Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Т. Шевалдин, Экстремальная интерполяция в среднем при перекрывающихся интервалах усреднения и L -сплайны, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1998, том 62, выпуск 4, 201–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/im193>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 11:37:31

УДК 517.5

В. Т. Шевалдин

Экстремальная интерполяция в среднем при перекрывающихся интервалах усреднения и L -сплайны

Рассмотрена задача экстремальной интерполяции в среднем при больших интервалах усреднения с наименьшим значением нормы линейного дифференциального оператора с постоянными действительными коэффициентами, экстремальными функциями в которой являются L -сплайны.

Библиография: 7 наименований.

Введение

Пусть $n \in \mathbb{N}$, D – символ дифференцирования и $\mathcal{L}_n = \mathcal{L}_n(D)$ – произвольный линейный дифференциальный оператор с постоянными действительными коэффициентами, у которого коэффициент при старшей степени равен 1. Оператор $\mathcal{L}_n$ может быть записан в следующем виде:

$$\mathcal{L}_n(D) = \prod_{s=1}^k (D^2 - 2\gamma_s D + \gamma_s^2 + \alpha_s^2) \prod_{j=1}^{n-2k} (D - \beta_j), \quad (1)$$

где $\alpha_s, \beta_j, \gamma_s \in \mathbb{R}$, причем можно считать, что $\alpha_s > 0$. Через l_p ($1 \leq p \leq \infty$), как обычно, будем обозначать пространство последовательностей $y = \{y_\nu\}_{\nu \in \mathbb{Z}}$ действительных чисел с нормой

$$\|y\|_{l_p} = \begin{cases} (\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} |y_\nu|^p)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \sup_{\nu} |y_\nu|, & p = \infty. \end{cases}$$

Линейному дифференциальному оператору $\mathcal{L}_n$ поставим в соответствие разностный оператор с шагом $h > 0$

$$\Delta_h^{\mathcal{L}_n} y_\nu = \prod_{s=1}^k (T^2 - 2Te^{\gamma_s h} \cos \alpha_s h + e^{2\gamma_s h} E) \prod_{j=1}^{n-2k} (T - e^{\beta_j h} E) y_\nu, \quad (2)$$

действующий на пространстве последовательностей. Здесь $Ty_\nu = y_{\nu+1}$ и E – тождественный оператор. Разность $\Delta_h^{\mathcal{L}_n} y_\nu$ выбрана таким образом, что для любого

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 96-01-00118).

решения f линейного однородного дифференциального уравнения $\mathcal{L}_n(D)f = 0$ при любом $x \in \mathbb{R}$ имеет место равенство

$$\Delta_h^{\mathcal{L}_n} f(x + \nu h) = 0.$$

Пусть $h_1 \geq 0$,

$$\begin{aligned} Y_{h,p} &= \{y = \{y_\nu\}_{\nu \in \mathbb{Z}} : \|\Delta_h^{\mathcal{L}_n} y\|_{l_p} \leq 1\}, \\ F_{h,h_1,p}(y) &= \left\{ f : f^{(n-1)} \in AC, \mathcal{L}_n(D)f \in L_p(\mathbb{R}), \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{h_1} \int_{-h_1/2}^{h_1/2} f(\nu h + t) dt = y_\nu, \nu \in \mathbb{Z} \right\} \end{aligned}$$

(при $h_1 = 0$ полагаем $f(\nu h) = y_\nu$) и

$$A_p = A_p(\mathcal{L}_n, h, h_1) = \sup_{y \in Y_{h,p}} \inf_{f \in F_{h,h_1,p}(y)} \|\mathcal{L}_n(D)f\|_{L_p(\mathbb{R})}.$$

Вычислению величины A_p посвящено значительное число работ (см. библиографию в [1], [2]). Для оператора $\mathcal{L}_n = D^n$ эту величину при $1 \leq p \leq \infty$, $0 < h < \infty$ и $0 \leq h_1 \leq 2h$ вычислил Ю. Н. Субботин (см. [1], [3]–[5]), причем случай $h < h_1 \leq 2h$ исследован им сравнительно недавно [5]. В общем случае наиболее сильный результат принадлежит автору [2], который в 1982 г. указал значение величины $A_p = A_p(\mathcal{L}_n, h, h_1)$ для произвольного линейного дифференциального оператора $\mathcal{L}_n$ с постоянными действительными коэффициентами при $1 \leq p \leq \infty$, $0 < h < h_0 = \pi / \max_{1 \leq s \leq k} \alpha_s$ и $0 \leq h_1 \leq h$, причем для некоторых операторов $\tilde{\mathcal{L}}_n$ оказалось, что $A_p(\tilde{\mathcal{L}}_n, h_0, h_1) = +\infty$.

В этой работе мы указываем значение величины $A_p(\mathcal{L}_n, h, h_1)$ для произвольного линейного дифференциального оператора $\mathcal{L}_n$, записанного в виде (1), при $p = \infty$, $0 < h < h_0$ и $h < h_1 \leq 2h$. Пусть $p_n = p_n(\lambda)$ – характеристический многочлен оператора $\mathcal{L}_n$ и

$$\begin{aligned} H_n(t) &= C(\mathcal{L}_n, h) \sum_{s \in \mathbb{Z}} \frac{e^{i(2s+1)\pi(1-t)} \sin((2s+1)\pi h_1/(2h))}{(2s+1)\pi h_1 p_n((2s+1)\pi i/h)}, \\ C(\mathcal{L}_n, h) &= 2(-1)^{n+1} h \prod_{s=1}^k (1 + 2e^{\gamma_s h} \cos \alpha_s h + e^{2\gamma_s h}) \prod_{j=1}^{n-2k} (1 + e^{\beta_j h}). \end{aligned}$$

Сформулируем основной результат работы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathcal{L}_n = \mathcal{L}_n(D)$ – произвольный линейный дифференциальный оператор с постоянными действительными коэффициентами, $0 < h < h_0 = \pi / \max_{1 \leq s \leq k} \alpha_s$ и $h < h_1 < 2h$. Тогда

$$A_\infty(\mathcal{L}_n, h, h_1) = (\|H_n\|_{L_1[0,1]})^{-1}.$$

Решение задачи в случае $h < h_1 \leq 2h$, т.е. при перекрывающихся интервалах усреднения, оказалось существенно труднее, чем в случае $0 \leq h_1 \leq h$.

§ 1. Свойства вспомогательных функций

Оператору $\mathcal{L}_n$, записанному в виде (1), поставим в соответствие оператор $\mathcal{L}_{n+1}^0(D) = D\mathcal{L}_n(D)$. Пусть $\varphi_n = \varphi_n(t)$ ($\varphi_{n+1}^0 = \varphi_{n+1}^0(t)$) – решение уравнения $\mathcal{L}_n(D)f = 0$ ($\mathcal{L}_{n+1}^0(D)f = 0$), удовлетворяющее условиям $\varphi_n^{(j)}(0) = \delta_{j,n-1}$ ($\varphi_{n+1}^{0(j)}(0) = \delta_{j,n}$). Здесь $\delta_{j,r}$ – символ Кронекера. Оператору $\mathcal{L}_{n+1}^0$ поставим в соответствие разностный оператор $\Delta_h^{\mathcal{L}_{n+1}^0} = (T - E)\Delta_h^{\mathcal{L}_n}$. Операторы $\Delta_h^{\mathcal{L}_n}$ и $\Delta_h^{\mathcal{L}_{n+1}^0}$ легко привести к виду

$$\Delta_h^{\mathcal{L}_n} y_m = \sum_{s=0}^n (-1)^{n-s} \mu_s y_{m+s}, \quad \Delta_h^{\mathcal{L}_{n+1}^0} y_m = \sum_{s=0}^{n+1} (-1)^{n+1-s} \mu_s^0 y_{m+s}, \quad (3)$$

где $\mu_s = \mu_s(\mathcal{L}_n, h)$, $\mu_s^0 = \mu_s^0(\mathcal{L}_{n+1}^0, h)$ и не зависят от y_m , причем

$$\mu_s^0 = \mu_s + \mu_{s-1}, \quad s = \overline{0, n+1}$$

(μ_{-1} и μ_{n+1} полагаем равными нулю).

При $0 \leq t \leq 1$, $x \in \mathbb{R}$ определим функции

$$\begin{aligned} \Pi_n(x, t) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} x^l \Delta_h^{\mathcal{L}_n} \varphi_n((l - n + 1 - t)h)_+, \\ \Pi_{n+1}^0(x, t) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} x^l \Delta_h^{\mathcal{L}_{n+1}^0} \varphi_{n+1}^0((l - n - t)h)_+, \\ \varphi_n(u_+) &= \begin{cases} \varphi_n(u), & u \geq 0, \\ 0, & u < 0, \end{cases} \quad \varphi_{n+1}^0(u_+) = \begin{cases} \varphi_{n+1}^0(u), & u \geq 0, \\ 0, & u < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Поскольку для любого решения f уравнения $\mathcal{L}_n(D)f = 0$ имеет место равенство $\Delta_h^{\mathcal{L}_n} f(x + mh) = 0$, то при $0 \leq t \leq 1$

$$\begin{aligned} \Pi_n(x, t) &= \sum_{l=0}^{n-1} x^l \sum_{s=n-l}^n (-1)^{n-s} \mu_s \varphi_n((s + l - n + 1 - t)h), \\ \Pi_{n+1}^0(x, t) &= \sum_{l=0}^n x^l \sum_{s=n+1-l}^{n+1} (-1)^{n+1-s} \mu_s^0 \varphi_{n+1}^0((s + l - n - t)h). \end{aligned} \quad (4)$$

Из этих равенств следует, что функция $\Pi_n(x, t)$ ($\Pi_{n+1}^0(x, t)$) является многочленом степени $n - 1$ (n) по x при $0 < t \leq 1$ и степени $n - 2$ ($n - 1$) при $t = 0$ и, кроме того,

$$\Pi_n(x, 1) = x\Pi_n(x, 0), \quad \Pi_{n+1}^0(x, 1) = x\Pi_{n+1}^0(x, 0).$$

Эти равенства позволяют продолжить функцию $\Pi_n(x, t)$ ($\Pi_{n+1}^0(x, t)$) как функцию от t при каждом фиксированном x на всю числовую ось с сохранением непрерывности с помощью равенства

$$\Pi_n(x, t+1) = x\Pi_n(x, t) \quad (\Pi_{n+1}^0(x, t+1) = x\Pi_{n+1}^0(x, t)). \quad (5)$$

В [2] отмечалось, что функция $\Pi_n(x, t)$ ($\Pi_{n+1}^0(x, t)$) при каждом фиксированном x как функция от t принадлежит классу $C^{(n-2)}(\mathbb{R})$ ($C^{(n-1)}(\mathbb{R})$) и

$$D\Pi_{n+1}^0(x, t) = h(x-1)\Pi_n(x, t) \quad \left(D = \frac{d}{dt}\right). \quad (6)$$

Сформулируем еще несколько утверждений из работы [2].

ЛЕММА 1. Пусть $0 < h < h_0 = \pi / \max_{1 \leq s \leq k} \alpha_s$. Функция $\Pi_n(x, t)$ ($\Pi_{n+1}^0(x, t)$) как функция от t при каждом фиксированном $x < 0$ имеет единственный нуль на полуинтервале $[0, 1)$, причем этот нуль простой.

ЛЕММА 2. Пусть $0 < h < h_0$ и $x < 0$, и пусть α – единственный нуль функции $\Pi_n(x, t)$ по переменной t на полуинтервале $[0, 1)$. Тогда $\Pi_{n+1}^0(x, \alpha) \neq 0$.

ЛЕММА 3. Пусть $0 < h < h_0$ и $0 \leq t < 1$. Все нули многочлена $\Pi_n(x, t)$ ($\Pi_{n+1}^0(x, t)$) по переменной x являются отрицательными и простыми.

Рассмотрим при $0 \leq t \leq 1$ следующие функции:

$$R_{n-1}(x, t) = x^{n-1}\Pi_n\left(\frac{1}{x}, t\right), \quad R_n^0(x, t) = x^n\Pi_n\left(\frac{1}{x}, t\right). \quad (7)$$

Из (4) следует, что при $0 \leq t \leq 1$ функция $R_{n-1}(x, t)$ ($R_n^0(x, t)$) является многочленом по переменной x и

$$\begin{aligned} R_{n-1}(x, t) &= \sum_{l=0}^{n-1} x^l \sum_{s=0}^l (-1)^{n-1-s} \mu_s \varphi_n((s-l-t)h), \\ R_n^0(x, t) &= \sum_{l=0}^n x^l \sum_{s=0}^l (-1)^{n-s} \mu_s^0 \varphi_n((s-l-t)h). \end{aligned} \quad (8)$$

ЛЕММА 4 [2]. 1) При $0 < t \leq 1$, $0 < h < h_0$ $R_{n-1}(0, t) > 0$.

2) Пусть $0 < t < 1$, $0 < h < h_0$, $\eta_j(t) < 0$ ($j = \overline{1, n-1}$) – нули многочлена $R_{n-1}(x, t)$, $\eta_1 = 0$, $\eta_j < 0$ ($j = \overline{2, n-1}$) – нули многочлена $R_{n-1}(x, 0)$, расположенные в порядке убывания. Тогда

$$\begin{aligned} \text{sign } R_{n-1}(\eta_j(t), u) &= \begin{cases} (-1)^j, & 0 \leq u < t, \\ (-1)^{j+1}, & t < u < 1, \end{cases} \\ \text{sign } R_{n-1}(\eta_j, t) &= (-1)^{j+1}, \quad 0 < t < 1, \quad j = \overline{1, n-1}. \end{aligned}$$

Оператору $\mathcal{L}_n$ поставим в соответствие также оператор $\tilde{\mathcal{L}}_{n+2}(D) = D^2 \mathcal{L}_n(D)$. Введем для него функции $\tilde{\varphi}_{n+2}$, $\tilde{\Pi}_{n+2}$, $\tilde{R}_{n+1}$, аналогичные функциям φ_n , Π_n и R_{n-1} .

СЛЕДСТВИЕ 1. 1) При $0 < t \leq 1$, $0 < h < h_0$ $\tilde{R}_{n+1}(0, t) > 0$.

2) Пусть $0 < t < 1$, $0 < h < h_0$, $\eta_j(t) < 0$ ($j = \overline{1, n+1}$) – нули многочлена $\tilde{R}_{n+1}(x, t)$, $\eta_1 = 0$, $\eta_j < 0$ ($j = \overline{2, n+1}$) – нули многочлена $\tilde{R}_{n+1}(x, 0)$, расположенные в порядке убывания. Тогда

$$\begin{aligned} \text{sign } \tilde{R}_{n+1}(\eta_j(t), u) &= \begin{cases} (-1)^j, & 0 \leq u < t, \\ (-1)^{j+1}, & t < u < 1, \end{cases} \\ \text{sign } \tilde{R}_{n+1}(\eta_j, t) &= (-1)^{j+1}, \quad 0 < t < 1, \quad j = \overline{1, n+1}. \end{aligned}$$

Определим функции

$$P_n(t) = (-1)^n \Pi_n(-1, t), \quad P_{n+1}^0(t) = (-1)^{n+1} \Pi_{n+1}^0(-1, t).$$

При $0 \leq t \leq 1$ из (4) получим

$$\begin{aligned} P_n(t) &= \sum_{j=0}^n (-1)^j \sum_{s=j}^n (-1)^{n-s} \mu_s \varphi_n((s-j+1-t)h), \\ P_{n+1}^0(t) &= \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \sum_{s=j}^{n+1} (-1)^{n+1-s} \mu_s^0 \varphi_{n+1}^0((s-j+1-t)h). \end{aligned} \quad (9)$$

Из (5), (6) имеем

$$\begin{aligned} (P_{n+1}^0(t))' &= 2hP_n(t), \quad P_n(t+1) = -P_n(t), \\ P_{n+1}^0(t+1) &= -P_{n+1}^0(t). \end{aligned} \quad (10)$$

При $0 \leq t \leq 1$ определим функции

$$\begin{aligned} a_{j,n}(t, h, h_1) &= \frac{h^2}{h_1} \int_{-h_1/(2h)}^{h_1/(2h)} \sum_{l=0}^n (-1)^{n-l} \mu_l \varphi_n(((l+x+1-j-t)h)_+) dx, \\ H_n(t) &= \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j a_{j,n}(t, h, h_1). \end{aligned} \quad (11)$$

Используя (9), (10), преобразуем функцию $H_n(t)$ при $0 \leq t \leq 1$ и $h < h_1 < 2h$. Имеем

$$\frac{h_1}{h^2} H_n(t) = \int_{-h_1/(2h)}^{h_1/(2h)} \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \sum_{l=0}^n (-1)^{n-l} \mu_l \varphi_n(((l+x+1-j-t)h)_+) dx =$$

$$= \begin{cases} - \int_{t-h_1/(2h)}^0 P_n(\tau+1) d\tau + \int_0^{t+h_1/(2h)} P_n(\tau) d\tau, & 0 \leq t \leq 1 - \frac{h_1}{2h}, \\ - \int_{t-h_1/(2h)}^0 P_n(\tau+1) d\tau + \int_0^1 P_n(\tau) d\tau \\ - \int_1^{t+h_1/(2h)} P_n(\tau-1) d\tau, & 1 - \frac{h_1}{2h} \leq t \leq \frac{h_1}{2h}, \\ \int_{t-h_1/(2h)}^1 P_n(\tau) d\tau - \int_1^{t+h_1/(2h)} P_n(\tau-1) d\tau, & \frac{h_1}{2h} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

значит,

$$\begin{aligned} \frac{h_1}{h^2} H_n(t) &= \int_{t-h_1/(2h)}^{t+h_1/(2h)} P_n(\tau) d\tau \\ &= (2h)^{-1} \left(P_{n+1}^0 \left(t + \frac{h_1}{2h} \right) - P_{n+1}^0 \left(t - \frac{h_1}{2h} \right) \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Равенство $H_n(1) = -H_n(0)$ позволяет продолжить функцию H_n с отрезка $[0, 1]$ на всю числовую ось при помощи равенства

$$H_n(t+1) = -H_n(t). \quad (13)$$

Далее мы покажем (лемма 8), что функция H_n представляется рядом, указанным во введении. При этом в силу свойств функций Π_n и Π_{n+1}^0 получаем, что $H_n \in C^{(n-1)}(\mathbb{R})$.

ЛЕММА 5. Пусть $0 < h < h_0$, $h < h_1 < 2h$. Функция

$$H_n(t) = \frac{h_1}{2h} \left(P_{n+1}^0 \left(t + \frac{h_1}{2h} \right) - P_{n+1}^0 \left(t - \frac{h_1}{2h} \right) \right)$$

имеет единственный нуль на полуинтервале $[0, 1)$, причем этот нуль простой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В [2] лемма 5 доказана при $0 < h_1 \leq h$ индукцией по n . Там же отмечались следующие равенства:

$$\begin{aligned} (D + \beta_{n-2k}h)H_n(t) &= -h(1 + e^{\beta_{n-2k}h})H_{n-1}(t), \\ (D^2 + 2\gamma_k h + (\gamma_k^2 + \alpha_k^2)h^2)H_n(t) &= h^2(e^{2\gamma_k h} + 2e^{\gamma_k h} \cos \alpha_k h + 1)H_{n-2}(t). \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь функции H_{n-1} и H_{n-2} соответствуют операторам

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{n-1}(D) &= \prod_{j=1}^{n-1-2k} (D - \beta_j) \prod_{s=1}^k (D^2 - 2\gamma_s D + \gamma_s^2 + \alpha_s^2), \\ \mathcal{L}_{n-2}(D) &= \prod_{j=1}^{n-2k} (D - \beta_j) \prod_{s=1}^{k-1} (D^2 - 2\gamma_s D + \gamma_s^2 + \alpha_s^2). \end{aligned}$$

В нашем случае при $h < h_1 < 2h$ шаг индукции аналогичен шагу индукции в доказательстве, проведенном в [2], требуется проверить только базу индукции. Вначале проверим справедливость леммы для функций $H_1^{(1)}(t)$, $H_1^{(2)}(t)$, соответствующих операторам $\mathcal{L}_1^{(1)}(D) = D$ и $\mathcal{L}_1^{(2)}(D) = D - \beta$ ($\beta \neq 0$).

В случае оператора $\mathcal{L}_1^{(1)}$

$$P_2^0(t) = h - 2th, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

и функция $H_1^{(1)}$ имеет вид

$$H_1^{(1)}(t) = \begin{cases} -\frac{2h^2t}{h_1}, & 0 \leq t \leq 1 - \frac{h_1}{2h}, \\ h \left(1 - \frac{2h_1}{h}\right), & 1 - \frac{h_1}{2h} \leq t \leq \frac{h_1}{2h}, \\ \frac{2h^2}{h_1}(t-1), & \frac{h_1}{2h} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

из которого следует утверждение леммы 5.

В случае оператора $\mathcal{L}_1^{(2)}(D) = D - \beta$ ($\beta \neq 0$)

$$P_2^0(t) = \frac{1}{\beta} (2e^{\beta(1-t)h} - 1 - e^{\beta h}), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

и функция $H_1^{(2)}$ имеет вид

$$H_1^{(2)}(t) = \begin{cases} \frac{h}{h_1\beta} \left[e^{-\beta th} \left(e^{\beta h \left(1 - \frac{h_1}{2h}\right)} + e^{\frac{\beta h_1}{2}} \right) - e^{\beta h} - 1 \right], & 0 \leq t \leq 1 - \frac{h_1}{2h}, \\ \frac{h}{h_1\beta} \left[e^{-\beta th + \frac{\beta h_1}{2}} - e^{-\beta th + \beta h \left(2 - \frac{h_1}{2h}\right)} \right], & 1 - \frac{h_1}{2h} \leq t \leq \frac{h_1}{2h}, \\ \frac{h}{h_1\beta} \left[1 + e^{\beta h} - e^{-\beta th} \left(e^{\beta h \left(2 - \frac{h_1}{2h}\right)} + e^{\beta h \left(1 + \frac{h_1}{2h}\right)} \right) \right], & \frac{h_1}{2h} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Анализ последнего соотношения показывает, что функция $H_1^{(2)}(t)$ при $h < h_1 < 2h$ имеет ровно один нуль на полуинтервале $[0, 1)$, причем этот нуль простой. Проверка базы индукции для функции $H_2(t)$, соответствующей оператору $\mathcal{L}_2(D) = D^2 - 2\gamma D + \gamma^2 + \alpha^2$, приводит к громоздким формулам, выражающим функцию H_2 через коэффициенты оператора $\mathcal{L}_2$. Но в силу индуктивного доказательства достаточно проверить, что функция

$$H_1^{(3)}(t) = \frac{h}{2h_1} \left(P_2 \left(t + \frac{h_1}{2h} \right) - P_2 \left(t - \frac{h_1}{2h} \right) \right),$$

где функция P_2 соответствует оператору $\mathcal{L}_2$, имеет ровно один нуль на $[0, 1)$, причем этот нуль простой. В самом деле,

$$P_2(t) = \frac{1}{\alpha} e^{\gamma(1-t)h} (\sin \alpha h(1-t) - e^{\gamma h} \sin \alpha t h), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

и функция $H_1^{(3)}$ имеет вид

$$H_1^{(3)}(t) = \frac{h}{2h_1\alpha} \cdot \begin{cases} H_1^{(4)}(t), & 0 \leq t \leq 1 - \frac{h_1}{2h}, \\ H_1^{(5)}(t), & 1 - \frac{h_1}{2h} \leq t \leq \frac{h_1}{2h}, \\ H_1^{(6)}(t), & \frac{h_1}{2h} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} H_1^{(4)}(t) &= e^{-\gamma th} \left[e^{\gamma h \left(1 - \frac{h_1}{2h}\right)} \sin \alpha h \left(1 - t - \frac{h_1}{2h}\right) \right. \\ &\quad - e^{\gamma h \left(2 - \frac{h_1}{2h}\right)} \sin \alpha h \left(t + \frac{h_1}{2h}\right) - e^{\frac{\gamma h_1}{2}} \sin \alpha h \left(t - \frac{h_1}{2h}\right) - \\ &\quad \left. - e^{\gamma h \left(1 + \frac{h_1}{2h}\right)} \sin \alpha h \left(t - \frac{h_1}{2h} + 1\right) \right], \\ H_1^{(5)}(t) &= e^{-\gamma th} \left[-e^{\gamma h \left(2 - \frac{h_1}{2h}\right)} \sin \alpha h \left(2 - t - \frac{h_1}{2h}\right) \right. \\ &\quad - e^{\gamma h \left(3 - \frac{h_1}{2h}\right)} \sin \alpha h \left(1 - t - \frac{h_1}{2h}\right) - e^{\frac{\gamma h_1}{2}} \sin \alpha h \left(t - \frac{h_1}{2h}\right) \\ &\quad \left. - e^{\gamma h \left(1 + \frac{h_1}{2h}\right)} \sin \alpha h \left(t - \frac{h_1}{2h} + 1\right) \right], \\ H_1^{(6)}(t) &= e^{-\gamma th} \left[-e^{\gamma h \left(2 - \frac{h_1}{2h}\right)} \sin \alpha h \left(2 - t - \frac{h_1}{2h}\right) \right. \\ &\quad - e^{\gamma h \left(3 - \frac{h_1}{2h}\right)} \sin \alpha h \left(1 - t - \frac{h_1}{2h}\right) - e^{\gamma h \left(1 + \frac{h_1}{2h}\right)} \sin \alpha h \left(1 - t + \frac{h_1}{2h}\right) \\ &\quad \left. + e^{\gamma h \left(2 + \frac{h_1}{2h}\right)} \sin \alpha h \left(t - \frac{h_1}{2h}\right) \right]. \end{aligned}$$

Функция $H_1^{(3)}$ является непрерывной на $[0, 1]$, $H_1^{(3)}(1) = -H_1^{(3)}(0)$. При $0 < h < h_0$, $h_1 < h < 2h$ функции $H_1^{(i)}$, $i = 4, 5, 6$, могут иметь не более одной перемены знака на тех отрезках, на которых они заданы. Кроме того, при $\gamma > 0$

$$\text{sign } H_1^{(3)}(0) = \text{sign } H_1^{(3)}\left(1 - \frac{h_1}{2h}\right) = -1,$$

при $\gamma < 0$

$$\text{sign } H_1^{(3)}\left(\frac{h_1}{2h}\right) = \text{sign } H_1^{(3)}(1) = -1,$$

а при $\gamma = 0$

$$H_1^{(3)}(0) = -H_1^{(3)}(1) = 0, \quad \text{sign } H_1^{(3)}\left(1 - \frac{h_1}{2h}\right) = \text{sign } H_1^{(3)}\left(\frac{h_1}{2h}\right) = -1.$$

Следовательно, функция $H_1^{(3)}$ имеет на $[0, 1)$ ровно один нуль, причем этот нуль простой. База индукции нами полностью проверена. Шаг индукции доказывается аналогично [2] с применением равенства (14). Лемма 5 доказана.

Обозначим через θ ($0 \leq \theta < 1$) единственный нуль функции H_n на полуинтервале $[0, 1)$ при $0 < h < h_0$ и $h < h_1 < 2h$. Определим функцию

$$Q_{n+2}(x) = \frac{h}{1-x} \cdot \begin{cases} Q_{n+3}^{(1)}(x), & 0 \leq \theta < 1 - \frac{h_1}{2h}, \\ Q_{n+3}^{(2)}(x), & 1 - \frac{h_1}{2h} \leq \theta < \frac{h_1}{2h}, \\ Q_{n+3}^{(3)}(x), & \frac{h_1}{2h} \leq \theta < 1, \end{cases} \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} Q_{n+3}^{(1)}(x) &= \int_0^\theta \left[xR_n^0 \left(x, t + \frac{h_1}{2h} \right) - x^2 R_n^0 \left(x, 1 + t - \frac{h_1}{2h} \right) \right] dt \\ &\quad + \int_\theta^{1-\frac{h_1}{2h}} \left[x^2 R_n^0 \left(x, t + \frac{h_1}{2h} \right) - x^3 R_n^0 \left(x, 1 - \frac{h_1}{2h} + t \right) \right] dt \\ &\quad + \int_{1-\frac{h_1}{2h}}^{\frac{h_1}{2h}} \left[xR_n^0 \left(x, t + \frac{h_1}{2h} - 1 \right) - x^3 R_n^0 \left(x, 1 - \frac{h_1}{2h} + t \right) \right] dt \\ &\quad + \int_{\frac{h_1}{2h}}^1 \left[xR_n^0 \left(x, t + \frac{h_1}{2h} - 1 \right) - x^2 R_n^0 \left(x, t - \frac{h_1}{2h} \right) \right] dt, \\ Q_{n+3}^{(2)}(x) &= \int_0^{1-\frac{h_1}{2h}} \left[xR_n^0 \left(x, t + \frac{h_1}{2h} \right) - x^2 R_n^0 \left(x, 1 - \frac{h_1}{2h} + t \right) \right] dt \\ &\quad + \int_{1-\frac{h_1}{2h}}^\theta \left[R_n^0 \left(x, t + \frac{h_1}{2h} - 1 \right) - x^2 R_n^0 \left(x, 1 - \frac{h_1}{2h} + t \right) \right] dt \\ &\quad + \int_\theta^{\frac{h_1}{2h}} \left[xR_n^0 \left(x, t + \frac{h_1}{2h} - 1 \right) - x^3 R_n^0 \left(x, 1 - \frac{h_1}{2h} + t \right) \right] dt \\ &\quad + \int_{\frac{h_1}{2h}}^1 \left[xR_n^0 \left(x, t + \frac{h_1}{2h} - 1 \right) - x^2 R_n^0 \left(x, t - \frac{h_1}{2h} \right) \right] dt, \\ Q_{n+3}^{(3)}(x) &= \int_0^{1-\frac{h_1}{2h}} \left[xR_n^0 \left(x, t + \frac{h_1}{2h} \right) - x^2 R_n^0 \left(x, 1 - \frac{h_1}{2h} + t \right) \right] dt \\ &\quad + \int_{1-\frac{h_1}{2h}}^{\frac{h_1}{2h}} \left[R_n^0 \left(x, t + \frac{h_1}{2h} - 1 \right) - x^2 R_n^0 \left(x, 1 - \frac{h_1}{2h} + t \right) \right] dt \\ &\quad + \int_{\frac{h_1}{2h}}^\theta \left[R_n^0 \left(x, t + \frac{h_1}{2h} - 1 \right) - xR_n^0 \left(x, t - \frac{h_1}{2h} \right) \right] dt \\ &\quad + \int_\theta^1 \left[xR_n^0 \left(x, t + \frac{h_1}{2h} - 1 \right) - x^2 R_n^0 \left(x, t - \frac{h_1}{2h} \right) \right] dt. \end{aligned}$$

ЛЕММА 6. Функция $Q_{n+2}(x)$ является многочленом степени не выше $n+2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу определения функций Q_{n+2} и R_n^0 для доказательства леммы достаточно проверить, что $x = 1$ является корнем каждого из многочленов $Q_{n+3}^{(i)}(x)$, $i = 1, 2, 3$. Поскольку

$$R_n^0(x, t+1) = x^n \Pi_{n+1}^0 \left(\frac{1}{x}, t+1 \right) = x^{n-1} \Pi_{n+1}^0 \left(\frac{1}{x}, t \right) = \frac{1}{x} R_n^0(x, t),$$

то отсюда при $x = 1$ получаем

$$R_n^0(1, t+1) = R_n^0(1, t),$$

т.е. функция $R_n^0(1, t)$ имеет период, равный 1. Поэтому

$$\begin{aligned} Q_{n+3}^{(i)}(1) &= \int_0^1 \left[R_n^0 \left(1, t + \frac{h_1}{2h} \right) - R_n^0 \left(1, t - \frac{h_1}{2h} \right) \right] dt \\ &= \int_0^1 R_n^0(1, t) dt - \int_0^1 R_n^0(1, t) dt = 0, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 7. 1) При $0 \leq \theta \leq 1 - \frac{h_1}{2h}$ многочлен $Q_{n+2}(x)$ является многочленом степени $n+2$, имеет ровно $n+1$ отрицательных простых корней и $Q_{n+2}(0) = 0$.

2) При $1 - \frac{h_1}{2h} < \theta < \frac{h_1}{2h}$ все $n+2$ корня многочлена $Q_{n+2}(x)$ являются отрицательными и простыми.

3) При $\frac{h_1}{2h} \leq \theta < 1$ многочлен $Q_{n+2}(x)$ является многочленом степени $n+1$ и все его корни являются отрицательными и простыми.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что оператору $\mathcal{L}_n$ мы поставили в соответствие функцию $R_{n-1}(x, t)$, оператору $\mathcal{L}_{n+1}^0 = D\mathcal{L}_n$ — функцию $R_n^0(x, t)$ и оператору $\tilde{\mathcal{L}}_{n+2} = D^2\mathcal{L}_n$ — функцию $\tilde{R}_{n+1}(x, t)$. Из определения этих функций имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (R_n^0(x, t)) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(x^n \Pi_{n+1}^0 \left(\frac{1}{x}, t \right) \right) = x^n h \left(\frac{1}{x} - 1 \right) \Pi_n \left(\frac{1}{x}, t \right) \\ &= x^{n-1} h (1 - x) \Pi_n \left(\frac{1}{x}, t \right) = h (1 - x) R_{n-1}(x, t) \end{aligned}$$

и, аналогично,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\tilde{R}_{n+1}(x, t)) = h (1 - x) R_n^0(x, t).$$

Используя эти равенства, из определения многочлена $Q_{n+2}(x)$ получаем

$$\begin{aligned} Q_{n+3}^{(1)}(x) &= \frac{x}{h} \left[\tilde{R}_{n+1} \left(x, \theta + \frac{h_1}{2h} \right) - x \tilde{R}_{n+1} \left(x, 1 + \theta - \frac{h_1}{2h} \right) \right], \\ Q_{n+3}^{(2)}(x) &= \frac{1}{h} \left[\tilde{R}_{n+1} \left(x, \theta + \frac{h_1}{2h} - 1 \right) - x^2 \tilde{R}_{n+1} \left(x, 1 - \frac{h_1}{2h} + \theta \right) \right], \\ Q_{n+3}^{(3)}(x) &= \frac{1}{h} \left[\tilde{R}_{n+1} \left(x, \theta + \frac{h_1}{2h} - 1 \right) - x \tilde{R}_{n+1} \left(x, \theta - \frac{h_1}{2h} \right) \right]. \end{aligned}$$

Рассмотрим три случая.

1) $0 \leq \theta \leq 1 - \frac{h_1}{2h}$. Имеем

$$\begin{aligned} Q_{n+2}(x) &= \frac{x}{h^2(1-x)} \left[\tilde{R}_{n+1} \left(x, \theta + \frac{h_1}{2h} \right) - x \tilde{R}_{n+1} \left(x, 1 + \theta - \frac{h_1}{2h} \right) \right] \\ &= \frac{1}{h^2(1-x)} \sum_{l=0}^{n+3} b_l^{(1)} x^l = \frac{1}{h(1-x)} Q_{n+3}^{(1)}(x), \\ \tilde{R}_{n+1}(x, t) &= \sum_{l=0}^{n+1} x^l \sum_{s=0}^l (-1)^{n+1-s} \tilde{\mu}_s \tilde{\varphi}_{n+2}((s-l-t)h), \\ \tilde{\mu}_s &= \mu_s^0 + \mu_{s-1}^0, \quad \tilde{\varphi}'_{n+2} = \varphi_{n+1}^0. \end{aligned} \quad (16)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} b_0^{(1)} &= 0, \quad b_1^{(1)} = (-1)^{n+1} \tilde{\mu}_0 \tilde{\varphi}_{n+2} \left(\left(1 - \theta - \frac{h_1}{2h} \right) h \right), \\ b_{n+3}^{(1)} &= - \sum_{s=0}^{n+1} (-1)^{n+1-s} \tilde{\mu}_s \tilde{\varphi}_{n+2} \left(\left(s - n - 2 - \theta + \frac{h_1}{2h} \right) h \right) \\ &= - \tilde{\mu}_{n+2} \tilde{\varphi}_{n+2} \left(\left(-\theta + \frac{h_1}{2h} \right) h \right). \end{aligned}$$

Из определения $\tilde{\mu}_j$ имеем $\tilde{\mu}_0 > 0$, $\tilde{\mu}_{n+2} = 1$. Из равенств

$$\tilde{\varphi}_{n+2}(t) = \int_0^t \varphi_{n+1}^0(u) du, \quad \varphi_{n+1}^0(t) = \int_0^t \varphi_n(u) du$$

выводим, что $(-1)^n \tilde{\varphi}_{n+2}(-th) < 0$, $0 < t \leq 1$, и $\tilde{\varphi}_{n+2}((1-t)h) > 0$, $0 \leq t < 1$.

Отсюда

$$b_1^{(1)} > 0, \quad b_{n+3}^{(1)} < 0.$$

Выберем любое число $\tau \in \left(0, 1 + \theta - \frac{h_1}{2h} \right)$; тогда $\tau < \theta + \frac{h_1}{2h}$. Обозначим через $\eta_j(\tau)$, $j = \overline{1, n+1}$, нули многочлена $\tilde{R}_{n+1}(x, \tau)$, расположенные в порядке убывания. Из следствия 1 получаем, что

$$\text{sign } \tilde{R}_{n+1}(\eta_j(\tau), u) = (-1)^{j+1}, \quad \tau < u < 1.$$

Следовательно, на интервале $(\eta_{n+1}(\tau), \eta_1(\tau))$ многочлен $Q_{n+3}^{(1)}$ имеет по крайней мере n отрицательный нулей. Кроме того, из соотношений

$$\text{sign } Q_{n+3}^{(1)}(\eta_{n+1}(\tau)) = (-1)^{n+1}, \quad b_{n+3}^{(1)} < 0$$

следует, что на интервале $(-\infty, \eta_{n+1}(\tau))$ многочлен $Q_{n+3}^{(1)}$ имеет по крайней мере еще один нуль.

Итак, мы доказали, что многочлен $Q_{n+3}^{(1)}$ степени $n+3$ имеет по крайней мере $n+1$ отрицательных корней и, кроме того, $Q_{n+3}^{(1)}(0) = Q_{n+3}^{(1)}(1) = 0$. Поэтому случай 1) леммы полностью доказан.

2) $1 - \frac{h_1}{2h} < \theta < \frac{h_1}{2h}$. Имеем

$$\begin{aligned} Q_{n+2}(x) &= \frac{1}{h^2(1-x)} \left[\tilde{R}_{n+1} \left(x, \theta + \frac{h_1}{2h} - 1 \right) - x^2 \tilde{R}_{n+1} \left(x, 1 - \frac{h_1}{2h} + \theta \right) \right] \\ &= \frac{1}{h^2(1-x)} \sum_{l=0}^{n+3} b_l^{(2)} x^l = \frac{1}{h(1-x)} Q_{n+3}^{(2)}(x). \end{aligned}$$

Из (17) аналогично случаю 1) получаем

$$b_0^{(2)} > 0, \quad b_{n+3}^{(2)} < 0.$$

Выберем любое число $\tau \in \left(\theta + \frac{h_1}{2h} - 1, 1 - \frac{h_1}{2h} + \theta \right)$ и обозначим через $\eta_j(\tau)$, $j = \overline{1, n+1}$, нули многочлена $\tilde{R}_{n+1}(x, \tau)$, расположенные в порядке убывания. Из следствия 1 получаем

$$\begin{aligned} \text{sign } \tilde{R}_{n+1} \left(\eta_j(\tau), \theta + \frac{h_1}{2h} - 1 \right) &= (-1)^j, \\ \text{sign } \tilde{R}_{n+1} \left(\eta_j(\tau), 1 - \frac{h_1}{2h} + \theta \right) &= (-1)^{j+1}, \\ \text{sign } \left[\tilde{R}_{n+1} \left(\eta_j(\tau), \theta + \frac{h_1}{2h} - 1 \right) - x^2 \tilde{R}_{n+1} \left(\eta_j(\tau), 1 - \frac{h_1}{2h} + \theta \right) \right] &= (-1)^j, \end{aligned}$$

где $j = \overline{1, n+1}$. Поэтому на интервале $(\eta_{n+1}(\tau), \eta_1(\tau))$ многочлен $Q_{n+3}^{(2)}$ имеет по крайней мере n отрицательных корней. Кроме того, этот многочлен имеет еще два корня: один на интервале $(-\infty, \eta_{n+1}(\tau))$, так как

$$b_{n+3}^{(2)} < 0, \quad \text{sign } Q_{n+3}^{(2)}(\eta_{n+1}(\tau)) = (-1)^{n+1},$$

а другой на интервале $(\eta_1(\tau), 0)$, так как

$$b_0^{(2)} < 0, \quad \text{sign } Q_{n+3}^{(2)}(\eta_1(\tau)) = -1.$$

Поскольку $Q_{n+3}^{(2)}(1) = 0$, то случай 2) леммы доказан.

3) $\frac{h_1}{2h} \leq \theta < 1$. Имеем

$$\begin{aligned} Q_{n+2}(x) &= \frac{1}{h^2(1-x)} \left[\tilde{R}_{n+1} \left(x, \theta + \frac{h_1}{2h} - 1 \right) - x \tilde{R}_{n+1} \left(x, \theta - \frac{h_1}{2h} \right) \right] \\ &= \frac{1}{h^2(1-x)} Q_{n+3}^{(3)}(x) = \frac{1}{h(1-x)} \sum_{l=0}^{n+3} b_l^{(3)} x^l. \end{aligned}$$

Используя (16), получаем $b_{n+3}^{(3)} = 0$, $b_{n+2}^{(3)} > 0$, $b_0^{(3)} > 0$. Выбираем любое число $\tau \in \left(\theta + \frac{h_1}{2h} - 1, 1\right)$. Тогда $\theta - \frac{h_1}{2h} < \tau$. Обозначим через $\eta_j(\tau)$, $j = \overline{1, n+1}$, нули многочлена $\tilde{R}_{n+1}(x, \tau)$, расположенные в порядке убывания. Из следствия 1 получаем

$$\text{sign } \tilde{R}_{n+1} \left(\eta_j(\tau), \theta + \frac{h_1}{2h} - 1 \right) = \text{sign } \tilde{R}_{n+1} \left(\eta_j(\tau), \theta - \frac{h_1}{2h} \right) = (-1)^j,$$

и поэтому

$$\text{sign } Q_{n+3}^{(3)}(\eta_j(\tau)) = (-1)^j, \quad j = \overline{1, n+1}.$$

Отсюда следует, что многочлен $Q_{n+3}^{(3)}$ степени $n+2$ на интервале $(\eta_{n+1}(\tau), \eta_1(\tau))$ имеет по крайней мере n отрицательных корней. Кроме того, из соотношений

$$\text{sign } Q_{n+3}^{(3)}(\eta_1(\tau)) = -1, \quad b_0^{(3)} > 0$$

выводим наличие еще одного отрицательного нуля многочлена $Q_{n+3}^{(3)}(x)$, расположенного на интервале $(\eta_1(\tau), 0)$. Отсюда и из равенства $Q_{n+3}^{(3)}(1) = 0$ следует утверждение леммы в случае 3). Лемма 7 полностью доказана.

ЛЕММА 8. Пусть $p_n = p_n(\lambda)$ – характеристический многочлен оператора $\mathcal{L}_n$. При $p_n((2s+1)\pi i/h) \neq 0$, $s \in \mathbb{Z}$, имеет место равенство

$$H_n(t) = C(\mathcal{L}_n, h) \sum_{s \in \mathbb{Z}} \frac{e^{i(2s+1)\pi(1-t)} \sin((2s+1)\pi h_1/(2h))}{(2s+1)\pi h_1 p_n((2s+1)\pi i/h)},$$

$$C(\mathcal{L}_n, h) = 2(-1)^{n+1} h \prod_{s=1}^k (1 + 2e^{\gamma_s h} \cos \alpha_s h + e^{2\gamma_s h}) \prod_{j=1}^{n-2k} (1 + e^{\beta_j h}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В [6] при $p_n((2s+1)\pi i/h) \neq 0$, $s \in \mathbb{Z}$, установлено, что

$$P_{n+1}^0(t) = \frac{2(-1)^n}{\pi i} \sum_{l=0}^n \mu_l \sum_{s \in \mathbb{Z}} \frac{e^{i(2s+1)\pi(1-t)}}{(2s+1)p_n((2s+1)\pi i/h)}. \quad (17)$$

Пусть

$$g_n(\lambda) = \prod_{s=1}^k (\lambda^2 - 2\lambda e^{\gamma_s h} \cos \alpha_s h + e^{2\gamma_s h}) \prod_{j=1}^{n-2k} (\lambda - e^{\beta_j h}).$$

Тогда

$$\sum_{l=0}^n \mu_l = (-1)^n g_n(-1) = \prod_{s=1}^k (1 + 2e^{\gamma_s h} \cos \alpha_s h + e^{2\gamma_s h}) \prod_{j=1}^{n-2k} (1 + e^{\beta_j h}). \quad (18)$$

Из (12) и (17) имеем

$$\begin{aligned}
H_n(t) &= \frac{h}{2h_1} \left(P_{n+1}^0 \left(t + \frac{h_1}{2h} \right) - P_{n+1}^0 \left(t - \frac{h_1}{2h} \right) \right) \\
&= \frac{(-1)^n h}{\pi h_1 i} \sum_{l=0}^n \mu_l \sum_{s \in \mathbb{Z}} \frac{e^{i(2s+1)\pi(1-t)}}{(2s+1)p_n((2s+1)\pi i/h)} \\
&\quad \times \left[e^{i(2s+1)\pi(-\frac{h_1}{2h})} - e^{i(2s+1)\pi\frac{h_1}{2h}} \right] \\
&= \frac{2h}{\pi h_1} (-1)^{n+1} \sum_{l=0}^n \mu_l \sum_{s \in \mathbb{Z}} \frac{e^{i(2s+1)\pi(1-t)} \sin((2s+1)\pi h_1/(2h))}{(2s+1)p_n((2s+1)\pi i/h)}.
\end{aligned}$$

Применяя (18), получаем утверждение леммы 8.

§ 2. L -сплайны

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция S называется L -сплайном с равномерными узлами $(l + \theta)h$, $h > 0$, $0 \leq \theta < 1$, $l \in \mathbb{Z}$, соответствующим оператору $\mathcal{L}_n$ и параметру θ , если $S^{(n-1)} \in AC$ и для любого $l \in \mathbb{Z}$

$$\mathcal{L}_n(D)S((l-1)h+t) = Z_l, \quad \theta h \leq t < (\theta+1)h, \quad Z_l \in \mathbb{R}.$$

Обозначим через $S(\mathcal{L}_n, \theta)$ пространство L -сплайнов с равномерными узлами $(l + \theta)h$, $0 < h < h_0 = \pi / \max_{1 \leq s \leq k} \alpha_s$, $h < h_1 < 2h$, где θ – единственный нуль функции H_n при этих значениях h и h_1 на полуинтервале $[0, 1)$ (см. лемму 5).

ТЕОРЕМА 2. Пусть $0 < h < h_0 = \pi / \max_{1 \leq s \leq k} \alpha_s$, $h < h_1 < 2h$. Для любой последовательности $y \in Y_{h,\infty}$ существует и притом только один L -сплайн $S \in S(\mathcal{L}_n, \theta)$, удовлетворяющий условиям

$$\frac{1}{h_1} \int_{-h_1/2}^{h_1/2} S(mh+t) dt = y_m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим неоднородное дифференциальное уравнение $\mathcal{L}_n(D)f = u$, где $u \in L_\infty(\mathbb{R})$. Общее решение этого уравнения имеет вид

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j v_j(x) + \int_0^x \varphi_n(x-t)u(t) dt, \quad (19)$$

где c_j , $j = \overline{1, n}$, – произвольные константы, v_j , $j = \overline{1, n}$, – произвольная линейно независимая система решений однородного уравнения $\mathcal{L}_n(D)f = 0$ и функция φ_n такова, что $\varphi_n^{(j)}(0) = \delta_{j, n-1}$. Для любой функции f такой, что $\mathcal{L}_n(D)f \in L_\infty(\mathbb{R})$, с учетом определения разностного оператора $\Delta_h^{\mathcal{L}_n}$ получаем

$$(\Delta_h^{\mathcal{L}_n} f)(x) = \Delta_h^{\mathcal{L}_n} \left\{ \int_0^x \varphi_n(x-t) \mathcal{L}_n(D)f(t) dt \right\}.$$

Пусть $h_1 > 0$, $y = \{y_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ — произвольная последовательность действительных чисел и $f \in F_{h, h_1, p}(y)$. Тогда

$$\begin{aligned} \Delta_h^{\mathcal{L}_n} y_m &= \frac{1}{h_1} \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \Delta_h^{\mathcal{L}_n} f(mh + x) dx = \frac{h}{h_1} \int_{-h_1/(2h)}^{h_1/(2h)} \Delta_h^{\mathcal{L}_n} f((m+x)h) dx \\ &= \frac{h}{h_1} \int_{-h_1/(2h)}^{h_1/(2h)} \left\{ \Delta_h^{\mathcal{L}_n} \int_0^{m+x} \varphi_n((m+x)h-t) \mathcal{L}_n(D) f(t) dt \right\} dx \\ &= \frac{h^2}{h_1} \int_{-h_1/(2h)}^{h_1/(2h)} \left\{ \sum_{l=0}^n (-1)^{n-l} \mu_l \int_0^{m+l+x} \varphi_n((m+l+x-t)h) \mathcal{L}_n(D) f(th) dt \right\} dx. \end{aligned}$$

Преобразуем при $-\frac{h_1}{2h} \leq x \leq \frac{h_1}{2h}$ выражение, стоящее в фигурных скобках, используя то, что для любого решения f уравнения $\mathcal{L}_n(D)f = 0$ при любом x имеет место равенство $\Delta_h^{\mathcal{L}_n} f(x + mh) = 0$:

$$\begin{aligned} &\sum_{l=0}^n (-1)^{n-l} \mu_l \int_0^{m+l+x} \varphi_n((m+l+x-t)h) \mathcal{L}_n(D) f(th) dt \\ &= \sum_{l=0}^n (-1)^{n-l} \mu_l \int_{m-1}^{m+l+x} \varphi_n((m+l+x-t)h) \mathcal{L}_n(D) f(th) dt \\ &= \sum_{l=0}^n (-1)^{n-l} \mu_l \int_0^1 \sum_{j=0}^{n+1} \varphi_n(((l+x+1-j-t)h)_+) \mathcal{L}_n(D) f((t+m+j-1)h) dt. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \Delta_h^{\mathcal{L}_n} y_m &= \frac{h^2}{h_1} \int_0^1 \sum_{j=0}^{n+1} \mathcal{L}_n(D) f((m-1+j+t)h) dt \\ &\quad \times \int_{-h_1/(2h)}^{h_1/(2h)} \sum_{l=0}^n (-1)^{n-l} \mu_l \varphi_n(((l+x+1-j-t)h)_+) dx. \quad (20) \end{aligned}$$

Из (20) для любого L -сплайна $S \in S(\mathcal{L}_n, \theta)$ при $h_1 > 0$ получаем следующее разностное уравнение:

$$\begin{aligned} \Delta_h^{\mathcal{L}_n} y_m &= \frac{h^2}{h_1} \sum_{j=0}^{n+1} Z_{m-1+j} \int_0^\theta dt \\ &\quad \times \int_{-h_1/(2h)}^{h_1/(2h)} \sum_{l=0}^n (-1)^{n-l} \mu_l \varphi_n(((l+z+1-j-t)h)_+) dz \\ &\quad + \frac{h^2}{h_1} \sum_{j=0}^{n+1} Z_{m+j} \int_\theta^1 dt \int_{-h_1/(2h)}^{h_1/(2h)} \sum_{l=0}^n (-1)^{n-l} \mu_l \varphi_n(((l+z+1-j-t)h)_+) dz \\ &= \frac{h^2}{h_1} \sum_{j=0}^{n+2} Z_{m-1+j} b_j, \quad (21) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 b_0 &= \int_0^\theta dt \int_{-h_1/(2h)}^{h_1/(2h)} \sum_{l=0}^n (-1)^{n-l} \mu_l \varphi_n((l+z+1-t)h)_+ dz, \\
 b_j &= \int_0^\theta dt \int_{-h_1/(2h)}^{h_1/(2h)} \sum_{l=0}^n (-1)^{n-l} \mu_l \varphi_n((l+z+1-j-t)h)_+ dz \\
 &\quad + \int_\theta^1 dt \int_{-h_1/(2h)}^{h_1/(2h)} \sum_{l=0}^n (-1)^{n-l} \mu_l \varphi_n((l+z+2-j-t)h)_+ dz, \quad j = \overline{1, n+1}, \\
 b_{n+2} &= \int_\theta^1 dt \int_{-h_1/(2h)}^{h_1/(2h)} \sum_{l=0}^n (-1)^{n-l} \mu_l \varphi_n((l+z-n-t)h)_+ dz.
 \end{aligned}$$

Исследуем характеристический многочлен

$$U_{n+2}(x, \theta) = \sum_{j=0}^{n+2} b_j x^j$$

разностного уравнения (21). Введем функцию

$$V_{n+1}(x, z-t) = \begin{cases} x^2 R_{n-1}(x, -z+t+1), & 0 \leq z-t < 1, \\ x R_{n-1}(x, -z+t), & -1 \leq z-t < 0, \\ R_{n-1}(x, -z+t-1), & -2 \leq z-t < -1, \end{cases}$$

где функция $R_{n-1}(x, t)$ определена равенством (7). Используя (8), для многочлена $U_{n+2}(x, \theta)$ при $0 < h_1 < 2h$ получим следующее представление:

$$\begin{aligned}
 U_{n+2}(x, \theta) &= \int_0^\theta dt \int_{-h_1/(2h)}^{h_1/(2h)} V_{n+1}(x, z-t) dz \\
 &\quad + \int_\theta^1 dt \int_{-h_1/(2h)}^{h_1/(2h)} x V_{n+1}(x, z-t) dz \\
 &= \int_0^\theta dt \int_{-h_1/(2h)-t}^{h_1/(2h)-t} V_{n+1}(x, z) dz \\
 &\quad + \int_\theta^1 dt \int_{-h_1/(2h)-t}^{h_1/(2h)-t} x V_{n+1}(x, z) dz.
 \end{aligned}$$

Исследуем многочлен $U_{n+2}(x, \theta)$ при $h < h_1 < 2h$ отдельно в каждом из трех случаев.

1) $0 \leq \theta < 1 - \frac{h_1}{2h}$. Имеем

$$\begin{aligned}
 U_{n+2}(x, \theta) &= \int_0^\theta \left[\int_{-h_1/(2h)-t}^0 x R_{n-1}(x, -z) dz \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^{h_1/(2h)-t} x^2 R_{n-1}(x, 1-z) dz \right] dt +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\theta}^{1-h_1/(2h)} \left[\int_{-h_1/(2h)-t}^0 x^2 R_{n-1}(x, -z) dz \right. \\
& \quad \left. + \int_0^{h_1/(2h)-t} x^3 R_{n-1}(x, 1-z) dz \right] dt \\
& + \int_{1-h_1/(2h)}^{h_1/(2h)} \left[\int_{-h_1/(2h)-t}^{-1} x R_{n-1}(x, -z-1) dz \right. \\
& \quad \left. + \int_{-1}^0 x^2 R_{n-1}(x, -z) dz \right. \\
& \quad \left. + \int_0^{h_1/(2h)-t} x^3 R_{n-1}(x, 1-z) dz \right] dt \\
& + \int_{h_1/(2h)}^1 \left[\int_{-h_1/(2h)-t}^{-1} x R_{n-1}(x, -z-1) dz \right. \\
& \quad \left. + \int_{-1}^{h_1/(2h)-t} x^2 R_{n-1}(x, -z) dz \right] dt.
\end{aligned}$$

2) $1 - \frac{h_1}{2h} \leq \theta < \frac{h_1}{2h}$. Имеем

$$\begin{aligned}
U_{n+2}(x, \theta) = & \int_0^{1-h_1/(2h)} \left[\int_{-h_1/(2h)-t}^0 x R_{n-1}(x, -z) dz \right. \\
& \quad \left. + \int_0^{h_1/(2h)-t} x^2 R_{n-1}(x, 1-z) dz \right] dt \\
& + \int_{1-h_1/(2h)}^{\theta} \left[\int_{-h_1/(2h)-t}^{-1} R_{n-1}(x, -z-1) dz \right. \\
& \quad \left. + \int_{-1}^0 x R_{n-1}(x, -z) dz \right. \\
& \quad \left. + \int_0^{h_1/(2h)-t} x^2 R_{n-1}(x, 1-z) dz \right] dt \\
& + \int_{\theta}^{h_1/(2h)} \left[\int_{-h_1/(2h)-t}^{-1} x R_{n-1}(x, -z-1) dz \right. \\
& \quad \left. + \int_{-1}^0 x^2 R_{n-1}(x, -z) dz \right. \\
& \quad \left. + \int_0^{h_1/(2h)-t} x^3 R_{n-1}(x, 1-z) dz \right] dt \\
& + \int_{h_1/(2h)}^1 \left[\int_{-h_1/(2h)-t}^{-1} x R_{n-1}(x, -z-1) dz \right. \\
& \quad \left. + \int_{-1}^{h_1/(2h)-t} x^2 R_{n-1}(x, -z) dz \right] dt.
\end{aligned}$$

3) $\frac{h_1}{2h} \leq \theta < 1$. Имеем

$$U_{n+2}(x, \theta) = \int_0^{1-h_1/(2h)} \left[\int_{-h_1/(2h)-t}^0 x R_{n-1}(x, -z) dz + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^{h_1/(2h)-t} x^2 R_{n-1}(x, 1-z) dz \Big] dt \\
& + \int_{1-h_1/(2h)}^{h_1/(2h)} \left[\int_{-h_1/(2h)-t}^{-1} R_{n-1}(x, -z-1) dz \right. \\
& \quad + \int_0^1 x R_{n-1}(x, -z) dz \\
& \quad + \left. \int_0^{h_1/(2h)-t} x^2 R_{n-1}(x, 1-z) dz \right] dt \\
& + \int_{h_1/(2h)}^{\theta} \left[\int_{-h_1/(2h)-t}^{-1} R_{n-1}(x, -z-1) dz \right. \\
& \quad + \int_{-1}^{h_1/(2h)-t} x R_{n-1}(x, -z) dz \Big] dt \\
& + \int_{\theta}^1 \left[\int_{-h_1/(2h)-t}^{-1} x R_{n-1}(x, -z-1) dz \right. \\
& \quad + \left. \int_{-1}^{h_1/(2h)-t} x^2 R_{n-1}(x, -z) dz \right] dt.
\end{aligned}$$

При доказательстве лемм 6 и 7 мы отмечали, что

$$\frac{\partial}{\partial t}(R_n^0(x, t)) = h(1-x)R_{n-1}(x, t), \quad R_n^0(x, t+1) = \frac{1}{x}R_n^0(x, t).$$

Используя эти равенства, а также формулу Ньютона–Лейбница, продолжим преобразование многочленов.

В случае 1) имеем

$$\begin{aligned}
U_{n+2}(x, \theta) &= \frac{1}{h(1-x)} \left\{ \int_0^{\theta} \left[x R_n^0 \left(x, t + \frac{h_1}{2h} \right) - x R_n^0(x, 0) + x^2 R_n^0(x, 1) \right. \right. \\
&\quad - x^2 R_n^0 \left(x, 1 + t - \frac{h_1}{2h} \right) \Big] dt + \int_{\theta}^{1-h_1/(2h)} \left[x^2 R_n^0 \left(x, t + \frac{h_1}{2h} \right) \right. \\
&\quad - x^2 R_n^0(x, 0) + x^3 R_n^0(x, 1) - x^3 R_n^0 \left(x, 1 - \frac{h_1}{2h} + t \right) \Big] dt \\
&\quad + \int_{1-h_1/(2h)}^{h_1/(2h)} \left[x R_n^0 \left(x, t + \frac{h_1}{2h} - 1 \right) - x R_n^0(x, 0) + x^2 R_n^0(x, 1) \right. \\
&\quad - x^2 R_n^0(x, 0) + x^3 R_n^0(x, 1) - x^3 R_n^0 \left(x, 1 - \frac{h_1}{2h} + t \right) \Big] dt \\
&\quad + \int_{h_1/(2h)}^1 \left[x R_n^0 \left(x, t + \frac{h_1}{2h} - 1 \right) - x R_n^0(x, 0) + x^2 R_n^0(x, 1) \right. \\
&\quad - x^2 R_n^0 \left(x, t - \frac{h_1}{2h} \right) \Big] dt \Big\} \\
&= \frac{h}{1-x} \left\{ \int_0^{\theta} \left[x R_n^0 \left(x, t + \frac{h_1}{2h} \right) - x^2 R_n^0 \left(x, 1 + t - \frac{h_1}{2h} \right) \right] dt + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\theta}^{1-h_1/(2h)} \left[x^2 R_n^0 \left(x, t + \frac{h_1}{2h} \right) - x^2 R_n^0 \left(x, 1 - \frac{h_1}{2h} + t \right) \right] dt \\
& + \int_{1-h_1/(2h)}^{h_1/(2h)} \left[x R_n^0 \left(x, t + \frac{h_1}{2h} - 1 \right) - x^3 R_n^0 \left(x, 1 - \frac{h_1}{2h} + t \right) \right] dt \\
& + \int_{h_1/(2h)}^1 \left[x R_n^0 \left(x, t + \frac{h_1}{2h} - 1 \right) - x^2 R_n^0 \left(x, t - \frac{h_1}{2h} \right) \right] dt \Big\}.
\end{aligned}$$

В случае 2) имеем

$$\begin{aligned}
U_{n+2}(x, \theta) &= \frac{1}{h(1-x)} \Big\{ \int_0^{1-h_1/(2h)} \left[x R_n^0 \left(x, t + \frac{h_1}{2h} \right) - x R_n^0(x, 0) + x^2 R_n^0(x, 1) \right. \\
&\quad \left. - x^2 R_n^0 \left(x, 1 - \frac{h_1}{2h} + t \right) \right] dt + \int_{1-h_1/(2h)}^{\theta} \left[R_n^0 \left(x, t + \frac{h_1}{2h} - 1 \right) \right. \\
&\quad \left. - R_n^0(x, 0) + x R_n^0(x, 1) - x R_n^0(x, 0) + x^2 R_n^0(x, 1) - x^2 R_n^0 \left(x, 1 - \frac{h_1}{2h} + t \right) \right] dt \\
&\quad + \int_{\theta}^{h_1/(2h)} \left[x R_n^0 \left(x, t + \frac{h_1}{2h} - 1 \right) - x R_n^0(x, 0) + x^2 R_n^0(x, 1) - x^2 R_n^0(x, 0) \right. \\
&\quad \left. + x^3 R_n^0(x, 1) - x^3 R_n^0 \left(x, 1 - \frac{h_1}{2h} + t \right) \right] dt + \int_{h_1/(2h)}^1 \left[x R_n^0 \left(x, t + \frac{h_1}{2h} - 1 \right) \right. \\
&\quad \left. - x R_n^0(x, 0) + x^2 R_n^0(x, 1) - x^2 R_n^0 \left(x, t - \frac{h_1}{2h} \right) \right] dt \Big\} \\
&= \frac{1}{h(1-x)} \Big\{ \int_0^{1-h_1/(2h)} \left[x R_n^0 \left(x, t + \frac{h_1}{2h} \right) - x^2 R_n^0 \left(x, 1 - \frac{h_1}{2h} + t \right) \right] dt \\
&\quad + \int_{1-h_1/(2h)}^{\theta} \left[R_n^0 \left(x, t + \frac{h_1}{2h} - 1 \right) - x^2 R_n^0 \left(x, 1 - \frac{h_1}{2h} + t \right) \right] dt \\
&\quad + \int_{\theta}^{h_1/(2h)} \left[x R_n^0 \left(x, t + \frac{h_1}{2h} - 1 \right) - x^3 R_n^0 \left(x, 1 - \frac{h_1}{2h} + t \right) \right] dt \\
&\quad + \int_{h_1/(2h)}^1 \left[x R_n^0 \left(x, t + \frac{h_1}{2h} - 1 \right) - x^2 R_n^0 \left(x, t - \frac{h_1}{2h} \right) \right] dt \Big\}.
\end{aligned}$$

В случае 3) имеем

$$\begin{aligned}
U_{n+2}(x, \theta) &= \frac{1}{h(1-x)} \Big\{ \int_0^{1-h_1/(2h)} \left[x R_n^0 \left(x, t + \frac{h_1}{2h} \right) - x R_n^0(x, 0) + x^2 R_n^0(x, 1) \right. \\
&\quad \left. - x^2 R_n^0 \left(x, 1 - \frac{h_1}{2h} + t \right) \right] dt + \int_{1-h_1/(2h)}^{h_1/(2h)} \left[R_n^0 \left(x, t + \frac{h_1}{2h} - 1 \right) \right. \\
&\quad \left. - R_n^0(x, 0) + x R_n^0(x, 1) - x R_n^0(x, 0) + x^2 R_n^0(x, 1) - x^2 R_n^0 \left(x, 1 - \frac{h_1}{2h} + t \right) \right] dt \\
&\quad + \int_{h_1/(2h)}^{\theta} \left[R_n^0 \left(x, t + \frac{h_1}{2h} - 1 \right) - R_n^0(x, 0) + x R_n^0(x, 1) - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -xR_n^0\left(x, t - \frac{h_1}{2h}\right) \Big] dt + \int_{\theta}^1 \left[xR_n^0\left(x, t + \frac{h_1}{2h} - 1\right) \right. \\
& \left. - xR_n^0(x, 0) + x^2R_n^0(x, 1) - x^2R_n^0\left(x, t - \frac{h_1}{2h}\right) \right] dt \Big\} \\
& = \frac{1}{h(1-x)} \left\{ \int_0^{1-h_1/(2h)} \left[xR_n^0\left(x, t + \frac{h_1}{2h}\right) - x^2R_n^0\left(x, 1 - \frac{h_1}{2h} + t\right) \right] dt \right. \\
& + \int_{1-h_1/(2h)}^{h_1/(2h)} \left[R_n^0\left(x, t + \frac{h_1}{2h} - 1\right) - x^2R_n^0\left(x, 1 - \frac{h_1}{2h} + t\right) \right] dt \\
& + \int_{h_1/(2h)}^{\theta} \left[R_n^0\left(x, t + \frac{h_1}{2h} - 1\right) - xR_n^0\left(x, t - \frac{h_1}{2h}\right) \right] dt \\
& \left. + \int_{\theta}^1 \left[xR_n^0\left(x, t + \frac{h_1}{2h} - 1\right) - x^2R_n^0\left(x, t - \frac{h_1}{2h}\right) \right] dt \right\}.
\end{aligned}$$

Сравнивая полученные формулы с равенством (15), получаем

$$U_{n+2}(x, \theta) = Q_{n+2}(x). \quad (22)$$

С учетом (11) и леммы 5 имеем

$$\begin{aligned}
|U_{n+2}(-1, \theta)| &= \\
&= \left| \int_0^{\theta} dt \int_{-h_1/(2h)}^{h_1/(2h)} \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \sum_{l=0}^n (-1)^{n-l} \mu_l \varphi_n((l+z+1-j-t)h_+) dz \right. \\
&\quad \left. + \int_{\theta}^1 dt \int_{-h_1/(2h)}^{h_1/(2h)} \sum_{j=0}^{n+2} (-1)^j \sum_{l=0}^n (-1)^{n-l} \mu_l \varphi_n((l+z+2-j-t)h_+) dz \right| \\
&= \frac{h_1}{h^2} \int_0^1 |H_n(t)| dt. \quad (23)
\end{aligned}$$

Из последнего равенства и леммы 5 следует

$$U_{n+2}(-1, \theta) \neq 0. \quad (24)$$

Сформулируем один известный результат.

ТЕОРЕМА А. Если все нули полинома $U_r(x) = \sum_{l=0}^r c_l x^l$, $c_r \neq 0$, $c_l \in \mathbb{R}$, отрицательны и просты, $U_r(-1) \neq 0$, то разностное уравнение $\sum_{l=0}^r c_l Z_{m+l} = K_m$, $m \in \mathbb{Z}$, где $K = \{K_m\}_{m \in \mathbb{Z}} \in l_p$, $1 \leq p \leq \infty$, имеет единственное решение $Z^0 = \{Z_m^0\}_{m \in \mathbb{Z}} \in l_p$, выражаемое формулой

$$Z_m^0 = \sum_{s \in \mathbb{Z}} a_{-s-m} K_s,$$

где $\sum_{s \in \mathbb{Z}} a_s x^s = (U_r(x))^{-1}$, для которого справедлива оценка

$$\|Z^0\|_{l_p} \leq \frac{\|K\|_{l_p}}{|U_r(-1)|}.$$

Существование и единственность решения разностного уравнения в теореме А доказаны М.Г. Крейном [7], а оценка сверху для $\|Z^0\|$ получена Ю.Н. Субботиным [2]. В силу (22), (24) и леммы 7 многочлены $U_{n+2}(x, \theta)/x$ при $0 \leq \theta \leq 1 - \frac{h_1}{2h}$, $U_{n+2}(x, \theta)$ при $1 - \frac{h_1}{2h} < \theta < 1$ удовлетворяют всем условиям теоремы А. Следовательно, разностное уравнение (21) имеет единственное решение $Z = \{Z_m\}_{m \in \mathbb{Z}} \in l_\infty$, выражаемое формулой

$$Z_m = \sum_{s \in \mathbb{Z}} a_{-s-m} \Delta_h^{\mathcal{L}^n} y_m,$$

где $\sum_{s \in \mathbb{Z}} a_s x^s = \frac{h_1}{h^2} (U_{n+2}(x, \theta))^{-1}$, для которого справедлива оценка

$$\|Z\|_{l_\infty} \leq \frac{h_1}{h^2} \cdot \frac{\|\Delta_h^{\mathcal{L}^n} y\|_{l_\infty}}{|U_{n+2}(-1, \theta)|}. \quad (25)$$

Таким образом, мы показали, что для любой функции $S \in S(\mathcal{L}_n, \theta) \cap F_{h, h_1, \infty}(y)$, имеющей вид

$$S(x) = \sum_{j=1}^n c_j v_j(x) + \int_0^x \varphi_n(x-t) u(t) dt, \quad (26)$$

функция u определяется однозначно. Для полного доказательства теоремы 2 нам остается показать, что в выписанном представлении для функции S коэффициенты c_j , $j = \overline{1, n}$, также определяются однозначно. Функцию S , имеющую вид (26), мы строили, полагая

$$\Delta_h^{\mathcal{L}^n} y_m = \frac{1}{h_1} \Delta_h^{\mathcal{L}^n} \int_{-h_1/2}^{h_1/2} S(mh+t) dt, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (27)$$

Наша задача заключается в нахождении коэффициентов c_j , при которых функция S удовлетворяет не соотношениям (27), а условиям интерполяции в среднем

$$y_m = \frac{1}{h_1} \int_{-h_1/2}^{h_1/2} S(mh+t) dt, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (28)$$

Подставляя (26) в (28) и предполагая условия интерполяции (28) выполненными при $m = \overline{0, n-1}$, для определения коэффициентов c_j , $j = \overline{1, n}$, получаем систему n линейных уравнений. Главный определитель $W(h, h_1)$ этой системы имеет вид

$$W(h, h_1) = \frac{1}{h_1^n} \begin{vmatrix} \int_{-h_1/2}^{h_1/2} v_1(t) dt & \dots & \int_{-h_1/2}^{h_1/2} v_n(t) dt \\ \dots & \dots & \dots \\ \int_{-h_1/2}^{h_1/2} v_1(t + (n-1)h) dt & \dots & \int_{-h_1/2}^{h_1/2} v_n(t + (n-1)h) dt \end{vmatrix}.$$

В [6] автором указана система v_j , $j = \overline{1, n}$, решений однородного уравнения $\mathcal{L}_n(D)f = 0$, для которой при $0 < h < h_0$

$$W(h, 0) = \begin{vmatrix} v_1(0) & \dots & v_n(0) \\ \dots & \dots & \dots \\ v_1((n-1)h) & \dots & v_n((n-1)h) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Кроме того, доказано, что $W(h, h_1) = C(h_1)W(h, 0)$, где $C(h_1) \neq 0$ при $0 < h_1 < 2h$. Итак, коэффициенты c_j , $j = \overline{1, n}$, в представлении (26) определяются однозначно, и теорема 2 полностью доказана.

§ 3. Доказательство теоремы 1

Для доказательства теоремы 1, сформулированной во введении, величину $A_\infty(\mathcal{L}_n, h, h_1)$ оценим сверху и снизу, а затем покажем, что полученные оценки совпадают. Из теоремы 2 следует, что для любой последовательности $y \in Y_{h,\infty}$ существует функция $S \in F_{h,h_1,\infty}(y)$, которая имеет вид (26), где c_j , $j = \overline{1, n}$, — некоторые числа, $u(t) = Z_m$, $(m-1+\theta)h \leq t < (m+\theta)h$,

$$\begin{aligned} Z_m &= \sum_{s \in \mathbb{Z}} a_{s-m} \Delta_h^{\mathcal{L}_n} y_s, \quad \sum_{s \in \mathbb{Z}} a_s x^s = \frac{h_1}{h^2} (U_{n+2}(x, \theta))^{-1}, \\ \sup_{m \in \mathbb{Z}} |Z_m| &\leq \frac{h_1}{h^2} \cdot \frac{\|\Delta_h^{\mathcal{L}_n} y\|_{l_\infty}}{|U_{n+2}(-1, \theta)|}, \\ |U_{n+2}(-1, \theta)| &= \frac{h_1}{h^2} \int_0^1 |H_n(t)| dt. \end{aligned}$$

Поэтому для функции $\mathcal{L}_n(D)S$ получаем оценку

$$\|\mathcal{L}_n(D)S\|_{L_\infty} = \sup_m |Z_m| \leq (\|H_n\|_{L_1[0,1]})^{-1}.$$

Отсюда для величины $A_\infty(\mathcal{L}_n, h, h_1)$ при $0 < h < h_0$, $h < h_1 < 2h$ получаем оценку сверху

$$A_\infty(\mathcal{L}_n, h, h_1) \leq (\|H_n\|_{L_1[0,1]})^{-1}.$$

В силу леммы 8 это именно та оценка, к которой мы стремились.

Оценим снизу величину $A_\infty(\mathcal{L}_n, h, h_1)$. Пусть $N > n+1$. Рассмотрим произвольную последовательность $y^* = \{y_m^*\}_{m \in \mathbb{Z}}$, удовлетворяющую условию

$$\Delta_h^{\mathcal{L}_n} y_m^* = \begin{cases} (-1)^m, & |m| \leq N, \\ 0, & |m| > N. \end{cases} \quad (29)$$

Таких последовательностей существует бесконечно много. В самом деле, задавая произвольным образом значения $y_0^*, y_1^*, \dots, y_{n-1}^*$, из (29) последовательно вычислим $y_n^*, y_{n+1}^*, \dots$ и $y_{-1}^*, y_{-2}^*, \dots$. Ясно, что $y^* \in Y_{h,\infty}$. Покажем, что для любой функции $f \in F_{h,h_1,\infty}(y^*)$ при $0 < h < h_0$, $h < h_1 < 2h$ имеет место неравенство

$$\|\mathcal{L}_n(D)f\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \geq (\|H_n\|_{L_1[0,1]})^{-1}. \quad (30)$$

При $0 \leq t \leq 1$ определим функции

$$\begin{aligned} B_1((-N-1+s+t)h) &= (-1)^{s+N} \sum_{j=0}^s (-1)^j a_{j,n}(t, h, h_1), \\ B_2((N+s-1+t)h) &= (-1)^{s+N} \sum_{j=s}^{n+1} (-1)^j a_{j,n}(t, h, h_1), \end{aligned}$$

где $s = \overline{0, n+1}$ и функции $a_{j,n}$ определены равенством (11). Имеем

$$\begin{aligned}
2N+1 &= \sum_{m=-N}^N (-1)^m \Delta_h^{\mathcal{L}_n} y_m^* \\
&= \sum_{m=-N}^N (-1)^m \sum_{j=0}^{n+1} \int_0^1 \mathcal{L}_n(D) f((m-1+j+t)h) a_{j,n}(t, h, h_1) dt \\
&= \sum_{s=-N}^{-N+n+1} \int_0^1 (-1)^s \mathcal{L}_n(D) f((s-1+t)h) \sum_{j=0}^{s+N} (-1)^j a_{j,n}(t, h, h_1) dt \\
&\quad + \sum_{s=-N+n+2}^{N-1} \int_0^1 (-1)^s \mathcal{L}_n(D) f((s-1+t)h) \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j a_{j,n}(t, h, h_1) dt \\
&\quad + \sum_{s=N}^{N+n+1} \int_0^1 (-1)^s \mathcal{L}_n(D) f((s-1+t)h) \sum_{j=s-N}^{n+1} (-1)^j a_{j,n}(t, h, h_1) dt \\
&= \int_{-N-1}^{-N+n+1} \mathcal{L}_n(D) f(th) B_1(th) dt - \int_{-N+n+1}^{N-1} \mathcal{L}_n(D) f(th) H_n(t) dt \\
&\quad + \int_{N-1}^{N+n+1} \mathcal{L}_n(D) f(th) B_2(th) dt.
\end{aligned}$$

Функции B_1 и B_2 являются ограниченными, $\mathcal{L}_n(D)f \in L_\infty(\mathbb{R})$, поэтому в последнем равенстве первый и третий интегралы при $N \rightarrow \infty$ ограничены некоторыми константами, не зависящими от N . При $N \rightarrow \infty$ получим

$$\begin{aligned}
1 &\leq (2N+1)^{-1} \left[\int_{-N+n+1}^{N-1} |\mathcal{L}_n(D) f(th) H_n(t)| dt + O(1) \right] \\
&\leq (2N+1)^{-1} \left[\|\mathcal{L}_n(D) f\|_{L_\infty} (2N-n-2) \cdot \|H_n\|_{L_1[0,1]} + O(1) \right].
\end{aligned}$$

Отсюда при $N \rightarrow \infty$ получаем (30). Теорема 1 полностью доказана.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $0 < h < h_0 = \pi / \max_{1 \leq s \leq k} \alpha_s$, $h_1 = 2h$. Тогда

$$A_\infty(\mathcal{L}_n, h, h_1) = +\infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 8 при $h_1 = 2h$ получаем, что $H_n(t) \equiv 0$. Совершая предельный переход в теореме 2, получаем утверждение теоремы 3.

Список литературы

1. *Субботин Ю. Н.* Экстремальные задачи функциональной интерполяции и интерполяционные в среднем сплайны // Тр. МИАН СССР. 1975. Т. 138. С. 118–173.
2. *Шевалдин В. Т.* Некоторые задачи экстремальной интерполяции в среднем для линейных дифференциальных операторов // Тр. МИАН СССР. 1983. Т. 164. С. 203–240.
3. *Субботин Ю. Н.* О связи между конечными разностями и соответствующими производными // Тр. МИАН СССР. 1965. Т. 78. С. 24–42.
4. *Субботин Ю. Н.* Экстремальная функциональная интерполяция в среднем с наименьшим значением n -й производной при больших интервалах усреднения // Матем. заметки. 1996. Т. 59. № 1. С. 114–132.
5. *Субботин Ю. Н.* Экстремальная в L_p интерполяция в среднем при пересекающихся интервалах усреднения // Изв. РАН. Сер. матем. 1997. Т. 61. № 1. С. 177–198.
6. *Шевалдин В. Т.* Экстремальная интерполяция для линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами. Дис. . . . канд. физ.-мат. наук. Свердловск: УрГУ, 1983.
7. *Крейн М. Г.* Интегральные уравнения на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов // УМН. 1958. Т. 13. № 5. С. 3–120.

Поступило в редакцию
13.V.1996