{N+\vartheta} \tau^{-1} |W_2(\tau)| d\tau, \\
 W_2(\tau) &= \sum_{n \leq \tau} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \left(\ln \frac{\tau}{n} \right)^{-2} - \frac{\tau^2 \sqrt{n}}{\lambda^{3/2}} \ln \frac{\tau}{n} \right) \exp \left\{ 2\pi i \tau^2 \ln \frac{\tau}{n} \right\}.
 \end{aligned}$$

Для завершения доказательства леммы остается заметить, что

$$\begin{aligned} H(n) &= \frac{1}{3} \frac{f^{(3)}(c)}{(f''(c))^2} e^{2\pi i f(c)} = (-1)^{n+1} \frac{4\pi}{3}, \\ \Sigma_H &= -2 \operatorname{Re} \left(i e^{-\pi i/8} \frac{4\pi}{3} \sum_{n \leq N} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} \right) = -\frac{8\pi}{3} \left(\sin \frac{\pi}{8} \right) \sum_{n \leq N} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} \\ &= \frac{8\pi}{3} \left(\sin \frac{\pi}{8} \right) (\sqrt{2} - 1) \zeta \left(\frac{1}{2} \right) + O(N^{-0.5}) = O(1). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 9. *Справедлива оценка*

$$W_1(\tau) = \sum_{n \leq \tau} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \left(\ln \frac{\tau}{n} \right)^{-1} - \sqrt{\frac{n}{\lambda(n; \tau)}} \right) \exp \left\{ 2\pi i \tau^2 \ln \frac{\tau}{n} \right\} \ll \tau^{1/3} \ln \tau.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая для краткости

$$\psi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\ln \frac{\tau}{x} \right)^{-1}, \quad \psi_2(x) = \sqrt{\frac{x}{\lambda}}, \quad \lambda = \lambda(x; \tau),$$

и замечая, что при $x \leq \tau e^{-2}$ справедливы неравенства $\psi_1(x) \ll x^{-1/2}$, $\psi_2 \ll x^{1/2} \tau^{-1} \ll x^{-1/2}$, часть суммы с $n \leq \tau^{2/3}$ оценим тривиально:

$$\sum_{n \leq \tau^{2/3}} (\psi_1(n) - \psi_2(n)) \exp \left\{ 2\pi i \tau^2 \ln \frac{\tau}{n} \right\} \ll \sum_{n \leq \tau^{2/3}} \frac{1}{\sqrt{n}} \ll \tau^{1/3}.$$

Далее, слагаемые, отвечающие числам n из промежутка $\tau^{2/3} < n \leq \tau e^{-2}$, разобьем на $\ll \ln \tau$ сумм вида

$$W_1(M) = e^{2\pi i \tau^2 \ln \tau} \sum_{M < n \leq M_1} (\psi_1(n) - \psi_2(n)) \exp \left\{ -2\pi i \tau^2 \ln n \right\}, \quad M_1 \leq 2M,$$

к каждой из которых применим преобразование Абеля. Для этого заметим, что при $1 \leq x \leq \tau e^{-2}$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\sqrt{x} \ln \frac{\tau}{x} \right) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln \frac{\tau e^{-2}}{x} \geq 0, \\ \frac{d}{dx} \lambda(x; \tau) &= \frac{d}{dx} \left(\tau^2 \ln \frac{\tau}{x} - \frac{1}{2} (\tau^2 - x^2) \right) = -\frac{\tau^2 - x^2}{x} < 0, \end{aligned}$$

из которых следует, что на отрезке $[1, \tau e^{-2}]$ функция $\psi_1(x)$ является убывающей, а функция ψ_2 – возрастающей. Таким образом, находим

$$\begin{aligned} |W_1(M)| &= \left| \mathbb{C}(M_1)(\psi_1 - \psi_2)(M_1) - \int_M^{M_1} \mathbb{C}(u)(\psi'_1 - \psi'_2)(u) du \right| \\ &\leq |\mathbb{C}(M_1)|(\psi_1 + \psi_2)(M_1) + \int_M^{M_1} |\mathbb{C}(u)|(\psi'_2 - \psi'_1)(u) du, \\ \mathbb{C}(u) &= \sum_{M < n \leq u} e^{2\pi i \tau^2 \ln n}. \end{aligned}$$

Согласно лемме 2 имеем $|\mathbb{C}(u)| \ll \sqrt{M}\tau^{1/3}$, так что

$$\begin{aligned} |W_1(M)| &\ll \sqrt{M}\tau^{1/3}((\psi_1 + \psi_2)(M_1) + (\psi_2 - \psi_1)(M_1) - (\psi_2 - \psi_1)(M)) \\ &\ll \sqrt{M}\tau^{1/3} \frac{1}{\sqrt{M}} \ll \tau^{1/3}. \end{aligned}$$

Суммируя полученные оценки по $\ll \ln \tau$ значениям M , убеждаемся, что вклад от слагаемых с $n \leq \tau e^{-2}$ в исходную сумму не превосходит по порядку величины $\tau^{1/3} \ln \tau$.

Обозначим через U часть суммы W_1 с $\tau e^{-2} < n \leq \tau$ и положим $\vartheta_1 = \{\tau\}$, $r = [\tau] - n$, $h = r + \vartheta_1$. Тогда при положительном h имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned} \psi_1(n) &= \psi_1(\tau - h) = \frac{1}{\sqrt{\tau - h}} \left(\ln \frac{\tau}{\tau - h} \right)^{-1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\tau}} \left(1 - \frac{h}{\tau} \right)^{-1/2} \left(\frac{h}{\tau} + \frac{h^2}{2\tau^2} + \dots \right)^{-1} \\ &= \frac{\sqrt{\tau}}{h} \left(1 + \frac{1}{24} \frac{h^2}{\tau^2} + \frac{1}{24} \frac{h^3}{\tau^3} + \frac{223}{5760} \frac{h^4}{\tau^4} + \dots \right), \\ \psi_2(n) &= \psi_2(\tau - h) = \sqrt{\frac{\tau - h}{\lambda}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\tau}} \left(1 - \frac{h}{\tau} \right)^{1/2} \left(\ln \frac{\tau}{\tau - h} - \frac{1}{2} \left(1 - \left(1 - \frac{h}{\tau} \right)^2 \right) \right)^{-1/2} \\ &= \frac{\sqrt{\tau}}{h} \left(1 - \frac{2}{3} \frac{h}{\tau} - \frac{1}{8} \frac{h^2}{\tau^2} - \frac{53}{1080} \frac{h^3}{\tau^3} - \frac{1361}{51840} \frac{h^4}{\tau^4} + \dots \right). \end{aligned}$$

Полагая при $h > 0$ величину $\psi(r)$ равной разности $\psi_1(\tau - h) - \psi_2(\tau - h)$ и определяя $\psi(0)$ при $h = 0$ как предел при $\varepsilon \rightarrow 0$ выражения $\psi_1(\tau - \varepsilon) - \psi_2(\tau - \varepsilon)$, для любого r с условием $0 \leq r \leq \tau_1 = (1 - e^{-2})\tau$ имеем

$$\begin{aligned} \psi(r) &= \frac{2}{3} \tau^{-1/2} + \frac{1}{6} (r + \vartheta_1) \tau^{-3/2} + \frac{49}{540} (r + \vartheta_1)^2 \tau^{-5/2} \\ &\quad + \frac{421}{6480} (r + \vartheta_1)^3 \tau^{-7/2} + \dots \asymp \tau^{-1/2}, \\ \psi'(r) &= \frac{1}{6} \tau^{-3/2} + \frac{49}{270} (r + \vartheta_1) \tau^{-5/2} + \frac{421}{2160} (r + \vartheta_1)^2 \tau^{-7/2} + \dots \asymp \tau^{-3/2}. \end{aligned}$$

Применим к сумме U преобразование Абеля; получим

$$\begin{aligned} U &= \sum_{0 \leq r \leq \tau_1} \psi(r) \exp \left\{ -2\pi i \tau^2 \ln \left(1 - \frac{h}{\tau} \right) \right\} \\ &= \mathbb{C}_1(\tau_1) \psi(\tau_1) - \int_0^{\tau_1} \mathbb{C}_1(u) \psi'(u) du \ll \tau^{-1/2} \left(|\mathbb{C}_1(\tau_1)| + \tau^{-1} \int_0^{\tau_1} |\mathbb{C}_1(u)| du \right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\mathbb{C}_1(u) &= \sum_{0 \leq r \leq u} e^{2\pi i \varphi(r)}, \\ \varphi(r) &= -\tau^2 \ln \left(1 - \frac{h}{\tau}\right) = \tau(r + \vartheta_1) + \frac{1}{2}(r + \vartheta_1)^2 + \delta(r + \vartheta_1), \\ \delta(x) &= \frac{x^3}{3\tau} + \frac{x^4}{4\tau^2} + \dots + \frac{x^\nu}{\nu\tau^{\nu-2}} + \dots.\end{aligned}$$

Используя лемму 3, находим $|\mathbb{C}_1(u)| \ll \tau^{5/6}$, $U \ll \tau^{5/6-1/2} \ll \tau^{1/3}$. Таким образом,

$$W_1 \ll \tau^{1/3} \ln \tau + \tau^{1/3} \ll \tau^{1/3} \ln \tau.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 10. *Справедлива оценка*

$$W_2(\tau) = \sum_{n \leq \tau} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \left(\ln \frac{\tau}{n} \right)^{-2} - \frac{\tau^2 \sqrt{n}}{\lambda^{3/2}} \ln \frac{\tau}{n} \right) \exp \left\{ 2\pi i \tau^2 \ln \frac{\tau}{n} \right\} \ll \tau^{1/3} \ln \tau.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этого утверждения практически дословно повторяет доказательство леммы 9. Полагая

$$\psi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\ln \frac{\tau}{x} \right)^{-2}, \quad \psi_2(x) = \frac{\sqrt{x} \tau^2}{\lambda^{3/2}(x; \tau)} \ln \frac{\tau}{x},$$

мы убеждаемся в том, что:

1) при $1 \leq x \leq \tau_1 = \tau e^{-4}$ справедливы неравенства

$$\psi_1(x) \ll \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad \psi_2(x) \ll \frac{\sqrt{x} \tau^2 \ln \frac{\tau}{x}}{(\tau^2 \ln \frac{\tau}{x})^{3/2}} \ll \frac{\sqrt{x}}{\tau} \ll \frac{1}{\sqrt{x}};$$

2) при тех же x ввиду соотношений

$$\frac{d}{dx} \sqrt{x} \left(\ln \frac{\tau}{x} \right)^2 = \frac{\ln \frac{\tau}{x}}{2\sqrt{x}} \ln \frac{\tau_1}{x} \geq 0, \quad \frac{d}{dx} \lambda(x; \tau) = -\frac{\tau^2 - x^2}{x} < 0$$

выполняются условия $\psi'_1(x) \leq 0$, $\psi'_2(x) \geq 0$;

3) если $\vartheta_1 = \{\tau\}$, $r = [\tau] - n$, $h = r + \vartheta_1$, то при $\tau_1 < n \leq \tau$ справедливы разложения:

$$\begin{aligned}\psi(r) &= \psi_1(\tau - h) - \psi_2(\tau - h) = \frac{1}{6} \tau^{-1/2} + \frac{37}{540} (r + \vartheta_1) \tau^{-3/2} \\ &\quad + \frac{23}{720} (r + \vartheta_1)^2 \tau^{-5/2} + \dots \asymp \tau^{-1/2}, \\ \psi'(r) &= \frac{37}{540} \tau^{-3/2} + \frac{23}{360} (r + \vartheta_1) \tau^{-5/2} + \dots \asymp \tau^{-3/2}.\end{aligned}$$

Оценивая сумму по $n \leq \tau^{2/3}$ тривиально, будем иметь

$$\sum_{n \leq \tau^{2/3}} (\psi_1(n) - \psi_2(n)) \exp \left\{ 2\pi i \tau^2 \ln \frac{\tau}{n} \right\} \ll \sum_{n \leq \tau^{2/3}} \frac{1}{\sqrt{n}} \ll \tau^{1/3}.$$

Далее, применяя к суммам вида

$$W_2(M) = e^{2\pi i \tau^2 \ln \tau} \sum_{M < n \leq M_1} (\psi_1(n) - \psi_2(n)) \exp \left\{ -2\pi i \tau^2 \ln n \right\},$$

$$M_1 \leq 2M, \quad \tau^{2/3} < M \leq \tau_1,$$

преобразование Абеля наряду с леммой 2, убеждаемся в том, что $W_2(M) \ll \tau^{1/3}$ и, следовательно,

$$\sum_{\tau^{2/3} < n \leq \tau_1} (\psi_1(n) - \psi_2(n)) \exp \left\{ 2\pi i \tau^2 \ln \frac{\tau}{n} \right\} \ll \tau^{1/3} \ln \tau.$$

Наконец, применяя преобразование Абеля и лемму 3 к оставшейся части суммы W_2 , находим

$$\begin{aligned} \sum_{\tau_1 < n \leq \tau} (\psi_1(n) - \psi_2(n)) \exp \left\{ 2\pi i \tau^2 \ln \frac{\tau}{n} \right\} &= \sum_{0 \leq r \leq \tau - \tau_1} \psi(r) \exp \left\{ 2\pi i \tau^2 \ln \frac{\tau}{\tau - h} \right\} \\ &\ll \tau^{-1/2} \left(|\mathbb{C}(\tau - \tau_1)| + \tau^{-1} \int_0^{\tau - \tau_1} |\mathbb{C}(u)| du \right), \\ \mathbb{C}(u) &= \sum_{0 \leq r \leq u} \exp \left\{ 2\pi i (\tau(r + \vartheta_1) + 0.5(r + \vartheta_1)^2 + \delta(r + \vartheta_1)) \right\} \ll \tau^{5/6}. \end{aligned}$$

Таким образом, $W_2(\tau) \ll \tau^{1/3} \ln \tau + \tau^{5/6-1/2} \ll \tau^{1/3} \ln \tau$. Лемма доказана.

ЛЕММА 11. Пусть $N \rightarrow +\infty$, $0 \leq \vartheta < 1$, и пусть c – положительное число, не превосходящее единицы, зависящее разве что от ϑ и такое, что для величин $R = [0.4\sqrt[4]{N}]$ и $R_1 = [c\sqrt{N}] + 1$ справедливы неравенства $1 < R < R_1$. Тогда имеет место формула

$$W(\tau) = \frac{i}{2\pi} (V_1 + V_2 + V_3) + V_4 + O(1),$$

где

$$\begin{aligned} V_1 &= \sum_{1 \leq n \leq 0.5N} (-1)^n \sqrt{\frac{n}{\lambda(n)}} e^{2\pi i \lambda(n)}, \\ V_2 &= V_2(c) = (-1)^N \sum_{R_1 < n < 0.5N} (-1)^r \sqrt{\frac{N-r}{\lambda(N-r)}} e^{2\pi i \lambda(N-r)}, \\ V_3 &= V_3(c) = (-1)^N \sqrt{N} \sum_{R < r \leq R_1} \frac{(-1)^r e^{2\pi i \lambda(N-r)}}{\sqrt{\lambda(N-r)}}, \\ V_4 &= (-1)^N \sqrt{N} \sum_{0 \leq r \leq R} (-1)^r \int_{\lambda(N-r)}^{+\infty} \frac{e^{2\pi i u}}{\sqrt{u}} du, \\ \lambda(n) &= \lambda(n; \tau) = \tau^2 \left(\ln \frac{\tau}{n} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{n^2}{\tau^2} \right) \right), \quad \tau = N + \vartheta, \end{aligned}$$

а постоянная в знаке O – абсолютная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства леммы нам потребуется ряд вспомогательных соотношений. Прежде всего, определим порядок величины $\lambda(n)$ для различных значений n . Если n не превосходит $0.5N$, то $\lambda(n) \geq \tau^2(\ln 2 - 0.5) > 0.3N^2$. Если же n заключено между $0.5N$ и N , то, полагая $n = N - r = (N + \vartheta) - (r + \vartheta) = \tau - h$, находим

$$\begin{aligned}\lambda(n) &= \lambda(\tau - h) = \tau^2 \left(-\ln \left(1 - \frac{h}{\tau} \right) - \frac{1}{2} \left(1 - \left(1 - \frac{h}{\tau} \right)^2 \right) \right) \\ &= \tau^2 \left(\frac{h^2}{\tau^2} + \frac{h^3}{3\tau^3} + \frac{h^4}{4\tau^4} + \dots \right) = h^2 + \delta(h), \quad \delta(h) = \frac{h^3}{3\tau} + \frac{h^4}{4\tau^2} + \dots.\end{aligned}$$

Поскольку h не превосходит $0.5(\tau + 1)$, то при достаточно большом τ верхней границей $\delta(h)$ служит величина

$$h^2 \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{1}{\nu+2} \left(\frac{1+\tau^{-1}}{2} \right)^\nu < \frac{h^2}{3} \sum_{\nu=1}^{+\infty} (0.6)^\nu = 0.5h^2.$$

Следовательно, для рассматриваемых n функция $\lambda(n)$ заключена между h^2 и $1.5h^2$, или, что то же самое, $(r + \vartheta)^2 \leq \lambda(N - r) \leq 1.5(r + \vartheta)^2$. Далее, из тождества

$$\int_{\lambda}^{+\infty} \frac{e^{2\pi i u}}{\sqrt{u}} du = -\frac{1}{2\pi i} \frac{e^{2\pi i \lambda}}{\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{8\pi^2} \frac{e^{2\pi i \lambda}}{\lambda^{3/2}} - \frac{3}{16\pi^2} \int_{\lambda}^{+\infty} \frac{e^{2\pi i u}}{u^{5/2}} du,$$

которое устанавливается интегрированием по частям, следует асимптотическая формула

$$\int_{\lambda}^{+\infty} \frac{e^{2\pi i u}}{\sqrt{u}} du = -\frac{1}{2\pi i} \frac{e^{2\pi i \lambda}}{\sqrt{\lambda}} + \frac{\theta_1}{4\pi^2} \lambda^{-3/2}, \quad \lambda \geq 1, \quad |\theta_1| \leq 1.$$

Полагая в ней $\lambda = \lambda(N - r)$, получим следующие неравенства:

$$\begin{aligned}\left| \int_{\lambda(N-r)}^{+\infty} \frac{e^{2\pi i u}}{\sqrt{u}} du \right| &\leq \frac{(r + \vartheta)^{-1}}{2\pi} + \frac{(r + \vartheta)^{-3}}{4\pi^2} < (r + 1)^{-1}, \quad \text{если } r \geq 1, \\ \left| \int_{\lambda(N-r)}^{+\infty} \frac{e^{2\pi i u}}{\sqrt{u}} du \right| &= \left| \left(\int_0^{+\infty} - \int_0^{\lambda(N-r)} \right) \frac{e^{2\pi i u}}{\sqrt{u}} du \right| \leq \left| \frac{1+i}{2} \right| + 2\sqrt{\lambda(N-r)} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2}} + 2\sqrt{1.5\vartheta^2} < 3.2 = 3.2(r + 1)^{-1}, \quad \text{если } r = 0.\end{aligned}$$

Сумму W из условия леммы представим в виде $\sum_{j=1}^4 U_j$, где

$$\begin{aligned}U_1 &= \sum_{1 \leq n \leq 0.5N} (-1)^n \sqrt{n} \int_{\lambda(n)}^{+\infty} \frac{e^{2\pi i u}}{\sqrt{u}} du, \\ U_2 + U_3 + U_4 &= \left(\sum_{R_1 < r < 0.5N} + \sum_{R < r \leq R_1} + \sum_{0 \leq r \leq R} \right) (-1)^{N-r} \sqrt{N-r} \int_{\lambda(N-r)}^{+\infty} \frac{e^{2\pi i u}}{\sqrt{u}} du.\end{aligned}$$

Преобразуя приведенные выражения для величин U_j , при больших λ воспользуемся найденной выше асимптотической формулой; радикалы $\sqrt{N-r}$ при малых r приблизим величиной $\sqrt{N}$:

$$\sqrt{N-r} = \sqrt{N} \left(1 - \frac{r}{N} \right)^{0.5} = \sqrt{N} + O(rN^{-0.5}).$$

Таким образом, получим

$$\begin{aligned}
 U_1 &= \sum_{1 \leq n \leq 0.5N} (-1)^n \sqrt{n} \left(-\frac{1}{2\pi i} \frac{e^{2\pi i \lambda(n)}}{\sqrt{\lambda(n)}} + O(\lambda^{-3/2}(n)) \right) \\
 &= \frac{i}{2\pi} \sum_{1 \leq n \leq 0.5N} (-1)^n \sqrt{\frac{n}{\lambda(n)}} e^{2\pi i \lambda(n)} + O\left(N^{-3} \sum_{1 \leq n \leq 0.5N} \sqrt{n}\right) \\
 &= \frac{i}{2\pi} V_1 + O(N^{-3/2}), \\
 U_2 &= (-1)^N \sum_{R_1 < r < 0.5N} (-1)^r \sqrt{N-r} \left(-\frac{1}{2\pi i} \frac{e^{2\pi i \lambda(N-r)}}{\sqrt{\lambda(N-r)}} + O(\lambda^{-3/2}(N-r)) \right) \\
 &= \frac{i(-1)^N}{2\pi} \sum_{R_1 < r < 0.5N} (-1)^r \sqrt{\frac{N-r}{\lambda(N-r)}} e^{2\pi i \lambda(N-r)} + O\left(\sqrt{N} \sum_{R_1 < r < 0.5N} r^{-3}\right) \\
 &= \frac{i}{2\pi} V_2 + O(c^{-2} N^{-1/2}).
 \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned}
 U_3 &= (-1)^N \sum_{R < r \leq R_1} (-1)^r (\sqrt{N} + O(rN^{-1/2})) \int_{\lambda(N-r)}^{+\infty} \frac{e^{2\pi i u}}{\sqrt{u}} du \\
 &= (-1)^N \sqrt{N} \sum_{R < r \leq R_1} (-1)^r \int_{\lambda(N-r)}^{+\infty} \frac{e^{2\pi i u}}{\sqrt{u}} du + O\left(\sum_{R < r \leq R_1} \frac{r}{\sqrt{N}} \frac{1}{r+1}\right) \\
 &= (-1)^N \sqrt{N} \sum_{R < r \leq R_1} (-1)^r \left(-\frac{1}{2\pi i} \frac{e^{2\pi i \lambda(N-r)}}{\sqrt{\lambda(N-r)}} + O(\lambda^{-3/2}(N-r)) \right) \\
 &\quad + O(R_1 N^{-1/2}) = \frac{i}{2\pi} V_3 + O\left(\sqrt{N} \sum_{R < r \leq R_1} r^{-3}\right) + O(c) = \frac{i}{2\pi} V_3 + O(1).
 \end{aligned}$$

Наконец, преобразуя сумму U_4 , будем иметь

$$\begin{aligned}
 U_4 &= (-1)^N \sum_{0 \leq r \leq R} (-1)^r (\sqrt{N} + O(rN^{-1/2})) \int_{\lambda(N-r)}^{+\infty} \frac{e^{2\pi i u}}{\sqrt{u}} du \\
 &= (-1)^N \sqrt{N} \sum_{0 \leq r \leq R} (-1)^r \int_{\lambda(N-r)}^{+\infty} \frac{e^{2\pi i u}}{\sqrt{u}} du + O\left(\sum_{0 \leq r \leq R} \frac{r}{\sqrt{N}} \frac{1}{r+1}\right) \\
 &= V_4 + O(N^{-1/4}).
 \end{aligned}$$

Сложим полученные выражения для $U_1, \dots, U_4$; получим

$$W = \frac{i}{2\pi} (V_1 + V_2 + V_3) + V_4 + O(N^{-3/2} + c^{-2} N^{-1/2} + 1 + N^{-1/4}).$$

Поскольку $R_1 > R$, то при достаточно больших N справедливы неравенства $R_1 \geq c\sqrt{N} \geq 0.4\sqrt[4]{N} - 1 > 0.3\sqrt[4]{N}$, из которых следует, что $c > 0.3N^{-1/4}$ и $c^2 N^{-1/2} \leq (10/3)^2 \sqrt{N} N^{-1/2} = O(1)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 12. Для определенных в лемме 11 сумм V_1 и $V_2(c)$ при $N \rightarrow +\infty$ справедливы оценки $V_1 \ll N^{1/3}$, $V_2(c) \ll N^{1/3} \ln N$, причем постоянная в последнем знаке $\ll$ зависит от c .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определяя число s неравенствами $2^{s-1} \leq N < 2^s$ и придавая величине M значения $N \cdot 2^{-k}$, $k = 2, 3, \dots, s$, представим V_1 суммой $\sum_{k=2}^s V_1(M)$, где

$$V_1(M) = \sum_{M < n \leq M_1} \sqrt{\frac{n}{\lambda(n)}} (-1)^n e^{2\pi i \lambda(n)}, \quad M_1 \leq 2M.$$

Из определения $\lambda(n)$ следует, что

$$(-1)^n e^{2\pi i \lambda(n)} = e^{2\pi i \tau^2 \ln \tau - \pi i \tau^2} \exp\{-2\pi i \tau^2 \ln n\}.$$

Кроме того, при изменении n от 1 до $0.5N$ дробь $\sqrt{n/\lambda(n)}$ монотонно возрастает, и при этом величина $\lambda(n)$ остается большей $0.3N^2$. Применяя к $V_1(M)$ преобразование Абеля, находим

$$\begin{aligned} V_1(M) &= \sqrt{\frac{M_1}{\lambda(M_1)}} \mathbb{C}(M_1) - \int_M^{M_1} \mathbb{C}(u) d\sqrt{\frac{u}{\lambda(u)}}, \\ \mathbb{C}(u) &= e^{2\pi i \tau^2 \ln \tau - \pi i \tau^2} \sum_{M < n \leq u} \exp\{-2\pi i \tau^2 \ln n\}. \end{aligned}$$

Переходя к оценкам и обозначая через M_2 то значение u , $M \leq u \leq M_1$, при котором модуль $\mathbb{C}(u)$ достигает наибольшего значения, получим

$$|V_1(M)| \leq \sqrt{\frac{M_1}{\lambda(M_1)}} |\mathbb{C}(M_1)| + \int_M^{M_1} |\mathbb{C}(u)| d\sqrt{\frac{u}{\lambda(u)}} \ll \sqrt{M} N^{-1} |\mathbb{C}(M_2)|.$$

В случае больших M , $M > \tau^{2/3}$, с помощью леммы 2 заключаем, что $|\mathbb{C}(M_2)| \ll \sqrt{M} \tau^{1/3}$. При малых M , $M \leq \tau^{2/3}$, такая оценка будет следствием цепочки очевидных неравенств

$$|\mathbb{C}(M_2)| \leq M_2 - M + 1 \leq 2M \leq 2\sqrt{M} \tau^{1/3}.$$

Таким образом, для любого значения $M = N \cdot 2^{-k}$ имеем

$$\begin{aligned} V_1(M_1) &\ll \frac{\sqrt{M}}{N} \sqrt{M} \tau^{1/3} \ll MN^{-2/3}, \\ V_1 &\ll N^{-2/3} \sum_{k=2}^s N \cdot 2^{-k} \ll N^{1-2/3} \ll N^{1/3}. \end{aligned}$$

Добавим в случае четного N к сумме $V_2(c)$ слагаемое, отвечающее значению $r = 0.5N$. Разбивая промежуток $(R_1, 0.5N]$ на промежутки вида $M < r \leq M_1$, $M_1 \leq 2M$, и пользуясь монотонностью дроби $\sqrt{(N-r)/(\lambda(N-r))}$ при $0 \leq r \leq 0.5N$, получим неравенства

$$\begin{aligned} V_2 &\ll \sum_{R_1 < M \leq 0.5N} \left| \sum_{M < r \leq M_1} \sqrt{\frac{N-r}{\lambda(N-r)}} (-1)^r e^{2\pi i \lambda(N-r)} \right| + N^{-0.5} \\ &\ll \sum_M \frac{\sqrt{N}}{M} \left| \sum_{M < r \leq M_2} e^{2\pi i \varphi(r)} \right| + N^{-0.5}, \end{aligned}$$

в которых $M_2 \leq M_1$,

$$\varphi(r) = \frac{r}{2} + \lambda(N-r) = \frac{r}{2} + (r+\vartheta)^2 + \frac{1}{3\tau}(r+\vartheta)^3 + \frac{1}{4\tau^2}(r+\vartheta)^4 + \dots, \quad \tau = N + \vartheta.$$

Сумму по $M < r \leq M_2$ оценим с помощью леммы 1. Полагая в этой лемме $A = 0.25c^2N$, $c_1 = 0.25c^2$, $c_2 = 4.25c^2$, в случае $M_2 - M \geq 0.5M$ получим $A \leq 0.25M^2 \leq (M_2 - M)^2$. Кроме того, производная

$$\varphi^{(3)}(r) = \frac{2}{\tau} + \frac{6}{\tau^2}(r+\vartheta) + \frac{12}{\tau^3}(r+\vartheta)^2 + \dots = \frac{2}{\tau} \left(1 - \frac{r+\vartheta}{\tau}\right)^{-3}$$

удовлетворяет неравенствам $c_1 A^{-1} \leq \varphi^{(3)}(r) \leq c_2 A^{-1}$. Следовательно,

$$\left| \sum_{M < r \leq M_2} e^{2\pi i \varphi(r)} \right| \ll (M_2 - M) A^{-1/6} \ll M N^{-1/6}.$$

Если же $M_2 - M < 0.5M$, то

$$\begin{aligned} \left| \sum_{M < r \leq M_2} e^{2\pi i \varphi(r)} \right| &\leq \left| \left(\sum_{M < r \leq 3M} - \sum_{M_2 < r \leq 3M} \right) e^{2\pi i \varphi(r)} \right| \\ &\leq \left| \sum_{M < r \leq 3M} e^{2\pi i \varphi(r)} \right| + \left| \sum_{M_2 < r \leq 3M} e^{2\pi i \varphi(r)} \right| \ll M N^{-1/6}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$V_2(c) \ll \sum_M \frac{\sqrt{N}}{M} M N^{-1/6} \ll N^{1/3} \ln N,$$

причем постоянная в знаке $\ll$ зависит от c . Лемма доказана.

ЛЕММА 13. Пусть $N \rightarrow +\infty$, $0 \leq \vartheta \leq 1$, $0 < c \leq 0.7$. Тогда определенная выше сумма $V_3(c)$ удовлетворяет следующему равенству:

$$V_3(c) = (-1)^N \sqrt{N} e^{2\pi i(\vartheta^2 - \varepsilon\vartheta)} \int_{R+\vartheta}^{R_1+\vartheta} \frac{e^{2\pi i\varphi(u)}}{u} du + O(N^{1/4}),$$

где $\varepsilon = (-1)^s \|2\vartheta + 0.5\|$, s равно 0 или 1 в зависимости от того, будет ли дробная доля $\{2\vartheta + 0.5\}$ меньше 0.5 или не будет,

$$\varphi(u) = \varepsilon u + \delta(u), \quad \delta(u) = \frac{u^3}{3\tau} + \frac{u^4}{4\tau^2} + \dots,$$

а постоянная в знаке O – абсолютная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, полагая $h = r + \vartheta$, будем иметь

$$\begin{aligned} \lambda(N-r) &= h^2 + \delta(h), \\ (\lambda(N-r))^{-1/2} &= \frac{1}{h} \left(1 + \frac{\delta(h)}{h^2}\right)^{-1/2} = \frac{1}{h} + O\left(\frac{\delta(h)}{h^3}\right) = \frac{1}{h} + O(N^{-1}), \\ (-1)^r e^{2\pi i \lambda(N-r)} &= e^{2\pi i \vartheta^2} e^{2\pi i((2\vartheta + \frac{1}{2})r + \delta(r+\vartheta))}. \end{aligned}$$

Поскольку для любого целого r справедливо равенство

$$e^{2\pi i(2\vartheta + \frac{1}{2})r} = e^{2\pi i\varepsilon r} = e^{2\pi i\varepsilon(r+\vartheta)} e^{-2\pi i\varepsilon\vartheta},$$

то исходная сумма V_3 принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} V_3 &= (-1)^N \sqrt{N} \sum_{R < r \leq R_1} (\lambda(N-r))^{-1/2} (-1)^r e^{2\pi i\lambda(N-r)} \\ &= (-1)^N \sqrt{N} \sum_{R < r \leq R_1} \left(\frac{1}{r+\vartheta} + O(N^{-1}) \right) e^{2\pi i(\vartheta^2 - \varepsilon\vartheta)} e^{2\pi i\varphi(r+\vartheta)} \\ &= (-1)^N \sqrt{N} e^{2\pi i(\vartheta^2 - \varepsilon\vartheta)} \sum_{R < r \leq R_1} \frac{e^{2\pi i\varphi(r+\vartheta)}}{r+\vartheta} + O(1). \end{aligned}$$

Для завершения доказательства остается приблизить сумму по r интегралом, для чего область изменения r разобьем на $\ll \ln N$ промежутков вида $M < r \leq M_1$, где $M = R \cdot 2^k$, $k = 1, 2, \dots$, а $M_1 \leq 2M$. К каждой из получившихся сумм применим лемму 4. Чтобы проверить выполнение условий этой леммы, заметим, что при $R + \vartheta \leq u \leq R_1 + \vartheta$ справедливы следующие неравенства:

$$\begin{aligned} |\varphi'(u)| &\leq |\varepsilon| + \delta'(u) \leq 0.5 + \frac{u^2}{\tau} + \frac{u^3}{\tau^2} + \dots \leq 0.5 + \frac{u^2}{N} (1 + N^{-0.5} + N^{-1} + \dots) \\ &= 0.5 + u^2 N^{-1} (1 - N^{-0.5})^{-1} \leq 0.5 + (0.7\sqrt{N} + 2)^2 N^{-1} (1 - N^{-0.5})^{-1} \\ &= 0.5 + (0.49 + 2.8N^{-0.5} + 4N^{-1})(1 - N^{-0.5})^{-1} < 0.995 < 1. \end{aligned}$$

Таким образом, для каждой из сумм по $M < r \leq M_1$ имеем

$$\sum_{M < r \leq M_1} \frac{e^{2\pi i\varphi(r+\vartheta)}}{r+\vartheta} = \int_M^{M_1} \frac{e^{2\pi i\varphi(u+\vartheta)}}{u+\vartheta} du + O(M^{-1}),$$

где постоянная в знаке O – абсолютная. Сложив эти равенства, получим

$$\begin{aligned} V_3 &= (-1)^N \sqrt{N} e^{2\pi i(\vartheta^2 - \varepsilon\vartheta)} \int_R^{R_1} \frac{e^{2\pi i\varphi(u+\vartheta)}}{u+\vartheta} du + O\left(R^{-1} \sqrt{N} \sum_{k \geq 1} 2^{-k}\right) \\ &= (-1)^N e^{2\pi i(\vartheta^2 - \varepsilon\vartheta)} \int_{R+\vartheta}^{R_1+\vartheta} \frac{e^{2\pi i\varphi(u)}}{u} du + O(N^{1/4}), \end{aligned}$$

где постоянная в знаке O – абсолютная. Лемма доказана.

ЛЕММА 14. Пусть ϑ – фиксированное число с условием $0 \leq \vartheta \leq 1$. Тогда при некотором c , зависящем от ϑ и таком, что $0 < c \leq 0.7$, при $N \rightarrow +\infty$ справедливо соотношение

$$\operatorname{Re}(ie^{-\pi i/8} V_3(c)) = \frac{\pi\omega}{6} (-1)^N \sqrt{N} + O(N^{1/4}),$$

где

$$\omega = \omega(\vartheta) = \begin{cases} -1, & \text{если } \vartheta = \frac{1}{4}, \\ 1, & \text{если } \vartheta = \frac{3}{4}, \\ 0, & \text{если } \vartheta \neq \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \end{cases}$$

а постоянная в знаке O зависит от ϑ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим вещественную часть выражения $ie^{-\pi i/8}V_3(c)$ через Y . Положим $\varepsilon = (-1)^s \|2\vartheta + 0.5\|$, где $s = 0$ при условии $0 \leq \{2\vartheta + 0.5\} < 0.5$ и $s = 1$ при условии $0.5 \leq \{2\vartheta + 0.5\} < 1$. Согласно лемме 13 имеем

$$V_3(c) = (-1)^N \sqrt{N} e^{2\pi i(\vartheta^2 - \vartheta\varepsilon)} j(\varepsilon) + O(N^{1/4}), \quad j(\varepsilon) = \int_{R+\vartheta}^{R_1+\vartheta} \frac{e^{2\pi i\varphi(u)}}{u} du,$$

$$\varphi(u) = \varepsilon u + \delta(u), \quad \delta(u) = \frac{u^3}{3\tau} + \frac{u^4}{4\tau^2} + \dots, \quad \tau = N + \vartheta.$$

Далее рассмотрим несколько случаев.

Случай 1: $\varepsilon = 0$. Нетрудно заметить, что это возможно лишь при $\vartheta = 1/4$ и $\vartheta = 3/4$. Тогда $e^{2\pi i(\vartheta^2 - \varepsilon\vartheta)} = e^{2\pi i\vartheta^2} = -\omega e^{\pi i/8}$, где величина ω определена в условии леммы. В этом случае положим $c = 0.7$ и сделаем в интеграле замену переменной вида $x = \varphi(u)$, полагая $x_0 = \varphi(R+\vartheta)$, $x_1 = \varphi(R_1+\vartheta)$. Из равенства

$$x = \delta(u) = \frac{u^3}{3\tau} \left(1 + \frac{3}{4} \frac{u}{\tau} + \frac{3}{5} \left(\frac{u}{\tau} \right)^2 + \dots \right)$$

находим

$$dx = \frac{u^2}{\tau} \left(1 + \frac{u}{\tau} + \left(\frac{u}{\tau} \right)^2 + \dots \right) du = \frac{u^2 du}{\tau - u}, \quad u'_x = \frac{du}{dx} = \frac{\tau - u}{u^2}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} j(\varepsilon) &= \int_{x_0}^{x_1} \frac{e^{2\pi i x}}{u} u'_x dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{e^{2\pi i x}}{3x} \left(1 - \frac{u}{\tau} \right) \left(1 + \frac{3}{4} \frac{u}{\tau} + \frac{3}{5} \left(\frac{u}{\tau} \right)^2 + \dots \right) dx \\ &= \frac{1}{3} \int_{x_0}^{x_1} \frac{e^{2\pi i x}}{x} \left(1 + O\left(\frac{u}{\tau} \right) \right) dx, \quad u = u(x). \end{aligned}$$

Так как $x \asymp u^3 \tau^{-1}$, то вклад от O -члена не превосходит по порядку величины

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{x} \frac{\sqrt[3]{x\tau}}{\tau} dx &\ll N^{-2/3} \int_{x_0}^{x_1} x^{-2/3} dx \ll N^{-2/3} x_1^{1/3} \\ &\ll N^{-2/3} (R_1^3 N^{-1})^{1/3} \ll N^{-1/2}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} V_3(c) &= -(-1)^N \sqrt{N} \omega e^{\pi i/8} \left(\frac{1}{3} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sin(2\pi x)}{x} dx + O(N^{-1/2}) \right) + O(N^{-1/4}), \\ Y &= \frac{\omega}{3} (-1)^N \sqrt{N} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sin(2\pi x)}{x} dx + O(N^{1/4}). \end{aligned}$$

Заметим теперь, что $x_0 \asymp (R + \vartheta)^3 \tau^{-1} \asymp N^{-1/4}$, $x_1 \asymp (R_1 + \vartheta)^3 \tau^{-1} \asymp N^{1/2}$. Заменяя интеграл по x на несобственный, получим

$$\begin{aligned} Y &= \frac{\omega}{3} (-1)^N \sqrt{N} \left(\int_0^{+\infty} - \int_0^{x_0} - \int_{x_1}^{+\infty} \right) \frac{\sin(2\pi x)}{x} dx + O(N^{1/4}) \\ &= \frac{\omega}{3} (-1)^N \sqrt{N} \left(\frac{\pi}{2} + O(x_0) + O(x_1^{-1}) \right) + O(N^{1/4}) = \frac{\pi\omega}{6} (-1)^N \sqrt{N} + O(N^{1/4}). \end{aligned}$$

Случай 2: $\varepsilon > 0$. Положим $c = \sqrt{\varepsilon}/2$ и сделаем в интеграле $j(\varepsilon)$ замену переменной $x = \varepsilon u + \delta(u)$. Тогда

$$\begin{aligned} dx &= \left(\varepsilon + \frac{u^2}{\tau} + \frac{u^3}{\tau^2} + \dots \right) du = \left(\varepsilon + \frac{u^2}{\tau - u} \right) du, \quad u'_x = \frac{du}{dx} = \left(\varepsilon + \frac{u^2}{\tau - u} \right)^{-1}, \\ u''_{xx} &= \frac{du'_x}{dx} = - \left(\varepsilon + \frac{u^2}{\tau - u} \right)^{-2} \frac{d}{dx} \left(\frac{u^2}{\tau - u} \right) = - \left(\varepsilon + \frac{u^2}{\tau - u} \right)^{-2} \frac{2uu'_x\tau - u^2u'_x}{(\tau - u)^2} \\ &= - \frac{u(2\tau - u)}{(\tau - u)^2} \left(\varepsilon + \frac{u^2}{\tau - u} \right)^{-3}. \end{aligned}$$

Интеграл $j(\varepsilon)$ принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} j(\varepsilon) &= \int_{x_0}^{x_1} \frac{e^{2\pi i x}}{u} u'_x dx = \frac{1}{2\pi i} \int_{x_0}^{x_1} \frac{u'_x}{u} de^{2\pi i x} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{u'_x(x_1)}{u(x_1)} e^{2\pi i x_1} - \frac{u'_x(x_0)}{u(x_0)} e^{2\pi i x_0} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{u''_{xx} u - (u'_x)^2}{u^2} e^{2\pi i x} dx \right). \end{aligned}$$

Переходя к оценкам, получим

$$\begin{aligned} 0 \leq \delta(u) &= \frac{u^3}{3\tau} \left(1 + \frac{3}{4} \frac{u}{\tau} + \frac{3}{5} \left(\frac{u}{\tau} \right)^2 + \dots \right) \\ &\leq \frac{u^3}{3\tau} \left(1 + \frac{3}{4} \frac{c\sqrt{N} + 2}{N} + \frac{3}{5} \left(\frac{c\sqrt{N} + 2}{N} \right)^2 + \dots \right) < \frac{u^3}{2\tau} \leq \frac{u}{2} \frac{(c\sqrt{N} + 2)^2}{N} < \frac{\varepsilon u}{6}, \\ \varepsilon u &= x - \delta(u) > x - \frac{\varepsilon u}{6}, \end{aligned}$$

откуда заключаем, что $\frac{7}{6}\varepsilon u > x$ и $u > \frac{6}{7}\varepsilon^{-1}x$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \left| \frac{u''_{xx}}{u} \right| &= \frac{(2\tau - u)}{(\tau - u)^2} \left(\varepsilon + \frac{u^2}{\tau - u} \right)^{-3} < \frac{2\tau\varepsilon^{-3}}{(\tau - u)^2} < \frac{3}{\tau}\varepsilon^{-3}, \\ \left| \frac{u'_x}{u} \right| &= \frac{1}{u} \left(\varepsilon + \frac{u^2}{\tau - u} \right)^{-1} < (\varepsilon u)^{-1} < \frac{7}{6x}. \end{aligned}$$

Возвращаясь к оценке $j(\varepsilon)$, будем иметь

$$\begin{aligned} |j(\varepsilon)| &< \frac{1}{2\pi} \left(\frac{7}{6x_0} + \frac{7}{6x_0} \right) + \frac{1}{2\pi} \int_{x_0}^{x_1} \left| \frac{u''_{xx}}{u} \right| dx + \frac{1}{2\pi} \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{u'_x}{u} \right)^2 dx \\ &< \frac{1}{2\pi} \frac{7}{3x_0} + \frac{1}{2\pi} \frac{3\varepsilon^{-1}}{\tau} x_1 + \frac{1}{2\pi} \left(\frac{7}{6} \right)^2 \frac{1}{x_0} < \frac{2}{\pi} \frac{1}{x_0} + \frac{3}{2\pi} \frac{\varepsilon^{-3} x_1}{N} \\ &< \frac{5}{\pi} \varepsilon^{-1} N^{-1/4} + \frac{7}{4\pi} \frac{\varepsilon^{-2}}{N} (0.5\sqrt{\varepsilon N} + 2) < 3\varepsilon^{-2} N^{-1/4}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$|Y| \leq |V_3(c)| \leq \sqrt{N} |j(\varepsilon)| + O(N^{1/4}) < 3\varepsilon^{-2} N^{1/4} + O(N^{1/4}) \ll N^{1/4}.$$

Случай 3: $\varepsilon < 0$. Этот случай подобен только что рассмотренному. Полагая $c = \sqrt{|\varepsilon|}/2$, нетрудно убедиться в том, что

$$\begin{aligned} \frac{u^2}{\tau - u} &< \frac{|\varepsilon|}{3}, & \left| \frac{u'_x}{u} \right| &= \frac{1}{u} \left(|\varepsilon| - \frac{u^2}{\tau - u} \right)^{-1} < \frac{3}{2} \frac{1}{u|\varepsilon|}, \\ \left| \frac{u''_{xx}}{u} \right| &= \frac{2\tau - u}{(\tau - u)^2} \left(|\varepsilon| - \frac{u^2}{\tau - u} \right)^{-3} < \frac{7|\varepsilon|^{-3}}{\tau}. \end{aligned}$$

Кроме того, из равенства $x = -|\varepsilon|u + \delta(u)$ заключаем, что

$$\begin{aligned} \frac{3}{4}|\varepsilon|u &\leq |x| \leq |\varepsilon|u, & |x_0| &> \frac{3}{4}|\varepsilon|(0.4\sqrt[4]{N} - 1) > 0.2|\varepsilon|\sqrt[4]{N}, \\ |x_1| &< |\varepsilon|(c\sqrt{N} + 2) < |\varepsilon|^{3/2}\sqrt{N}. \end{aligned}$$

Пользуясь этими соотношениями наряду с полученным выше выражением для $j(\varepsilon)$, находим

$$\begin{aligned} |j(\varepsilon)| &< \frac{1}{2\pi} \left(\frac{3}{2|x_0|} + \frac{3}{2|x_1|} \right) + \frac{1}{2\pi} \int_{|x_0|}^{|x_1|} \frac{7|\varepsilon|^{-3}}{\tau} dx + \frac{1}{2\pi} \int_{|x_0|}^{|x_1|} \left(\frac{3}{2|x_1|} \right)^2 dx \\ &< \frac{1}{|x_0|} + \frac{2|\varepsilon|^{-3}}{N} |x_1| < 4|\varepsilon|^{-2} N^{-1/4}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$|Y| \leq |V_3(c)| \leq \sqrt{N} \cdot 4|\varepsilon|^{-2} N^{-1/4} + O(N^{1/4}) < 4|\varepsilon|^{-2} N^{1/4} + O(N^{1/4}) \ll N^{1/4}.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 15. Пусть $\Lambda \geq 0$, $a > 0$, и пусть $f(x)$ обозначает любую из функций $\cos x$, $\sin x$. Тогда имеют место следующие неравенства:

- 1) $\left| \int_{\gamma_0}^{\gamma} f(w) w^{-1} dw \right| \leq \min \left(\frac{2}{\gamma_0}, \ln \frac{\gamma}{\gamma_0} \right), \quad \gamma > \gamma_0 > 0;$
- 2) $\left| \int_{\gamma_0}^{\gamma} f \left(2\pi \left(\Lambda w + \frac{w^3}{3} \right) \right) w^{-1} dw \right| \leq \frac{\pi^{-1}}{\gamma_0(\gamma_0^2 + \Lambda)}, \quad \gamma > \gamma_0 > 0;$
- 3) $\left| \int_{\gamma}^{w_1} f \left(a \left(\frac{w^3}{3} - w \right) \right) w^{-1} dw \right| \leq \frac{2a^{-1}}{\gamma(\gamma^2 - 1)}, \quad w_1 > \gamma > 1;$
- 4) $\left| \int_{w_0}^{\gamma_0} f \left(a \left(\frac{w^3}{3} - w \right) \right) w^{-1} dw \right| \leq \frac{2a^{-1}}{w_0(1 - w_0^2)}, \quad w_0 < \gamma_0 < \frac{1}{\sqrt{3}}.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случай, когда $f(x) = \cos x$. Обозначим интегралы из условия леммы через j_1 , j_2 , j_3 и j_4 соответственно. Интегрируя их по частям, получим

$$\begin{aligned} j_1 &= \int_{\gamma_0}^{\gamma} \frac{\cos w}{w} dw = \frac{\sin \gamma}{\gamma} - \frac{\sin \gamma_0}{\gamma_0} - \int_{\gamma_0}^{\gamma} \sin w d \left(\frac{1}{w} \right), \\ |j_1| &\leq \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma_0} + \int_{\gamma_0}^{\gamma} \left| d \left(\frac{1}{w} \right) \right| = \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma_0} + \frac{1}{\gamma_0} - \frac{1}{\gamma} = \frac{2}{\gamma_0}. \end{aligned}$$

С другой стороны, имеем очевидное неравенство

$$|j_1| \leq \int_{\gamma_0}^{\gamma} w^{-1} dw = \ln \frac{\gamma}{\gamma_0}.$$

Отсюда следует искомая оценка j_1 . Далее, из соотношения

$$j_2 = \int_{\gamma_0}^{\gamma} \cos\left(2\pi\left(\Lambda w + \frac{w^3}{3}\right)\right) \frac{dw}{w} = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_0}^{\gamma} \frac{d \sin(2\pi(\Lambda w + w^3/3))}{w(w^2 + \Lambda)}$$

заключаем, что

$$\begin{aligned} |j_2| &\leq \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{\gamma(\gamma^2 + \Lambda)} + \frac{1}{\gamma_0(\gamma_0^2 + \Lambda)} + \int_{\gamma_0}^{\gamma} \left| d\left(\frac{1}{w(w^2 + \Lambda)}\right) \right| \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{\gamma(\gamma^2 + \Lambda)} + \frac{1}{\gamma_0(\gamma_0^2 + \Lambda)} + \frac{1}{\gamma_0(\gamma_0^2 + \Lambda)} - \frac{1}{\gamma(\gamma^2 + \Lambda)} \right) = \frac{\pi^{-1}}{\gamma_0(\gamma_0^2 + \Lambda)}. \end{aligned}$$

Рассуждая подобным образом в оставшихся случаях, будем иметь

$$\begin{aligned} |j_3| &= \left| \int_{\gamma}^{w_1} \frac{d \sin(a(w^3/3 - w))}{aw(w^2 - 1)} \right| \\ &\leq a^{-1} \left(\frac{1}{w_1(w_1^2 - 1)} + \frac{1}{\gamma(\gamma^2 - 1)} + \int_{\gamma}^{w_1} \left| d\left(\frac{1}{w(w^2 - 1)}\right) \right| \right) = \frac{2a^{-1}}{\gamma(\gamma^2 - 1)}, \\ |j_4| &= \left| \int_{w_0}^{\gamma_0} \frac{d \sin(a(w^3/3 - w))}{aw(w^2 - 1)} \right| \\ &\leq a^{-1} \left(\frac{1}{\gamma_0(1 - \gamma_0^2)} + \frac{1}{w_0(1 - w_0^2)} + \int_{w_0}^{\gamma_0} \left| d\left(\frac{1}{w(w^2 - 1)}\right) \right| \right) = \frac{2a^{-1}}{w_0(1 - w_0^2)}. \end{aligned}$$

Доказательство утверждения для случая $f(x) = \sin x$ практически дословно повторяет вышеприведенные рассуждения. Лемма доказана.

ЛЕММА 16. Пусть $N \rightarrow +\infty$, ϑ – произвольное число с условием $0 \leq \vartheta \leq 1$, $c = 0.7$. Тогда для величины $Y = \operatorname{Re}(ie^{-\pi i/8} V_3(c))$ имеет место оценка $|Y| < 5.7\sqrt{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользовавшись утверждением леммы 13, находим

$$V_3(c) = (-1)^N \sqrt{N} e^{2\pi i(\vartheta^2 - \varepsilon\vartheta)} j + O(N^{1/4}),$$

где

$$\begin{aligned} j &= \int_{R+\vartheta}^{R_1+\vartheta} u^{-1} e^{2\pi i\varphi(u)} du, \\ R &= [0.4\sqrt[4]{N}], \quad R_1 = [0.7\sqrt{N}] + 1, \\ \varphi(u) &= \varepsilon u + \delta(u), \quad \delta(u) = \frac{u^3}{3\tau} + \frac{u^4}{4\tau^2} + \dots, \\ \tau &= N + \vartheta, \quad \varepsilon = (-1)^s \|2\vartheta + 0.5\|, \end{aligned}$$

причем s берется равным 0 или 1 в зависимости от того, будет ли дробная доля $\{2\vartheta + 0.5\}$ меньше 0.5 или не будет, а постоянная в знаке O – абсолютная.

Разложим подынтегральное выражение в бесконечный ряд; получим

$$\begin{aligned} j &= \int_{R+\vartheta}^{R_1+\vartheta} u^{-1} \exp\left\{2\pi i\left(\varepsilon u + \frac{u^3}{3\tau}\right)\right\} \exp\left\{2\pi i\left(\frac{u^4}{4\tau^2} + \frac{u^5}{5\tau^3} + \dots\right)\right\} du \\ &= j(0) + \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{(2\pi i)^\nu}{\nu!} j(\nu), \\ j(\nu) &= \int_{R+\vartheta}^{R_1+\vartheta} u^{-1} \left(\frac{u^4}{4\tau^2} + \frac{u^5}{5\tau^3} + \dots\right)^\nu \exp\left\{2\pi i\left(\varepsilon u + \frac{u^3}{3\tau}\right)\right\} du. \end{aligned}$$

Чтобы оценить интеграл $j(\nu)$ при $\nu \geq 1$, заметим, что для всех u с условием $R + \vartheta \leq u \leq R_1 + \vartheta$ справедливы следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \left|\frac{u}{\tau}\right| &\leq \frac{R_1 + 1}{N} \leq \frac{0.7\sqrt{N} + 2}{N} < 0.5, \\ 0 &\leq \frac{u^4}{4\tau^2} + \frac{u^5}{5\tau^3} + \dots \leq \frac{u^4}{4\tau^2} \left(1 + \frac{u}{\tau} + \left(\frac{u}{\tau}\right)^2 + \dots\right) \leq \frac{u^4}{2\tau^2}. \end{aligned}$$

Их следствием будут оценки

$$\begin{aligned} |j(\nu)| &\leq \int_{R+\vartheta}^{R_1+\vartheta} u^{-1} \left(\frac{u^4}{2\tau^2}\right)^\nu du \\ &\leq \frac{1}{(2N^2)^\nu} \int_0^{R_1+\vartheta} u^{4\nu-1} du \leq \frac{1}{4\nu} \left(\frac{(0.7\sqrt{N} + 2)^2}{N\sqrt{2}}\right)^{2\nu} \\ &= \frac{1}{4\nu} \left(\frac{0.49}{\sqrt{2}} + \frac{2.8}{\sqrt{2}} N^{-0.5} + \frac{4}{\sqrt{2}} N^{-1}\right)^{2\nu} < \frac{1}{4\nu} \left(\frac{1}{8}\right)^\nu, \\ \left|\sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{(2\pi i)^\nu}{\nu!} j(\nu)\right| &\leq \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{(2\pi)^\nu}{\nu!} \frac{1}{4\nu} \left(\frac{1}{8}\right)^\nu < \frac{1}{4} (e^{\pi/4} - 1) < 0.299. \end{aligned}$$

Таким образом, при достаточно больших N выражение для V_3 принимает вид

$$\begin{aligned} V_3 &= (-1)^N \sqrt{N} e^{2\pi i(\vartheta^2 - \varepsilon\vartheta)} (j(0) + \theta_1 \cdot 0.299) + O(N^{1/4}) \\ &= (-1)^N \sqrt{N} e^{2\pi i(\vartheta^2 - \varepsilon\vartheta)} j(0) + \theta_1 \cdot 0.3\sqrt{N}. \end{aligned}$$

Полагая $\psi = \vartheta^2 - \varepsilon\vartheta - 1/16$, находим

$$ie^{-\pi i/8} V_3 = i(-1)^N \sqrt{N} e^{2\pi i\psi} j(0) + 0.3\theta\sqrt{N}.$$

Пусть $0 \leq \vartheta < 0.5$. В этом случае $\varepsilon = 2\vartheta - 0.5$, $\vartheta = 1/4 + \varepsilon/2$, так что

$$\psi = \left(\frac{1}{4} + \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 - \varepsilon\left(\frac{1}{4} + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \frac{1}{16} = -\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2.$$

Если же $0.5 \leq \vartheta \leq 1$, то $\varepsilon = 2\vartheta - 1.5$, $\vartheta = 3/4 + \varepsilon/2$ и

$$\psi = \left(\frac{3}{4} + \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 - \varepsilon\left(\frac{3}{4} + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \frac{1}{16} = \frac{1}{2} - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2.$$

Взяв μ равным 0 или 1 в зависимости от того, будет ли ϑ меньше 0.5 или не будет, получим

$$\psi = \frac{\mu}{2} - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2, \quad e^{2\pi i \psi} = (-1)^\mu e^{-\pi i \varepsilon^2/2},$$

$$\begin{aligned} Y &= (-1)^{N+\mu} \sqrt{N} \operatorname{Re} \left(i e^{-\pi i \varepsilon^2/2} j(0) \right) + 0.3\theta \sqrt{N} \\ &= (-1)^{N+\mu} \sqrt{N} \operatorname{Re} \left(i \int_{R+\vartheta}^{R_1+\vartheta} u^{-1} \exp \left\{ 2\pi i \left(\varepsilon u + \frac{u^3}{3\tau} \right) - \frac{\pi i \varepsilon^2}{2} \right\} du \right) + 0.3\theta \sqrt{N}. \end{aligned}$$

Сделаем в интеграле замену $u = y \sqrt[3]{\tau}$. Взяв $\Lambda = \varepsilon \sqrt[3]{\tau}$, получим

$$\begin{aligned} Y &= (-1)^{N+\mu+1} \sqrt{N} Z + 0.3\theta \sqrt{N}, \\ Z &= \int_{R+\vartheta}^{R_1+\vartheta} u^{-1} \sin \left(2\pi \left(\varepsilon u + \frac{u^3}{3\tau} \right) - \frac{\pi \varepsilon^2}{2} \right) du \\ &= \int_{y_0}^{y_1} y^{-1} \sin \left(2\pi \left(\Lambda y + \frac{y^3}{3} \right) - \frac{\pi \varepsilon^2}{2} \right) dy = - \left(\sin \frac{\pi \varepsilon^2}{2} \right) Z_1 + \left(\cos \frac{\pi \varepsilon^2}{2} \right) Z_2, \\ y_0 &= \frac{R+\vartheta}{\sqrt[3]{\tau}}, \quad y_1 = \frac{R_1+\vartheta}{\sqrt[3]{\tau}}, \\ Z_1 &= \int_{y_0}^{y_1} y^{-1} \cos \left(2\pi \left(\Lambda y + \frac{y^3}{3} \right) \right) dy, \quad Z_2 = \int_{y_0}^{y_1} y^{-1} \sin \left(2\pi \left(\Lambda y + \frac{y^3}{3} \right) \right) dy. \end{aligned}$$

Переходя к оценкам, находим

$$|Y| \leq \sqrt{N} (|Z| + 0.3), \quad |Z| \leq \frac{\pi \varepsilon^2}{2} |Z_1| + |Z_2|.$$

Чтобы оценить величины $|Z_1|$ и $|Z_2|$, рассмотрим три случая: $\Lambda > 1$, $|\Lambda| \leq 1$ и $\Lambda < -1$.

Случай 1: $\Lambda > 1$. Представим Z_1 в виде $Z_1 = T_1 + T_2$, где

$$T_1 = \int_1^{y_1} y^{-1} \cos \left(2\pi \left(\Lambda y + \frac{y^3}{3} \right) \right) dy, \quad T_2 = \int_{y_0}^1 y^{-1} \cos \left(2\pi \left(\Lambda y + \frac{y^3}{3} \right) \right) dy.$$

Используя лемму 15, получаем

$$\begin{aligned} |T_1| &\leq \frac{\pi^{-1}}{1+\Lambda} \leq \frac{1}{2\pi}, \\ T_2 &= \int_{y_0}^1 \frac{\cos(2\pi \Lambda y)}{y} \cos \frac{2\pi y^3}{3} dy - \int_{y_0}^1 \frac{\sin(2\pi \Lambda y)}{y} \sin \frac{2\pi y^3}{3} dy \\ &= \int_{y_0}^1 \frac{\cos(2\pi \Lambda y)}{y} \left(1 - \frac{\theta_1}{2} \left(\frac{2\pi y^3}{3} \right)^2 \right) dy - \int_{y_0}^1 \sin(2\pi \Lambda y) \cdot \theta_2 \frac{2\pi y^3}{3} dy \\ &= \int_{2\pi \Lambda y_0}^{2\pi \Lambda} \frac{\cos w}{w} dw + \theta \left(\frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{3} \right)^2 \int_0^1 y^5 dy + \int_0^1 \frac{2\pi}{3} y^2 dy \right) \\ &= \theta \left(\min \left(\frac{1}{\pi \Lambda y_0}, \ln \frac{1}{y_0} \right) + \frac{\pi^2}{27} + \frac{2\pi}{9} \right). \end{aligned}$$

Если $\pi\Lambda y_0 > 1$, то из последнего равенства следуют соотношения

$$|T_2| < 1 + \frac{\pi^2}{27} + \frac{2\pi}{9}, \quad |Z_1| < \frac{1}{2\pi} + 1 + \frac{\pi^2}{27} + \frac{2\pi}{9},$$

и, наконец,

$$\frac{\pi\varepsilon^2}{2}|Z_1| < \frac{\pi}{8} \left(\frac{1}{2\pi} + 1 + \frac{\pi^2}{27} + \frac{2\pi}{9} \right) < 0.88.$$

Если $\pi\Lambda y_0 \leq 1$, то

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{\pi y_0 \sqrt[3]{\tau}} < N^{-1/4}, \quad |T_2| < \ln \frac{1}{y_0} + \frac{2\pi}{9} + \frac{\pi^2}{27},$$

$$|Z_1| < \ln N, \quad \frac{\pi\varepsilon^2}{2}|Z_1| < \frac{\pi \ln N}{2\sqrt{N}} < 0.01.$$

Разбивая отрезок интегрирования в Z_2 на два, получим $Z_2 = T_1 + T_2$,

$$|T_1| = \left| \int_1^{y_1} y^{-1} \sin \left(2\pi \left(\Lambda y + \frac{y^3}{3} \right) \right) dy \right| \leq \frac{1}{2\pi},$$

$$T_2 = \int_{\gamma_0}^{\gamma} \frac{\sin w}{w} dw + \theta \left(\frac{2\pi}{9} + \frac{\pi^2}{27} \right),$$

где $\gamma_0 = 2\pi\Lambda y_0$, $\gamma = 2\pi\Lambda$. Если $\gamma_0 \geq 1$, то из леммы 15 следует, что последний интеграл по абсолютной величине не превосходит $2\gamma_0^{-1}$. Если $\gamma_0 < 1$, то, представляя этот интеграл в виде

$$\int_{\gamma_0}^{\gamma} \frac{\sin w}{w} dw = \left(\int_{\gamma_0}^1 + \int_1^{\gamma} \right) \frac{\sin w}{w} dw,$$

убеждаемся в том, что его абсолютная величина не превосходит 3. Таким образом,

$$|T_2| \leq 3 + \frac{2\pi}{9} + \frac{\pi^2}{9}, \quad |Z_2| \leq \frac{1}{2\pi} + 3 + \frac{2\pi}{9} + \frac{\pi^2}{9} < 4.23, \quad |Z| < 4.23 + 0.88 = 5.11.$$

Случай 2: $|\Lambda| \leq 1$. Из определения Λ следует, что $|\varepsilon| \leq \tau^{-1/3} \leq N^{-1/3}$. Оценивая Z_1 тривиально, получим

$$|Z_1| \leq \int_{y_0}^{y_1} \frac{dy}{y} = \ln \frac{y_1}{y_0} < 0.5 \ln N, \quad \frac{\pi\varepsilon^2}{2}|Z_1| < N^{-2/3} \ln N.$$

Пусть, далее, $\varkappa = 0.6$. Верхнюю границу для Z_2 в случае $\Lambda \geq 0$ получим, разбив промежуток интегрирования на два и применив ко второму интегралу лемму 15:

$$|Z_2| \leq \left| \int_{y_0}^{\varkappa} \sin \left(2\pi \left(\Lambda y + \frac{y^3}{3} \right) \right) \frac{dy}{y} \right| + \left| \int_{\varkappa}^{y_1} \sin \left(2\pi \left(\Lambda y + \frac{y^3}{3} \right) \right) \frac{dy}{y} \right|$$

$$\leq \int_0^{\varkappa} 2\pi \left(\Lambda y + \frac{y^3}{3} \right) \frac{dy}{y} + \frac{\pi^{-1}}{\varkappa(\varkappa^2 + \Lambda)} \leq 2\pi \left(\varkappa + \frac{\varkappa^3}{9} \right) + \frac{\pi^{-1}}{\varkappa^3} < 5.4 - 5 \cdot 10^{-4}.$$

Пусть, наконец, $\Lambda < 0$. Полагая $\varkappa_0 = 0.5$, $\varkappa = 0.5e$, будем иметь

$$\begin{aligned} |Z_2| &= \left| \left(\int_{y_0}^{\varkappa_0} + \int_{\varkappa_0}^{\varkappa} + \int_{\varkappa}^{y_1} \right) \sin \left(2\pi \left(\Lambda y + \frac{y^3}{3} \right) \right) \frac{dy}{y} \right| \\ &\leq 2\pi \int_0^{\varkappa_0} \left| \frac{y^2}{3} - |\Lambda| \right| dy + \int_{\varkappa_0}^{\varkappa} \frac{dy}{y} + \frac{\pi^{-1}}{\varkappa(\varkappa^2 - |\Lambda|)} \\ &\leq 2\pi \left(\varkappa_0 + \frac{\varkappa_0^3}{9} \right) + \ln \frac{\varkappa}{\varkappa_0} + \frac{\pi^{-1}}{\varkappa(\varkappa^2 - 1)} < 4.44. \end{aligned}$$

Складывая полученные оценки для Z_1 и Z_2 , при достаточно больших N приходим к неравенству

$$|Z| < 5.4 - 5 \cdot 10^{-4} + N^{-2/3} \ln N < 5.4.$$

Случай 3: $\Lambda < -1$. Полагая $y = w\sqrt{|\Lambda|}$, $a = 2\pi|\Lambda|^{3/2}$, находим

$$\begin{aligned} Z_1 &= \int_{w_0}^{w_1} \cos \left(a \left(\frac{w^3}{3} - w \right) \right) \frac{dw}{w}, & Z_2 &= \int_{w_0}^{w_1} \sin \left(a \left(\frac{w^3}{3} - w \right) \right) \frac{dw}{w}, \\ w_\nu &= \frac{y_\nu}{\sqrt{|\Lambda|}}, & \nu &= 0, 1. \end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что таким образом определенные величины w_0 и w_1 будут удовлетворять следующим неравенствам:

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{N} &< \frac{w_1}{w_0} = \frac{y_1}{y_0} < 2\sqrt[4]{N}, \\ w_1 &= \frac{R_1 + \vartheta}{\sqrt{|\varepsilon|}\sqrt{\tau}} > \frac{0.7\sqrt{N} + \vartheta}{\sqrt{|\varepsilon|}\sqrt{N + \vartheta}} > \frac{0.7\sqrt{N} + \vartheta}{\sqrt{|\varepsilon|}\sqrt{N + \vartheta}} = \frac{0.7}{\sqrt{|\varepsilon|}} \geq 0.7\sqrt{2} > 0.98. \end{aligned}$$

Положим $\xi = 1.44$, $\eta = 0.57$. Согласно лемме 15 в случае, когда $w_0 > \xi$, имеем оценки

$$\begin{aligned} |Z_1|, |Z_2| &< \frac{2a^{-1}}{w_0(w_0^2 - 1)} < \frac{\pi^{-1}}{\xi(\xi^2 - 1)}, \\ |Z| &\leq \frac{\pi}{8} |Z_1| + |Z_2| = \left(\frac{\pi}{8} + 1 \right) \frac{\pi^{-1}}{\xi(\xi^2 - 1)} < 1. \end{aligned}$$

Далее, при $\eta < w_0 \leq \xi$ находим

$$\begin{aligned} |Z_1|, |Z_2| &\leq \left| \int_{w_0}^{\xi} f \left(a \left(\frac{w^3}{3} - w \right) \right) \frac{dw}{w} \right| + \left| \int_{\xi}^{w_1} f \left(a \left(\frac{w^3}{3} - w \right) \right) \frac{dw}{w} \right| \\ &\leq \int_{\eta}^{\xi} \frac{dw}{w} + \frac{2a^{-1}}{\xi(\xi^2 - 1)} = \ln \frac{\xi}{\eta} + \frac{\pi^{-1}}{\xi(\xi^2 - 1)}, \\ |Z| &\leq \left(\frac{\pi}{8} + 1 \right) \left(\ln \frac{\xi}{\eta} + \frac{\pi^{-1}}{\xi(\xi^2 - 1)} \right) < 1.6 \end{aligned}$$

(здесь и далее через $f(x)$ обозначены функции $\cos x$ либо $\sin x$ соответственно). Пусть, наконец, $w_0 \leq \eta$, и пусть $N^{-1/4} \leq |\varepsilon| \leq 0.5$. Тогда

$$\begin{aligned} |Z_1|, |Z_2| &\leq \left| \int_{w_0}^{\eta} f\left(a\left(\frac{w^3}{3} - w\right)\right) dw \right| + \left| \int_{\eta}^{w_1} f\left(a\left(\frac{w^3}{3} - w\right)\right) dw \right| \\ &\leq \frac{2a^{-1}}{w_0(1-w_0^2)} + \ln \frac{\xi}{\eta} + \frac{\pi^{-1}}{\xi(\xi^2-1)}. \end{aligned}$$

Поскольку $w_0 \leq \eta$, $aw_0 = 2\pi|\varepsilon|(R_0 + \vartheta) > 2\pi(0.4 - N^{-1/4}) > 2.5$, то слагаемое $\frac{2a^{-1}}{w_0(1-w_0^2)}$ неравенства не превосходит $0.8(1 - \eta^2)^{-1}$. Таким образом,

$$|Z| \leq \left(\frac{\pi}{8} + 1\right) \left(\frac{0.8}{1 - \eta^2} + \ln \frac{\xi}{\eta} + \frac{\pi^{-1}}{\xi(\xi^2-1)}\right) < 3.3.$$

В случае малых $|\varepsilon|$, $0 \leq |\varepsilon| \leq N^{-1/4}$, каждую из величин Z_1 и Z_2 оценим отдельно. Прежде всего, имеем

$$|Z_1| \leq \int_{w_0}^{w_1} \frac{dw}{w} = \ln \frac{w_1}{w_0} < 0.5 \ln N, \quad \frac{\pi \varepsilon^2}{2} |Z_1| < \frac{\pi \ln N}{4 \sqrt{N}}.$$

Положим $w_2 = \pi a^{-1} = (2|\Lambda|^{3/2})^{-1}$. Из неравенств

$$\frac{w_0}{w_2} = \pi^{-1}aw_0 = 2|\varepsilon|(R + \vartheta) < \frac{2}{\sqrt[4]{N}} \left(0.4\sqrt[4]{N} + 1\right) < 1, \quad w_2 = \frac{1}{2|\Lambda|^{3/2}} < \frac{1}{2} < \eta$$

следует, что w_2 лежит между w_0 и η . Пользуясь леммой 15, находим

$$\begin{aligned} |Z_2| &\leq \left| \left(\int_{w_0}^{w_2} + \int_{w_2}^{\eta} + \int_{\eta}^{w_1} \right) \sin\left(a\left(\frac{w^3}{3} - w\right)\right) \frac{dw}{w} \right| \\ &\leq \int_{w_0}^{w_2} a\left(w - \frac{w^3}{3}\right) \frac{dw}{w} + \frac{2a^{-1}}{w_2(1-w_2^2)} + \ln \frac{\xi}{\eta} + \frac{\pi^{-1}}{\xi(\xi^2-1)} \\ &< aw_2 + \frac{8}{3} \frac{1}{aw_2} + \ln \frac{\xi}{\eta} + \frac{\pi^{-1}}{\xi(\xi^2-1)} = \pi + \frac{8}{3\pi} + \ln \frac{\xi}{\eta} + \frac{\pi^{-1}}{\xi(\xi^2-1)}, \\ |Z| &< \frac{\pi \ln N}{16 \sqrt{N}} + \pi + \frac{8}{3\pi} + \ln \frac{\xi}{\eta} + \frac{\pi^{-1}}{\xi(\xi^2-1)} < 5.2. \end{aligned}$$

Итак, при любом значении параметра Λ справедлива оценка $|Z| < 5.4$. Следовательно,

$$|Y| \leq \sqrt{N}(|Z| + 0.3) < 5.7\sqrt{N}.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 17. Для достаточно большого N и любого ϑ с условием $0 \leq \vartheta \leq 1$ имеет место равенство

$$\operatorname{Re}(e^{-\pi i/8} V_4) = (-1)^N \sqrt{N} \sum_{0 \leq k \leq K} \int_{(2k+\vartheta)^2}^{(2k+1+\vartheta)^2} \cos\left(2\pi\left(u - \frac{1}{16}\right)\right) \frac{du}{\sqrt{u}} + \theta_1 \sqrt[4]{N},$$

где $K = 0.2\sqrt[4]{N} - 0.5 - \theta_2$ – целое число, $|\theta_1|, |\theta_2| \leq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения V_4 следует, что

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(e^{-\pi i/8} V_4) &= \operatorname{Re} \left((-1)^N \sqrt{N} \sum_{0 \leq r \leq R} (-1)^r \int_{\lambda(N-r)}^{+\infty} \exp \left\{ 2\pi i \left(u - \frac{1}{16} \right) \right\} \frac{du}{\sqrt{u}} \right) \\ &= (-1)^N \sqrt{N} \sum_{0 \leq r \leq R} (-1)^r \int_{\lambda(N-r)}^{+\infty} \cos \left(2\pi \left(u - \frac{1}{16} \right) \right) \frac{du}{\sqrt{u}}. \end{aligned}$$

Пользуясь установленным выше равенством $\lambda(N-r) = h^2 + \delta(h)$, $h = r + \vartheta$, заключаем, что

$$\left| \int_{h^2}^{h^2+\delta(h)} \cos \left(2\pi \left(u - \frac{1}{16} \right) \right) \frac{du}{\sqrt{u}} \right| \leq \frac{\delta(h)}{h} \leq \frac{h^2}{2N}.$$

Заменяя в каждом из интегралов в сумме по r нижний предел интегрирования величиной $h^2 = (r + \vartheta)^2$, получим

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(e^{-\pi i/8} V_4) &= \\ &= (-1)^N \sqrt{N} \sum_{0 \leq r \leq R} (-1)^r \left(\int_{(r+\vartheta)^2}^{+\infty} \cos \left(2\pi \left(u - \frac{1}{16} \right) \right) \frac{du}{\sqrt{u}} + \frac{\theta_1}{2} \frac{(r+\vartheta)^2}{N} \right). \end{aligned}$$

Вклад от второго слагаемого в скобках не превосходит по модулю

$$\sqrt{N} \sum_{0 \leq r \leq R} \frac{(r+1)^2}{2N} \leq \frac{1}{2\sqrt{N}} \int_0^{R+1} (u+1)^2 du < \frac{1}{6} \frac{N^{3/4}}{\sqrt{N}} = \frac{1}{6} \sqrt[4]{N}.$$

Пусть, далее, K – наибольшее целое число с условием $2K+1 \leq R$. Нетрудно заметить, что $\frac{R-1}{2} - 1 < K \leq \frac{R-1}{2}$, т. е. $K = 0.2\sqrt[4]{N} - 0.5 - \theta_2$, где $|\theta_2| \leq 1$. Возникающее при четном R последнее слагаемое, отвечающее $r = 2K+2 = R$, оценим тривиально. Интегрируя его по частям, будем иметь

$$\begin{aligned} \left| \int_{(R+\vartheta)^2}^{+\infty} \cos \left(2\pi \left(u - \frac{1}{16} \right) \right) \frac{du}{\sqrt{u}} \right| &\leq \frac{1}{2\pi} \left| \frac{\sin \left(2\pi \left((R+\vartheta)^2 - \frac{1}{16} \right) \right)}{R+\vartheta} \right| \\ &+ \frac{1}{2\pi} \left| \int_{(R+\vartheta)^2}^{+\infty} \sin \left(2\pi \left(u - \frac{1}{16} \right) \right) d \left(\frac{1}{\sqrt{u}} \right) \right| \leq \frac{(R+\vartheta)^{-1}}{\pi} < \frac{0.8}{\sqrt[4]{N}}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(e^{-\pi i/8} V_4) &= (-1)^N \sqrt{N} \sum_{0 \leq k \leq K} \left(\int_{(2k+\vartheta)^2}^{+\infty} - \int_{(2k+1+\vartheta)^2}^{+\infty} \right) \cos \left(2\pi \left(u - \frac{1}{16} \right) \right) \frac{du}{\sqrt{u}} \\ &+ \theta_1 \left(\frac{1}{6} + \frac{4}{5} \right) \sqrt[4]{N} = (-1)^N \sqrt{N} \sum_{0 \leq k \leq K} \int_{(2k+\vartheta)^2}^{(2k+1+\vartheta)^2} \cos \left(2\pi \left(u - \frac{1}{16} \right) \right) \frac{du}{\sqrt{u}} \\ &+ \theta_1 \sqrt[4]{N}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 18. Пусть $0 < a < b$, $q > 0$, $q \rightarrow +\infty$, и пусть функция $\varphi(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на промежутке $[0, b]$. Тогда справедливы соотношения

$$\int_a^b \varphi(x) \sin(qx) dx = O(q^{-1}), \quad \int_a^b \varphi(x) \cos(qx) dx = O(q^{-1}),$$

$$\int_a^b \varphi(x) \frac{\sin(qx)}{x} dx = \frac{\pi}{2} \varphi(0) + O(q^{-1}),$$

где постоянные в знаках O зависят от φ , a , b .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия леммы следует, что функция φ и ее производные φ' , φ'' на отрезке $[0, b]$ ограничены по абсолютной величине, т. е. существует постоянная C такая, что неравенства $|\varphi^{(\nu)}(x)| \leq C$ выполнены при каждом $\nu = 0, 1, 2$ для любого x , $0 \leq x \leq b$. Тогда из тождества

$$\int_a^b \varphi(x) \sin(qx) dx = \frac{1}{q} (\varphi(a) \cos(qa) - \varphi(b) \cos(qb)) + \frac{1}{q} \int_a^b \varphi'(x) \cos(qx) dx$$

нетрудно заключить, что первый интеграл из условия леммы по модулю не превосходит

$$q^{-1} \left(2C + \int_a^b C dx \right) = q^{-1} (b - a + 2)C.$$

Второе соотношение доказывается аналогично.

Положим теперь $\psi(x) = x^{-1}(\varphi(x) - \varphi(0))$, если $x > 0$, $\psi(0) = \varphi'(0)$, и запишем третий интеграл в виде

$$\begin{aligned} \int_0^b \varphi(x) \frac{\sin(qx)}{x} dx &= \varphi(0) \int_0^b \frac{\sin(qx)}{x} dx + \int_0^b \psi(x) \sin(qx) dx \\ &= \varphi(0) \int_0^{bq} \frac{\sin x}{x} dx + \int_0^b \psi(x) \sin(qx) dx. \end{aligned}$$

Покажем, что последний интеграл есть $O(q^{-1})$. В силу доказанного выше нам необходимо проверить, что функция $\psi(x)$ и ее производная $\psi'(x)$ ограничены на отрезке $[0, b]$. Согласно теореме Лагранжа о конечных приращениях, при любом x и некоторых ξ и η , зависящих от x и таких, что $0 \leq \xi, \eta \leq x$, имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{1}{x} (\varphi(x) - \varphi(0)) = \frac{1}{x} x \varphi'(\xi) = \varphi'(\xi), \\ \psi'(x) &= \frac{\varphi'(x)}{x} - \frac{1}{x^2} (\varphi(x) - \varphi(0)) = \frac{1}{x} (\varphi'(x) - \varphi'(\xi)) = \frac{x - \xi}{x} \varphi''(\eta), \end{aligned}$$

следствием которых будут неравенства $|\psi(x)| \leq C$, $|\psi'(x)| \leq \frac{x - \xi}{x} C \leq C$. Таким образом,

$$\int_0^b \psi(x) \sin(qx) dx = O(q^{-1}).$$

Для завершения доказательства леммы остается заметить, что

$$\int_0^{bq} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx - \int_{bq}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} + O(q^{-1}).$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 19. Пусть q принимает значения целых чисел, кратных четырем, ϑ – произвольное фиксированное число с условием $0 \leq \vartheta \leq 1$. Тогда при $q \rightarrow +\infty$ справедливо равенство

$$k_q(\vartheta) = \int_0^\vartheta \frac{\sin(2\pi(x^2 - x - \frac{1}{16}))}{\cos(2\pi x)} \sin(2\pi qx) dx = k(\vartheta) + O(q^{-1}),$$

где

$$k(\vartheta) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq \vartheta < \frac{1}{4}, \quad \frac{3}{4} < \vartheta \leq 1, \\ \frac{1}{4}, & \text{если } \vartheta = \frac{1}{4} \quad \text{или} \quad \vartheta = \frac{3}{4}, \\ \frac{1}{2}, & \text{если } \frac{1}{4} < \vartheta < \frac{3}{4}, \end{cases}$$

а постоянная в знаке O зависит от ϑ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая $x = 1 - y$ в интеграле $k_q(1 - \vartheta)$, приходим к следующему равенству:

$$k_q(1 - \vartheta) = - \int_\vartheta^1 \frac{\sin(2\pi(y^2 - y - \frac{1}{16}))}{\cos(2\pi y)} \sin(2\pi qy) dy = k_q(\vartheta) - k_q(1).$$

Взяв в нем последовательно $\vartheta = 0$ и $\vartheta = 1$, мы заключаем, что $k_q(1) = 0$. Таким образом, $k_q(1 - \vartheta) = k_q(\vartheta)$, и нам достаточно рассмотреть лишь значения ϑ из промежутка $0 < \vartheta \leq 0.5$ (в случае $\vartheta = 0$ имеем, очевидно, $k_q(\vartheta) = 0$).

Случай 1: $0 < \vartheta < 1/4$. Положив в интеграле из условия леммы $x = 1/4 - y$, находим

$$\begin{aligned} \sin\left(2\pi\left(x^2 - x - \frac{1}{16}\right)\right) &= \sin\left(2\pi\left(y^2 + \frac{y}{2} - \frac{1}{4}\right)\right), & \sin(2\pi qx) &= -\sin(2\pi qy), \\ k_q(\vartheta) &= - \int_{0.25-\vartheta}^{0.25} \frac{\sin(2\pi(y^2 + \frac{y}{2} - \frac{1}{4}))}{\sin(2\pi y)} \sin(2\pi qy) dy. \end{aligned}$$

Так как $0.25 - \vartheta > 0$, то в силу леммы 18 при $q \rightarrow +\infty$ получаем $k_q(\vartheta) = O(q^{-1})$.

Случай 2: $\vartheta = 1/4$. Заменой переменной $x = 1/4 - y$ приводим интеграл $k_q(\vartheta)$ к виду

$$- \int_0^{0.25} \varphi(y) \frac{\sin(2\pi qy)}{y} dy, \quad \varphi(y) = \frac{y}{\sin(2\pi y)} \sin\left(2\pi\left(y^2 + \frac{y}{2} - \frac{1}{4}\right)\right).$$

Пользуясь леммой 18, при $q \rightarrow +\infty$ находим

$$k_q(\vartheta) = -\frac{\pi}{2}\varphi(0) + O(q^{-1}) = \frac{1}{4} + O(q^{-1}).$$

Случай 3: $1/4 < \vartheta \leq 1/2$. Разобьем промежуток интегрирования на две части: $0 \leq x \leq 0.25$ и $0.25 \leq x \leq \vartheta$. Согласно доказанному выше интеграл по первому промежутку при $q \rightarrow +\infty$ равен $1/4 + O(q^{-1})$. Полагая во втором интеграле $x = 1/4 + y$, запишем его в виде

$$\int_{0.25}^\vartheta \frac{\sin(2\pi(x^2 - x - \frac{1}{16}))}{\cos(2\pi x)} \sin(2\pi qx) dx = - \int_0^{\vartheta-0.25} \varphi(y) \frac{\sin(2\pi qy)}{y} dy,$$

где

$$\varphi(y) = \frac{y}{\sin(2\pi y)} \sin\left(2\pi\left(y^2 - \frac{y}{2} - \frac{1}{16}\right)\right).$$

Поскольку $\vartheta - 0.25 < 0.25$, то функция $\varphi(y)$ не имеет особенностей на отрезке интегрирования. По лемме 18 последний интеграл имеет вид

$$-\frac{\pi}{2}\varphi(0) + O(q^{-1}) = \frac{1}{4} + O(q^{-1}).$$

Таким образом, $k_q(\vartheta) = 1/2 + O(q^{-1})$. Лемма доказана.

ЛЕММА 20. Пусть q – достаточно большое целое число, кратное четырем. Тогда при любом ϑ с условием $0 \leq \vartheta \leq 1$ имеет место оценка $|k_q(\vartheta)| \leq 0.82$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим несколько случаев. Пусть сначала ϑ отстоит от $1/4$ и $3/4$ не менее чем на $1/8$. Если $0 \leq \vartheta \leq 1/8$, то $k_q(\vartheta)$ по абсолютной величине не превосходит интеграла

$$\int_0^{1/8} \frac{|\sin(2\pi(x^2 - x - \frac{1}{16}))|}{\cos(2\pi x)} dx = 0.0959629 \dots < 0.1.$$

Если $1/2 - 1/8 \leq \vartheta \leq 1/2$, то в силу предыдущей леммы

$$\begin{aligned} |k_q(\vartheta)| &= \left| k_q(0.5) - \int_0^{0.5} \frac{\sin(2\pi(x^2 - x - 1/16))}{\cos(2\pi x)} \sin(2\pi qx) dx \right| \\ &= \left| 0.5 + O(q^{-1}) - \int_0^{0.5-\vartheta} \frac{\sin(2\pi(y^2 - 5/16))}{\cos(2\pi y)} \sin(2\pi qy) dy \right| \\ &\leq 0.5 + \int_0^{1/8} \frac{|\sin(2\pi(y^2 - 5/16))|}{\cos(2\pi y)} dy + O(q^{-1}) \\ &= 0.5 + 0.131375 \dots + O(q^{-1}) < 0.64. \end{aligned}$$

Поскольку $k_q(1-\vartheta) = k_q(\vartheta)$, то для случаев $1/2 \leq \vartheta \leq 1/2 + 1/8$ и $1 - 1/8 \leq \vartheta \leq 1$ искомая оценка будет следовать из доказанного выше.

Пусть теперь расстояние от ϑ до точки $1/4$ не превышает $1/8$. Разбивая промежутки интегрирования на два и пользуясь леммой 19, приходим к равенству

$$k_q(\vartheta) = k_q(0.25) + \int_{1/4}^{\vartheta} \frac{\sin(2\pi(x^2 - x - \frac{1}{16}))}{\cos(2\pi x)} \sin(2\pi qx) dx = 0.25 + j_1 + O(q^{-1}),$$

в котором через j_1 обозначен интеграл по отрезку с концами $1/4$ и ϑ . Положим $x = 1/4 + y$ в j_1 ; получим

$$j_1 = \int_0^{\vartheta-0.25} \frac{\cos(2\pi(y^2 - y/2))}{\sin(2\pi y)} \sin(2\pi qy) dy.$$

Полагая $\varepsilon = |\vartheta - 0.25|$ и меняя при необходимости знак переменной интегрирования, убеждаемся, что для оценки $|k_q(\vartheta)|$ достаточно оценить сверху модуль интеграла

$$j = \int_0^{\varepsilon} \varphi(y) dy, \quad \varphi(y) = \frac{\cos(2\pi(y^2 + ay))}{\sin(2\pi y)} \sin(2\pi qy) dy,$$

в котором длина ε отрезка интегрирования не превосходит $1/8$, а величина a может принимать значения ± 0.5 .

Оценка $|j|$. Пусть сначала $0 < \varepsilon \leq \frac{3}{2q}$. Пользуясь тем, что $\sin(2\pi y) = 2\pi y + O(y^3)$, находим

$$|j| \leq \int_0^{3/(2q)} \frac{|\sin(2\pi qy)|}{\sin(2\pi y)} dy = \int_0^{3/(2q)} \left(\frac{|\sin(2\pi qy)|}{2\pi y} + O(y) \right) dy = c + O(q^{-2}),$$

$$c = \frac{1}{2\pi} \int_0^{3\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx = 0.4046248 \dots$$

Пусть теперь $\varepsilon > \frac{3}{2q}$. Определим целое число s , $s \geq 2$, из неравенств $(s - 0.5)q^{-1} < \varepsilon \leq (s + 0.5)q^{-1}$ и представим интеграл j суммой $\sum_{k=1}^s j(k)$, в которой

$$j(1) = \int_0^{3/(2q)} \varphi(y) dy, \quad j(k) = \int_{(k-0.5)/q}^{(k+0.5)/q} \varphi(y) dy, \quad k = 2, 3, \dots, s-1,$$

$$j(s) = \int_{(s-0.5)/q}^{\varepsilon} \varphi(y) dy.$$

Нетрудно заметить, что $|j(1)| \leq c + O(q^{-2})$. Далее, так как при $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ верно неравенство $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$, то последний по счету интеграл $j(s)$ по модулю не превосходит

$$\int_{(s-0.5)/q}^{(s+0.5)/q} \frac{|\sin(2\pi qy)|}{\frac{2}{\pi}2\pi y} dy \leq \frac{1}{4} \int_{(s-0.5)/q}^{(s+0.5)/q} \frac{dy}{y} = \frac{1}{4} \ln \frac{s+0.5}{s-0.5} \leq \frac{1}{4} \ln \frac{5}{3}.$$

Чтобы оценить сверху каждый из интегралов $j(k)$, $k = 2, 3, \dots, s-1$, заметим, что при $(k - 0.5)q^{-1} \leq y \leq (k + 0.5)q^{-1}$ величина $\cos(2\pi\xi_k)$, $\xi_k = (k/q)^2 + a(k/q)$, выражает функцию $\cos(2\pi(y^2 + ay))$ с точностью до слагаемого $O(q^{-1})$. Следовательно,

$$j(k) = \cos(2\pi\xi_k) \int_{(k-0.5)/q}^{(k+0.5)/q} \frac{\sin(2\pi qy)}{\sin(2\pi y)} dy + O\left(q^{-1} \int_{(k-0.5)/q}^{(k+0.5)/q} \frac{dy}{\sin(2\pi y)}\right)$$

$$= \cos(2\pi\xi_k) \int_{-1/(2q)}^{1/(2q)} \frac{\sin(2\pi qx)}{\sin(2\pi(k/q + x))} dx + O\left(q^{-1} \ln \frac{k+0.5}{k-0.5}\right).$$

Полагая $\alpha_k = \sin(2\pi \frac{k}{q})$, $\beta_k = \cos(2\pi \frac{k}{q})$, находим

$$\sin\left(2\pi\left(\frac{k}{q} + x\right)\right) = \sin\left(\frac{2\pi k}{q}\right) \cos(2\pi x) + \cos\left(\frac{2\pi k}{q}\right) \sin(2\pi x)$$

$$= \alpha_k \cos(2\pi x) + \beta_k \sin(2\pi x)$$

$$= \alpha_k(1 + O(x^2)) + \beta_k \cdot 2\pi x(1 + O(x^2))$$

$$= \alpha_k + \beta_k \cdot 2\pi x + O(\alpha_k x^2)$$

$$= (\alpha_k + \beta_k \cdot 2\pi x)(1 + O(x^2)) = (\alpha_k + \beta_k \cdot 2\pi x)(1 + O(q^{-2})).$$

Подставляя это выражение в формулу для $j(k)$, будем иметь

$$\begin{aligned} j(k) &= \cos(2\pi\xi_k) \int_{-1/(2q)}^{1/(2q)} \frac{\sin(2\pi qx)}{\alpha_k + \beta_k \cdot 2\pi x} (1 + O(q^{-2})) dx + O((qk)^{-1}) \\ &= r(k) + O\left(q^{-2} \int_{-1/(2q)}^{1/(2q)} \frac{dx}{\alpha_k q^2}\right) + O((qk)^{-1}) = r(k) + O((qk)^{-1}), \\ r(k) &= \cos(2\pi\xi_k) \int_{-1/(2q)}^{1/(2q)} \frac{\sin(2\pi qx)}{\alpha_k + \beta_k \cdot 2\pi x} dx. \end{aligned}$$

Положим в последнем интеграле $y = 2\pi qx$, $\mu = \beta_k/(q\alpha_k)$. Тогда

$$\begin{aligned} r(k) &= \frac{\cos(2\pi\xi_k)}{2\pi q} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin y}{\alpha_k + \frac{y\beta_k}{q}} dy = \frac{\cos(2\pi\xi_k)}{2\pi q\alpha_k} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin y}{1 + \mu y} dy \\ &= \frac{\cos(2\pi\xi_k)}{2\pi q\alpha_k} \left(\int_0^{\pi} \frac{\sin y}{1 + \mu y} dy + \int_{-\pi}^0 \frac{\sin y}{1 + \mu y} dy \right) \\ &= \frac{\cos(2\pi\xi_k)}{2\pi q\alpha_k} \left(\int_0^{\pi} \frac{\sin y}{1 + \mu y} dy - \int_0^{\pi} \frac{\sin y}{1 - \mu y} dy \right) \\ &= \frac{\cos(2\pi\xi_k)}{2\pi q\alpha_k} \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{1 + \mu y} - \frac{1}{1 - \mu y} \right) \sin y dy = -\frac{\mu \cos(2\pi\xi_k)}{\pi q\alpha_k} \int_0^{\pi} \frac{y \sin y}{1 - \mu^2 y^2} dy. \end{aligned}$$

Применяя к интегралу по y первую теорему о среднем и переходя к оценкам, получим

$$|r(k)| = \left| -\frac{\mu \cos(2\pi\xi_k)}{\pi q\alpha_k} \frac{y_1}{1 - \mu^2 y_1^2} \int_0^{\pi} \sin y dy \right| \leq \frac{2\pi\mu}{1 - \pi^2\mu^2} \frac{1}{\pi q\alpha_k}.$$

Поскольку

$$\alpha_k = \frac{2\pi k}{q} \left(1 + O\left(\frac{k^2}{q^2}\right) \right), \quad \beta_k = 1 + O\left(\frac{k^2}{q^2}\right),$$

то

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{q} \frac{1 + O\left(\frac{k^2}{q^2}\right)}{\frac{2\pi k}{q} \left(1 + O\left(\frac{k^2}{q^2}\right) \right)} = \frac{1}{2\pi k} \left(1 + O\left(\frac{k^2}{q^2}\right) \right), \\ |r(k)| &\leq \frac{k^{-1} \left(1 + O\left(\frac{k^2}{q^2}\right) \right)}{(1 - (2k)^{-2})(1 + O(q^{-2}))} \frac{1}{\pi q} \frac{1}{2\pi \frac{k}{q}} \left(1 + O\left(\frac{k^2}{q^2}\right) \right) \\ &= \frac{1}{2\pi k^2} \left(1 - \frac{1}{4k^2} \right)^{-1} \left(1 + O\left(\frac{k^2}{q^2}\right) \right) = \frac{1}{2\pi^2 k^2} \left(1 - \frac{1}{4k^2} \right)^{-1} + O(q^{-2}) \\ &\leq \frac{16}{15} \frac{1}{2\pi^2 k^2} + O(q^{-2}) = \frac{8}{15\pi^2 k^2} + O(q^{-2}). \end{aligned}$$

Возвращаясь к оценке интеграла j , находим

$$\begin{aligned} |j(k)| &\leq \frac{8}{15\pi^2 k^2} + O((qk)^{-1}), \\ |j| &\leq c + \frac{8}{15\pi^2} \sum_{k=2}^{s-1} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{4} \ln \frac{5}{3} + O\left(\frac{\ln q}{q}\right) \\ &\leq c + \frac{8}{15\pi^2} \left(\frac{\pi^2}{6} - 1 \right) + \frac{1}{4} \ln \frac{5}{3} + O\left(\frac{\ln q}{q}\right) = 0.567182 \dots + O\left(\frac{\ln q}{q}\right). \end{aligned}$$

Таким образом, если ϑ отстоит от точки $1/4$ не далее чем на $1/8$, то

$$|k_q(\vartheta)| \leq 0.25 + 0.567182\dots + O\left(\frac{\ln q}{q}\right) < 0.82.$$

В случае, когда $|\vartheta - 3/4| \leq 1/8$, искомое неравенство следует из соотношения $k_q(\vartheta) = k_q(1 - \vartheta)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 21. Пусть K – целое число, $K \geq 1$, и пусть

$$j_K = \int_0^1 \frac{\sin(2\pi(x^2 + 2x(2K + 1) - \frac{1}{16}))}{\sin(4\pi x)} dx.$$

Тогда при $K \rightarrow +\infty$ справедливо равенство

$$j_K = \frac{\sqrt{2}}{4} \cos \frac{\pi}{8} + O(K^{-1}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Точкой $x = 0.5$ разобьем промежуток интегрирования на две части и для $x \geq 0.5$ положим $x = 1 - y$. Тогда подынтегральная функция представится дробью

$$-\frac{\sin(2\pi(y^2 - 2y(2K + 2) - \frac{1}{16}))}{\sin(4\pi y)},$$

заменяя в которой y на x , получим

$$\begin{aligned} j_K &= \int_0^{0.5} \frac{\sin(2\pi(x^2 + 2x(2K + 1) - \frac{1}{16})) - \sin(2\pi(x^2 - 2x(2K + 2) - \frac{1}{16}))}{\sin(4\pi x)} dx \\ &= 2 \int_0^{0.5} \frac{\sin(2\pi x(4K + 3))}{\sin(4\pi x)} \cos\left(2\pi\left(x^2 - x - \frac{1}{16}\right)\right) dx. \end{aligned}$$

Представим теперь аргумент синуса суммой $2\pi qx + 2\pi x$, где $q = 4K + 2$. Тогда исходный интеграл примет вид

$$\begin{aligned} j_K &= 2 \int_0^{0.5} \frac{\sin(2\pi qx) \cos(2\pi x) + \cos(2\pi qx) \sin(2\pi x)}{2 \sin(2\pi x) \cos(2\pi x)} \cos\left(2\pi\left(x^2 - x - \frac{1}{16}\right)\right) dx \\ &= \int_0^{0.5} \frac{\cos(2\pi(x^2 - x - \frac{1}{16}))}{\sin(2\pi x)} \sin(2\pi qx) dx \\ &\quad + \int_0^{0.5} \frac{\cos(2\pi(x^2 - x - \frac{1}{16}))}{\cos(2\pi x)} \cos(2\pi qx) dx. \end{aligned}$$

На отрезке $0 \leq x \leq 0.5$ дробь $\frac{\cos(2\pi(x^2 - x - 1/16))}{\cos(2\pi x)}$ является гладкой функцией. Следовательно, по лемме 18 последний интеграл есть $O(K^{-1})$, так что

$$j_K = \left(\int_0^{0.25} + \int_{0.25}^{0.5} \right) \frac{\cos(2\pi(x^2 - x - \frac{1}{16}))}{\sin(2\pi x)} \sin(2\pi qx) dx + O(K^{-1}).$$

Сделаем во втором интеграле замену переменной $x = 0.5 - y$. Таким образом, получим

$$\begin{aligned} j_K &= \int_0^{0.25} \frac{\cos\left(2\pi\left(x^2 - x - \frac{1}{16}\right)\right)}{\sin(2\pi x)} \sin(2\pi qx) dx \\ &\quad - \int_0^{0.25} \frac{\cos\left(2\pi\left(y^2 - \frac{5}{16}\right)\right)}{\sin(2\pi y)} \sin(2\pi qy) dy + O(K^{-1}) \\ &= \int_0^{0.25} \varphi(x) \frac{\sin(2\pi qx)}{x} dx + O(K^{-1}), \end{aligned}$$

где

$$\varphi(x) = \frac{x}{\sin(2\pi x)} \left[\cos\left(2\pi\left(x^2 - x - \frac{1}{16}\right)\right) - \cos\left(2\pi\left(x^2 - \frac{5}{16}\right)\right) \right].$$

Снова воспользовавшись леммой 18, заключаем, что

$$j_K = \frac{\pi}{2} \varphi(0) + O(K^{-1}) = \frac{1}{4} \left(\cos \frac{\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{8} \right) + O(K^{-1}) = \frac{\sqrt{2}}{4} \cos \frac{\pi}{8} + O(K^{-1}).$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 22. Пусть ϑ – произвольное фиксированное число с условием $0 \leq \vartheta \leq 1$, K – целое. Тогда при $K \rightarrow +\infty$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} &\sum_{0 \leq k \leq K} \int_{(2k+\vartheta)^2}^{(2k+1+\vartheta)^2} \cos\left(2\pi\left(u - \frac{1}{16}\right)\right) \frac{du}{\sqrt{u}} \\ &= \kappa(0.5) - \kappa(\vartheta) + \frac{\sqrt{2}}{4} \cos \frac{\pi}{8} - k(\vartheta) + O(K^{-1}), \end{aligned}$$

где

$$\kappa(\vartheta) = \int_0^\vartheta \frac{\cos\left(2\pi\left(x^2 - x - \frac{1}{16}\right)\right)}{\cos(2\pi x)} dx,$$

а величина $k(\vartheta)$ определена в условии леммы 19.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим сумму по $0 \leq k \leq K$ из условия через $S_K(\vartheta)$. Полагая $u = (2k + \vartheta + x)^2$, $0 \leq x \leq 1$, в интеграле с номером k , преобразуем его следующим образом:

$$\begin{aligned} &\int_{(2k+\vartheta)^2}^{(2k+1+\vartheta)^2} \cos\left(2\pi\left(u - \frac{1}{16}\right)\right) \frac{du}{\sqrt{u}} = 2 \int_0^1 \cos\left(2\pi\left((2k + \vartheta + x)^2 - \frac{1}{16}\right)\right) dx \\ &= 2 \int_\vartheta^{1+\vartheta} \cos\left(2\pi\left((2k + x)^2 - \frac{1}{16}\right)\right) dx \\ &= 2 \int_\vartheta^{1+\vartheta} \cos\left(2\pi\left(4kx + x^2 - \frac{1}{16}\right)\right) dx \\ &= 2 \operatorname{Re} \int_\vartheta^{1+\vartheta} \exp\left\{2\pi i \left(x^2 - \frac{1}{16}\right)\right\} e^{8\pi i k x} dx. \end{aligned}$$

Подставляя последнее выражение в формулу для $S_K(\vartheta)$ и суммируя по k , находим

$$\begin{aligned} S_K(\vartheta) &= 2 \operatorname{Re} \int_{\vartheta}^{1+\vartheta} \exp \left\{ 2\pi i \left(x^2 - \frac{1}{16} \right) \right\} \left(\sum_{0 \leq k \leq K} e^{8\pi i k x} \right) dx \\ &= 2 \operatorname{Re} \int_{\vartheta}^{1+\vartheta} \exp \left\{ 2\pi i \left(x^2 + 2Kx - \frac{1}{16} \right) \right\} \frac{\sin(4\pi x(K+1))}{\sin(4\pi x)} dx \\ &= 2 \int_{\vartheta}^{1+\vartheta} \cos \left(2\pi \left(x^2 + 2Kx - \frac{1}{16} \right) \right) \sin(2\pi(2Kx+2x)) \frac{dx}{\sin(4\pi x)}. \end{aligned}$$

Заменим подынтегральное произведение суммой двух синусов; получим

$$\begin{aligned} S_K(\vartheta) &= \int_{\vartheta}^{1+\vartheta} \frac{\sin(2\pi(x^2 + 2x(2K+1) - \frac{1}{16}))}{\sin(4\pi x)} dx - a(\vartheta), \\ a(\vartheta) &= \int_{\vartheta}^{1+\vartheta} \frac{\sin(2\pi(x^2 - 2x - \frac{1}{16}))}{\sin(4\pi x)} dx. \end{aligned}$$

Покажем теперь, что $a(\vartheta) = \varkappa(\vartheta) - \varkappa(0.5)$. Для этого, пользуясь равенством

$$\begin{aligned} \sin \left(2\pi \left(x^2 - 2x - \frac{1}{16} \right) \right) &= \sin \left(2\pi \left(x^2 - x - \frac{1}{16} \right) \right) \cos(2\pi x) \\ &\quad - \cos \left(2\pi \left(x^2 - x - \frac{1}{16} \right) \right) \sin(2\pi x), \end{aligned}$$

представим интеграл $a(\vartheta)$ разностью $0.5(a_1(\vartheta) - a_2(\vartheta))$, где

$$\begin{aligned} a_1(\vartheta) &= \int_{\vartheta}^{1+\vartheta} \frac{\sin(2\pi(x^2 - x - \frac{1}{16}))}{\sin(2\pi x)} dx, \\ a_2(\vartheta) &= \int_{\vartheta}^{1+\vartheta} \frac{\cos(2\pi(x^2 - x - \frac{1}{16}))}{\cos(2\pi x)} dx. \end{aligned}$$

Разобьем отрезок интегрирования в $a_1(\vartheta)$ на два: $\vartheta \leq x \leq 1$ и $1 \leq x \leq 1+\vartheta$. Полагая $y = 1 - x$ для $x > 1$, находим

$$\begin{aligned} a_1(\vartheta) &= \int_{\vartheta}^1 \frac{\sin(2\pi(x^2 - x - \frac{1}{16}))}{\sin(2\pi x)} dx + \int_0^{-\vartheta} \frac{\sin(2\pi(y^2 - y - \frac{1}{16}))}{\sin(2\pi y)} dy \\ &= \int_{\vartheta}^1 \frac{\sin(2\pi(x^2 - x - \frac{1}{16}))}{\sin(2\pi x)} dx + \int_0^{\vartheta} \frac{\sin(2\pi(x^2 + x - \frac{1}{16}))}{\sin(2\pi x)} dx \\ &= \int_0^1 \frac{\sin(2\pi(x^2 - x - \frac{1}{16}))}{\sin(2\pi x)} dx \\ &\quad + \int_0^{\vartheta} \frac{\sin(2\pi(x^2 + x - \frac{1}{16})) - \sin(2\pi(x^2 - x - \frac{1}{16}))}{\sin(2\pi x)} dx. \end{aligned}$$

Интеграл по отрезку $0 \leq x \leq 1$ равен нулю, что следует из равенства

$$\frac{\sin(2\pi(x^2 - x - \frac{1}{16}))}{\sin(2\pi x)} = - \frac{\sin(2\pi((1-x)^2 - (1-x) - \frac{1}{16}))}{\sin(2\pi(1-x))}.$$

Разность синусов во втором интеграле равна $2 \sin(2\pi x) \cos(2\pi(x^2 - 1/16))$. Таким образом,

$$a_1(\vartheta) = 2 \int_0^\vartheta \cos\left(2\pi\left(x^2 - \frac{1}{16}\right)\right) dx.$$

Преобразуем $a_2(\vartheta)$. Имеем

$$\begin{aligned} a_2(\vartheta) &= \int_0^1 \frac{\cos(2\pi(x^2 - x - \frac{1}{16}))}{\cos(2\pi x)} dx - \int_0^\vartheta \frac{\cos(2\pi(x^2 - x - \frac{1}{16}))}{\cos(2\pi x)} dx \\ &\quad + \int_1^{1+\vartheta} \frac{\cos(2\pi(x^2 - x - \frac{1}{16}))}{\cos(2\pi x)} dx \\ &= \kappa(1) - \int_0^\vartheta \frac{\cos(2\pi(x^2 - x - \frac{1}{16}))}{\cos(2\pi x)} dx + \int_0^\vartheta \frac{\cos(2\pi(x^2 + x - \frac{1}{16}))}{\cos(2\pi x)} dx \\ &= \kappa(1) + \int_0^\vartheta \frac{\cos(2\pi(x^2 + x - \frac{1}{16})) - \cos(2\pi(x^2 - x - \frac{1}{16}))}{\cos(2\pi x)} dx \\ &= \kappa(1) - 2 \int_0^\vartheta \frac{\sin(2\pi x) \sin(2\pi(x^2 - \frac{1}{16}))}{\cos(2\pi x)} dx. \end{aligned}$$

Возвращаясь к интегралу $a(\vartheta)$, находим

$$\begin{aligned} a(\vartheta) &= 0.5(a_1(\vartheta) - a_2(\vartheta)) = \int_0^\vartheta \cos\left(2\pi\left(x^2 - \frac{1}{16}\right)\right) dx \\ &\quad - 0.5\kappa(1) + \int_0^\vartheta \frac{\sin(2\pi x) \sin(2\pi(x^2 - \frac{1}{16}))}{\cos(2\pi x)} dx \\ &= -0.5\kappa(1) + \int_0^\vartheta \frac{\cos(2\pi x) \cos(2\pi(x^2 - \frac{1}{16})) + \sin(2\pi x) \sin(2\pi(x^2 - \frac{1}{16}))}{\cos(2\pi x)} dx \\ &= -0.5\kappa(1) + \int_0^\vartheta \frac{\cos(2\pi(x^2 - x - \frac{1}{16}))}{\cos(2\pi x)} dx = \kappa(\vartheta) - 0.5\kappa(1). \end{aligned}$$

Поскольку $\kappa(1) = 2\kappa(0.5)$, то окончательно получим $a(\vartheta) = \kappa(\vartheta) - \kappa(0.5)$. Таким образом,

$$S_K(\vartheta) = \kappa(0.5) - \kappa(\vartheta) + b_K(\vartheta),$$

$$b_K(\vartheta) = \int_\vartheta^{1+\vartheta} \frac{\sin(2\pi(x^2 + 2x(2K+1) - \frac{1}{16}))}{\sin(4\pi x)} dx.$$

Заметим, что последнее выражение для $S_K(\vartheta)$ справедливо при любом (не обязательно фиксированном) параметре ϑ , $0 \leq \vartheta \leq 1$.

Преобразуем величину $b_K(\vartheta)$. Прежде всего, представим этот интеграл в виде

$$\left(\int_0^1 + \int_1^{1+\vartheta} - \int_0^\vartheta \right) \frac{\sin(2\pi(x^2 + 2x(2K+1) - \frac{1}{16}))}{\sin(4\pi x)} dx.$$

Первый интеграл не зависит от ϑ и вычислен в лемме 21. Положив во втором интеграле $x = 1 + y$ и заменив в третьем интеграле x на y , находим

$$\begin{aligned}
 b_K(\vartheta) &= \frac{\sqrt{2}}{4} \cos \frac{\pi}{8} + O(K^{-1}) \\
 &+ \int_0^\vartheta \frac{\sin(2\pi(y^2 + 4(K+1)y - \frac{1}{16})) - \sin(2\pi(y^2 + 2(2K+1)y - \frac{1}{16}))}{\sin(4\pi y)} dy \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{4} \cos \frac{\pi}{8} + O(K^{-1}) + \int_0^\vartheta \frac{2 \cos(2\pi(y^2 - y - \frac{1}{16} + 4(K+1)y)) \sin(2\pi y)}{2 \cos(2\pi y) \sin(2\pi y)} dy \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{4} \cos \frac{\pi}{8} + O(K^{-1}) + \int_0^\vartheta \frac{\cos(2\pi(y^2 - y - \frac{1}{16} + 4(K+1)y))}{\cos(2\pi y)} dy \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{4} \cos \frac{\pi}{8} + O(K^{-1}) + \int_0^\vartheta \frac{\cos(2\pi(y^2 - y - \frac{1}{16}))}{\cos(2\pi y)} \cos(8\pi(K+1)y) dy \\
 &- \int_0^\vartheta \frac{\sin(2\pi(y^2 - y - \frac{1}{16}))}{\cos(2\pi y)} \sin(8\pi(K+1)y) dy.
 \end{aligned}$$

Также отметим, что эти равенства справедливы при любом ϑ с условием $0 \leq \vartheta \leq 1$. Если ϑ – фиксированное число, то первый из интегралов согласно лемме 18 равен $O(K^{-1})$. Второй интеграл (в обозначениях леммы 19) имеет вид $k_q(\vartheta)$, где $q = 4(K+1)$, и, следовательно, равен $k(\vartheta) + O(K^{-1})$. Таким образом,

$$\begin{aligned}
 b_K(\vartheta) &= \frac{\sqrt{2}}{4} \cos \frac{\pi}{8} + O(K^{-1}) - k(\vartheta) + O(K^{-1}), \\
 S_K(\vartheta) &= \varkappa(0.5) - \varkappa(\vartheta) + \frac{\sqrt{2}}{4} \cos \frac{\pi}{8} - k(\vartheta) + O(K^{-1}).
 \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Значение суммы $S_K(\vartheta)$ при $K \rightarrow +\infty$ было независимо найдено М. Е. Чангой.

ЛЕММА 23. Пусть M – достаточно большое целое число, $M > 0$, и пусть ϑ – произвольное число с условием $0 \leq \vartheta \leq 1$. Тогда в обозначениях леммы 22 имеет место следующее равенство:

$$\sum_{0 \leq k \leq K} \int_{(2k+\vartheta)^2}^{(2k+1+\vartheta)^2} \cos\left(2\pi\left(u - \frac{1}{16}\right)\right) \frac{du}{\sqrt{u}} = \varkappa(0.5) - \varkappa(\vartheta) + \frac{\sqrt{2}}{4} \cos \frac{\pi}{8} + 1.38\theta_1,$$

где $|\theta_1| \leq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В ходе доказательства предыдущего утверждения сумма $S_K(\vartheta)$ из условия леммы при любом ϑ , $0 \leq \vartheta \leq 1$ была представлена в виде

$$S_K(\vartheta) = \varkappa(0.5) - \varkappa(\vartheta) + b_K(\vartheta),$$

где при $K \rightarrow +\infty$ интеграл $b_K(\vartheta)$ выражается суммой $\frac{\sqrt{2}}{4} \cos \frac{\pi}{8} + j_1 - j_2 + O(K^{-1})$,

$$\begin{aligned} j_1 &= \int_0^\vartheta \frac{\cos\left(2\pi\left(x^2 - x - \frac{1}{16}\right)\right)}{\cos(2\pi x)} \cos(2\pi q x) dx, \\ j_2 &= \int_0^\vartheta \frac{\sin\left(2\pi\left(x^2 - x - \frac{1}{16}\right)\right)}{\cos(2\pi x)} \sin(2\pi q x) dx, \quad q = 4(K+1). \end{aligned}$$

Оценивая j_1 , получим

$$|j_1| \leq \int_0^1 \left| \frac{\cos\left(2\pi\left(x^2 - x - \frac{1}{16}\right)\right)}{\cos(2\pi x)} \right| dx = 0.5513349 \dots < 0.552.$$

Для оценки интеграла j_2 достаточно воспользоваться леммой 20, согласно которой $|j_2| = |k_q(\vartheta)| < 0.82$. Таким образом, $|j_1 - j_2| < 0.552 + 0.82 = 1.372$ и

$$S_K(\vartheta) = \varkappa(0.5) - \varkappa(\vartheta) + \frac{\sqrt{2}}{4} \cos \frac{\pi}{8} + 1.38\theta_1, \quad |\vartheta_1| \leq 1.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 24. Для любого фиксированного ϑ с условием $0 \leq \vartheta \leq 1$ и целого N , $N \rightarrow +\infty$, имеет место равенство

$$\mathfrak{J}_1 = \mathfrak{K}(\vartheta)(-1)^N \sqrt{N} + 4\pi(\varkappa(\vartheta) - \varkappa(0.5))(-1)^N \sqrt{N} + O(N^{1/3} \ln N),$$

где величины $\mathfrak{K}(\vartheta)$ и $\varkappa(\vartheta)$ определены в условии теоремы 1 и леммы 22 соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользовавшись утверждениями лемм 8, 9 и 20, находим

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_1 &= \pi\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{8} \right) (-1)^N \sqrt{N} - 4\pi \operatorname{Re}(e^{-\pi i/8} W(N + \vartheta)) \\ &\quad + 2\theta_1 \left(|W_1(N + \vartheta)| + \int_1^{N+\vartheta} \tau^{-1} |W_2(\tau)| d\tau \right) + O(1), \end{aligned}$$

где постоянная в знаке O – абсолютная, а тригонометрические суммы W_1 и W_2 удовлетворяют следующим неравенствам: $W_1(\tau), W_2(\tau) \ll \tau^{1/3} \ln \tau$. Следовательно, вклад этих сумм в интеграл $\mathfrak{J}_1$ не превосходит по порядку

$$N^{1/3} \ln N + \int_1^{N+\vartheta} \tau^{-1} \tau^{1/3} \ln \tau d\tau \ll N^{1/3} \ln N.$$

Пусть, далее, $\varepsilon_1 = \|2\vartheta + 0.5\|$. Положим $c = 0.7$ в случае, если $\varepsilon_1 = 0$, и возьмем c равным $0.5\sqrt{\varepsilon_1}$ в случае, когда $\varepsilon_1 > 0$. Согласно леммам 11 и 12 тригонометрическая сумма $W(N + \vartheta)$ представляется в виде

$$W = \frac{i}{2\pi} (V_1 + V_2(c) + V_3(c)) + V_4 + O(1),$$

причем для величин V_1 и $V_2(c)$ справедливы оценки $V_1 \ll N^{1/3}$, $V_2(c) \ll N^{1/3} \ln N$. Из леммы 14 следует, что вклад суммы $V_3(c)$ есть

$$\begin{aligned} -4\pi \operatorname{Re} \left(\frac{ie^{-\pi i/8}}{2\pi} V_3(c) \right) &= -2 \operatorname{Re} (ie^{-\pi i/8} V_3(c)) \\ &= -2 \left(\frac{\pi \omega(\vartheta)}{6} (-1)^N \sqrt{N} + O(N^{1/4}) \right) = -\frac{\pi \omega(\vartheta)}{3} (-1)^N \sqrt{N} + O(N^{1/4}), \end{aligned}$$

где

$$\omega(\vartheta) = \begin{cases} -1, & \text{если } \vartheta = \frac{1}{4}, \\ 1, & \text{если } \vartheta = \frac{3}{4}, \\ 0, & \text{если } \vartheta \neq \frac{1}{4}, \frac{3}{4}. \end{cases}$$

Наконец, из лемм 17 и 22 следуют равенства

$$\begin{aligned} -4\pi \operatorname{Re}(e^{-\pi i/8} V_4) &= \\ &= -4\pi (-1)^N \sqrt{N} \sum_{0 \leq k \leq K} \int_{(2k+\vartheta)^2}^{(2k+1+\vartheta)^2} \cos \left(2\pi \left(u - \frac{1}{16} \right) \right) \frac{du}{\sqrt{u}} + O(N^{1/4}) \\ &= -4\pi (-1)^N \sqrt{N} \left(\varkappa(0.5) - \varkappa(\vartheta) + \frac{\sqrt{2}}{4} \cos \frac{\pi}{8} - k(\vartheta) \right) + O(N^{1/4}), \end{aligned}$$

где $K = 0.2\sqrt[4]{N} + O(1)$ – целое число,

$$\begin{aligned} \varkappa(\vartheta) &= \int_0^\vartheta \frac{\cos(2\pi(x^2 - x - \frac{1}{16}))}{\cos(2\pi x)} dx, \\ k(\vartheta) &= \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq \vartheta < \frac{1}{4}, \quad \frac{3}{4} < \vartheta \leq 1, \\ \frac{1}{4}, & \text{если } \vartheta = \frac{1}{4} \quad \text{или} \quad \vartheta = \frac{3}{4}, \\ \frac{1}{2}, & \text{если } \frac{1}{4} < \vartheta < \frac{3}{4}. \end{cases} \end{aligned}$$

Сложив полученные выражения, будем иметь

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_1 &= 4\pi (-1)^N \sqrt{N} \left(\frac{\sqrt{2}}{4} \cos \frac{\pi}{8} - \frac{\omega(\vartheta)}{12} - \varkappa(0.5) + \varkappa(\vartheta) - \frac{\sqrt{2}}{4} \cos \frac{\pi}{8} + k(\vartheta) \right) \\ &\quad + O(N^{1/3} \ln N) \\ &= 4\pi (-1)^N \sqrt{N} \left(k(\vartheta) - \frac{\omega(\vartheta)}{12} + \varkappa(\vartheta) - \varkappa(0.5) \right) + O(N^{1/3} \ln N) \\ &= \mathfrak{K}(\vartheta) (-1)^N \sqrt{N} + 4\pi (\varkappa(\vartheta) - \varkappa(0.5)) (-1)^N \sqrt{N} + O(N^{1/3} \ln N), \\ &\quad \mathfrak{K}(\vartheta) = 4\pi \left(k(\vartheta) - \frac{\omega(\vartheta)}{12} \right). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 25. Для целого N , $N \rightarrow +\infty$, и произвольного ϑ с условием $0 \leq \vartheta \leq 1$ справедливо равенство

$$\mathfrak{I}_1 = 28.75\theta \sqrt{N} + 4\pi (\varkappa(\vartheta) - \varkappa(0.5)) (-1)^N \sqrt{N}, \quad |\theta| \leq 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь введенными ранее обозначениями и леммами 8–12, находим

$$\mathfrak{I}_1 = \pi\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)(-1)^N\sqrt{N} - 4\pi\operatorname{Re}(e^{-\pi i/8}W(N+\vartheta)) + O(N^{1/3}\ln N),$$

$$W(N+\vartheta) = \frac{i}{2\pi}(V_1 + V_2(c) + V_3(c)) + V_4 = \frac{i}{2\pi}V_3(c) + V_4 + O(N^{1/3}\ln N),$$

где $c = 0.7$, а все постоянные в знаках O – абсолютные. Далее, при таком выборе c из леммы 16 следует оценка

$$|\operatorname{Re}(ie^{-\pi i/8}V_3(c))| < 5.7\sqrt{N},$$

а из лемм 17 и 23 – равенство

$$-4\pi\operatorname{Re}(e^{-\pi i/8}V_4) = -4\pi(-1)^N\sqrt{N}\left(\kappa(0.5) - \kappa(\vartheta) + \frac{\sqrt{2}}{4}\cos\frac{\pi}{8} + 1.38\theta_1\right) + O(N^{1/4}),$$

в котором $|\theta_1| \leq 1$, а постоянная в знаке O также является абсолютной. Таким образом, выражение для исходного интеграла принимает вид

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}_1 &= 4\pi(-1)^N\sqrt{N}\left(-1.38\theta_1 + \frac{5.7}{2\pi}\theta_2 + \kappa(\vartheta) - \kappa(0.5)\right) + O(N^{1/3}\ln N) \\ &= 28.75\theta\sqrt{N} + 4\pi(\kappa(\vartheta) - \kappa(0.5))(-1)^N\sqrt{N}, \quad |\theta| \leq 1.\end{aligned}$$

Лемма доказана.

§ 3. Вычисление интегралов $\mathfrak{I}_2$ и $\mathfrak{I}_3$

ЛЕММА 26. При целом N , $N \rightarrow +\infty$, и произвольном ϑ , $0 \leq \vartheta < 1$, справедливо равенство

$$\mathfrak{I}_2 = 4\pi(\kappa(0.5) - \kappa(\vartheta))(-1)^N\sqrt{N} + O(1),$$

где постоянная в знаке O – абсолютная, а величина $\kappa(\vartheta)$ определена в условии леммы 22.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим искомый интеграл суммой

$$\sum_{1 \leq n \leq N-1} J_n(1) + J_N(\vartheta),$$

в которой

$$\begin{aligned}J_n(a) &= \int_{2\pi n^2}^{2\pi(n+a)^2} (-1)^{m-1} \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{-1/4} \Phi(z) dt, \\ z &= 2\left(\sqrt{\frac{t}{2\pi}} - m\right) - 1, \quad m = \left\lceil \sqrt{\frac{t}{2\pi}} \right\rceil, \\ \Phi(z) &= \frac{\cos\left(\frac{\pi z^2}{2} + \frac{3\pi}{8}\right)}{\cos(\pi z)} = \frac{\cos\left(2\pi\left(\frac{t}{2\pi} - (2m+1)\sqrt{\frac{t}{2\pi}} - \frac{1}{16}\right)\right)}{\cos\left(2\pi\sqrt{\frac{t}{2\pi}}\right)}.\end{aligned}$$

Положим $y = \sqrt{t/(2\pi)} = n + x$ в интеграле $J_n(a)$. Тогда

$$\begin{aligned} J_n(a) &= 4\pi(-1)^{n-1} \int_n^{n+a} y^{-1/2} y \frac{\cos(2\pi(y^2 - (2n+1)y - \frac{1}{16}))}{\cos(2\pi y)} dy \\ &= 4\pi(-1)^{n-1} \int_0^a \sqrt{n+x} \frac{\cos(2\pi(n^2 + 2nx + x^2 - 2n^2 - 2nx - n - x - \frac{1}{16}))}{\cos(2\pi(n+x))} dx \\ &= 4\pi(-1)^{n-1} \int_0^a \sqrt{n+x} \frac{\cos(2\pi(x^2 - x - \frac{1}{16}))}{\cos(2\pi x)} dx. \end{aligned}$$

Пусть $n \geq 2$. Разложим радикал $\sqrt{n+x}$ в бесконечный ряд и проинтегрируем его почленно. Полагая для краткости

$$\varkappa_k(a) = \int_0^a x^k \frac{\cos(2\pi(x^2 - x - \frac{1}{16}))}{\cos(2\pi x)} dx,$$

будем иметь

$$\begin{aligned} J_n(a) &= 4\pi(-1)^{n-1} \int_0^a \left(\sqrt{n} + \sum_{k=1}^{+\infty} \binom{1/2}{k} \frac{x^k}{n^{k-0.5}} \right) \frac{\cos(2\pi(x^2 - x - \frac{1}{16}))}{\cos(2\pi x)} dx \\ &= 4\pi(-1)^{n-1} \sqrt{n} \varkappa(a) + 4\pi \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k}(2k-1)} \binom{2k}{k} \varkappa_k(a) \frac{(-1)^{n-1}}{n^{k-0.5}}. \end{aligned}$$

С помощью формулы Стирлинга нетрудно заключить, что для любого целого $k \geq 1$ имеет место неравенство $\binom{2k}{k} < 2^{2k}/\sqrt{k}$. Кроме того, каждая из величин $\varkappa_k(a)$ при $0 \leq a \leq 1$ ограничена сверху по абсолютной величине постоянной c ,

$$c = \int_0^1 \left| \frac{\cos(2\pi(x^2 - x - 1/16))}{\cos(2\pi x)} \right| dx = 0.551334 \dots$$

Возвращаясь к интегралу $\mathfrak{J}_2$ и пользуясь тем, что $J_1(1) = O(1)$, находим

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_2 &= -4\pi \varkappa(1) \sum_{2 \leq n \leq N-1} (-1)^n \sqrt{n} - 4\pi \varkappa(\vartheta) (-1)^N \sqrt{N} + \vartheta_1 R + J_1(1) \\ &= 4\pi(-1)^N \sqrt{N} (0.5\varkappa(1) - \varkappa(\vartheta)) + \vartheta_1 R + O(1), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} R &= 4\pi \left| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k}(2k-1)} \binom{2k}{k} \varkappa_k(1) \sum_{2 \leq n < N} \frac{(-1)^n}{n^{k-0.5}} \right| \\ &\quad + 4\pi \left| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k}(2k-1)} \binom{2k}{k} \frac{\varkappa_k(\vartheta)}{N^{k-0.5}} \right| \\ &\leq 4\pi c \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^{2k} k^{-0.5}}{2^{2k}(2k-1)} \left(\frac{\sqrt{2}}{2^k} + \frac{1}{\sqrt{N}} \right) < 4\pi c \left(\sqrt{2} \sum_{k=1}^{+\infty} (2^k k)^{-1} + N^{-0.5} \sum_{k=1}^{+\infty} k^{-1.5} \right) \\ &< 4\pi c (\sqrt{2} \ln 2 + N^{-0.5} \zeta(3/2)) < 6.8. \end{aligned}$$

Для завершения доказательства остается заметить, что $0.5\varkappa(1) = \varkappa(0.5)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 27. При целом N , $N \rightarrow +\infty$, и произвольном ϑ , $0 \leq \vartheta < 1$, справедливо равенство $\mathfrak{I}_3 = O(1)$, где постоянная в знаке O – абсолютная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждая так же, как и при доказательстве предыдущего утверждения, получим

$$\mathfrak{I}_3 = (12\pi^2)^{-1} \left(\sum_{1 \leq n \leq N-1} K_n(1) + K_N(\vartheta) \right),$$

$$K_n(a) = \int_{2\pi n^2}^{2\pi(n+a)^2} (-1)^m \left(\frac{t}{2\pi} \right)^{-3/4} \Phi^{(3)}(z) dt.$$

Полагая $y = \sqrt{t/(2\pi)} = n + x$, будем иметь

$$K_n(a) = \int_n^{n+a} (-1)^n y^{-3/2} 4\pi y \Phi^{(3)}(2(y-n)-1) dy = (-1)^n 4\pi \int_0^a \frac{\Phi^{(3)}(2x-1)}{\sqrt{n+x}} dx.$$

Пусть $n \geq 2$. Разложим радикал в выражении для $K_n(a)$ в абсолютно сходящийся ряд:

$$\begin{aligned} K_n(a) &= \frac{4\pi(-1)^n}{\sqrt{n}} \int_0^a \left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k}} \binom{2k}{k} \frac{x^k}{n^k} \right) \Phi^{(3)}(2x-1) dx \\ &= \frac{4\pi(-1)^n}{\sqrt{n}} \varkappa_0(a) + 4\pi \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k}} \binom{2k}{k} \varkappa_k(a) \frac{(-1)^n}{n^{k+0.5}}, \\ \varkappa_k(a) &= \int_0^a x^k \Phi^{(3)}(2x-1) dx. \end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что все интегралы $\varkappa_k(a)$ при $0 \leq a \leq 1$ ограничены сверху по абсолютной величине постоянной

$$c_1 = \int_0^1 |\Phi^{(3)}(2x-1)| dx.$$

Пользуясь тем, что $K_1(1) = O(1)$, находим

$$\begin{aligned} |\mathfrak{I}_3| &= \frac{1}{12\pi^2} \left| K_1(1) + 4\pi \left(\varkappa_0(1) \sum_{2 \leq n \leq N-1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right. \right. \\ &\quad + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k}} \binom{2k}{k} \varkappa_k(1) \sum_{2 \leq n \leq N-1} \frac{(-1)^n}{n^{k+0.5}} \\ &\quad \left. \left. + \frac{(-1)^N}{\sqrt{N}} \varkappa_0(\vartheta) + (-1)^N \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k}} \binom{2k}{k} \frac{\varkappa_k(\vartheta)}{N^{k+0.5}} \right) \right| \\ &\leq |K_1(1)| + 4\pi c_1 \left((\sqrt{2}-1) \left| \zeta\left(\frac{1}{2}\right) \right| + 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{2k}} \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{1}{2^k \sqrt{2}} \right. \\ &\quad \left. + N^{-0.5} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{2k}} \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{1}{N^{k+0.5}} \right) = O(1). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

§ 4. Доказательства теорем 1 и 2 и следствий из них

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $T = 2\pi(N + \vartheta)^2$, где N – достаточно большое целое число, ϑ – фиксированное (т.е. не зависящее от N) число с условием $0 \leq \vartheta < 1$. Пользуясь определением, запишем интеграл $\mathfrak{F}(N; \vartheta) = F(2\pi(N + \vartheta)^2)$ в виде суммы $\mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2 + \mathfrak{J}_3$, в которой

$$\begin{aligned}\mathfrak{J}_1 &= 2 \operatorname{Re} \left(e^{-\pi i/8} \int_{2\pi}^{2\pi(N+\vartheta)^2} \sum_{1 \leq n \leq m} \frac{1}{\sqrt{n}} \exp \left\{ i \left(\frac{t}{2} \ln \frac{t}{2\pi} - \frac{t}{2} - t \ln n \right) \right\} dt \right), \\ \mathfrak{J}_2 &= \int_{2\pi}^{2\pi(N+\vartheta)^2} (-1)^{m-1} \left(\frac{t}{2\pi} \right)^{-1/4} \Phi \left(2 \left(\sqrt{\frac{t}{2\pi}} - m \right) - 1 \right) dt, \\ \mathfrak{J}_3 &= \int_{2\pi}^{2\pi(N+\vartheta)^2} \frac{(-1)^{m-1}}{12\pi^2} \left(\frac{t}{2\pi} \right)^{-3/4} \Phi^{(3)} \left(2 \left(\sqrt{\frac{t}{2\pi}} - m \right) - 1 \right) dt, \\ m &= \left[\sqrt{\frac{t}{2\pi}} \right], \quad \Phi(z) = \frac{\cos\left(\frac{\pi z^2}{2} + \frac{3\pi}{8}\right)}{\cos(\pi z)}.\end{aligned}$$

Согласно лемме 24 первый интеграл выражается формулой

$$\mathfrak{R}(\vartheta)(-1)^N \sqrt{N} + 4\pi(\kappa(\vartheta) - \kappa(0.5))(-1)^N \sqrt{N} + O(\sqrt[3]{N} \ln N),$$

где разрывный множитель $\mathfrak{R}(\vartheta)$ равен 0, если $0 \leq \vartheta < 0.25$, $0.75 < \vartheta < 1$, равен 2π , если $0.25 < \vartheta < 0.75$, и равен $\pi \pm \frac{\pi}{3}$, если $\vartheta = 0.5 \mp 0.25$.

Интегралы $\mathfrak{J}_2$ и $\mathfrak{J}_3$ вычислены в леммах 26 и 27 соответственно:

$$\mathfrak{J}_2 = 4\pi(\kappa(0.5) - \kappa(\vartheta))(-1)^N \sqrt{N} + O(1), \quad \mathfrak{J}_3 = O(1).$$

Суммируя эти выражения, приходим к искомой формуле для $\mathfrak{F}(N; \vartheta)$:

$$\mathfrak{F}(N; \vartheta) = \mathfrak{R}(\vartheta)(-1)^N \sqrt{N} + O(\sqrt[3]{N} \ln N).$$

Приведенные в условии теоремы 1 частные случаи этой формулы получаются при $\vartheta = 0.25, 0.5$ и 0.75 соответственно. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. При $T \rightarrow +\infty$ справедливо соотношение

$$\int_{2\pi}^T Z(t) dt = \Omega_{\pm}(\sqrt[4]{T}).$$

СЛЕДСТВИЕ 2 (теорема Харди). Функция $Z(t)$ имеет бесконечно много вещественных нулей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1. Определим две последовательности:

$$X_{\nu} = 2\pi(2\nu - 0.5)^2, \quad Y_{\nu} = 2\pi(2\nu + 0.5)^2.$$

По доказанному выше имеем

$$\begin{aligned}\int_{2\pi}^{X_{\nu}} Z(t) dt &= (-1)^{2\nu-1} 2\pi \sqrt{2\nu-1} + O(\nu^{1/3} \ln \nu) \\ &= -(2\pi)^{3/4} (X_{\nu})^{1/4} + O((X_{\nu})^{1/6} \ln X_{\nu}) < -(X_{\nu})^{1/4}, \\ \int_{2\pi}^{Y_{\nu}} Z(t) dt &= (-1)^{2\nu} 2\pi \sqrt{2\nu} + O(\nu^{1/3} \ln \nu) \\ &= (2\pi)^{3/4} (Y_{\nu})^{1/4} + O((Y_{\nu})^{1/6} \ln Y_{\nu}) > (Y_{\nu})^{1/4}.\end{aligned}$$

Полученные неравенства и означают, что

$$\int_{2\pi}^T Z(t)dt = \Omega_{\pm}(\sqrt[4]{T}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 2. Заметим, что функция

$$F(T) = \int_{2\pi}^T Z(t) dt$$

имеет по меньшей мере один нуль между любыми двумя точками X_{ν} и Y_{ν} , где ν – достаточно большое целое число. Обозначим такой нуль через τ_{ν} . В силу теоремы Ролля производная $F'(t) = Z(t)$ обращается в нуль между точками τ_{ν} и $\tau_{\nu+1}$ не менее одного раза. Так как последовательность τ_{ν} с ростом ν неограниченно возрастает, то функция $Z(t)$ имеет на вещественной прямой бесконечно много нулей. Следствие доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть T – достаточно большое положительное число. Представим его в виде $T = 2\pi(N + \vartheta)^2$, где N – целое, а ϑ удовлетворяет условию $0 \leq \vartheta < 1$ (для этого достаточно положить $N = [\sqrt{T/(2\pi)}]$, $\vartheta = \{\sqrt{T/(2\pi)}\}$). Тогда, воспользовавшись результатами лемм 25–27, искомый интеграл $\mathfrak{F}(N; \vartheta) = F(2\pi(N + \vartheta)^2)$ представим суммой $\mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2 + \mathfrak{J}_3$, где

$$\begin{aligned}\mathfrak{J}_1 &= 28.75\theta_1\sqrt{N} + 4\pi(\kappa(\vartheta) - \kappa(0.5))(-1)^N\sqrt{N}, & |\theta_1| \leq 1, \\ \mathfrak{J}_2 &= 4\pi(\kappa(0.5) - \kappa(\vartheta))(-1)^N\sqrt{N} + O(1), & \mathfrak{J}_3 = O(1).\end{aligned}$$

Сложив эти выражения, получим

$$\begin{aligned}F(T) &= 28.75\theta_1\sqrt{N} + O(1) = 28.75\theta_2\sqrt[4]{\frac{T}{2\pi}} + O(1), & |\theta_2| \leq 1, \\ |F(T)| &\leq \frac{28.75}{\sqrt[4]{2\pi}}\sqrt[4]{T} + O(1) < 18.2\sqrt[4]{T}.\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Список литературы

1. С. М. Воронин, А. А. Карацуба, *Дзета-функция Римана*, Физматлит, М., 1994; англ. пер.: А. А. Karatsuba, S. M. Voronin, *The Riemann zeta-function*, de Gruyter Expositions in Mathematics, **5**, Walter de Gruyter, Berlin, 1992.
2. Е. Landau, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, S. Hirzel, Leipzig, 1927.
3. К. Чандрасекхаран, *Арифметические функции*, Наука, М., 1975; пер. с англ.: К. Chandrasekharan, *Arithmetical functions*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, **167**, Springer-Verlag, New York–Berlin, 1970.
4. А. Ivić, “On the integral of Hardy’s function”, *Arch. Math.*, **83**:1 (2004), 41–47.
5. А. А. Карацуба, М. А. Королёв, “Теорема о приближении тригонометрической суммы более короткой”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **71**:2 (2007), 123–150; англ. пер.: А. А. Karatsuba, M. A. Korolev, “A theorem on the approximation of a trigonometric sum by a shorter one”, *Izv. Math.*, **71**:2 (2007), 341–370.

6. K. L. Siegel, “Über Riemanns Nachlass zur analytischen Zahlentheorie”, *Quellen und Studien zur Geschichte*, **2**, Studien, 1932, 45–80.
7. С. А. Гриценко, “Об оценках тригонометрических сумм по третьей производной”, *Матем. заметки*, **60**:3 (1996), 383–389; англ. пер.: S. A. Gritsenko, “Estimates of trigonometric sums by the third derivative”, *Math. Notes*, **60**:3 (1996), 283–287.
8. J. M. Borwein, D. M. Bradley, R. E. Crandall, “Computational strategies for the Riemann zeta function”, Numerical analysis in the 20th century, Vol. I, Approximation theory, *J. Comput. Appl. Math.*, **121**:1–2 (2000), 247–296.
9. W. Gabcke, “Neue Herleitung und explizite Restabschätzung der Riemann–Siegel–Formel”, *Thesis Georg-August Universität zur Göttingen*, 1979.
10. Е. К. Титчмарш, *Теория дзета-функции Римана*, ИЛ, М., 1953; пер. с англ.: E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann Zeta-function*, Clarendon Press, Oxford, 1951.

М. А. КОРОЛЁВ (M. A. KOROLEV)

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова,

механико-математический факультет

E-mail: hardy_ramanujan@mail.ru

Поступило в редакцию

24.10.2006