Общероссийский математический портал

В. Н. Соловьев, О субдифференциале и производных по направлениям максимума семейства выпуклых функций, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1998, том 62, выпуск 4, 173–200

DOI: <https://doi.org/10.4213/im192>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 16:38:00

УДК 519.7

В. Н. Соловьев

О субдифференциале и производных по направлениям максимума семейства выпуклых функций

В работе вычисляются производные по направлениям и субдифференциалы максимума выпуклых функций при ослабленных условиях компактности множества индексов (или их полном отсутствии).

Библиография: 30 наименований.

§ 1. Введение

В теории экстремальных задач и ее приложениях часто встречается и играет важную роль (см. [1]–[28]) задача вычисления производной по направлениям и субдифференциала функции $f(x)$, имеющей вид

$$f(x) := \sup_{s \in S} f_s(x), \quad (1.1)$$

где S – множество индексов, $f_s(x)$ – выпуклые функции, определенные на линейном пространстве X (которые могут принимать значения $\pm\infty$). Поскольку функция $f(x)$ выпукла, то в любой точке x_0 , в которой она конечна, существуют производные по направлениям $f'(x_0; \psi)$ (возможно, равные $\pm\infty$). В нескольких работах показано, что

$$f'(x_0; \psi) = \sup_{s \in S(x_0)} f'_s(x_0; \psi), \quad (1.2)$$

где

$$S(x) := \{s \in S \mid f_s(x) = f(x)\}. \quad (1.3)$$

При этом обычно предполагается, что S – компактное подмножество топологического пространства Y и функция $f(s, x) := f_s(x)$ непрерывна по совокупности аргументов на множестве $S \times [x_0 - \varepsilon\psi, x_0 + \varepsilon\psi]$, $\varepsilon > 0$ (см., например, [14]).

Для многих приложений эти требования слишком обременительны, и в данной работе они будут ослаблены. Напомним, что если X – линейное топологическое пространство и X^* – сопряженное пространство, т.е. множество всех линейных непрерывных функционалов $\langle x^*, x \rangle$ на X , то множество $\partial f(x_0) := \{x^* \in X^* \mid f(x) \geq f(x_0) + \langle x^*, x - x_0 \rangle \ \forall x \in X\}$ называется *субдифференциалом функции f в точке x_0* . Если A – некоторое подмножество пространства X , то множества

$$\begin{aligned} N(x_0 \mid A) &:= \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, x - x_0 \rangle \leq 0 \ \forall x \in A\}, \\ K(x_0 \mid A) &:= \{\psi \in X \mid \exists \varepsilon > 0 : x_0 + \varepsilon\psi \in A\} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 96-01-00920).

называются *нормальным конусом* и *конусом допустимых направлений* множества A в точке $x_0 \in A$ соответственно. Через $\text{dom } f := \{x : f(x) < +\infty\}$ обозначается эффективное множество функции $f(x)$. Легко проверить, что (см. [15, с. 263])

$$\partial f(x_0) = \partial f(x_0) + N(x_0 | \text{dom } f) \quad \forall x_0 \in \text{dom } f. \quad (1.5)$$

В дальнейшем всюду, не оговаривая этого, мы будем предполагать, что функции $f(s, x) := f_s(x) : S \times X \rightarrow \bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R}^1 \cup \{\pm\infty\}$ выпуклы по $x \in X$ при каждом $s \in S$ и что $f(x) \neq -\infty$ при всех $x \in X$. Все топологии будут предполагаться хаусдорфовыми. Кроме того, всюду, кроме §7, мы будем предполагать, что

$$\text{функции } f(s, x) \text{ полунепрерывны сверху по } s \in S \quad \forall x \in X. \quad (1.6)$$

Будем называть функцию $f(s, x)$ *коэрцитивной* по s в точке $x_0 \in \text{dom } f$, если

$$\lim f(s, x_0) = -\infty \quad \text{при } s \in S, \quad s \rightarrow s_0 \notin S, \quad (1.7)$$

когда множество S не замкнуто, и если

$$\lim f(s, x_0) = -\infty \quad \text{при } s \in S, \quad \|s\| \rightarrow \infty, \quad (1.8)$$

когда оно не ограничено (и является подмножеством нормированного пространства Y ; в условиях (1.6)–(1.8) множество S снабжается относительной топологией, индуцируемой на S из Y).

В §2 формула (1.2) будет доказана для полунепрерывных (пн.) сверху на множестве S функций $f(\cdot, x)$ при ослабленных условиях компактности. При этом мы используем схему доказательства теоремы о субдифференциале максимума выпуклых функций из монографии [4]. С ее помощью в §3, 4 получены усиления теорем о субдифференциале максимума семейств выпуклых функций, полученных А.Д. Иоффе, В.М. Тихомировым [4] и В.Л. Левиным [9], [10]. В §4 эти формулы упрощаются в тех случаях, когда функции $f(s, x)$ вогнуты по s . Здесь же даны интегральные представления субдифференциалов. В §5 изучены формулы для замыканий неограниченных выпуклых множеств в конечномерном пространстве, которые затем применяются в §6 при вычислении субдифференциалов в конечномерном случае. В §7 рассмотрен случай произвольного множества индексов S , а в §8 доказаны вспомогательные утверждения.

Основные результаты этой работы были анонсированы в [18], [19].

§2. Производные по направлениям максимума выпуклых функций

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть X – линейное пространство, множество S компактно и выполнено условие (1.6). Тогда формула (1.2) справедлива для всех точек $x_0 \in \text{dom } f$ и допустимых направлений $\psi \in K(x_0 | \text{dom } f)$. Если же $\psi \notin K(x_0 | \text{dom } f)$, то найдется элемент $s \in S$ такой, что $f'(x_0; \psi) = f'_s(x_0; \psi) = +\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем точку $x \in X$. Возможны три случая:

- а) $f(s_1, x) = +\infty$ для некоторого $s_1 \in S$; тогда $f(x) = +\infty$;
- б) $f(s, x) = -\infty$ для всех $s \in S$; тогда $f(x) = -\infty$, что исключено по условию;
- в) $f(s, x) < +\infty$ для всех $s \in S$ и $f(s_1, x) > -\infty$ для некоторого $s_1 \in S$; тогда $f(x)$ конечно.

Утверждения а) и б) очевидны. В случае в) для числа $\gamma := f(s_1, x)$ множество уровня

$$S_\gamma := \{s \in S \mid f(s, x) \geq \gamma\} \quad (2.1)$$

будет непустым и замкнутым (по определению полунепрерывности сверху) подмножеством компактного топологического пространства S . Следовательно, множество S_γ само компактно, и по теореме Вейерштрасса пп. сверху вещественная функция $f(\cdot, x): S_\gamma \rightarrow \mathbb{R}$ достигает на нем конечного максимума $f(x)$. В частности, поскольку по условию число $f(x_0)$ конечно, то множество $S(x_0)$, определенное в (1.3), является непустым компактом.

Легко показать, что [14]

$$f'(x_0; \psi) \geq \sup_{s \in S(x_0)} f'_s(x_0; \psi). \quad (2.2)$$

Если $f'(x_0; \psi) = -\infty$, то и стоящая в правой части этого неравенства величина равна $-\infty$. Формула (1.2) доказана. Если же $f'(x_0; \psi) = +\infty$, то из выпуклости функции $f(x)$ и конечности ее значения в точке x_0 следует, что $f(x_0 + \lambda\psi) = +\infty$, $\lambda > 0$, т.е. $\psi \notin K(x_0 \mid \text{dom } f)$. Поэтому для любого $\lambda > 0$ найдется элемент $s(\lambda) \in S$ такой, что $f(s(\lambda), x_0 + \lambda\psi) = +\infty$. Действительно, как мы показали, в случае б) $f(x_0 + \lambda\psi) = -\infty$, а в случае в) число $f(x_0 + \lambda\psi)$ конечно.

Обозначим через $S(\lambda)$ множество всех таких элементов:

$$S(\lambda) := \{s \in S \mid f(s, x_0 + \lambda\psi) = +\infty\} \neq \emptyset, \quad \lambda > 0.$$

Из выпуклости функции $f(s, x)$ по переменной x и неравенств $f(s, x_0) < +\infty$, $s \in S$, следует, что

$$f(s, x_0 + \mu\psi) = +\infty, \quad \mu \geq \lambda, \quad s \in S(\lambda). \quad (2.3)$$

Следовательно, $S(\lambda_1) \subset S(\lambda_2)$ при $\lambda_1 \leq \lambda_2$. Кроме того, множество $S(\lambda) = \bigcap_{\gamma \in \mathbb{R}} \{s \in S \mid f(s, x_0 + \lambda\psi) \geq \gamma\}$ является пересечением компактных множеств уровня функции $f(\cdot, x_0 + \lambda\psi)$, и поэтому само компактно. Таким образом, семейство множеств $S(\lambda)$, $\lambda > 0$, образует центрированную систему. Следовательно, пересечение этих множеств не пусто [8].

Согласно (2.3) это означает, что найдется элемент $s_0 \in S$ такой, что $f(s_0, x_0 + \mu\psi) = +\infty$, $\mu > 0$, и поэтому $f'_{s_0}(x_0; \psi) = +\infty$.

Пусть теперь производная $f'(x_0; \psi)$ конечна. Тогда

$$f(x_0 + \lambda\psi) \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \lambda \leq \varepsilon, \quad (2.4)$$

для некоторого $\varepsilon > 0$, причем можно считать ε равным 1 (этого можно добиться заменой вектора ψ на $\varepsilon\psi$). Отметим сразу же, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow +0} f(x_0 + \lambda\psi) = f(x_0) \quad (2.5)$$

(в противном случае $f'(x_0; \psi) = -\infty$ в силу выпуклости функции $f(x)$ и конечности ее значения в точке x_0).

Выберем любые элементы $s(\lambda) \in S$, для которых

$$f(s(\lambda), x_0 + \lambda\psi) \geq f(x_0 + \lambda\psi) - \lambda^2, \quad \lambda \in (0, 1). \quad (2.6)$$

В силу выпуклости функции $f(s, x)$ по x имеем

$$(1 - \lambda)f(s(\lambda), x_0) + \lambda f(s(\lambda), x_0 + \psi) \geq f(s(\lambda), x_0 + \lambda\psi),$$

поэтому согласно (2.6)

$$\begin{aligned} (1 - \lambda)f(s(\lambda), x_0) &\geq f(x_0 + \lambda\psi) - \lambda^2 - \lambda f(s(\lambda), x_0 + \psi) \\ &\geq f(x_0 + \lambda\psi) - \lambda^2 - \lambda f(x_0 + \psi). \end{aligned}$$

Поскольку $f(x_0 + \psi)$ конечно, то с учетом (2.5) отсюда получаем

$$\lim_{\lambda \rightarrow +0} f(s(\lambda), x_0) \geq f(x_0).$$

Но $f(s(\lambda), x_0) \leq f(x_0)$, поэтому

$$\lim_{\lambda \rightarrow +0} f(s(\lambda), x_0) = f(x_0). \quad (2.7)$$

В силу компактности множества S из направленности $s(\lambda)$, $1 > \lambda > 0$, в которой индекс λ направлен по убыванию, можно выделить поднаправленность $s(\lambda(\alpha))$, $\alpha \in A$, сходящуюся к элементу $s_0 \in S$. Тогда из полунепрерывности сверху функции $f(\cdot, x_0)$ в точке s_0 и соотношения (2.7) следует, что

$$f(s(\lambda(\alpha)), x_0) \xrightarrow{A} f(x_0) \leq f(s_0, x_0).$$

Но в силу (1.1) очевидно обратное неравенство, поэтому

$$f(s_0, x_0) = f(x_0), \quad (2.8)$$

т.е. $s_0 \in S(x_0)$.

Предположим теперь, что формула (1.2) не верна. Тогда неравенство (2.2) будет строгим и, в частности,

$$f'(x_0; \psi) \geq f'_{s_0}(x_0; \psi) + \varepsilon \quad (2.9)$$

для некоторого $\varepsilon > 0$. Если производная $f'_{s_0}(x_0; \psi)$ конечна, то для некоторого числа $\lambda_1 \in (0, 1)$ будет

$$\frac{[f(s_0, x_0 + \lambda_1\psi) - f(s_0, x_0)]}{\lambda_1} \leq f'_{s_0}(x_0; \psi) + \frac{\varepsilon}{4},$$

и поэтому в силу (2.9)

$$f'(x_0; \psi) \geq \frac{[f(s_0, x_0 + \lambda_1 \psi) - f(s_0, x_0)]}{\lambda_1} + \frac{3\varepsilon}{4}. \quad (2.10)$$

Иначе $f'_{s_0}(x_0; \psi) = -\infty$, и неравенство (2.10) тоже будет выполняться для некоторого числа $\lambda_1 \in (0, 1)$.

С учетом (2.6), (2.10) и выпуклости $f(x)$ в обоих случаях

$$\begin{aligned} \frac{[f(s(\lambda), x_0 + \lambda \psi) - f(s(\lambda), x_0)]}{\lambda} &\geq \frac{[f(x_0 + \lambda \psi) - \lambda^2 - f(x_0)]}{\lambda} \\ &\geq f'(x_0; \psi) - \lambda \geq \frac{[f(s_0, x_0 + \lambda_1 \psi) - f(s_0, x_0)]}{\lambda_1} + \frac{3\varepsilon}{4} - \lambda. \end{aligned}$$

Поэтому при $0 < \lambda < \lambda_1$ в силу выпуклости функции $f(s(\lambda), x)$ по x имеем

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{\lambda_1} f(s(\lambda), x_0 + \lambda_1 \psi) + \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) f(s(\lambda), x_0) &\geq f(s(\lambda), x_0 + \lambda \psi) \\ &\geq f(s(\lambda), x_0) + \lambda \left(\frac{1}{\lambda_1} [f(s_0, x_0 + \lambda_1 \psi) - f(s_0, x_0)] + \frac{3\varepsilon}{4} - \lambda \right), \end{aligned}$$

или, после сокращений,

$$f(s(\lambda), x_0 + \lambda_1 \psi) \geq f(s(\lambda), x_0) + f(s_0, x_0 + \lambda_1 \psi) - f(s_0, x_0) + \left(\frac{3\varepsilon}{4} - \lambda\right) \lambda_1.$$

Но из (2.7) и (2.8) следует, что найдется число $0 < \lambda_2 < \min(\lambda_1, \varepsilon/4)$ такое, что $f(s(\lambda), x_0) \geq f(s_0, x_0) - \varepsilon \lambda_1/4$, $0 < \lambda \leq \lambda_2$, и поэтому

$$f(s(\lambda), x_0 + \lambda_1 \psi) \geq f(s_0, x_0 + \lambda_1 \psi) + \frac{\varepsilon \lambda_1}{4}, \quad 0 < \lambda \leq \lambda_2. \quad (2.11)$$

Поскольку найдется такое $\alpha_1 \in A$, что $0 < \lambda(\alpha) \leq \lambda_2$ при всех α , больших α_1 (по порядку) и $s(\lambda(\alpha)) \rightarrow s_0$, то полученное неравенство противоречит полунепрерывности сверху функции $f(\cdot, x_0 + \lambda_1 \psi)$ в точке $s_0 \in S$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. В условиях теоремы 2.1 справедливо равенство

$$K(x_0 \mid \text{dom } f) = \bigcap_{s \in S} K(x_0 \mid \text{dom } f_s). \quad (2.12)$$

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть X — линейное пространство, многозначное отображение $S(x): \text{dom } f \rightarrow S$ имеет непустые компактные значения и пн. сверху на любом отрезке в $\text{dom } f$, а функция $f(\cdot, x)$ пн. сверху на S для любого $x \in X$. Тогда формула (1.2) справедлива для всех точек $x_0 \in \text{dom } f$ и направлений $\psi \in K(x_0 \mid \text{dom } f)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\psi \in K(x_0 | \text{dom } f)$, то $f'(x_0; \psi) \neq +\infty$. Как мы видели, случай $f'(x_0; \psi) = -\infty$ тривиален. Поэтому остается рассмотреть случай, когда производная по направлению $f'(x_0; \psi)$ конечна. Тогда опять будут выполняться соотношения (2.4), (2.5), а элементы $s(\lambda) \in S(x_0 + \lambda\psi) \subset S$ будут удовлетворять условию (2.6). Как и в теореме 2.1 будет также выполнено ключевое соотношение (2.7).

Определим множество $\tilde{S}$, равное объединению множеств $S(x_0 + \lambda\psi)$, $\lambda \in [0, 1]$. Так как отображение $S(x_0 + \lambda\psi): [0, 1] \rightarrow S$ имеет непустые компактные значения пн. сверху, то множество $\tilde{S}$ компактно (см. [13, с. 119]). Поэтому из направленности $s(\lambda) \in \tilde{S}$, $1 \geq \lambda \geq 0$, в которой индекс λ направлен по убыванию, можно выбрать поднаправленность $s(\lambda(\alpha))$, $\alpha \in A$, сходящуюся к элементу $s_0 \in \tilde{S} \subset S$. Тогда, как и в теореме 2.1, мы получим соотношения (2.8)–(2.11), последнее из которых противоречит полунепрерывности сверху функции $f(\cdot, x_0 + \lambda_1\psi)$ в точке $s_0 \in S$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть X – линейное пространство, множество S относительно компактно в Y , а функция $f(\cdot, x)$ коэрцитивна в точке $x_0 \in \text{dom } f$ и пн. сверху на S для любого $x \in X$. Тогда формула (1.2) справедлива для любого направления $\psi \in K(x_0 | \text{dom } f)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $f(x_0) \in \mathbb{R}$, то $f(s, x_0) < +\infty$ при всех $s \in S$ и $f(s_1, x_0) \in \mathbb{R}$ для некоторого $s_1 \in S$. Доопределим функцию $f(s, x)$ в точке $x = x_0$ на все пространство Y , положив

$$f(s, x_0) = -\infty, \quad s \notin S. \quad (2.13)$$

Легко сообразить, что тогда в силу условия (1.6), (1.7) функция

$$f(\cdot, x_0): Y \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \quad (2.14)$$

будет полунепрерывной сверху в исходной топологии Y .

Поэтому при $\gamma = f(s_1, x_0)$ множество уровня

$$\{s \in Y \mid f(s, x_0) \geq \gamma\} = S_\gamma \quad (2.15)$$

будет непусто и замкнуто (см. (2.1)). Поскольку $S_\gamma \subset S$ и по условию замыкание $\bar{S}$ множества S компактно, то множество S_γ тоже компактно. Тогда при $x = x_0$ можно заменить множество S в (1.1) на компактное множество S_γ . По теореме Вейерштрасса максимум в (1.1) достигается на непустом компактном подмножестве $S(x_0) \subset S_\gamma \subset S$.

Поскольку $\psi \in K(x_0 | \text{dom } f)$, то $f'(x_0; \psi) \neq +\infty$. Как мы видели, случай $f'(x_0; \psi) = -\infty$ тривиален. Поэтому остается рассмотреть случай, когда производная по направлению $f'(x_0; \psi)$ конечна. Тогда опять будут выполняться соотношения (2.4), (2.5), и непосредственно из определения верхней грани (1.1) можно выбрать элементы $s(\lambda) \in S$, удовлетворяющие условию (2.6). Как и в теореме 2.1, они будут удовлетворять ключевому соотношению (2.7).

Пользуясь компактностью множества $\bar{S}$, из направленности $s(\lambda)$, $1 \geq \lambda \geq 0$, в которой индекс λ направлен по убыванию, можно выбрать поднаправленность

$s(\lambda(\alpha))$, $\alpha \in A$, сходящуюся к элементу $s_0 \in Y$. Если $s_0 \notin S$, то согласно условию (1.7)

$$f(s(\lambda(\alpha)), x_0) \xrightarrow{A} -\infty,$$

что противоречит (2.7), ибо число $f(x_0)$ конечно. Поэтому $s_0 \in S$. Тогда, как и в теореме 2.1, мы получим соотношения (2.8)–(2.11), последнее из которых противоречит полунепрерывности сверху функции $f(\cdot, x_0 + \lambda_1 \psi)$ в точке $s_0 \in S$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть X – линейное пространство, S – подмножество конечномерного пространства $Y = \mathbb{R}^m$, а функция $f(\cdot, x)$ коэрцитивна в точке $x_0 \in \text{dom } f$ и пн. сверху на множестве S при всех $x \in X$. Тогда формула (1.2) справедлива для всех $\psi \in K(x_0 | \text{dom } f)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в теореме 2.3, множества уровня функции (2.14), (2.13) будут замкнуты, а из условия (1.8) следует их ограниченность. Поэтому в конечномерном пространстве множества уровня (2.1) при $x = x_0$ компактны. Следовательно, множество (1.3) является непустым компактом.

Когда производная по направлению $f'(x_0; \psi)$ конечна, будут выполнены соотношения (2.4)–(2.7). Если бы последовательность $s_n := s(1/n)$, $n = 1, 2, \dots$, была неограниченной, то согласно (1.8) мы получили бы, что $f(s_n, x_0) \rightarrow -\infty$ при $n \rightarrow \infty$, что противоречит (2.7), ибо число $f(x_0)$ конечно. Поэтому существует сходящаяся подпоследовательность $s_{n_\alpha} \rightarrow s_0$, $\alpha \rightarrow \infty$. Если $s_0 \notin S$, то опять согласно (1.7) $f(s_{n_\alpha}, x_0) \rightarrow -\infty$ при $\alpha \rightarrow \infty$, что противоречит (2.7). Поэтому $s_0 \in S$. Остальные рассуждения те же, что и в теореме 2.1.

ТЕОРЕМА 2.5. Пусть X – линейное пространство, S – выпуклое подмножество рефлексивного банахова пространства Y , а функция $f(\cdot, x)$ коэрцитивна в точке $x_0 \in \text{dom } f$ и пн. сверху и вогнута на множестве S при $x \in X$. Тогда формула (1.2) справедлива для любого направления $\psi \in K(x_0 | \text{dom } f)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция (2.14), (2.13) пн. сверху на Y . Поскольку она вогнута, то эта функция полунепрерывна сверху и в слабой топологии [4]. Кроме того, ее множество уровня (2.15) при $\gamma = f(s_1, x_0)$ непусто, выпукло и замкнуто. Из условия (1.8) следует, что оно ограничено, и поэтому в рефлексивном банаховом пространстве Y оно слабо компактно. По теореме Вейерштрасса максимум в (1.1) при $x = x_0$ достигается, так что множество (1.3) непусто и слабо компактно.

Пусть элементы $s(\lambda) \in S$ удовлетворяют условию (2.6), и пусть $s_n := s(1/n)$, $n = 1, 2, \dots$. В силу (1.8) и (2.7) эта последовательность ограничена. В рефлексивном пространстве Y можно выбрать подпоследовательность s_{n_α} , $\alpha = 1, 2, \dots$, слабо сходящуюся к точке $s_0 \in Y$. Тогда по лемме Мазура [4] найдутся выпуклые комбинации

$$u_\alpha := \sum_{k=\alpha}^N \lambda_k s_{n_k}, \quad \lambda_k \geq 0, \quad \sum_{k=\alpha}^N \lambda_k = 1,$$

сходящиеся к точке s_0 по норме Y (все числа N и λ_k зависят от α , но здесь это несущественно).

Но из соотношения (2.7) следует, что числовая последовательность $f(s_n, x_0)$, $n = 1, 2, \dots$, ограничена снизу некоторой константой M . Поскольку множество S выпукло, то $u_\alpha \in S$, $\alpha = 1, 2, \dots$, и из вогнутости функции $f(\cdot, x_0)$ на этом множестве вытекает, что

$$f(u_\alpha, x_0) \geq \sum_{k=\alpha}^N \lambda_k f(s_{n_k}, x_0) \geq \sum_{k=\alpha}^N \lambda_k M = M$$

при всех $\alpha = 1, 2, \dots$, т.е. числовая последовательность $f(u_\alpha, x_0)$ тоже ограничена снизу. Если $s_0 \notin S$, то это приводит к противоречию с условием (1.7), ибо последовательность u_α , $\alpha = 1, 2, \dots$, лежит во множестве $S \subset Y$ и сходится к точке s_0 по норме.

Таким образом, $s_0 \in S$, а тогда из слабой полунепрерывности сверху функции $f(\cdot, x_0)$ в точке s_0 и соотношения (2.7) вытекает равенство (2.8), т.е. $s_0 \in S(x_0)$. Как и в теореме 2.1, мы получим соотношение (2.11), которое противоречит слабой полунепрерывности функции $f(\cdot, x_0 + \lambda_1 \psi)$ в точке $s_0 \in S$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Максимумы в (1.1) и (1.2) достигаются, если $x = x_0$ и $\psi \in K(x_0 \mid \text{dom } f)$.

Действительно, как мы видели (см. доказательство теорем 2.1–2.5), множество $S(x_0)$ является непустым компактом, на котором функция $f(\cdot, x)$ пн. сверху (в теореме 2.5 в слабой топологии). Если производная $f'(x_0; \psi)$ конечна, то максимизируемые функции не принимают значения $+\infty$ и пн. сверху на компакте $S(x_0)$ (полунепрерывность сверху производных по направлению следует из того, что нижняя грань

$$f'_s(x_0; \psi) = \inf_{\lambda > 0} \frac{[f_s(x_0 + \lambda \psi) - f(x_0)]}{\lambda}, \quad s \in S(x_0),$$

семейства полунепрерывных сверху на множестве $S(x_0)$ функций тоже является полунепрерывной сверху функцией [4]).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Если в условиях теорем 2.1–2.5 функция $f(\cdot, x)$ коэрцитивна во всех точках $x \in X$, для которых $f(s, x) < +\infty$ при всех $s \in S$, то

$$\text{dom } f = \bigcap_{s \in S} \text{dom } f_s. \quad (2.16)$$

Действительно, во всех случаях

$$\text{dom } f \subset \bigcap_{s \in S} \text{dom } f_s. \quad (2.17)$$

Если $x \in \text{dom } f_s$, $s \in S$, то число $f(x)$ конечно (это было показано в начале доказательства каждой из теорем 2.1–2.5).

§ 3. Субдифференциал максимума выпуклых функций

Далее, в § 3, 4, 6, мы будем предполагать, что выполнены условия любой из теорем 2.1–2.5. Для удобства чтения работы приведем условия этих теорем (как условия 2.1–2.5 соответственно).

2.1. Множество S – компактное топологическое пространство.

2.2. Многозначное отображение $S(x): \text{dom } f \rightarrow S$ имеет непустые компактные значения и пн. сверху на любом отрезке в $\text{dom } f$.

2.3. Множество S относительно компактно в Y , а функция $f(s, x)$ коэрцитивна по s в точке x_0 (см условия (1.7) и (1.8)).

2.4. Множество S – подмножество конечномерного пространства $Y = \mathbb{R}^m$, а функция $f(s, x)$ коэрцитивна по s в точке x_0 .

2.5. Множество S – выпуклое подмножество рефлексивного банахова пространства Y , а функция $f(s, x)$ коэрцитивна по s в точке x_0 и вогнута на множестве S при всех $x \in X$.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть X – локально выпуклое пространство и выполнено любое из условий 2.1–2.5. Кроме того, пусть функции $f(s, x)$ пн. сверху по $s \in S$ при всех $x \in X$ и непрерывны по x в некоторой точке $x_1 \in \text{dom } f$ при всех $s \in S$. Тогда если x_0 – алгебраически внутренняя точка множества $\text{dom } f$, то имеет место равенство

$$\partial f(x_0) = \overline{\text{conv}} \bigcup_{s \in S(x_0)} \partial f_s(x_0), \quad (3.1)$$

где замыкание берется в слабой* топологии пространства X^* .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как x_0 – алгебраически внутренняя точка $\text{dom } f$, то $K(x_0 | \text{dom } f) = X$. Тогда из (2.17) вытекает, что $K(x_0 | \text{dom } f_s) = X$, $s \in S$, т.е. точка x_0 является алгебраически внутренней для множества $\text{dom } f_s$, $s \in S$. Но поскольку каждая из функций $f_s(x)$ непрерывна в точке $x_1 \in X$, то она не принимает значения $-\infty$ и ее эффективное множество имеет непустую внутренность. Тогда, пользуясь первой теоремой отделимости [4], легко показать, что $x_0 \in \text{int dom } f_s$ при всех $s \in S$. Кроме того, поскольку выпуклая функция непрерывна внутри своего эффективного множества, если она непрерывна хотя бы в одной точке x_1 [4], то все функции $f_s(x)$ непрерывны в точке x_0 , а потому в ней субдифференцируемы: $\partial f_s(x_0) \neq \emptyset$, $s \in S$.

Для доказательства формулы (3.1) воспользуемся аппаратом опорных функций. Напомним, что опорная функция множества $A \subset X^*$ определяется равенством

$$\delta^*(x | A) = \sup_{x^* \in A} \langle x^*, x \rangle.$$

Поскольку пространство, сопряженное с пространством X^* , наделенным слабой* топологией, есть X , и сопряженная функция к индикаторной функции $\delta(x^* | A)$ равна $\delta^*(x | A)$, то из теоремы Фенхеля–Моро [4] вытекает, что всякое непустое выпуклое слабо* замкнутое множество $A \subset X^*$ можно представить в виде [13]

$$A = \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, x \rangle \leq \delta^*(x | A), \ x \in X\}.$$

Отсюда сразу же следует, что если два непустых выпуклых слабо* замкнутых множества имеют одинаковые опорные функции, то они совпадают. При вычислении опорных функций мы будем использовать равенства [1], [13]

$$\delta^*(x \mid \overline{\text{conv}} A) = \delta^*(x \mid \text{conv } A) = \delta^*(x \mid A). \quad (3.2)$$

Опорная функция субдифференциала $\partial f(x_0)$ равна замыканию $\text{cl } f'(x_0; x)$ производной по направлению $f'(x_0; x)$ [14], [15]. А опорная функция правой части (3.1) в силу (3.2) равна верхней грани опорных функций субдифференциалов $\partial f_s(x_0)$, $s \in S(x_0)$. Поэтому формула (3.1) эквивалентна равенству

$$\text{cl } f'(x_0; x) = \sup_{s \in S(x_0)} \text{cl } f'_s(x_0; x), \quad x \in X, \quad (3.3)$$

ибо обе ее части являются непустыми выпуклыми слабо* замкнутыми подмножествами в X^* (слабая* замкнутость субдифференциала $\partial f(x_0)$ вытекает непосредственно из его определения, а его непустота – из включения [14])

$$\bigcup_{s \in S(x_0)} \partial f_s(x_0) \subset \partial f(x_0). \quad (3.4)$$

Согласно теоремам 2.1–2.5 для любого направления $\psi \in X = K(x_0 \mid \text{dom } f)$ справедлива формула (1.2). Геометрически это означает, что надграфик производной по направлению $f'(x_0; \cdot)$ равен пересечению надграфиков производных $f'_s(x_0; \cdot)$, $s \in S(x_0)$. Поскольку по определению надграфик замыкания функции равен замыканию ее надграфика, то для доказательства равенства (3.3) необходимо проверить, что замыкание пересечения надграфиков производных по направлению $f'_s(x_0; \cdot)$, $s \in S(x_0)$, равно пересечению их замыканий.

Как мы видели, все функции $f_s(x)$ непрерывны в точке x_0 . Поэтому их производные $f'_s(x_0; \cdot)$, непрерывны на всем пространстве X [4]. Следовательно, точка

$$(f'(x_0; \psi_1) + 1, \psi_1), \quad \psi_1 := x_1 - x_0, \quad (3.5)$$

является внутренней для надграфика каждой из функций $f'_s(x_0; \cdot)$, $s \in S(x_0)$ (см. неравенство (2.2)). Поэтому по теореме 6.5 из [15] замыкание пересечения этих надграфиков совпадает с пересечением их замыканий, что доказывает равенство (3.3), а вместе с ним и формулу (3.1). Теорема доказана.

Этот результат обобщает известную теорему о субдифференциале максимума выпуклых функций, полученную в [4] для компактного множества индексов.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Как мы видели, все функции $f_s(x)$, $s \in S$, непрерывны в точке x_0 , если она является алгебраически внутренней для $\text{dom } f$. В условиях теоремы 2.1 верно и обратное (см. (2.12)).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Для граничных точек x_0 формула (3.1) не верна даже для функций одной переменной (например, если $f_1(x) = x + 1$, $f_2(x) = \delta(x \mid [-\infty, 0])$ и $x_0 = 0$).

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть X – локально выпуклое пространство и выполнено любое из условий 2.1–2.5. Кроме того, пусть функции $f(s, x)$ пн. сверху по $s \in S$ при всех $x \in X$ и непрерывны по x при всех $s \in S$ в некоторой точке $x_1 \in \text{dom } f$, которая лежит внутри $\text{dom } f$, если множество S не компактно. Тогда при $x_0 \in \text{dom } f$

$$\partial f(x_0) = \overline{\text{conv} \bigcup_{s \in S(x_0)} \partial f_s(x_0) + N(x_0 | \text{dom } f)}. \quad (3.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 8.2 (см. ниже) субдифференциал $\partial f(x_0)$ будет пуст, только если пусты все субдифференциалы $\partial f_s(x_0)$, $s \in S(x_0)$. В этом случае формула (3.6) тривиальна. Пусть теперь множество

$$S_0 := \{s \in S(x_0) : \partial f_s(x_0) \neq \emptyset\}$$

непусто. Тогда в силу (3.4) субдифференциал $\partial f(x_0)$ тоже будет непуст. Поскольку в обеих частях формулы (3.6) стоят непустые (нормальный конус $N(x_0 | \text{dom } f)$ содержит нулевой вектор) выпуклые слабо* замкнутые множества в X^* , то для ее доказательства необходимо проверить, что их опорные функции совпадают.

Сначала заметим, что конус допустимых направлений $K(x_0 | \text{dom } f)$ является выпуклым множеством, поэтому индикаторная функция его замыкания выпукла и полунепрерывна снизу. Тогда по теореме Фенхеля–Моро с учетом (3.2) и (1.4) получаем

$$\begin{aligned} \delta(x | \overline{K}(x_0 | \text{dom } f)) &= \delta^{**}(x | \overline{K}(x_0 | \text{dom } f)) \\ &= (\delta^*)^*(x | K(x_0 | \text{dom } f)) = \delta^*(x | N(x_0 | \text{dom } f)). \end{aligned}$$

Так как опорная функция суммы множеств равна сумме их опорных функций, то из (3.2) и последнего равенства получаем, что формула (3.6) эквивалентна равенству

$$\text{cl } f'(x_0; x) = \sup_{s \in S_0} \text{cl } f'_s(x_0; x) + \delta(x | \overline{K}(x_0 | \text{dom } f)), \quad x \in X. \quad (3.7)$$

Согласно теоремам 2.1–2.5 для любого направления $\psi \in K(x_0 | \text{dom } f)$ справедлива формула (1.2). Кроме того, очевидно, что $f'(x_0; \psi) = +\infty$ при $\psi \notin K(x_0 | \text{dom } f)$. Геометрически это означает, что надграфик производной по направлению $f'(x_0; \cdot)$ равен пересечению надграфиков производных $f'_s(x_0; \cdot)$, $s \in S(x_0)$, и множества

$$Z := \mathbb{R}^1 \times K(x_0 | \text{dom } f). \quad (3.8)$$

Таким образом, для доказательства равенства (3.7) необходимо проверить, что замыкание пересечения всех этих множеств равно пересечению замыканий надграфиков производных по направлению $f'_s(x_0; \cdot)$, $s \in S_0$, и замыкания множества (3.8), равного

$$\overline{Z} = \mathbb{R}^1 \times \overline{K}(x_0 | \text{dom } f). \quad (3.9)$$

Поскольку производные по направлению $f'_s(x_0; \cdot)$ непрерывны при $s \in S_0$ в точке $\psi_1 := x_1 - x_0$ (см. [4, с. 206]), то точка (3.5) является внутренней для надграфика каждой из производных $f'_s(x_0; \cdot)$, $s \in S_0$. Так как по лемме 8.2 $f'_s(x_0; \psi_1) = -\infty$ при $s \in S(x_0) \setminus S_0$, и все функции $f_s(x)$ непрерывны в точке x_1 , то (3.5) является внутренней точкой также и для надграфиков производных $f'_s(x_0; \cdot)$, $s \in S(x_0) \setminus S_0$.

Сначала рассмотрим тот случай, когда $x_1 \in \text{int dom } f$. Тогда (3.5) – внутренняя точка множества (3.8), и по теореме 6.5 из [15] мы вновь получим, что замыкание пересечения надграфиков производных по направлению $f'_s(x_0; \cdot)$, $s \in S(x_0)$, и множества (3.8) совпадает с пересечением их замыканий, но в этот раз замыкания надграфиков производных по направлению $f'_s(x_0; \cdot)$, $s \in S(x_0) \setminus S_0$, уже соответствуют несобственным функциям.

Так как эффективное множество производной по направлению $f'_s(x_0; \cdot)$ есть $K(x_0 \mid \text{dom } f_s)$, то из п. в) леммы 8.2 вытекает, что замыкание надграфика такой производной равно

$$\text{cl ep } f'_s(x_0; \cdot) = \mathbb{R}^1 \times \overline{K}(x_0 \mid \text{dom } f_s), \quad s \in S(x_0) \setminus S_0. \quad (3.10)$$

Понятно, что пересечение с таким множеством не меняет значения функции, но меняет ее эффективное множество. Однако из соотношения (2.17) вытекает включение

$$K(x_0 \mid \text{dom } f) \subset K(x_0 \mid \text{dom } f_s), \quad s \in S. \quad (3.11)$$

В силу включения (3.11) пересечение множеств (3.10) и (3.9) равно множеству (3.9). Таким образом, замыкание надграфика производной по направлению $f'(x_0; \cdot)$ равно пересечению замыканий надграфиков производных $f'_s(x_0; \cdot)$, $s \in S_0$, и множества (3.9), что доказывает соотношение (3.7), а вместе с ним и формулу (3.6).

Остается рассмотреть случай, когда $x_1 \notin \text{int dom } f$, но множество индексов компактно. В этом случае мы воспользуемся соотношением (2.12), согласно которому можно заменить множество (3.8) на пересечение множеств

$$\mathbb{R}^1 \times K(x_0 \mid \text{dom } f_s), \quad s \in S. \quad (3.12)$$

Как мы видели, тогда надграфик производной по направлению $f'(x_0; \cdot)$ равен пересечению надграфиков производных $f'_s(x_0; \cdot)$, $s \in S(x_0)$, и множеств (3.12). Поскольку точка (3.5) является внутренней для всех этих множеств, то замыкание их пересечения совпадает с пересечением их замыканий. Замыкания множеств (3.12) равны

$$\mathbb{R}^1 \times \overline{K}(x_0 \mid \text{dom } f_s), \quad s \in S, \quad (3.13)$$

поэтому с учетом (3.10) пересечение замыканий надграфиков производных по направлению $f'_s(x_0; \cdot)$, $s \in S(x_0)$, и замыканий множеств (3.12) равно пересечению замыканий надграфиков производных $f'_s(x_0; \cdot)$, $s \in S_0$, и множеств (3.13). Но точка (3.5) является внутренней для каждого из множеств (3.12), поэтому замыкание их пересечения совпадает с пересечением их замыканий, т.е.

$$\overline{Z} = \bigcap_{s \in S} \mathbb{R}^1 \times \overline{K}(x_0 \mid \text{dom } f_s).$$

Таким образом, замыкание надграфика производной по направлению $f'(x_0; \cdot)$ равно пересечению замыканий надграфиков производных $f'_s(x_0; \cdot)$, $s \in S_0$, и множества (3.9), что доказывает соотношения (3.6) и (3.7) для компактного множества индексов. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Для некомпактного множества индексов условие $x_1 \in \text{int dom } f$ в теоремах 3.1, 3.2 можно заменить на условие (2.12). Для конечного множества индексов S окончательный результат получил М. Вой [28].

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Если в условиях любой из теорем 2.1–2.5 функция $f(x)$ непрерывна в некоторой точке локально выпуклого пространства X , то в точке $x_0 \in \text{dom } f$ справедлива формула (3.6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если выпуклая функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_1 \in X$, то она ограничена сверху в ее окрестности. Тогда будут ограничены сверху и функции $f_s(x)$, $s \in S$, и поэтому они тоже непрерывны в этой точке. Остается сослаться на теорему 3.2.

Формула (3.6) содержит операцию слабого* замыкания и поэтому недостаточно удобна для применения. Дальнейшие наши усилия будут направлены на то, чтобы снять операции замыкания и/или выпуклой оболочки из соотношений (3.1) и (3.6). В частности, как будет видно из следствия 4.2, в условиях теоремы 2.5 можно снять из (3.1) и (3.6) операции слабого* замыкания и выпуклой оболочки.

§ 4. Интегральные формулы для субдифференциала

Определим функции

$$\begin{aligned}\tilde{f}_s(x) &:= f_s(x) + \delta(x | \text{dom } f) = \begin{cases} f_s(x), & x \in \text{dom } f, \\ +\infty & \text{в других случаях.} \end{cases} \\ \tilde{f}(x) &= \sup_{s \in S(x_0)} \tilde{f}_s(x).\end{aligned}$$

Легко сообразить, что все они имеют одно и то же эффективное множество:

$$\text{dom } \tilde{f}_s = \text{dom } \tilde{f} = \text{dom } f, \quad s \in S, \quad (4.0)$$

и что

$$f(x) \geq \tilde{f}(x), \quad x \in X, \quad f(x_0) = \tilde{f}(x_0). \quad (4.1)$$

Обозначим через $W(x_0)$ множество всех вероятностных мер Радона μ на компакте $S(x_0)$ (см. замечание 2.2).

ТЕОРЕМА 4.1. В условиях теоремы 3.2 субдифференциал функции $f(x)$ в точке $x_0 \in \text{dom } f$ можно представить в виде

$$\partial f(x_0) = \partial \tilde{f}(x_0) = \overline{\text{conv}} \bigcup_{s \in S(x_0)} \partial \tilde{f}_s(x_0), \quad (4.2)$$

$$\partial f(x_0) = \bigcup_{\mu \in W(x_0)} \partial \left(\int \tilde{f}_s \mu(ds) \right)(x_0). \quad (4.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 3.2 в точке x_0 справедлива формула (3.6). Сначала заметим, что в силу леммы 8.4 ее можно записать в виде

$$\partial f(x_0) = \overline{\text{conv}} \bigcup_{s \in S(x_0)} [\partial f_s(x_0) + N(x_0 \mid \text{dom } f)]. \quad (4.4)$$

Теперь заметим, что поскольку по условию $x_1 \in \text{dom } f$ и функции $f_s(x)$ непрерывны в точке x_1 , то по теореме Моро–Рокафеллара [4]

$$\begin{aligned} \partial \tilde{f}_s(x_0) &= \partial(f_s + \delta(\cdot \mid \text{dom } f))(x_0) = \partial f_s(x_0) + \partial \delta(x_0 \mid \text{dom } f) \\ &= \partial f_s(x_0) + N(x_0 \mid \text{dom } f), \end{aligned} \quad (4.5)$$

так что из (4.4) и (4.5) мы получаем

$$\partial f(x_0) = \overline{\text{conv}} \bigcup_{s \in S(x_0)} \partial \tilde{f}_s(x_0). \quad (4.6)$$

Далее, из (4.1) следует, что $\partial \tilde{f}(x_0) \subset \partial f(x_0)$, а из (3.4) и слабой* замкнутости субдифференциала следует, что всегда

$$\overline{\text{conv}} \bigcup_{s \in S(x_0)} \partial \tilde{f}_s(x_0) \subset \partial \tilde{f}(x_0). \quad (4.6a)$$

Последние два включения и равенство (4.6) дают формулу (4.2). Формула (4.3) следует из теоремы 1.5 из [10] (примененной к функциям $\tilde{f}_s(x)$) и равенства (4.2). Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Пусть функции $f_s(x)$ вогнуты по s на выпуклом множестве $S(x_0)$ при всех $x \in \text{dom } f$ и удовлетворяют условиям теоремы 3.2. Тогда при $x_0 \in \text{dom } f$ имеет место равенство

$$\partial f(x_0) = \bigcup_{s \in S(x_0)} \partial f_s(x_0) + N(x_0 \mid \text{dom } f). \quad (4.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функции $\tilde{f}_s(x)$ пн. сверху и вогнуты по s на выпуклом множестве $S(x_0)$ при всех $x \in X$. Поэтому по леммам 8.5 и 8.6 множество

$$\bigcup_{s \in S(x_0)} \partial \tilde{f}_s(x_0)$$

будет выпуклым и слабо* замкнутым. Следовательно, можно снять из (4.6) операции слабого* замыкания и выпуклой оболочки, что с учетом (4.5) дает формулу (4.7).

Следуя [10], скажем, что субдифференциал $\partial f(x_0)$ допускает регулярное интегральное представление, если

$$\partial f(x_0) = \bigcup_{\mu \in W(x_0)} \int \partial f_s(x_0) \mu(ds), \quad (4.8)$$

т.е. всякий функционал $x^* \in \partial f(x_0)$ может быть представлен в виде

$$\langle x, x^* \rangle = \int \langle x, x^*(s) \rangle \mu(ds) \quad \forall x \in X,$$

где $\mu \in W(x_0)$ – вероятностная мера Радона на компакте $S(x_0)$, функция $x^*(\cdot): S(x_0) \rightarrow X^*$ слабо* μ -суммируема и $x^*(s) \in \partial f_s(x_0)$ μ -почти всюду на $S(x_0)$.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Пусть локально выпуклое пространство X сепарабельно, функции $f(s, x)$ пн. сверху по $s \in S$ при всех $x \in X$, а функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in X$. Тогда если выполнено любое из условий 2.1–2.5, то субдифференциал $\partial f(x_0)$ допускает регулярное интегральное представление (4.8).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию точка $x_0 = x_1$ лежит в $\text{int dom } f$, и выпуклая функция $f(x)$ ограничена в некоторой ее окрестности. Следовательно, выпуклые функции $f_s(x)$, $s \in S$, тоже ограничены в этой окрестности и поэтому непрерывны в точке x_0 . Таким образом, условия теоремы 4.1 выполнены, и мы можем воспользоваться представлением (4.3).

Из (4.1) видно, что $x_0 \in \text{int dom } \tilde{f}$ и функция $\tilde{f}(x)$ непрерывна в точке x_0 . Тогда по теореме 1.6 из [10], примененной к функциям $\tilde{f}_s(x)$, получаем

$$\partial \tilde{f}(x_0) = \bigcup_{\mu \in W(x_0)} \int \partial \tilde{f}_s(x_0) \mu(ds). \quad (4.9)$$

Поскольку $x_0 \in \text{int dom } f$, то ясно, что $N(x_0 \mid \text{dom } f) = \{0\}$. Тогда с учетом (4.5) можно заменить в (4.9) субдифференциалы функций $\tilde{f}_s(x)$ на субдифференциалы функций $f_s(x)$. Ввиду первого из равенств (4.2) это приводит к интегральному представлению (4.8).

Далее мы покажем, что в случае конечномерного пространства $X = \mathbb{R}^n$ можно заменить в (4.8) множество всех вероятностных мер Радона на множество всех дискретных вероятностных мер. В отличие от [9], [10] для этого мы воспользуемся не теоремой Хелли, а излагаемыми ниже результатами.

§ 5. Замыкания неограниченных выпуклых множеств в конечномерном пространстве

ПРИМЕР 1. Пусть $X = \mathbb{R}^2$, $f_1(x) = 0$ при $x_1 = 0$, иначе $f_1(x) = +\infty$, а $f_2(x) \equiv x_2$. Тогда $\partial f_1(0)$ – это прямая $x_2 = 0$, $\partial f_2(0)$ – точка $(0, 1)$, а их выпуклая оболочка – незамкнутая полоса $0 \leq x_2 < 1$ с присоединенной точкой $(0, 1)$. Если добавить (алгебраически) к ней нормальный конус $N(0 \mid \text{dom } f)$ – прямую $x_2 = 0$, – то мы получим замкнутую полосу $0 \leq x_2 \leq 1$ – субдифференциал $\partial f(0)$, – так что операция замыкания в формуле (3.6) оказывается лишней.

Следующие результаты показывают, что в конечномерном случае $X = \mathbb{R}^n$ это не случайно.

Напомним, что если выпуклое множество C содержит некоторый луч $\{x + \lambda y \mid \lambda \geq 0\}$, то направление y называется *рецессивным* для множества C . Назовем *рецессивным конусом* O^+C множества C множество всех его рецессивных направлений. В случае замкнутого выпуклого множества $C \subset \mathbb{R}^n$ это множество будет целиком содержать все лучи, исходящие из точек $x \in C$, если оно содержит в себе хотя бы один такой луч [15]. Отсюда можно вывести, что $O^+C = O^+\overline{C}$ для любого выпуклого множества $C \subset \mathbb{R}^n$.

ТЕОРЕМА 5.1. *Если выпуклая оболочка $\text{conv } A$ произвольного множества $A \subset \mathbb{R}^n$ не содержит прямых, то*

$$\overline{\text{conv}} A = \text{conv } \bar{A} + O^+ \text{conv } A. \quad (5.1)$$

По-видимому, впервые этот результат обнаружен Макфадденом [22]. Ввиду его принципиальной важности мы дадим здесь независимое доказательство (см. также [23]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $C := \overline{\text{conv}} A$. Покажем сначала, что

$$C = \text{conv}(\bar{A} + O^+ C). \quad (5.2)$$

По теореме Кли (см. [15, теорема 10.5]) замкнутое выпуклое множество C является выпуклой оболочкой множества всех своих крайних точек и крайних направлений. Заметим, что любое крайнее направление y_0 множества C является также крайним направлением рецессивного конуса $O^+ C$. Действительно, иначе луч $R := \{x + \lambda y_0, \lambda \geq 0\} \subset C$ является крайним в C , но $y_0 = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$, где $y_i \in O^+ C$, $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2$, и $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, причем векторы y_1 и y_2 не коллинеарны y_0 . Тогда в силу замкнутости множества C векторы $x + y_i$, не лежащие на луче R , будут лежать в C и в то же время $x + y_0 = \lambda_1(x + y_1) + \lambda_2(x + y_2)$, т.е. луч R не крайний для множества C .

Поэтому достаточно показать, что любая крайняя точка неограниченного выпуклого множества C принадлежит замыканию множества A . Сначала пусть $\bar{x}$ – выступающая точка C . Тогда $\bar{x} = \nabla \delta^*(\psi | C) = \nabla \delta^*(\psi | \bar{A})$ в некоторой точке ψ . Поскольку $\delta^*(\psi | \bar{A})$ – сопряженная функция к пн. снизу функции $\delta(\psi | \bar{A})$, то по теореме 1 из [17] (см. также [25]) получаем, что $\delta(\bar{x} | \bar{A}) = \delta^{**}(\bar{x} | \bar{A}) = \delta(\bar{x} | C) = 0$, т.е. $\bar{x} \in A$. По теореме Страшевича [15] каждая крайняя точка множества C является пределом его выступающих точек. Но мы сейчас показали, что все выступающие точки множества C лежат в множестве $\bar{A}$. Поэтому в силу замкнутости множества $\bar{A}$ оно содержит и все крайние точки множества C .

Теперь равенство (5.1) вытекает из (5.2) в силу леммы 8.4 и соотношения $O^+ C = O^+ \text{conv } A$. Теорема доказана.

Формула (5.1) может не иметь места, если выпуклая оболочка множества A содержит прямую, что показывает

ПРИМЕР 2. Пусть замкнутое множество $A \subset \mathbb{R}^2$ состоит из точек $(k, (1 + |k|)^{-1})$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Тогда его выпуклая оболочка $\text{conv } A$ – это открытая полоса $0 < x_2 < 1$ с присоединенной точкой $(0, 1)$. Добавив (алгебраически) к ней рецессивный конус $O^+ \text{conv } A$ – прямую $x_2 = 0$, – получим незамкнутую полосу $0 < x_2 \leq 1$.

Однако имеет место

ТЕОРЕМА 5.2. *Пусть A – произвольное множество в $\mathbb{R}^n$, целиком содержащее любую прямую, пересекающую это множество, если она параллельна некоторой прямой, принадлежащей его выпуклой оболочке. Тогда справедливо равенство (5.1).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $L := O^+C \cap \{-O^+C\}$ линейное подмножество множества C . Поскольку по условию $A+L \subset A$, то, как легко видеть, замыкание, выпуклую оболочку и рецессивный конус для множества A можно сначала вычислить не для самих этих множеств, а для их пересечений с ортогональным дополнением $L^\perp$ подпространства L , а затем добавить (алгебраически) L . Очевидно, что множество $\text{conv } A \cap L^\perp$ уже не содержит прямых. Поэтому по теореме 5.1 утверждение верно на подпространстве $L^\perp$, а потому и во всем пространстве. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 5.1. Если замкнутое множество $A \subset \mathbb{R}^n$ является объединением семейства выпуклых замкнутых множеств A_γ , $\gamma \in \Gamma$, таких, что $O^+A_\gamma = O^+ \text{conv } A$ при всех $\gamma \in \Gamma$, то его выпуклая оболочка замкнута и

$$\overline{\text{conv } A} = \left\{ \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j x_j : x_j \in A_{\gamma_j}, \gamma_j \in \Gamma, \alpha_j \geq 0, 1 \leq j \leq n+1, \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j = 1 \right\}. \quad (5.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию все выпуклые множества A_γ , $\gamma \in \Gamma$, и $\text{conv } A$ имеют общее линейное подмножество L , поэтому $A+L \subset A$, и по теореме 5.2 любая точка $x \in \overline{\text{conv } A}$ имеет вид $x = x_0 + y$, где $y \in O^+ \text{conv } A$, а $x_0 = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k$ – выпуклая комбинация некоторых точек $x_j \in A_{\gamma_j}$, $\gamma_j \in \Gamma$, $j = 1, \dots, k$. Тогда точка $x = \alpha_1(x_1 + y) + \dots + \alpha_k(x_k + y)$ является выпуклой комбинацией точек $x_j + y \in A_{\gamma_j}$, $j = 1, \dots, k$ (ибо рецессивные конусы множеств A_{γ_j} совпадают с $O^+ \text{conv } A$ и эти множества замкнуты). Это означает, что $x \in \text{conv } A$, т.е. множество $\text{conv } A$ замкнуто. Формула (5.3) теперь вытекает из теоремы Каратеодори [4].

СЛЕДСТВИЕ 5.2. Если множество $A \subset \mathbb{R}^n$ является объединением семейства выпуклых множеств A_γ , $\gamma \in \Gamma$, таких, что $O^+A_\gamma = O^+ \text{conv } A$ при всех $\gamma \in \Gamma$, то справедливо равенство (5.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если прямая $\{x + \lambda y_0, \lambda \in \mathbb{R}\}$ принадлежит выпуклой оболочке $\text{conv } A$ множества A , то вектор y_0 лежит в линейном подмножестве L множества $\text{conv } A$, которое совпадает с линейным подмножеством каждого из выпуклых множеств A_γ , $\gamma \in \Gamma$. Поэтому $A + L \subset A$, т.е. выполнены условия теоремы 5.2.

СЛЕДСТВИЕ 5.3. Пусть множество $A \subset \mathbb{R}^n$ является объединением выпуклых замкнутых множеств A_s , $s \in S$, имеющих общий рецессивный конус. Кроме того, пусть множество S будет компактным топологическим пространством и опорная функция $\delta^*(x | A_s)$ полунепрерывна сверху по s на S при каждом $x \in \mathbb{R}^n$. Тогда множества A и $\text{conv } A$ будут замкнуты, а рецессивный конус множеств A_s , $s \in S$, равен рецессивному конусу множества $\text{conv } A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Опорная функция $\delta^*(x | A)$ множества A равна верхней грани опорных функций $\delta^*(x | A_s)$, взятой по $s \in S$. Поскольку они пн. сверху по s на компакте S при каждом $x \in \mathbb{R}^n$, то по теореме Вейерштрасса эта верхняя грань конечна для тех x , для которых все числа $\delta^*(x | A_s)$, $s \in S$, конечны. Иначе говоря,

с учетом (3.2)

$$\operatorname{dom} \delta^*(\cdot \mid \operatorname{conv} A) = \bigcap_{s \in S} \operatorname{dom} \delta^*(\cdot \mid A_s). \quad (5.4)$$

Теперь воспользуемся тем, что рецессивный конус $O^+ A_s$ является полярной барьерного конуса $\operatorname{dom} \delta^*(\cdot \mid A_s)$ (см. [13, с. 35]). Так как по условию множества A_s , $s \in S$, имеют общий рецессивный конус, то полярные конусы $O^+ A_s$, равные замыканиям барьерных конусов $\operatorname{dom} \delta^*(\cdot \mid A_s)$, $s \in S$, тоже совпадают. Следовательно, конусы $\operatorname{dom} \delta^*(\cdot \mid A_s)$, $s \in S$, имеют общую относительную внутренность. Тогда в силу (5.4) ту же самую относительную внутренность имеет и конус $\operatorname{dom} \delta^*(\cdot \mid \operatorname{conv} A)$. Поскольку полярная любого конуса совпадает с полярной его относительной внутренности, то отсюда следует, что рецессивные конусы $O^+ A_s$, $s \in S$, совпадают с рецессивным конусом $O^+ \operatorname{conv} A$.

Докажем замкнутость множества A . Пусть точка a – предел точек $a_j \in A$. Тогда $a_j \in A_{s_j}$ для некоторых элементов $s_j \in S$. В силу компактности множества S можно считать, что $s_j \rightarrow s \in S$. Так как многозначное отображение $A_s: S \rightarrow \mathbb{R}^n$ имеет выпуклые замкнутые значения, а их опорная функция $\delta^*(x \mid A_s)$ пн. сверху по s на S при каждом $x \in \mathbb{R}^n$, то оно имеет замкнутый график (см. [13, с. 128]). Поэтому $a \in A_s$ для некоторого $s \in S$. Тем самым множество A замкнуто.

Для завершения доказательства остается сослаться на следствие 5.3.

Для конечного множества индексов последний результат известен (см. следствие 9.8.1 из [15]).

Возвращаясь к субдифференциалу максимума выпуклых функций, заметим, что согласно лемме 8.3 $N(x_0 \mid \operatorname{dom} f) = O^+ \partial f(x_0)$. С учетом следствия 5.1 это позволяет в конечномерном случае снять операцию замыкания из формул (3.1) и (3.6) (см. далее формулы (7.2) и (6.1) соответственно).

§ 6. Конечномерный случай

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть $X = \mathbb{R}^n$ – конечномерное пространство и выполнено любое из условий 2.1–2.5. Кроме того, пусть функции $f(s, x)$ пн. сверху по $s \in S$ при всех $x \in X$ и найдется точка $x_1 \in \operatorname{ri} \operatorname{dom} f_s$, $s \in S$, лежащая в $\operatorname{ri} \operatorname{dom} f$, если множество S не компактно. Тогда при $x_0 \in \operatorname{dom} f$ имеем

$$\partial f(x_0) = \left\{ \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j x_j^* + x_0^* \left| \begin{array}{l} x_j^* \in \partial f_{s_j}(x_0), \quad s_j \in S(x_0), \quad \alpha_j \geq 0, \\ j = 1, \dots, n+1, \quad \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j = 1, \quad x_0^* \in N(x_0 \mid \operatorname{dom} f) \end{array} \right. \right\}. \quad (6.1)$$

Более того, в случае условия 2.5 справедлива формула (4.7).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $x_1 \in \operatorname{ri} \operatorname{dom} f_s$, то $\partial f_s(x_1) \neq \emptyset$ [15], и поэтому функции $f_s(x)$ не принимают значение $-\infty$. Покажем, что $x_1 \in \operatorname{ri} \operatorname{dom} f$ и в том случае, когда множество S компактно. Действительно, так как $x_1 \in \operatorname{ri} \operatorname{dom} f_s$,

то $K(x_1 \mid \text{dom } f_s)$ – линейное подпространство при всех $s \in S$. Поэтому согласно (2.12) конус $K(x_1 \mid \text{dom } f)$, равный пересечению этих подпространств, тоже будет линейным подпространством. А это означает, что $x_1 \in \text{ri dom } f$, а потому вектор $\psi_1 = x_1 - x_0$ является относительно внутренним в конусах допустимых направлений $K(x_0 \mid \text{dom } f)$ и $K(x_0 \mid \text{dom } f_s)$, $s \in S$ (очевидно, что это справедливо и для некомпактного множества S).

Теперь докажем формулу (3.6). Для этого воспользуемся тем, что в конечномерном пространстве субдифференциал выпуклой функции будет пустым только тогда, когда производные по всем относительно внутренним направлениям равны $-\infty$ [15]. Поскольку вектор ψ_1 является относительно внутренним в конусах $K(x_0 \mid \text{dom } f)$ и $K(x_0 \mid \text{dom } f_s)$, то из формулы (1.2) вытекает, что субдифференциал $\partial f(x_0)$ будет пуст лишь в том случае, когда будут пусты все субдифференциалы $\partial f_s(x_0)$, $s \in S(x_0)$. В этом случае формула (3.6), очевидно, выполняется.

Пусть теперь субдифференциалы $\partial f_s(x_0)$ не пусты при $s \in S_0$. Тогда в обеих частях формулы (3.6) будут стоять непустые выпуклые замкнутые множества, причем опорная функция правой части имеет вид (3.7). Кроме того, по теоремам 2.1–2.5 надграфик производной по направлению $f'(x_0; \cdot)$ равен пересечению надграфиков производных $f'_s(x_0; \cdot)$, $s \in S(x_0)$, и множества (3.8).

Так как эффективным множеством производной $f'_s(x_0; \cdot)$ является конус допустимых направлений $K(x_0 \mid \text{dom } f_s)$, то вектор ψ_1 является относительно внутренним для этих эффективных множеств. Поскольку он является относительно внутренним и в конусе $K(x_0 \mid \text{dom } f)$, то $f'(x_0; \psi_1) \neq +\infty$. А так как $\partial f(x_0) \neq \emptyset$, то $f'(x_0; \psi_1) \neq -\infty$, т.е. эта производная конечна. Тогда в силу неравенства (2.2) точка (3.5) будет относительно внутренней для надграфика каждой из производных $f'_s(x_0; \cdot)$, $s \in S(x_0)$. Очевидно, что она относительно внутренняя и для множества (3.8). По теореме 6.5 из [15] замыкание пересечения всех этих множеств равно пересечению их замыканий.

Поскольку $f'_s(x_0; \psi) = -\infty$ при $s \in S(x_0) \setminus S_0$ для всех относительно внутренних направлений конуса $K(x_0 \mid \text{dom } f_s)$, то замыкания надграфиков производных $f'_s(x_0; \cdot)$ при $s \in S(x_0) \setminus S_0$ дают множества (3.10). А замыкание множества (3.8) имеет вид (3.9). В силу включения (3.11) пересечение множеств (3.10) и (3.9) равно множеству (3.9). Таким образом, замыкание надграфика производной по направлению $f'(x_0; \cdot)$ равно пересечению замыканий надграфиков производных $f'_s(x_0; \cdot)$, $s \in S_0$, и множества (3.9). Как мы видели, это доказывает формулу (3.6).

Теперь заметим, что справедливо также равенство (4.2). Действительно, его доказательство, данное в теореме 4.1, опиралось лишь на равенства (3.6) и (4.5). Первое из них, как мы только что показали, выполняется. А второе следует из теоремы 23.8 из [15], поскольку во всех случаях $x_1 \in \text{ri dom } f \cap \text{ri dom } f_s$, $s \in S$.

Далее, по лемме 8.3 в силу (4.0) все субдифференциалы $\partial \tilde{f}_s(x_0)$, $s \in S(x_0)$, и $\partial \tilde{f}(x_0)$ имеют один и тот же рецессивный конус. Они выпуклы и замкнуты, а по лемме 8.6 будет замкнутым и объединение всех субдифференциалов $\partial \tilde{f}_s(x_0)$, $s \in S(x_0)$. Тогда по следствию 5.1 выпуклая оболочка этого объединения тоже замкнута. Это означает, что из формулы (4.2) можно убрать замыкание:

$$\partial f(x_0) = \text{conv} \bigcup_{s \in S(x_0)} \partial \tilde{f}_s(x_0).$$

Используя теорему Каратеодори [4], отсюда получаем, что

$$\partial f(x_0) = \left\{ \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j \tilde{x}_j^* : \tilde{x}_j^* \in \partial \tilde{f}_{s_j}(x_0), s_j \in S(x_0), \right. \\ \left. \alpha_j \geq 0, 1 \leq j \leq n+1, \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j = 1 \right\}.$$

Формула (6.1) теперь следует из доказанного нами равенства (4.5) и выпуклости нормального конуса $N(x_0 | \text{dom } f)$. В условиях теоремы 2.5 по лемме 8.5 из формулы (4.2) можно убрать не только операцию замыкания, но и выпуклой оболочки, что дает формулу (4.7). Теорема доказана.

Любопытно, что в том случае, когда все функции $f_s(x)$, $s \in S$, имеют общую область определения $\text{dom } f_s = \text{dom } f := M$, $s \in S$, нормальный конус $N(x_0 | \text{dom } f)$ “прячется” в субдифференциалах $\partial f_s(x_0)$, $s \in S$. В такой форме (при дополнительных условиях замкнутости множества M и полунепрерывности снизу функций $f_s(x)$, $s \in S$, на этом множестве) формула (6.1) получена В.Л. Левиным (см. [9], [10]). Очевидно, что нормальный конус исчезает из формулы (6.1) и в том случае, когда точка x_0 лежит внутри множества $\text{dom } f$.

§ 7. Случай произвольного множества индексов

Далее S – произвольное множество индексов. В теоремах 7.1, 7.3 предполагается, что в (1.1) достигается максимум. Обозначим через $\text{dom}(\partial f^*)$ множество всех векторов $x^* \in X^*$ таких, что $\partial f^*(x^*) \neq \emptyset$.

В тех случаях, когда явно не оговаривается противное, X будет локально выпуклым пространством.

ТЕОРЕМА 7.1. Пусть $f_s(x): X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $s \in S$, – произвольное семейство пн. снизу выпуклых функций, и пусть множество $S(x)$ не пусто при всех $x \in \text{dom}(\partial f)$. Тогда следующие свойства эквивалентны:

- а) $\partial f(x) = \bigcup_{s \in S(x)} \partial f_s(x)$ при всех $x \in \text{dom } f$;
 - б) множество $S^*(x^*) := \{s \in S | f_s^*(x^*) = f^*(x^*)\}$ не пусто при всех $x^* \in \text{dom}(\partial f^*)$;
 - в) множество $S(x) \cap S^*(x^*)$ не пусто для всех $x^* \in \partial f(x)$;
 - г) если $x^* \in \partial f(x)$, то $x^* \in \partial f_s(x)$ для некоторого $s \in S(x) \cap S^*(x^*)$;
 - д) если $x \in \partial f^*(x^*)$, то $x \in \partial f_s^*(x^*)$ для некоторого $s \in S(x) \cap S^*(x^*)$.
- В этом случае

$$f^*(x^*) = \min_{s \in S} f_s^*(x^*), \quad x^* \in \text{dom}(\partial f^*). \quad (7.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность этих свойств докажем по схеме а) $\Leftrightarrow$ б) $\Rightarrow$ д) $\Leftrightarrow$ г) $\Rightarrow$ в) $\Rightarrow$ б). Если $x^* \in \text{dom}(\partial f^*)$, то найдется вектор $x \in \partial f^*(x^*)$. В силу полунепрерывности снизу функции $f(x)$ поэтому $x^* \in \partial f(x)$, т.е. $x \in \text{dom}(\partial f)$. Тогда по лемме 8.8 из а) следует б).

Наоборот, пусть выполнено б) и $x \in \text{dom}(\partial f)$ (иначе свойство а) тривиально). Тогда найдется $x^* \in \partial f(x)$. Следовательно, $x \in \partial f^*(x^*)$, т.е. $x^* \in \text{dom}(\partial f^*)$. По условию б) поэтому $S^*(x^*) \neq \emptyset$ и по лемме 8.7 найдется элемент $s \in S(x) \cap S^*(x^*)$ такой, что $x \in \partial f_s^*(x^*)$, т.е. $x^* \in \partial f_s(x)$ в силу полунепрерывности снизу функции $f_s(x)$. В силу произвольности элемента $x^* \in \partial f(x)$ это означает, что

$$\partial f(x) \subset \bigcup_{s \in S(x)} \partial f_s(x).$$

Но обратное включение очевидно: если $x^* \in \partial f_s(x)$ и $f_s(x) = f(x)$, то

$$f(\tilde{x}) - f(x) \geq f_s(\tilde{x}) - f_s(x) \geq \langle x^*, \tilde{x} - x \rangle \quad \forall \tilde{x} \in X,$$

т.е. $x^* \in \partial f(x)$.

Утверждение д) следует из б) по лемме 8.7. Свойство д) эквивалентно г) в силу полунепрерывности снизу функций $f_s(x)$ и $f(x)$. То, что из г) следует в), а из в) следует б), очевидно. Теорема доказана.

В [25] дан содержательный пример применения равенства (7.1).

ТЕОРЕМА 7.2. Пусть $f_s(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $s \in S$, — произвольное семейство выпуклых функций, и пусть $\tilde{f}_s(x) := f_s(x)$, если $x \in \text{dom } f$, а иначе $\tilde{f}_s(x) := +\infty$. Предположим, что нижняя грань $\inf_{s \in S} \tilde{f}_s^*(x^*)$ достигается всюду, где она конечна и пн. снизу на $\mathbb{R}^n$ (как функция переменной x^*). Тогда при всех $x_0 \in \text{dom } f$ имеет место равенство

$$\partial f(x_0) = \left\{ \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j x_j^* : x_j^* \in \partial \tilde{f}_{s_j}(x_0), s_j \in S(x_0), \alpha_j \geq 0, \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j = 1 \right\}. \quad (7.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Объединение выпуклых замкнутых множеств $\text{epi } \tilde{f}_s^*$, $s \in S$, замкнуто по предположению. Поскольку $\text{dom } \tilde{f}_s = \text{dom } f$ для всех $s \in S$, то эти множества имеют общий рецессивный конус, совпадающий с рецессивным конусом надграфика $\text{epi } f^*$ (см. [15, теорема 13.3]). Поэтому согласно следствию 5.1 (см. также [15, теорема 16.5]) надграфик $\text{epi } f^*$ является выпуклой оболочкой этого объединения, т.е. для всех $x^* \in \text{dom } f^*$ имеем

$$f^*(x^*) = \sum \alpha_j \beta_j, \quad x^* = \sum \alpha_j x_j^*, \quad (7.3)$$

где

$$\beta_j \geq \tilde{f}_{s_j}^*(x_j^*), \quad s_j \in S, \quad \alpha_j > 0, \quad \sum \alpha_j = 1. \quad (7.4)$$

Теперь пусть $x^* \in \partial f(x)$. Тогда [15]

$$f(x) + f^*(x^*) = \langle x, x^* \rangle. \quad (7.5)$$

Поскольку $f(x) \geq \sum \alpha_j f_{s_j}(x)$, то из (7.3)–(7.5) получаем, что

$$\sum \alpha_j f_{s_j}(x) + \sum \alpha_j \tilde{f}_{s_j}^*(x_j^*) \leq \sum \alpha_j \langle x, x_j^* \rangle.$$

С другой стороны, поскольку $x \in \text{dom } f$, то $\tilde{f}_s(x) = f_s(x)$, поэтому

$$f_{s_j}(x) + \tilde{f}_{s_j}^*(x_j^*) \geq \langle x, x_j^* \rangle$$

для всех индексов j . Последние два неравенства могут выполняться, лишь только когда достигаются равенства

$$f_{s_j}(x) + \tilde{f}_{s_j}^*(x_j^*) = \langle x, x_j^* \rangle, \quad f_{s_j}(x) = f(x),$$

что эквивалентно включениям $x_j^* \in \partial \tilde{f}_{s_j}(x)$ и $s_j \in S(x)$ для всех индексов j . Таким образом, субдифференциал $\partial f(x)$ принадлежит правой части формулы (7.2). Обратное включение тривиально. Теорема доказана.

Условия теоремы 7.2 выполняются в том случае, когда все функции $f_s(x)$ пн. сверху по s на компакте S при любом $x \in \text{dom } f$ и имеют общую область определения $\text{dom } f_s = \text{dom } f := M$, $s \in S$ (см. [9], [10]).

ТЕОРЕМА 7.3. Пусть $f_s(x): X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $s \in S$, – произвольное семейство выпуклых функций таких, что функция $f(x)$ непрерывна в некоторой точке $x_1 \in X$, и множество $S(x)$ не пусто при всех $x \in \text{int dom } f$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- а) при всех $x_0 \in \text{int dom } f$ справедливо равенство (3.1);
- б) верхняя грань $\sup_{s \in S(x)} f'_s(x; \psi)$ пн. сверху по x на любом отрезке внутри $\text{dom } f$ при фиксированных $\psi \in X$.

В этом случае при всех $x_0 \in \text{int dom } f$ имеет место равенство (1.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим многозначное отображение $F(x): \text{int dom } f \rightarrow X^*$ с непустыми выпуклыми слабо* компактными значениями:

$$F(x) := \overline{\text{con}} \bigcup_{s \in S(x)} \partial f_s(x).$$

Действительно, из непрерывности функции $f(x)$ следует непрерывность, а потому и субдифференцируемость функций $f_s(x)$ на множествах $\text{int dom } f_s(x) \supset \text{int dom } f(x)$, $s \in S$, поэтому множества $F(x)$ не пусты. А поскольку $F(x) \subset \partial f(x)$ (см. (4.6а)), то $F(x)$ – слабо* замкнутое подмножество слабо* компактного субдифференциала $\partial f(x)$. При $x \in \text{int dom } f$ его опорная функция равна (см. (3.2))

$$\delta^*(\psi | F(x)) = \sup_{s \in S(x)} \delta^*(\psi | \partial f_s(x)) = \sup_{s \in S(x)} f'_s(x; \psi). \quad (7.6)$$

По условию она пн. сверху по x , поэтому многозначное отображение $\lambda \rightarrow F(x_0 + \lambda\psi)$ имеет замкнутый график (см. [13, с. 128]; в дальнейшем пространство X^* рассматривается в слабой* топологии).

Итак, $F(x) \subset \partial f(x)$. Предположим, что найдутся $x_0 \in \text{int dom } f$ и $x_0^* \in \partial f(x_0)$ такие, что $x_0^* \notin F(x_0)$. Тогда по второй теореме отделимости найдутся вектор $\psi \in X$, $\psi \neq 0$, и число $\varepsilon > 0$ такие, что [4]

$$\langle x^*, \psi \rangle \leq \langle x_0^*, \psi \rangle - \varepsilon \quad \forall x^* \in F(x_0). \quad (7.7)$$

Рассмотрим направленность $x(\lambda) := x_0 + \lambda\psi$, $\delta \geq \lambda \geq 0$, в которой δ достаточно мало, так что $x(\lambda) \in \text{int dom } f$ при всех $\lambda \in [0, \delta]$. Выберем любые элементы $x^*(\lambda) \in F(x(\lambda))$. Поскольку субдифференциальное отображение $\lambda \rightarrow \partial f(x(\lambda))$ пн. сверху [13] и имеет слабо* компактные значения (см. [8, с. 176]), то образом компакта $[0, \delta]$ при таком отображении будет слабо* компактное множество [13], в котором и будут лежать векторы $x^*(\lambda) \in F(x(\lambda)) \subset \partial f(x(\lambda))$. Следовательно, из направленности $x^*(\lambda)$, $\delta \geq \lambda \geq 0$, в которой индекс λ направлен по убыванию, можно выделить поднаправленность $x^*(\lambda(\alpha))$, $\alpha \in A$, слабо* сходящуюся к элементу x^* . Так как $\lambda(\alpha) \rightarrow 0$ и многозначное отображение $\lambda \rightarrow F(x_0 + \lambda\psi)$ имеет замкнутый график, то $x^* \in F(x_0)$. Поскольку субдифференциальное отображение $x \rightarrow \partial f(x)$ монотонно, то $\langle x^*(\lambda(\alpha)) - x_0^*, x(\lambda(\alpha)) - x_0 \rangle \geq 0$, т.е. $\langle x^*(\lambda(\alpha)) - x_0^*, \psi \rangle \geq 0$. В пределе получим $\langle x^* - x_0^*, \psi \rangle \geq 0$, что противоречит неравенству (7.7).

Таким образом, $x_0^* \in F(x_0)$, что доказывает (3.1) для всех $x_0 \in \text{int dom } f$. Наоборот, пусть выполнено утверждение а). Тогда в силу (7.6) при всех $x_0 \in \text{int dom } f$ будет справедливо равенство (1.2), и из непрерывности функции $f(x)$ будет следовать полунепрерывность сверху производной $f'(x_0; \psi)$ (см. [13], [15]), а вместе с ней и правой части (1.2) по переменной x_0 при каждом $\psi \in X$. Теорема доказана.

Последние две теоремы возникли под влиянием красивых результатов, принадлежащих М. Вою и А. В. Тимохову (см. [28, с. 150] и [20, с. 107] соответственно).

СЛЕДСТВИЕ 7.1. Пусть $f_s(x): X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $s \in S$, — произвольное семейство выпуклых функций, дифференцируемых по Гато на $\text{int dom } f$, таких, что функция $f(x)$ непрерывна в некоторой точке $x_1 \in X$, и множество $S(x)$ односточечно при всех $x \in \text{int dom } f$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- а) функция $f(x)$ дифференцируема по Гато на $\text{int dom } f$;
- б) функция $\langle \nabla f_{S(x)}(x), \psi \rangle$ непрерывна по x на любом отрезке внутри $\text{dom } f$ при фиксированных $\psi \in X$.

В этом случае $\nabla f(x) = \nabla f_{S(x)}(x)$ при всех $x \in \text{int dom } f$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если функции $f_s(x)$ дифференцируемы по Гато, то $\partial f_s(x) = \{\nabla f_s(x)\}$ [21], поэтому формула (3.1) имеет вид $\partial f(x) = \{\nabla f_{S(x)}(x)\}$. Так как функция $f(x)$ непрерывна на $\text{int dom } f$, то она дифференцируема по Гато [21].

СЛЕДСТВИЕ 7.2. Пусть в условиях следствия 7.1 либо 1) отображение $\nabla f_{S(x)}(x): X \rightarrow X^*$ непрерывно на любом отрезке внутри $\text{dom } f$, либо 2) однозначное отображение $S(x)$ непрерывно на любом отрезке внутри $\text{dom } f$, и выполнено условие (1.6). Тогда функция $f(x)$ дифференцируема по Гато и $\nabla f(x) = \nabla f_{S(x)}(x)$ при $x \in \text{int dom } f$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если однозначное отображение $F(x) = \nabla f_{S(x)}(x)$ непрерывно на любом отрезке внутри $\text{dom } f$, то выполнено условие б) следствия 7.1. Во втором случае выполнены условия теорем 3.1 и 2.2, и правая часть формулы (3.1) опять состоит из одной точки $\nabla f_{S(x)}(x)$. Так как функция $f(x)$ непрерывна, то она дифференцируема по Гато.

Пусть X – гильбертово пространство. Напомним, что множество $S \subset X$ называется *чебышевским*, если для любой точки $x \in X$ существует ровно один элемент $s = s(x) \in S$ такой, что

$$|s(x) - x| = \rho(x, S) := \inf_{s \in S} |s - x|, \quad x \in X.$$

Отображение $s(x): X \rightarrow S$ называется *метрической проекцией*. Классический результат теории приближений таков: если метрическая проекция на чебышевское множество S непрерывна, то это множество выпукло.

Здесь мы докажем, что это утверждение верно при следующем ослабленном условии непрерывности: функция $x \rightarrow \langle s(x), \psi \rangle$ непрерывна по $x \in X$ на любом отрезке в X при фиксированных $\psi \in X$. С этой целью рассмотрим функцию

$$f(x) := \frac{|x|^2}{2} - \frac{\rho^2(x, S)}{2} = \sup_{s \in S} \left\{ \langle s, x \rangle - \frac{|s|^2}{2} \right\}. \quad (7.8)$$

Так как S – чебышевское множество, то верхняя грань по $s \in S$ достигается ровно на одном элементе $s = s(x) \in S$. Поэтому согласно следствию 7.1 функция $f(x)$ дифференцируема по Гато. С учетом тождества (7.8) это справедливо и для функции $\rho^2(x, S)$. Из одного малоизвестного результата Л. П. Власова (см. [29, теорема 9], а также [30, § 1.2]) тогда следует, что чебышевское множество S выпукло.

§ 8. Вспомогательные результаты

В формуле (3.6) часть субдифференциалов может быть пуста. В таких случаях необходимы критерии пустоты субдифференциала.

ЛЕММА 8.1. Если функция $g(x): X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ выпукла и непрерывна в точке $x_1 \in X$, то следующие утверждения эквивалентны:

- а) $\partial g(x_0) = \emptyset$, $x_0 \in \text{dom } g$;
- б) $x_0 \notin \text{int dom } g$ и $g'(x_0; x_1 - x_0) = -\infty$;
- в) $g'(x_0; x - x_0) = -\infty \quad \forall x \in \text{int dom } g$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если выпуклая функция $g(x)$ непрерывна в некоторой точке, то она не принимает значения $-\infty$, ее эффективное множество имеет непустую внутренность $\text{int dom } g$ и $\partial g(x) \neq \emptyset$ при $x \in \text{int dom } g$ [4]. Поэтому из условия а) следует, что $x_0 \notin \text{int dom } g$. Так как по условию $x_1 \in \text{int dom } g$, то $g'(x_0; \psi_1) \neq +\infty$, где $\psi_1 := x_1 - x_0$. Если бы производная по направлениям $g'(x_0; \psi)$ была конечной в точке ψ_1 , то она была бы непрерывна в этой точке (см. [4, с. 206]), а потому в ней и субдифференцируема:

$$g'(x_0; x) \geq \langle x^*, x \rangle, \quad x \in X.$$

Следовательно, $x^* \in \partial g(x_0)$ (см. [14, с. 44]), т.е. $\partial g(x_0) \neq \emptyset$. Полученное противоречие показывает, что $g'(x_0; \psi_1) = -\infty$. Таким образом, из а) следует б).

Чтобы увидеть, что из б) следует в), достаточно заметить, что при $x \in \text{int dom } g$ точка $\psi = x - x_0$ является внутренней в эффективном множестве выпуклой функции $g'(x_0; \cdot)$, которая принимает значение $-\infty$ в точке ψ_1 (см. [14, с. 36]). То, что из в) следует а), очевидно.

ЛЕММА 8.2. *Если выполнены условия любой из теорем 2.1–2.5 и функции $f_s(x)$, $s \in S$, непрерывны в некоторой точке $x_1 \in \text{dom } f$, то следующие утверждения эквивалентны:*

- а) $\partial f(x_0) = \emptyset$, $x_0 \in \text{dom } f$;
- б) $\partial f_s(x_0) = \emptyset \quad \forall s \in S(x_0)$;
- в) $f'_s(x_0; x_1 - x_0) = -\infty \quad \forall s \in S(x_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (3.4) из а) следует б), а по лемме 8.1 из б) следует в). Если же выполнено в), то по теоремам 2.1–2.5 имеем $f'(x_0; x_1 - x_0) = -\infty$, так как $x_1 - x_0 \in K(x_0 | \text{dom } f)$. Очевидно, что тогда $\partial f(x_0) = \emptyset$, т.е. из в) следует а).

ЛЕММА 8.3. *Для любой функции $g(x): X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ при $x_0 \in \text{dom } g$*

$$O^+ \partial g(x_0) = N(x_0 | \text{dom } g).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (1.5) $N(x_0 | \text{dom } g) \subset O^+ \partial g(x_0)$. Докажем обратное. Пусть $x_0^* + \lambda x^* \in \partial g(x_0)$ при всех $\lambda \geq 0$. Тогда

$$g(x) \geq g(x_0) + \langle x_0^* + \lambda x^*, x - x_0 \rangle \quad \text{при всех } x \in X \text{ и } \lambda \geq 0.$$

Поделив это неравенство на $\lambda > 0$, при $\lambda \rightarrow +\infty$ получим $\langle x^*, x - x_0 \rangle \leq 0 \quad \forall x \in \text{dom } g$. Таким образом, если $x^* \in O^+ \partial g(x_0)$, то $x^* \in N(x_0 | \text{dom } g)$.

ЛЕММА 8.4. *Если A и B – подмножества линейного пространства X , причем B выпукло, то $\text{conv}(A + B) = \text{conv } A + B$.*

Утверждение следует из того, что выпуклая оболочка множества состоит из конечных выпуклых комбинаций его элементов.

ЛЕММА 8.5. *Если функции $f_s(x)$ вогнуты по s на выпуклом множестве $S(x_0)$ при всех $x \in X$, то будет выпуклым также и множество*

$$P := \bigcup_{s \in S(x_0)} \partial f_s(x_0). \quad (8.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $s_i \in S(x_0)$, $x_i^* \in \partial f_{s_i}(x_0)$, $\alpha_i > 0$, $i = 1, 2$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, $x \in X$. Тогда согласно (1.3) имеем

$$f(s_i, x) \geq f(x_0) + \langle x_i^*, x - x_0 \rangle, \quad i = 1, 2,$$

откуда в силу вогнутости функции $f_s(x)$ по s получим

$$f(\alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2, x) \geq \alpha_1 f(s_1, x) + \alpha_2 f(s_2, x) \geq f(x_0) + \langle \alpha_1 x_1^* + \alpha_2 x_2^*, x - x_0 \rangle.$$

Поскольку множество $S(x_0)$ выпукло, то $s_0 := \alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 \in S(x_0)$, т.е. $f(s_0, x_0) = f(x_0)$. Тогда полученное неравенство означает, что $\alpha_1 x_1^* + \alpha_2 x_2^* \in \partial f_{s_0}(x_0)$, и, следовательно, множество P выпукло.

ЛЕММА 8.6. Если функции $f_s(x)$ пн. сверху по s на компактном множестве $S(x_0)$ при всех $x \in X$, то множество (8.1) слабо* замкнуто.

Доказательство аналогично доказательству теоремы об очистке (см. [4, с. 216]).

ЛЕММА 8.7. Пусть $f_s(x): X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $s \in S$, – любое семейство пн. снизу выпуклых функций таких, что множество $S_0^* := \{s \in S : f_s^*(x_0^*) = f^*(x_0^*)\}$ не пусто. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- а) $x_0 \in \partial f^*(x_0^*)$;
- б) существует элемент $s \in S(x_0) \cap S_0^*$ такой, что $x_0 \in \partial f_s^*(x_0^*)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $x_0 \in \partial f_s^*(x_0^*)$ при $s \in S(x_0) \cap S_0^*$, то в силу полунепрерывности снизу функций $f_s(x)$ имеем

$$f_s(x_0) + f_s^*(x_0^*) = \langle x_0, x_0^* \rangle, \quad (8.2)$$

$$f(x_0) = f_s(x_0), \quad f^*(x_0^*) = f_s^*(x_0^*), \quad (8.3)$$

что дает

$$f(x_0) + f^*(x_0^*) = \langle x_0, x_0^* \rangle, \quad (8.4)$$

т.е. $x_0 \in \partial f^*(x_0^*)$ (см. [15, теорема 23.5]).

Наоборот, если $x_0 \in \partial f^*(x_0^*)$, то в силу полунепрерывности снизу функции $f(x)$ выполнено (8.4). Так как $S_0^* \neq \emptyset$, то существует элемент $s \in S_0^*$ такой, что $f(x_0) + f_s^*(x_0^*) = \langle x_0, x_0^* \rangle$. Поскольку $f(x_0) \geq f_s(x_0)$, то $f_s(x_0) + f_s^*(x_0^*) \leq \langle x_0, x_0^* \rangle$. Но это неравенство не может быть строгим. Поэтому выполнено (8.2) и $f(x_0) = f_s(x_0)$, т.е. $x_0 \in \partial f_s^*(x_0^*)$ (по той же теореме 23.5 из [15]) и $s \in S(x_0)$.

ЛЕММА 8.8. Пусть $f_s(x)$, $s \in S$, – произвольное семейство функций, и пусть $x_0^* \in \partial f(x_0)$, причем

$$\partial f(x_0) = \bigcup_{s \in S(x_0)} \partial f_s(x_0) \quad (8.5)$$

(в частности, $S(x_0) \neq \emptyset$). Тогда $S_0^* \neq \emptyset$ и

$$f^*(x_0^*) = \min_{s \in S} f_s^*(x_0^*). \quad (8.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Поскольку $f(x) \geq f_s(x)$, то $f^*(x^*) \leq f_s^*(x^*)$, $s \in S$, и, следовательно,

$$f^*(x^*) \leq \inf_{s \in S} f_s^*(x^*). \quad (8.7)$$

Тогда из предположения о пустоте множества S_0^* вытекает, что

$$f_s^*(x_0^*) > f^*(x_0^*) \quad \forall s \in S. \quad (8.8)$$

По теореме 23.5 из [15] включение $x_0^* \in \partial f(x_0)$ эквивалентно равенству (8.4). С учетом (8.8) поэтому получаем

$$f(x_0) + f_s^*(x_0^*) > \langle x_0, x_0^* \rangle \quad \forall s \in S.$$

Но при $s \in S(x_0)$ это неравенство означает, что

$$f_s(x_0) + f_s^*(x_0^*) > \langle x_0, x_0^* \rangle,$$

т.е. по той же теореме $x_0^* \notin \partial f_s(x_0)$ для любого $s \in S(x_0)$. Таким образом, $x_0^* \notin \bigcup_{s \in S(x_0)} \partial f_s(x_0)$, что противоречит (8.5). Равенство (8.6) следует из (8.7) и непустоты множества S_0^* .

Автор признателен профессорам В.М. Тихомирову и Ж.-Б. Ириар-Уррути за помощь в этой работе.

Список литературы

1. *Благодатский В. И.* Теория дифференциальных включений. Ч. 1. М.: Изд-во МГУ, 1979.
2. *Демьянов В. Ф., Рубинов А. М.* Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990.
3. *Дубовицкий А. Я., Милютин А. А.* Задачи на экстремум при наличии ограничений // ЖВМиМФ. 1965. Т. 5. №3. С. 395–453.
4. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
5. *Иоффе А. Д., Левин В. Л.* Субдифференциалы выпуклых функций // Тр. Моск. мат. об-ва. 1972. Т. 26. С. 3–72.
6. *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988.
7. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Субдифференциалы. Теория и приложения. Новосибирск: Наука, 1992.
8. *Кутателадзе С. С.* Основы функционального анализа. Новосибирск: Наука, 1983.
9. *Левин В. Л.* Применение теоремы Э. Хелли в выпуклом программировании, задачах наилучшего приближения и смежных вопросах // Матем. сб. 1969. Т. 79. №2. С. 250–263.
10. *Левин В. Л.* Выпуклый анализ в пространствах измеримых функций. М.: Наука, 1985.
11. *Левин В. Л.* О некоторых свойствах опорных функционалов // Матем. заметки. 1968. Т. 4. №6. С. 685–696.
12. *Минченко Л. И., Борисенко О. Ф.* Дифференциальные свойства маргинальных функций и их приложения к задачам оптимизации. Минск: Наука и техника, 1992.
13. *Обен Ж. П., Экланд И.* Прикладной нелинейный анализ. М.: Мир, 1988.
14. *Пшеничный Б. Н.* Необходимые условия экстремума. 2-е изд. М.: Наука, 1982.
15. *Рокафеллар Р. Т.* Выпуклый анализ. М.: Наука, 1973.
16. *Силин Д. В.* Субдифференциалы выпуклых функций и интегралы от многозначных отображений // Вестн. Моск. ун-та. Сер. вычислит. матем. и кибернетика. 1984. №1. С. 55–59.
17. *Соловьев В. Н.* Двойственность невыпуклых экстремальных задач // ДАН СССР. 1990. Т. 314. №1. С. 135–138.
18. *Соловьев В. Н.* О субдифференциале максимума семейства выпуклых функций // УМН. 1996. Т. 51. №2. С. 175–176.
19. *Соловьев В. Н.* О субдифференциале максимума выпуклых функций // Докл. РАН. 1997. Т. 357. №1. С. 24, 25.
20. *Сузарев А. Г., Тимохов А. В., Федоров В. В.* Курс методов оптимизации. М.: Наука, 1986.

21. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979.
22. McFadden D. Production Economics, a Dual Approach to Theory and Applications. V. 1. Amsterdam: North-Holland, 1978.
23. Benoist J., Hiriart-Urruty J.-B. What is the subdifferential of the closed convex hull of a function? // SIAM J. on Math. Analysis (to appear).
24. Hiriart-Urruty J.-B., Moussaoui M., Seeger A., Volle M. Subdifferential calculus without qualification conditions, using approximate subdifferentials: a survey // Non-linear Analysis, Theory, Methods and Applications. 1995. V. 24. № 12. P. 1727–1754.
25. Soloviov V. Duality for Nonconvex Optimization and Its Applications // Anal. Math. 1993. V. 19. № 4. P. 297–315.
26. Valadier M. Sous differentiel d'une borne superieur et d'une somme continue de fonctions convexes // C. R. Acad. Sci. Paris. 1969. V. 268. P. 39–42.
27. Volle M. Sous-differetiel d'une enveloppe superieure de fonctions convexes // C. R. Acad. Sci. Paris. 1993. V. 317. Ser. I. P. 845–849.
28. Volle M. Calculus rules for global approximate minima and applications to approximate subdifferential calculus // J. of Global Optimization. 1994. V. 5. P. 131–157.
29. Власов Л. П. Несколько теорем о чебышевских множествах // Матем. заметки. 1972. Т. 11. № 2. С. 135–144.
30. Соловьев В. Н. Двойственные экстремальные задачи и их применения к задачам минимаксного оценивания // УМН. 1997. Т. 52. № 4. С. 49–86.

Поступило в редакцию
9.IX.1996