Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Пирковский, К проблеме существования достаточного количества инъективных модулей Фреше над ненормируемыми алгебрами Фреше, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1998, том 62, выпуск 4, 137–154

DOI: <https://doi.org/10.4213/im194>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 18:17:06

УДК 517.986.2

А. Ю. Пирковский

**К проблеме существования достаточного
количества инъективных модулей Фреше
над ненормируемыми алгебрами Фреше**

Основная цель работы – показать, что в категориях модулей Фреше над некоторыми алгебрами Фреше может не существовать достаточного количества инъективных объектов. В частности, показано, что над алгебрами Фреше формальных степенных рядов не существует ни одного ненулевого инъективного модуля Фреше. Описан класс алгебр Фреше, включающий в себя алгебры голоморфных функций на неприводимых пространствах Штейна, над которыми не существует инъективных метризуемых гипомодулей. В работе также исследуется свойство делимости для модулей Фреше и его взаимосвязь со свойством инъективности. Показано, что в любом сепарабельном делимом модуле Фреше имеются периодические элементы. Доказана теорема о несуществовании делимых банаховых модулей.

Библиография: 20 наименований.

Понятия проективного и инъективного модулей играют фундаментальную роль в классической гомологической алгебре. Эти понятия естественным образом переносятся на случай различных категорий топологических модулей над топологическими алгебрами и составляют один из объектов изучения “гомологии алгебр анализа” (см. [10], [20]), которая к настоящему времени оформилась в самостоятельную теорию, применяемую в таких областях математики, как спектральная теория линейных операторов и комплексно-аналитическая геометрия (см., например, [15], [19]). Наиболее разработанная часть этой теории относится к банаховым алгебрам и банаховым модулям. Это обусловлено, в частности, тем, что в категориях банаховых модулей над банаховыми алгебрами существует достаточно много как проективных, так и инъективных объектов; другими словами, каждый банахов модуль обладает как проективной, так и инъективной резольвентами. Однако при рассмотрении более широких классов топологических алгебр и модулей ситуация существенно меняется. В то время как каждый объект в таких категориях все еще обладает проективной резольвентой, об инъективных топологических модулях над ненормируемыми топологическими алгебрами известно очень мало. Главная трудность здесь заключается в том, что модуль $\mathcal{B}(A, E)$, состоящий из всех непрерывных линейных операторов из заданной алгебры A в некоторое локально выпуклое пространство E и играющий основную роль при построении инъективных резольвент банаховых модулей над банаховой алгеброй A , в случае ненормируемой A не обладает какой-либо естественной топологией, превращающей его в

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 96-15-96249) и гранта “Университеты России” (№ 5113).

модуль с совместно непрерывным оператором умножения на элементы алгебры A (даже если умножение в алгебре A совместно непрерывно). Этот вопрос подробно обсуждался в [20] в связи с поиском адекватного гомологического аппарата для построения мультиоператорного голоморфного исчисления.

Имеются несколько способов обойти эту трудность; все они заключаются в некотором “расширении” категорий топологических модулей над топологическими алгебрами с целью включить в них так называемые *косвоободные* модули $\mathcal{B}(A, E)$ и обеспечить тем самым наличие достаточного количества инъективных объектов. В этой связи укажем на уже упомянутую работу Тэйлора [20], в которой роль основной категории играет категория так называемых *гипомодулей* над произвольной локально выпуклой алгеброй A , удовлетворяющей некоторым дополнительным линейно-топологическим условиям, а также на недавнюю работу [1].

Тем не менее, ответ на “прямой” вопрос о существовании достаточного количества топологических инъективных A -модулей с совместно непрерывным умножением на элементы алгебры A в случае произвольной A пока неизвестен. Некоторые проблемы, соответствующие этому кругу вопросов, были сформулированы А. Я. Хелемским в работе [16]. Одна из них состоит в следующем: существует ли алгебра Фреше A , над которой нет ни одного ненулевого инъективного модуля Фреше? Там же была высказана гипотеза о том, что, возможно, такими алгебрами являются алгебры Фреше голоморфных функций $\theta(U)$ для областей $U \subseteq \mathbb{C}^n$. К сожалению, полного ответа на вопрос о существовании инъективных $\theta(U)$ -модулей Фреше получить пока не удастся; тем не менее, некоторые частичные результаты в этом направлении содержатся в §3 настоящей работы. Основная же цель работы – показать, что над алгеброй Фреше формальных степенных рядов $\mathbb{C}[[z_1, \dots, z_n]]$ действительно не существует ненулевых инъективных модулей Фреше.

Несколько слов о структуре работы. В §1 вводятся некоторые определения из теории топологических алгебр и модулей, а также доказываются две вспомогательные леммы, играющие в дальнейшем основную роль при доказательстве теорем о несуществовании инъективных модулей над той или иной алгеброй Фреше. В §2 изучаются делимые модули Фреше и их взаимосвязь с инъективными модулями Фреше; основными утверждениями здесь являются теорема 2.2 о наличии кручения в делимых модулях Фреше и теорема 2.5 о несуществовании банаховых делимых модулей. Результаты §2 применяются затем в §3 при доказательстве несуществования *нормируемых* инъективных модулей Фреше над некоторыми алгебрами гладких и голоморфных функций; там же устанавливается, что над алгебрами голоморфных функций не существует инъективных метризуемых гипомодулей. Наконец, §4 содержит доказательство основной теоремы о несуществовании инъективных модулей Фреше над алгеброй формальных степенных рядов.

§1. Основные понятия и определения

Напомним некоторые определения из теории топологических алгебр (см. также [10], [20]). *Локально выпуклая алгебра* A – это локально выпуклое пространство (ЛВП) над полем $\mathbb{C}$, наделенное структурой ассоциативной алгебры так, что оператор умножения $A \times A \rightarrow A$, $(a, b) \mapsto ab$ раздельно непрерывен. Если A к тому же полна, то она называется *$\overline{\otimes}$ -алгеброй*. Поскольку мы будем иметь дело только с алгебрами Фреше, заметим, что для полной метризуемой A из раздельной непре-

ривности умножения следует его совместная непрерывность (см. [12, III.5.1]).

Локально выпуклая алгебра A называется *локально мультипликативно выпуклой* (или *мультинормированной*), если ее топология может быть задана системой преднорм $\{\|\cdot\|_\nu : \nu \in \Lambda\}$, обладающих свойством $\|ab\|_\nu \leq \|a\|_\nu \|b\|_\nu$ для всех $a, b \in A$.

Если A – локально выпуклая алгебра, то *левым локально выпуклым модулем* над A называется ЛВП X , наделенное структурой левого A -модуля так, что оператор $A \times X \rightarrow X$, $(a, x) \mapsto a \cdot x$ раздельно непрерывен. Если A и X при этом полны, то X называется $\otimes$ -модулем. Аналогично, с заменой раздельной непрерывности совместной непрерывностью, определяются $\otimes$ -алгебры и $\otimes$ -модули.

Если E, F и G – ЛВП, то билинейный оператор $\Phi: E \times F \rightarrow G$ называется *гипонепрерывным*, если он раздельно непрерывен, и для любой окрестности нуля $U \subset G$ и любого ограниченного множества $B \subset E$ (соответственно $B \subset F$) существует такая окрестность нуля $V \subset F$ (соответственно $V \subset E$), что $\Phi(B, V) \subset U$ (соответственно $\Phi(V, B) \subset U$). Левый $\overline{\otimes}$ -модуль над $\overline{\otimes}$ -алгеброй A называется *гипомодулем*, если оператор $A \times X \rightarrow X$, $(a, x) \mapsto a \cdot x$ гипонепрерывен. Категории гипомодулей над борнологическими $\overline{\otimes}$ -алгебрами подробно исследованы в [20]; мы напомним только, что если X – левый (соответственно правый) гипомодуль над борнологической $\overline{\otimes}$ -алгеброй A , то для любого полного ЛВП F пространство $\mathcal{B}(X, F)$, состоящее из всех непрерывных линейных операторов из X в F и наделенное топологией равномерной сходимости на ограниченных подмножествах X , становится правым (соответственно левым) A -гипомодулем, если положить $(\varphi \cdot a)(x) = \varphi(a \cdot x)$ (соответственно $(a \cdot \varphi)(x) = \varphi(x \cdot a)$) для всех $a \in A$, $\varphi \in \mathcal{B}(X, F)$, $x \in X$.

Если X и Y – левые локально выпуклые модули над локально выпуклой алгеброй A , то *морфизм* $\varphi: X \rightarrow Y$ – это непрерывное линейное отображение, удовлетворяющее условию $\varphi(a \cdot x) = a \cdot \varphi(x)$ для всех $a \in A$, $x \in X$. Мономорфизм $\varphi: X \rightarrow Y$ называется *допустимым мономорфизмом*, если он обладает левым обратным непрерывным оператором из Y в X , т.е. если он топологически инъективен и его образ дополняем в Y как подпространство. Аналогично, эпиморфизм $\varphi: X \rightarrow Y$ называется *допустимым эпиморфизмом*, если он обладает правым обратным непрерывным оператором из Y в X , т.е. если он открыт и его ядро дополняемо в X как подпространство.

Пусть A – $\overline{\otimes}$ -алгебра, а $\mathcal{C}$ – полная подкатегория в категории всех левых $\overline{\otimes}$ -модулей над A . Модуль $J \in \mathcal{C}$ называется *инъективным* (в $\mathcal{C}$), если для любого допустимого мономорфизма $\kappa: Y \rightarrow X$ в $\mathcal{C}$ и любого морфизма $\varphi: Y \rightarrow J$ существует морфизм $\psi: X \rightarrow J$, делающий следующую диаграмму коммутативной:

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\kappa} & X \\ \varphi \downarrow & \nearrow \psi & \\ J & & \end{array}$$

Иначе говоря, любой морфизм $\varphi: Y \rightarrow J$ из дополняемого как подпространство подмодуля $Y \subset X$ в инъективный модуль J продолжается на весь модуль X .

Если A – алгебра Фреше, а J – левый A -модуль Фреше, то мы будем называть J *инъективным модулем Фреше*, если он инъективен в категории всех левых A -модулей Фреше.

Следующие две леммы будут в дальнейшем неоднократно использованы при доказательстве различных утверждений о несуществовании инъективных модулей.

ЛЕММА 1.1. *Пусть E – пространство Фреше, E^* – его сильное сопряженное, F – подпространство в E^* . Тогда если F метризуемо, то оно нормируемо.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку E – пространство Фреше, в его сильном сопряженном пространстве E^* существует фундаментальная последовательность ограниченных множеств $\{B_n\}$ (это означает, что каждое ограниченное множество $B \subset E^*$ содержится в некотором B_n ; см. [12, IV.5.2]). Для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим $D_n = B_n \cap F$; тогда, очевидно, $\{D_n\}$ – фундаментальная последовательность ограниченных множеств в F . Так как F по предположению метризуемо, мы можем выбрать счетную базу $\{U_n\}$ выпуклых окрестностей нуля в F . Не ограничивая общности, мы можем считать, что $U_{n+1} \subseteq U_n$ для всех n . Предположим, что F ненормируемо; тогда в силу критерия Колмогорова (см. [12, II.2.1]) в F не существует выпуклых ограниченных окрестностей нуля; в частности, U_n не содержится в D_n ни для какого n . Для каждого n выберем элемент $x_n \in U_n \setminus D_n$; тогда множество $\{x_n\}$, будучи сходящейся к нулю последовательностью, ограничено в F . С другой стороны, $\{x_n\}$ не содержится ни в одном из D_n и поэтому не может быть ограниченным. Полученное противоречие доказывает, что F нормируемо.

ЛЕММА 1.2. *Пусть A – рефлексивная ненормируемая алгебра Фреше без делителей нуля, в которой все главные правые идеалы замкнуты. Тогда ни для какого левого A -модуля Фреше X не существует ненулевых морфизмов из левого A -гипомодуля A^* в X .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное; пусть $\varphi: A^* \rightarrow X$ – ненулевой морфизм левых A -модулей. Тогда $\psi = \varphi^*: X^* \rightarrow A^{**}$ – ненулевой морфизм правых A -модулей. В силу рефлексивности A мы можем считать, что ψ действует из X^* в A . Фиксируем произвольный элемент $y \in X^*$, для которого $c = \psi(y) \neq 0$. Рассмотрим оператор $m_y: A \rightarrow X^*$, $m_y: a \mapsto y \cdot a$ и обозначим через ρ композицию $\psi \circ m_y$. Легко видеть, что оператор $\rho: A \rightarrow A$ является левым умножением на $c = \psi(y)$:

$$\rho(a) = \psi(y \cdot a) = \psi(y)a = ca.$$

Из условия леммы и теоремы Банаха об открытом отображении следует, что ρ топологически инъективен; но тогда m_y также топологически инъективен, и пространство Фреше A может рассматриваться как подпространство в X^* . По лемме 1.1 A нормируемо, что противоречит условию. Таким образом, $\varphi = 0$, и лемма доказана.

Нам понадобятся также некоторые факты об алгебрах формальных степенных рядов $\mathbb{C}[[z_1, \dots, z_n]]$. По определению алгебра $\mathbb{C}[[z_1, \dots, z_n]]$ состоит из всевозможных формальных выражений вида

$$\sum_{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n} \alpha_{k_1 \dots k_n} z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n},$$

или, в стандартных мультииндексных обозначениях,

$$\sum_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}};$$

здесь $\alpha_{k_1 \dots k_n} = \alpha_{\mathbf{k}} \in \mathbb{C}$. Операции в $\mathbb{C}[[z_1, \dots, z_n]]$ задаются следующими формулами:

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{i}} \alpha_{\mathbf{i}} \mathbf{z}^{\mathbf{i}} + \sum_{\mathbf{j}} \beta_{\mathbf{j}} \mathbf{z}^{\mathbf{j}} &= \sum_{\mathbf{k}} (\alpha_{\mathbf{k}} + \beta_{\mathbf{k}}) \mathbf{z}^{\mathbf{k}}, \\ \sum_{\mathbf{i}} \alpha_{\mathbf{i}} \mathbf{z}^{\mathbf{i}} \cdot \sum_{\mathbf{j}} \beta_{\mathbf{j}} \mathbf{z}^{\mathbf{j}} &= \sum_{\mathbf{k}} \gamma_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}}, \end{aligned}$$

где $\gamma_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{i}+\mathbf{j}=\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{i}} \beta_{\mathbf{j}}$.

Известно, что алгебра $\mathbb{C}[[z_1, \dots, z_n]]$ является коммутативной нетеровой локальной областью целостности с максимальным идеалом

$$\mathfrak{m} = \left\{ a = \sum_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} : \alpha_{\mathbf{0}} = 0 \right\}$$

(см., например, [2, 10.27]).

Легко видеть, что отображение $i: \mathbb{C}[[z_1, \dots, z_n]] \rightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_+^n}$, задаваемое формулой $i\left(\sum_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}}\right) = \{\alpha_{\mathbf{k}} : \mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^n\}$, является изоморфизмом векторных пространств. Поэтому в $\mathbb{C}[[z_1, \dots, z_n]]$ можно ввести топологию, взяв прообраз топологии прямого произведения в $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_+^n}$ при изоморфизме i . В этой топологии $\mathbb{C}[[z_1, \dots, z_n]]$ становится алгеброй Фреше (см., например, [6, 1.0.0]). Можно также убедиться в том, что $\mathbb{C}[[z_1, \dots, z_n]]$ локально мультипликативно выпукла; для этого достаточно заметить, что топология в $\mathbb{C}[[z_1, \dots, z_n]]$ определяется системой преднорм $\|a\|_{\mathbf{k}} = |\mathbf{k}|^n \max_{\mathbf{i} \leq \mathbf{k}} |\alpha_{\mathbf{i}}|$, где $a = \sum_{\mathbf{i}} \alpha_{\mathbf{i}} \mathbf{z}^{\mathbf{i}}$. Действительно,

$$\begin{aligned} \|ab\|_{\mathbf{m}} &= |\mathbf{m}|^n \max_{\mathbf{k} \leq \mathbf{m}} \left| \sum_{\mathbf{i}+\mathbf{j}=\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{i}} \beta_{\mathbf{j}} \right| \leq |\mathbf{m}|^n \max_{\mathbf{i} \leq \mathbf{m}} |\alpha_{\mathbf{i}}| \sum_{\mathbf{j} \leq \mathbf{m}} |\beta_{\mathbf{j}}| \\ &\leq |\mathbf{m}|^n \max_{\mathbf{i} \leq \mathbf{m}} |\alpha_{\mathbf{i}}| \cdot |\mathbf{m}|^n \max_{\mathbf{j} \leq \mathbf{m}} |\beta_{\mathbf{j}}| = \|a\|_{\mathbf{m}} \|b\|_{\mathbf{m}}, \end{aligned}$$

где $a = \sum_{\mathbf{i}} \alpha_{\mathbf{i}} \mathbf{z}^{\mathbf{i}}$, $b = \sum_{\mathbf{j}} \beta_{\mathbf{j}} \mathbf{z}^{\mathbf{j}}$.

Справедливость неравенства $\|ab\|_{\mathbf{m}} \leq \|a\|_{\mathbf{m}} \|b\|_{\mathbf{m}}$ для всех a, b и означает, что алгебра $\mathbb{C}[[z_1, \dots, z_n]]$ локально мультипликативно выпукла.

Можно показать, что в алгебре Фреше $\mathbb{C}[[z_1, \dots, z_n]]$ все идеалы замкнуты. Для $n = 1$ это очевидно, так как в этом случае любой идеал порожден элементом z^m для некоторого $m \in \mathbb{N}$ и состоит из всех степенных рядов вида $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i z^i$, у которых $\alpha_0 = \dots = \alpha_{m-1} = 0$. В общем же случае доказательство этого факта использует теорему Крулля о пересечении (см. [6, приложение, 2.3]) и дословно повторяет доказательство аналогичного утверждения для алгебры сходящихся степенных рядов (см. [6, 1.5.4]).

Нетрудно также проверить, что полем частных алгебры $\mathbb{C}[[z]]$ является алгебра формальных рядов Лорана $\mathbb{C}((z))$. Элементами $\mathbb{C}((z))$ являются формальные выражения вида $\sum_{k=-s}^{\infty} \alpha_k z^k$, где $\alpha_k \in \mathbb{C}$, $s \geq 0$, а умножение в $\mathbb{C}((z))$ задается той же формулой, что и в $\mathbb{C}[[z]]$.

§ 2. Инъективность и делимость

В этом параграфе мы исследуем взаимосвязь понятий инъективности и делимости для модулей Фреше. Напомним, что левый модуль M над произвольной алгеброй A называется *делимым*, если $a \cdot M = M$ для всех $a \in A$ (здесь под $a \cdot M$ понимается множество $\{a \cdot x : x \in M\}$). Заметим, что из существования ненулевого делимого A -модуля автоматически следует, что в алгебре A нет делителей нуля. В чистой алгебре понятие делимости тесно связано с понятием инъективности. Известно, например, что всякий инъективный модуль над областью целостности делим. Далее, всякий делимый модуль без кручения инъективен, и всякий делимый модуль над кольцом главных идеалов инъективен (см. [3, 1.7]).

Пусть теперь A – алгебра Фреше. Верны ли вышупомянутые утверждения о связи инъективности и делимости в категории A -модулей Фреше? Несложные примеры показывают, что в общем случае ответ на этот вопрос отрицателен.

ПРИМЕР 2.1. Покажем, что существует коммутативная банахова алгебра A без делителей нуля, над которой некоторый инъективный банахов модуль не является делимым. Возьмем в качестве A “алгебру на диске” $\mathcal{A}(\overline{D})$ (см., например, [11, 3.1.4]). По определению A состоит из всех функций, непрерывных в замкнутом единичном диске $\overline{D} \subset \mathbb{C}$ и голоморфных в его внутренности; она является коммутативной банаховой алгеброй без делителей нуля относительно равномерной нормы $\|a\| = \sup\{|a(z)| : z \in \overline{D}\}$. Фиксируем произвольную точку z_0 такую, что $|z_0| = 1$, и обозначим через I максимальный идеал в A , состоящий из всех функций $a \in A$, обращающихся в нуль в z_0 . Поскольку z_0 – точка пика для A (см. [9, гл. 8]), идеал I обладает ограниченной аппроксимативной единицей (см., например, [4, гл. II, упр. 12]), поэтому одномерный A -модуль $\mathbb{C}_{z_0} = (A/I)^*$ инъективен (см. [10, VII.1.20]). В то же время $I \cdot \mathbb{C}_{z_0} = 0$, поэтому $\mathbb{C}_{z_0}$ не является делимым A -модулем.

ЗАМЕЧАНИЕ. Оказывается, что ситуация, описанная в примере 2.1, типична для банаховых алгебр: с одной стороны, над каждой банаховой алгеброй имеется достаточно много инъективных банаховых модулей (см., например, [10, III.1.31]), а с другой стороны, делимых банаховых модулей не существует (теорема 2.5).

ЛЕММА 2.1. Пусть A – алгебра без делителей нуля, A_+ – ее унитализация, а X – левый делимый A -модуль. Справедливы следующие утверждения:

- (i) если A не обладает левой единицей, то X – делимый A_+ -модуль;
- (ii) если A не унитарна, а X не имеет кручения как A -модуль, то X не имеет кручения как A_+ -модуль и делим как A_+ -модуль.

Кроме того, лемма сохраняет силу, если в ее формулировке всюду заменить слово “левый” на “правый”, а “правый” – на “левый”.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случай (i). Предположим, что X не является делимым A_+ -модулем, т.е. существуют такие $a \in A$ и $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, что оператор $l_{a-\lambda 1_+} : X \rightarrow X$, действующий по правилу $x \mapsto (a - \lambda 1_+) \cdot x$, не сюръективен (здесь 1_+ – единица в алгебре A_+). Тогда для любого $b \in A$ оператор $l_{a-\lambda 1_+} l_b = l_{ab-\lambda b}$ не сюръективен. Поскольку X – делимый A -модуль, мы заключаем, что $ab - \lambda b = 0$ для всех $b \in A$, т.е. что элемент $1_\ell = \lambda^{-1}a$ является левой единицей в A . Полученное противоречие доказывает (i).

Рассмотрим случай (ii). Предположим, что X имеет кручение как A_+ -модуль. Тогда существуют такие $a \in A$, $x \in X$, $x \neq 0$, и $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, что $(a - \lambda 1_+) \cdot x = 0$, т.е. $a \cdot x = \lambda x$. В силу делимости A -модуля X для любого $b \in A$, $b \neq 0$, существует $y_b \in X$, $y_b \neq 0$, такой, что $b \cdot y_b = x$. Следовательно, $ab \cdot y_b = \lambda b \cdot y_b$. Поскольку $y_b \neq 0$ и A -модуль X не имеет кручения, мы видим, что $ab = \lambda b$. В силу произвольности b это означает, что элемент $\lambda^{-1}a$ является левой единицей в A .

С другой стороны, из равенства $a \cdot x = \lambda x$ следует, что $ba \cdot x = \lambda b \cdot x$ для любого $b \in A$. Ввиду того, что $x \neq 0$ и X не имеет кручения как A -модуль, справедливо равенство $ba = \lambda b$, и элемент $\lambda^{-1}a$ является также и правой единицей в A . Следовательно, A унитарна, что противоречит условию. Значит, X не имеет кручения как A_+ -модуль.

Покажем теперь, что X делим как A_+ -модуль. Если это не так, то существуют такие $a \in A$ и $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, что оператор $l_{a-\lambda 1_+}$ не сюръективен. По условию X делим и не имеет кручения как A -модуль; это означает, что оператор $l_b: X \rightarrow X$ обратим для любого $b \in A$, $b \neq 0$. Следовательно, операторы $l_{a-\lambda 1_+} l_b$ и $l_b l_{a-\lambda 1_+}$ не сюръективны ни для какого $b \in A$. Те же рассуждения, что и в доказательстве (i), показывают, что $\lambda^{-1}a$ — единичный элемент в A . Полученное противоречие показывает, что X делим как A_+ -модуль, и (ii) доказано.

Как уже упоминалось ранее, в чистой алгебре всякий делимый A -модуль без кручения над областью целостности A инъективен. Например, поле частных Q области целостности A является инъективным A -модулем. Следующая теорема показывает, что если над некоторой алгеброй Фреше и существует делимый модуль Фреше без кручения, то он, по крайней мере, не может быть сепарабельным.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть A — локально выпуклая алгебра без делителей нуля, отличная от $\mathbb{C}$, а X — ненулевой левый делимый A -модуль Фреше. Предположим, что выполнено хотя бы одно из следующих условий:

- (i) X нормируем;
- (ii) X сепарабелен;
- (iii) A топологически изоморфна алгебре степенных рядов $\mathbb{C}[[z]]$.

При выполнении любого из этих условий X имеет кручение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что при доказательстве (i) и (ii) мы можем считать, что A унитарна. Действительно, пусть A не унитарна, а X удовлетворяет (i) или (ii) и при этом не имеет кручения. Лемма 2.1, (ii) показывает, что условие теоремы выполнено и для алгебры A_+ . Если нам известно, что теорема справедлива для унитарных алгебр, то она справедлива и для A_+ ; значит, X имеет кручение как A_+ -модуль. Но это противоречит лемме 2.1, (ii); следовательно, X имеет кручение как A -модуль. Таким образом, в дальнейшем мы будем считать, что A унитарна.

Предположим, что X не имеет кручения. Для каждого $a \in A$ определим оператор $l_a: X \rightarrow X$ формулой $l_a(x) = a \cdot x$. Поскольку X делим и не имеет кручения, из теоремы Банаха об открытом отображении следует, что l_a — топологический изоморфизм для любого $a \neq 0$.

Предположим, что X нормируем. Пусть a — произвольный элемент A . Тогда l_a — непрерывный линейный оператор в банаховом пространстве X , поэтому он имеет непустой спектр, т.е. существует $\lambda \in \mathbb{C}$, для которого оператор $l_a - \lambda 1 = l_{a-\lambda 1}$

необратим. Так как X делим и не имеет кручения, мы видим, что $a - \lambda 1 = 0$. В силу произвольности a это означает, что A изоморфна $\mathbb{C}$, что противоречит условию. Таким образом, в случае (i) теорема доказана.

Фиксируем произвольный ненулевой элемент $e \in X$, а также произвольную коммутативную подалгебру $B \subset A$, содержащую единичный элемент. Обозначим через K_B поле частных алгебры B . Зададим отображение $\varkappa: K_B \rightarrow X$ формулой $\varkappa(ab^{-1}) = l_a l_b^{-1}(e)$, $a, b \in B$. Если в K_B выполняется равенство $ab^{-1} = cd^{-1}$, то $ad = bc$ в B , поэтому $l_a l_d(e) = l_b l_c(e)$ и, следовательно, $l_a l_b^{-1}(e) = l_c l_d^{-1}(e)$. Таким образом, отображение $\varkappa$ корректно определено. Очевидно, оно инъективно и является морфизмом B -модулей. Обозначим через Q_B его образ и введем в Q_B операцию умножения, полагая $\varkappa(q_1)\varkappa(q_2) = \varkappa(q_1 q_2)$, $\varkappa(q_1), \varkappa(q_2) \in Q_B$. Очевидно, Q_B становится полем относительно этой операции. Покажем, что так определенное умножение в Q_B раздельно непрерывно. Фиксируем произвольный элемент $q = \varkappa(ab^{-1}) \in Q_B$, где $a, b \in B$. Легко видеть, что оператор умножения на q , $m_q: Q_B \rightarrow Q_B$, $m_q(p) = qp$, совпадает с ограничением на Q_B непрерывного оператора $l_a l_b^{-1}: X \rightarrow X$ и поэтому непрерывен. Следовательно, умножение в Q_B раздельно непрерывно.

Предположим, что выполняется условие (ii), т.е. что X сепарабелен. Фиксируем произвольный ненулевой элемент $a \in A$, не кратный единичному (поскольку по условию $A \neq \mathbb{C}$ такой элемент существует). Пусть B_a – подалгебра в A , порожденная (в алгебраическом смысле) элементом a , и пусть $Q_a = Q_{B_a}$. Тогда Q_a – сепарабельная локально выпуклая алгебра, в которой множество обратимых элементов открыто. Отсюда следует, что Q_a – алгебра с непрерывным обратным (см. [17, 3.2]), и теорема Гельфанда–Мазура (см. [11, 2.1.17]) показывает, что Q_a изоморфна $\mathbb{C}$. Но тогда и B_a изоморфна $\mathbb{C}$, что противоречит выбору элемента a . Для случая (ii) теорема доказана.

Перейдем к случаю (iii). В качестве коммутативной подалгебры $B \subset A$ возьмем саму алгебру A . Как уже упоминалось ранее, поле частных алгебры $A = \mathbb{C}[[z]]$ изоморфно алгебре рядов Лорана $\mathbb{C}((z))$, поэтому произвольный элемент $f \in Q_A$ имеет вид $\varkappa(q) + \varkappa(a)$, где q – элемент из K_A вида $\sum_{k=-s}^{-1} \alpha_k z^k$, а a – формальный степенной ряд, т.е. элемент алгебры A . В силу определения топологии в A элемент a является пределом последовательности полиномов: $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Поскольку ограничение $\varkappa$ на A совпадает с непрерывным отображением $r_e: a \mapsto a \cdot e$, $\varkappa|_A$ непрерывно, и мы видим, что

$$f = \varkappa(q) + \varkappa(a) = \varkappa(q) + \varkappa|_A \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) = \varkappa(q) + \lim_{n \rightarrow \infty} \varkappa(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varkappa(q + a_n).$$

Следовательно, счетномерное подпространство, состоящее из всевозможных лорановских полиномов, плотно в Q_A , поэтому Q_A сепарабельна. Те же рассуждения, что и в случае (ii), показывают, что Q_A – алгебра с непрерывным обратным, поэтому она изоморфна $\mathbb{C}$ в силу теоремы Гельфанда–Мазура. Полученное противоречие доказывает (iii).

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Пусть выполнены условия теоремы 2.2, и пусть алгебра A коммутативна. Тогда при выполнении любого из условий (i), (ii), (iii) периодические элементы образуют плотный подмодуль в X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть N_0 – подмножество в X , состоящее из всех периодических элементов. Так как A коммутативна и не имеет делителей нуля, N_0 является подмодулем в X . Обозначим через N замыкание N_0 в X ; наша задача – показать, что $N = X$. Для каждого ненулевого $a \in A$ рассмотрим оператор левого умножения на a в модуле X , т.е. оператор $l_a: X \rightarrow X$, задаваемый формулой $l_a(x) = a \cdot x$. Оператор левого умножения на a в фактормодуле X/N будем обозначать тем же символом l_a . Легко видеть, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{l_a} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ X/N & \xrightarrow{l_a} & X/N \end{array}$$

(здесь вертикальные стрелки обозначают естественную проекцию X на X/N). Поскольку модуль X по условию делим, оператор $l_a: X \rightarrow X$ сюръективен для всех $a \neq 0$. Следовательно, индуцированный им оператор $l_a: X/N \rightarrow X/N$ также сюръективен, т.е. фактормодуль X/N делим. С другой стороны, так как подмодуль N содержит все периодические элементы модуля X , тривиальная проверка показывает, что фактормодуль X/N не имеет кручения. Таким образом, X/N – делимый A -модуль Фреше без кручения. По теореме 2.1 $X/N = 0$, т.е. $N = X$, что и требовалось доказать.

Для случая банаховых модулей теорему 2.2 можно усилить и показать, что банаховых делимых модулей не существует. Для этого нам понадобится следующая лемма.

ЛЕММА 2.4. Пусть X – банахово пространство, $G = \text{GL}(X)$ – группа всех обратимых линейных непрерывных операторов в X , $\overline{G}$ – ее замыкание в пространстве $\mathcal{B}(X)$ всех непрерывных линейных операторов в X , снабженном равномерной нормой. Предположим, что φ – топологически инъективный оператор в X и что $\varphi \in \overline{G}$. Тогда $\varphi \in G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку φ топологически инъективен, его образ замкнут в X . В силу теоремы Банаха об открытом отображении нам достаточно показать, что образ φ плотен в X . Топологическая инъективность оператора φ означает, что существует число $c > 0$ такое, что $\|\varphi(x)\| \geq c\|x\|$ для всех $x \in X$. Возьмем произвольный элемент $y \in X$, $y \neq 0$, и, задавшись произвольным $\varepsilon > 0$, подберем такой $x \in X$, что $\|y - \varphi(x)\| < \varepsilon$. Для этого положим $\delta = \min\{c\varepsilon/(2\|y\|), c/2\}$ и рассмотрим обратимый оператор $\psi \in G$ такой, что $\|\psi - \varphi\| < \delta$. Так как $\|\varphi(x)\| \geq c\|x\|$ для всех $x \in X$, имеем

$$\|\psi(x)\| \geq \|\varphi(x)\| - \|(\varphi - \psi)(x)\| \geq (c - \delta)\|x\|,$$

поэтому, полагая $x = \psi^{-1}(y)$, получаем

$$\|y - \varphi(x)\| \leq \|\psi - \varphi\| \|x\| < \delta\|x\| \leq \delta \frac{\|\psi(x)\|}{c - \delta} \leq \frac{2\delta}{c} \|y\| \leq \varepsilon.$$

Следовательно, образ φ плотен в X , а значит, совпадает с X . По теореме Банаха об открытом отображении φ обратим, что и требовалось доказать.

Пусть A – произвольная локально выпуклая алгебра. Мы будем говорить, что левый локально выпуклый A -модуль X является *модулем с совместно непрерывным умножением*, если билинейный оператор $A \times X \rightarrow X$, $(a, x) \mapsto a \cdot x$ совместно непрерывен.

ТЕОРЕМА 2.5. *Пусть A – локально выпуклая алгебра. Если над A существует хотя бы один ненулевой делимый банахов модуль с совместно непрерывным умножением, то A топологически изоморфна $\mathbb{C}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы докажем эту теорему для левых модулей; для правых модулей доказательство может быть проведено аналогичным образом. В силу леммы 2.1, (i) мы можем считать, что A обладает левой единицей 1_ℓ .

Пусть Y – левый банахов A -модуль с совместно непрерывным умножением. Заметим, что в этом случае правый A -модуль $X = Y^*$ также является банаховым модулем с совместно непрерывным умножением. Действительно, в силу совместной непрерывности умножения в Y существует такая непрерывная преднорма $\|\cdot\|'$ на A , что $\|a \cdot x\| \leq \|a\|' \|x\|$ для всех $x \in Y$, $a \in A$. Тогда для любого $f \in Y^*$ имеем

$$|\langle f \cdot a, x \rangle| = |\langle f, a \cdot x \rangle| \leq \|f\| \|a\|' \|x\|,$$

т.е. $\|f \cdot a\| \leq \|a\|' \|f\|$ для всех $a \in A$, $f \in Y^*$. Значит, Y^* – A -модуль с совместно непрерывным умножением. Для каждого $a \in A$ через l_a обозначим оператор левого умножения на a в модуле Y , а через r_a – оператор правого умножения на a в модуле Y^* . Легко видеть, что $r_a = l_a^*$, поэтому если Y делим, т.е. l_a сюръективен для всех $a \neq 0$, то r_a топологически инъективен для всех $a \neq 0$. Кроме того, из делимости Y следует, что любой элемент из Y имеет вид $a \cdot y$ для некоторых $a \in A$, $y \in Y$, поэтому $1_\ell \cdot x = x$ для всех $x \in Y$, т.е. $l_{1_\ell} = 1_Y$. Следовательно, $r_{1_\ell} = l_{1_\ell}^* = 1_{Y^*}$. Таким образом, нам достаточно доказать, что если над A существует правый банахов модуль X с совместно непрерывным умножением такой, что оператор r_a топологически инъективен для всех $a \neq 0$ и обратим для некоторого a , то A изоморфна $\mathbb{C}$.

Рассмотрим множество $S \subset A \setminus \{0\}$, полагая по определению $S = \{a \in A : r_a \text{ обратим}\}$. По нашему предположению, S непусто. Поскольку X – банахов A -модуль с совместно непрерывным умножением, отображение $r: A \rightarrow \mathcal{B}(X)$, задаваемое формулой $a \mapsto r_a$, непрерывно. Следовательно, множество S , будучи полным прообразом открытого множества $\text{GL}(X) \subset \mathcal{B}(X)$ при отображении r , открыто в A . С другой стороны, если элемент a принадлежит замыканию множества S в $A \setminus \{0\}$, то r_a принадлежит замыканию $\text{GL}(X)$ в $\mathcal{B}(X)$ и к тому же топологически инъективен. Из предыдущей леммы следует, что тогда $r_a \in \text{GL}(X)$, т.е. $a \in S$. Значит, множество S замкнуто в $A \setminus \{0\}$. Поскольку $A \setminus \{0\}$ связно, а S непусто, открыто и замкнуто в $A \setminus \{0\}$, мы видим, что $S = A \setminus \{0\}$. Но тогда X – делимый банахов A -модуль без кручения, и теорема 2.2, (i) показывает, что A топологически изоморфна $\mathbb{C}$.

ПРИМЕР 2.2. Покажем, что делимые модули Фреше все же существуют. Пусть U – область в $\mathbb{C}$, содержащая начало координат. Через A будем обозначать либо алгебру Фреше $\mathcal{O}(U)$ голоморфных функций в U , либо (при условии, что U ограничена) банахову алгебру $\mathcal{A}(\bar{U})$ (см. пример 2.1). Пусть $\mathcal{O}_0$ – алгебра ростков

голоморфных функций в точке 0 (см., например, [17, IV.4.(3)], [5, II]). Поскольку по определению $\theta_0 = \varinjlim \theta(V)$, где прямой предел берется по семейству всех областей V , содержащих 0, пространство θ_0 может быть наделено топологией локально выпуклого прямого предела пространств Фреше $\theta(V)$. Известно, что относительно этой топологии θ_0 является локально выпуклой алгеброй с совместно непрерывным оператором умножения (см. [17, IV.4.(3)]). Нетрудно убедиться, что θ_0 полна. В самом деле, согласно [5, VIII.A.1] отображение ограничения $\theta(V) \rightarrow \theta(W)$ компактно для $\overline{W} \subset V$, поэтому θ_0 является (LS)-пространством и, следовательно, полно (см. [18, 8.5.26]). Кроме того, θ_0 топологически изоморфна прямому пределу некоторой последовательности банаховых алгебр (см. [17, IV.4.(3)]) и поэтому является (DF)-пространством. Из определения топологии в θ_0 следует также, что отображение ограничения $A \rightarrow \theta_0$, сопоставляющее каждой функции $a \in A$ ее росток $\mathbf{a}_0$ в точке 0, является непрерывным гомоморфизмом топологических алгебр. Следовательно, θ_0 может также рассматриваться как $\widehat{\otimes}$ -модуль над A относительно действия $\mathbf{f} \cdot a = \mathbf{f}\mathbf{a}_0$, $a \in A$, $\mathbf{f} \in \theta_0$. Рассмотрим A -гипомодуль $X = \theta_0^*$. Поскольку θ_0 – (DF)-пространство, X является A -модулем Фреше (см. [8]). Покажем, что X делим. Как и раньше, для каждого $a \in A$ обозначим через r_a оператор правого умножения на a в модуле θ_0 , а через l_a – оператор левого умножения на a в модуле X ; очевидно, $l_a = r_a^*$. Нетрудно убедиться, что оператор r_a топологически инъективен (и даже является коретракцией локально выпуклых пространств) для любого $a \neq 0$. Для этого представим росток $\mathbf{a}_0 \in \theta_0$ функции $a \in A$ в виде произведения $\mathbf{z}^m \mathbf{c}$, где $\mathbf{c}$ – обратимый элемент алгебры θ_0 , а $\mathbf{z}$ – росток функции $g(z) = z$ в точке 0. Поскольку оператор умножения на обратимый элемент $\mathbf{c}$ в алгебре θ_0 является топологическим изоморфизмом, нам достаточно проверить, что оператор умножения на элемент $\mathbf{z}^m$ в алгебре θ_0 является коретракцией, т.е. обладает левым обратным непрерывным оператором. Ясно, что этот факт достаточно установить для $m = 1$. Для каждой области $V \ni 0$ зададим непрерывный оператор $T_V: \theta(V) \rightarrow \theta(V)$ формулой $T_V f(z) = z^{-1}(f(z) - f(0))$; тогда, очевидно, непрерывный оператор $T = \varinjlim T_V: \theta_0 \rightarrow \theta_0$ является левым обратным для оператора умножения на $\mathbf{z}$ в θ_0 . Следовательно, оператор r_a топологически инъективен для любого $a \neq 0$, поэтому его сопряженный $l_a = r_a^*: X \rightarrow X$ сюръективен. Это и означает, что A -модуль Фреше X делим.

В следующем предложении устанавливаются свойства, достаточные для того, чтобы инъективный модуль Фреше был делим.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6. Пусть A – унитарная алгебра Фреше, а J – левый инъективный A -модуль Фреше. Пусть, далее, B – подалгебра в A такая, что ненулевые элементы B не являются правыми делителями нуля в A , и для любого $b \in B$ главный левый идеал $Ab \subset A$ замкнут и дополняем как подпространство в A . Тогда J делим как B -модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем произвольный ненулевой элемент $b \in B$ и произвольный элемент $x \in J$; наша задача – указать такой элемент $y \in J$, что $b \cdot y = x$. Пусть $r_b: A \rightarrow A$ – оператор правого умножения на b , а $r_x: A \rightarrow J$ – оператор правого умножения на x . Из условия следует, что r_b – допустимый мономорфизм, поэтому в силу инъективности J существует морфизм $\psi: A \rightarrow J$, делающий сле-

дующую диаграмму коммутативной:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{r_b} & A \\ r_x \downarrow & \swarrow \psi & \\ J & & \end{array}$$

Легко видеть, что элемент $y = \psi(1)$ обладает требуемым свойством.

СЛЕДСТВИЕ 2.7. Пусть A – унитарная алгебра Фреше. Предположим, что существует такой элемент $a \in A$, что для каждого $\lambda \in \mathbb{C}$ элемент $a - \lambda 1$ не является правым делителем нуля в A , и главный левый идеал $A(a - \lambda 1)$ замкнут и дополняем в A как подпространство. Тогда над A не существует ненулевых левых инъективных нормируемых модулей Фреше.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим подалгебру $B \subset A$, порожденную (в алгебраическом смысле) элементом a ; ее элементами являются всевозможные полиномы от a . Легко видеть, что подалгебра B удовлетворяет условию предложения 2.6 (для этого достаточно представить любой элемент из B в виде произведения элементов вида $a - \lambda 1$, $\lambda \in \mathbb{C}$). Если бы над A существовал ненулевой левый инъективный нормируемый модуль Фреше J , то он был бы делим как B -модуль в силу предложения 2.6, что противоречило бы теореме 2.5.

§ 3. Об инъективных модулях над алгебрами голоморфных и гладких функций

Как уже упоминалось, вопрос о существовании ненулевых инъективных модулей Фреше над алгебрами голоморфных функций пока открыт. Тем не менее, удастся показать, что при рассмотрении свойства инъективности в категории всех A -гипомодулей (см. § 1), более широкой, чем категория всех модулей Фреше над заданной алгеброй голоморфных функций A , ответ на этот вопрос отрицателен (см. следствие 3.2). Кроме того, оказывается, что над алгебрами голоморфных функций на полиобластях в $\mathbb{C}^n$ не существует ненулевых *нормируемых* инъективных модулей Фреше (здесь инъективность понимается уже относительно категории всех модулей Фреше над любой из таких алгебр); то же утверждение справедливо для алгебры гладких функций $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ (теоремы 3.4 и 3.6).

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть A – ядерная унитарная алгебра Фреше без делителей нуля, в которой все правые главные идеалы замкнуты. Тогда над A не существует ненулевых левых модулей Фреше, инъективных в категории левых A -гипомодулей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное; пусть J – левый A -модуль Фреше, инъективный в категории левых A -гипомодулей. В силу инъективности J канонический морфизм $\rho: J \rightarrow \mathcal{B}(A, J)$, задаваемый формулой $\rho(x)(a) = a \cdot x$, является коретракцией в категории левых A -гипомодулей (см. [20, 3.3]). Следовательно, $\rho^*: \mathcal{B}(A, J)^* \rightarrow J^*$ – ретракция в категории правых A -гипомодулей, поэтому модуль J^* может рассматриваться как подмодуль правого A -гипомодуля $\mathcal{B}(A, J)^*$. Поскольку алгебра A ядерна, имеет место топологический изоморфизм ЛВП $\mathcal{B}(A, J) \cong A^* \widehat{\otimes} J$, отождествляющий каждый элемент вида $f \otimes x \in A^* \widehat{\otimes} J$

с одномерным оператором $f(\cdot)x \in \mathcal{B}(A, J)$ (см. [12, IV.9]). Легко видеть, что этот изоморфизм на самом деле является изоморфизмом левых A -гипомодулей. Заметим, что для любого ненулевого $u \in \mathcal{B}(A, J)^*$ найдется такой элемент $f \otimes x \in A^* \widehat{\otimes} J$, что $\langle u, f \otimes x \rangle \neq 0$ (это очевидным образом следует из плотности $A^* \otimes J$ в $A^* \widehat{\otimes} J$). Итак, фиксируем произвольный ненулевой элемент $u \in J^* \subset \mathcal{B}(A, J)^*$ и такие элементы $f \in A^*$, $x \in J$, что $\langle u, f \otimes x \rangle \neq 0$. Определим оператор $i_x: A^* \rightarrow \mathcal{B}(A, J) = A^* \widehat{\otimes} J$ формулой $i_x(g) = g \otimes x$. Очевидно, i_x топологически инъективен. Далее, для всех $a, b \in A$, $g \in A^*$ имеем

$$[i_x(a \cdot g)](b) = (a \cdot g)(b)x = g(ba)x = [i_x(g)](ba) = [a \cdot i_x(g)](b),$$

поэтому i_x – морфизм левых A -гипомодулей. Рассмотрим морфизм правых A -гипомодулей $p_x = i_x^*: \mathcal{B}(A, J)^* \rightarrow A^{**}$. Поскольку пространство A ядерно и метризуемо, оно рефлексивно (см. [12, IV.5]), и мы можем считать, что морфизм p_x принимает значения в A . Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{B}(A, J)^* & \\ & \downarrow p_x & \\ f \otimes x & \swarrow & \\ \mathbb{C} & \xleftarrow{f} & A \end{array}$$

Так как $\langle f \otimes x, u \rangle \neq 0$, мы видим, что $p_x(u) \neq 0$. Следовательно, $\psi = p_x|_{J^*}: J^* \rightarrow A$ – ненулевой морфизм правых A -гипомодулей, а $\psi^*: A^* \rightarrow J^{**}$ – ненулевой морфизм левых A -гипомодулей. Поскольку J^{**} – пространство Фреше (см. [12, IV.6.5]), мы получаем противоречие с леммой 1.2. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Пусть $(X, \mathcal{O}_X)$ – неприводимое приведенное пространство Штейна (например, связное многообразие Штейна); тогда над алгеброй Фреше $\mathcal{O}(X)$ не существует ненулевых модулей Фреше, инъективных в категории $\mathcal{O}(X)$ -гипомодулей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку X приведено, элементы алгебры $\mathcal{O}(X)$ могут рассматриваться как непрерывные функции на X (см. [7, 0.3.7]). Пусть $a, b \in \mathcal{O}(X)$, причем $ab = 0$. Положим $X_1 = \{x \in X : a(x) = 0\}$ и $X_2 = \{x \in X : b(x) = 0\}$; тогда X_1 и X_2 – аналитические множества в X и $X_1 \cup X_2 = X$. Из неприводимости X следует, что либо $X_1 = X$, либо $X_2 = X$ (см. [5, V.B.1]), т.е. либо $a = 0$, либо $b = 0$. Это означает, что $\mathcal{O}(X)$ – область целостности. Далее, в $\mathcal{O}(X)$ все конечно порожденные идеалы замкнуты (см. [7, 5.6.4]). Остается применить теорему 3.1.

СЛЕДСТВИЕ 3.3. Над алгеброй Фреше степенных рядов $A = \mathbb{C}[[z_1, \dots, z_n]]$ не существует ненулевых модулей Фреше, инъективных в категории A -гипомодулей.

ТЕОРЕМА 3.4. Пусть $(Y, \mathcal{O}_Y)$ – приведенное пространство Штейна, а U – область в $\mathbb{C}$. Положим $(X, \mathcal{O}_X) = (Y \times U, \mathcal{O}_{Y \times U})$. Тогда над алгеброй Фреше $\mathcal{O}(X)$ не существует ненулевых инъективных нормируемых модулей Фреше.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как известно (см., например, [14, 16.1]), существует изоморфизм алгебр Фреше $\mathcal{O}(Y) \widehat{\otimes} \mathcal{O}(U) \rightarrow \mathcal{O}(X)$, сопоставляющий элементу $f \otimes g \in \mathcal{O}(Y) \widehat{\otimes} \mathcal{O}(U)$ функцию $(y, z) \mapsto f(y)g(z)$ из алгебры $\mathcal{O}(X)$. Пусть z — координата в U . Рассмотрим z как элемент алгебры $\mathcal{O}(X)$ и покажем, что он удовлетворяет условию следствия 2.7. Если $f(y, z)(z - \lambda) = 0$ для некоторого $f \in \mathcal{O}(X)$ и некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$, то в силу отсутствия делителей нуля в $\mathcal{O}(U)$ имеем $f(y, z) = 0$ для любого $y \in Y$, т.е. $f = 0$; таким образом, элементы вида $z - \lambda$ не являются делителями нуля в $\mathcal{O}(X)$. Очевидно, главный идеал алгебры $\mathcal{O}(U)$, порожденный элементом $z - \lambda$, замкнут и имеет коразмерность 1 в $\mathcal{O}(U)$, поэтому он дополняем в $\mathcal{O}(U)$ как подпространство. Обозначим этот идеал через I . Легко видеть, что при изоморфизме $\mathcal{O}(X) \cong \mathcal{O}(Y) \widehat{\otimes} \mathcal{O}(U)$ элемент $(z - \lambda) \in \mathcal{O}(X)$ переходит в элемент $1 \otimes (z - \lambda) \in \mathcal{O}(Y) \widehat{\otimes} \mathcal{O}(U)$, а главный идеал в $\mathcal{O}(X)$, порожденный элементом $z - \lambda$, переходит в идеал $\mathcal{O}(Y) \widehat{\otimes} I$. Следовательно, этот идеал дополняем в $\mathcal{O}(X)$ как подпространство.

Таким образом, для элемента $z \in \mathcal{O}(X)$ выполнены условия следствия 2.7, поэтому над алгеброй $\mathcal{O}(X)$ не существует ненулевых инъективных нормируемых модулей Фреше.

СЛЕДСТВИЕ 3.5. Пусть $U = U_1 \times \cdots \times U_n$ — полиобласть в $\mathbb{C}^n$. Тогда над алгеброй голоморфных функций $\mathcal{O}(U)$ не существует ненулевых инъективных нормируемых модулей Фреше.

ТЕОРЕМА 3.6. Пусть N — гладкое вещественное многообразие. Положим $M = N \times \mathbb{R}$. Тогда над алгеброй Фреше $C^\infty(M)$ всех гладких комплекснозначных функций на M не существует ненулевых инъективных нормируемых модулей Фреше.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим функцию на M формулой $(y, t) \mapsto t$, $(y, t) \in M = N \times \mathbb{R}$. Так же, как и в теореме 3.3, можно показать, что эта функция удовлетворяет условиям следствия 2.7; при этом используется существование изоморфизма алгебр Фреше $C^\infty(M) \cong C^\infty(N) \widehat{\otimes} C^\infty(\mathbb{R})$ (см. [17, XI.2.7]), а также тот непосредственно проверяемый факт, что идеал алгебры $C^\infty(\mathbb{R})$, порожденный элементом $t - t_0$ для некоторого $t_0 \in \mathbb{R}$, совпадает с максимальным идеалом $I_{t_0} = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : f(t_0) = 0\}$.

СЛЕДСТВИЕ 3.7. Над алгеброй Фреше $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ не существует ненулевых инъективных нормируемых модулей Фреше.

§ 4. О несуществовании инъективных модулей Фреше над алгеброй степенных рядов

Пусть задана обратная последовательность банаховых алгебр $\mathcal{S} = (A_n, \tau_n^m)$. Мы будем называть последовательность $\mathcal{S}$ *допустимой*, если для каждого $n \in \mathbb{N}$ гомоморфизм $\tau_n^{n+1}: A_{n+1} \rightarrow A_n$ является допустимым эпиморфизмом, т.е. обладает правым обратным непрерывным оператором.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть A — ненормируемая алгебра Фреше без делителей нуля, в которой все главные правые идеалы замкнуты. Предположим, что A топологически изоморфна обратному пределу допустимой последовательности рефлексивных банаховых алгебр $\mathcal{S} = (A_n, \tau_n^m)$. Тогда над A существу-

ет левый модуль Фреше M , не вложимый ни в какой инъективный A -модуль Фреше. В частности, M не обладает инъективной резольвентой в категории левых A -модулей Фреше.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ банахова алгебра A_n становится правым A -модулем, если положить $a_n \cdot a = a_n \tau_n(a)$ для $a_n \in A_n$, $a \in A$ (здесь $\tau_n: A = \varprojlim A_n \rightarrow A_n$ – естественная проекция). Рассмотрим левый A -модуль $M = A_1^*$ и покажем, что ни для какого инъективного A -модуля Фреше J не существует ненулевых морфизмов из M в J . Итак, пусть J – произвольный инъективный левый A -модуль Фреше, а $f: M \rightarrow J$ – морфизм A -модулей Фреше. Построим по индукции последовательность морфизмов $\varphi_n: A_n^* \rightarrow J$, удовлетворяющую условию $\varphi_{n+1}(\tau_n^{n+1})^* = \varphi_n$. Положим $\varphi_1 = f$. Допустим, что морфизмы $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ уже построены. Поскольку $\tau_m^{m+1}: A_{m+1} \rightarrow A_m$ – допустимый эпиморфизм, его сопряженный $(\tau_m^{m+1})^*: A_m^* \rightarrow A_{m+1}^*$ – допустимый мономорфизм. В силу инъективности J существует морфизм $\varphi_{m+1}: A_{m+1}^* \rightarrow J$, делающий следующую диаграмму коммутативной:

$$\begin{array}{ccc} A_m^* & \xrightarrow{(\tau_m^{m+1})^*} & A_{m+1}^* \\ \varphi_m \downarrow & \swarrow & \varphi_{m+1} \\ & J & \end{array}$$

По индукции последовательность морфизмов $\{\varphi_n\}$ с требуемым свойством построена. Рассмотрим морфизм $\varphi: \varprojlim A_n^* \rightarrow J$, являющийся прямым пределом морфизмов φ_n . Так как все пространства A_n рефлексивны, имеет место топологический изоморфизм $A^* \cong \varprojlim A_n^*$ (см. [12, IV.5.8, IV.4.4]). Таким образом, нами построен морфизм левых A -гипомодулей $\varphi: A^* \rightarrow J$. Заметим, что A , будучи замкнутым подпространством полурефлексивного пространства $\prod A_n$, сама полурефлексивна (см. [12, IV.5.8]), а значит, и рефлексивна (напомним, что пространство рефлексивно тогда и только тогда, когда оно полурефлексивно и бочечно, и что любое пространство Фреше бочечно). Мы можем теперь применить лемму 1.2, из которой следует, что $\varphi = 0$. Но тогда и $f = \varphi_{\tau_1^*} = 0$. В силу произвольности f это доказывает теорему.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Пусть $A = \mathbb{C}[[z_1, \dots, z_n]]$ – алгебра Фреше формальных степенных рядов, а $\mathbb{C}_0$ – поле $\mathbb{C}$, рассматриваемое как A -модуль Фреше относительно операции $(\sum_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{k}} z^{\mathbf{k}}) \cdot \lambda = \alpha_0 \lambda$ для $\lambda \in \mathbb{C}_0$. Тогда $\mathbb{C}_0$ не вложим ни в какой инъективный A -модуль Фреше.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним (см. § 1), что топология в алгебре $\mathbb{C}[[z_1, \dots, z_n]]$ задается системой преднорм $\|a\|_{\mathbf{k}} = |\mathbf{k}|^n \max_{i \leq \mathbf{k}} |\alpha_i|$, где $a = \sum_{\mathbf{i}} \alpha_{\mathbf{i}} z^{\mathbf{i}}$, $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^n$. Поскольку $\mathbb{C}[[z_1, \dots, z_n]]$ локально мультипликативно выпукла (см. также § 1), она изоморфна пределу обратного спектра банаховых алгебр $\{(A_{\mathbf{k}}, \tau_{\mathbf{m}}^{\mathbf{k}}) : \mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^n\}$; при этом $A_{\mathbf{k}} = (A/I_{\mathbf{k}}, \|\cdot\|_{\mathbf{k}}^{\wedge})$, где $I_{\mathbf{k}} = \{a \in A : \|a\|_{\mathbf{k}} = 0\}$, а $\|\cdot\|_{\mathbf{k}}^{\wedge}$ – факторнорма преднормы $\|\cdot\|_{\mathbf{k}}$ (см. [11, 5.2.17]). Легко видеть, что каждый идеал $I_{\mathbf{k}}$ имеет конечную коразмерность в A , поэтому все нормированные алгебры $A_{\mathbf{k}}$ конечномерны и, следовательно, полны. Положим $\mathbf{k}_r = (r, \dots, r)$ для всех $r \in \mathbb{Z}_+$ и рассмотрим обратную последовательность банаховых алгебр $\mathcal{S} = \{A_{\mathbf{k}_r} : r \in \mathbb{Z}_+\}$. Поскольку

подмножество мультииндексов $\{\mathbf{k}_r : r \in \mathbb{Z}_+\}$ конфинально в направленном множестве всех мультииндексов $\{\mathbf{k} : \mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^n\}$, имеет место изоморфизм $A \cong \varprojlim \mathcal{S}$ (см. [13, 2.5.11]). Очевидно, что отображения $\tau_{\mathbf{m}}^{\mathbf{k}}$ сюръективны при $\mathbf{k} \geq \mathbf{m}$, поэтому, ввиду конечномерности всех алгебр $A_{\mathbf{k}}$, обратная последовательность $\mathcal{S}$ допустима. Кроме того, как уже было отмечено в § 1, в алгебре A все идеалы замкнуты. Таким образом, A удовлетворяет условию теоремы 4.1. Из доказательства теоремы 4.1 следует тогда, что A -модуль Фреше $A_0^* = A_{\mathbf{k}_0}^*$ не вложим ни в какой инъективный A -модуль Фреше. Но, как нетрудно убедиться, A -модули A_0^* и C_0 изоморфны.

Следствие 4.2 можно усилить и показать, что над алгеброй Фреше $\mathbb{C}[[z_1, \dots, z_n]]$ не существует ненулевых инъективных модулей Фреше. Для этого нам понадобится следующая лемма.

ЛЕММА 4.3. *Пусть C и B – унитарные алгебры Фреше, а I – максимальный биидеал в B , являющийся ядром непрерывного характера $\chi: B \rightarrow \mathbb{C}$. Пусть, далее, X – инъективный левый $C \widehat{\otimes} B$ -модуль Фреше. Положим $Y = \text{Ann}(C \widehat{\otimes} I) = \{x \in X : u \cdot x = 0 \quad \forall u \in C \widehat{\otimes} I\}$ и введем на Y структуру левого C -модуля Фреше, полагая $a \cdot y = (a \otimes 1) \cdot y$ для $a \in C$, $y \in Y$. Тогда Y – инъективный левый C -модуль Фреше.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть даны левые C -модули Фреше M и N , допустимый мономорфизм $i: M \rightarrow N$ и морфизм $\varphi: M \rightarrow Y$. Наша задача – построить морфизм C -модулей $\psi: N \rightarrow Y$, делающий диаграмму

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{i} & N \\ \varphi \downarrow & \nearrow \psi & \\ Y & & \end{array}$$

коммутативной.

Определим гомоморфизм алгебр $\sigma: C \widehat{\otimes} B \rightarrow C$ формулой $\sigma(a \otimes b) = \chi(b)a$. Применяя функтор отступления $\sigma_{\#}$ вдоль гомоморфизма σ (см. [10, 0.4.2]), мы можем рассматривать M и N как левые $C \widehat{\otimes} B$ -модули Фреше, а i – как их морфизм. Покажем, что $\varphi: M \rightarrow X$ – морфизм $C \widehat{\otimes} B$ -модулей. Имеем

$$\begin{aligned} \varphi((a \otimes b) \cdot m) &= \varphi(\chi(b)a \cdot m) = \chi(b)(a \otimes 1) \cdot \varphi(m) \\ &= (a \otimes b) \cdot \varphi(m) + (a \otimes (\chi(b)1 - b)) \cdot \varphi(m) = (a \otimes b) \cdot \varphi(m), \end{aligned}$$

так как $\chi(b)1 - b \in I$, а $\varphi(m) \in Y$. В силу линейности и непрерывности φ равенство $\varphi(u \cdot m) = u \cdot \varphi(m)$ выполнено для всех $u \in C \widehat{\otimes} B$. Таким образом, $\varphi: M \rightarrow X$ – морфизм $C \widehat{\otimes} B$ -модулей Фреше. Поскольку $C \widehat{\otimes} B$ -модуль Фреше X инъективен, существует морфизм $C \widehat{\otimes} B$ -модулей Фреше $\psi: N \rightarrow X$, делающий диаграмму

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{i} & N \\ \varphi \downarrow & \nearrow \psi & \\ X & & \end{array}$$

коммутативной. Нетрудно показать, что при этом $\psi(N) \subset Y$. В самом деле, для любых $a \in C$, $b \in I$ и любого $n \in N$ имеем

$$(a \otimes b) \cdot \psi(n) = \psi((a \otimes b) \cdot n) = \psi(\sigma(a \otimes b) \cdot n) = \psi(0 \cdot n) = 0,$$

и поскольку элементы вида $a \otimes b$ для $a \in C$, $b \in I$ порождают плотное подпространство в $C \widehat{\otimes} I$, мы видим, что $u \cdot \psi(n) = 0$ для любого $u \in C \widehat{\otimes} I$, т.е. $\psi(n) \in Y$ для любого $n \in N$. Наконец, аналогичные выкладки показывают, что $\psi: N \rightarrow Y$ – морфизм C -модулей:

$$\psi(a \cdot n) = \psi(\sigma(a \otimes 1) \cdot n) = \psi((a \otimes 1) \cdot n) = (a \otimes 1) \cdot \psi(n).$$

Таким образом, морфизм C -модулей Фреше $\psi: N \rightarrow Y$ с требуемыми свойствами построен. Существование такого ψ и означает, что C -модуль Фреше Y инъективен.

ТЕОРЕМА 4.4. *Над алгеброй Фреше степенных рядов $A = \mathbb{C}[[z_1, \dots, z_n]]$ не существует инъективных модулей Фреше.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем доказывать теорему индукцией по n . Пусть вначале $n = 1$. Предположим, что над алгеброй $A = \mathbb{C}[[z]]$ существует ненулевой инъективный модуль Фреше J . Полагая в предложении 2.6 $B = A$, мы видим, что J – делимый A -модуль. В силу теоремы 2.2, (iii) J имеет кручение. Рассмотрим произвольный ненулевой периодический элемент $x \in J$. Пусть $I = \text{Ann}(x)$ – аннулятор элемента x . Так как I – идеал в A , он порожден элементом z^n для некоторого $n \in \mathbb{N}$ (см. §1). Положим $y = z^{n-1} \cdot x$; тогда $y \neq 0$ и $z \cdot y = 0$. Определим вложение $i: \mathbb{C}_0 \rightarrow J$ формулой $i(\lambda) = \lambda y$. Поскольку $z \cdot y = 0$, отображение i является морфизмом A -модулей; кроме того, оно, очевидно, топологически инъективно. Но, с другой стороны, $\mathbb{C}_0$ не может быть вложен в инъективный A -модуль Фреше J в силу следствия 4.2. Полученное противоречие доказывает теорему в случае $n = 1$.

Следуя схеме индукции, покажем, что из справедливости теоремы для $k = n - 1$ следует ее справедливость для $k = n$. Пусть существует ненулевой инъективный A -модуль Фреше J , где $A = \mathbb{C}[[z_1, \dots, z_n]]$. Рассмотрим подалгебру $B = \mathbb{C}[[z_n]]$ в A . Нетрудно показать, что она удовлетворяет условиям предложения 2.6. В доказательстве нуждается лишь тот факт, что для любого $b \in B$ идеал $Ab \subset A$ дополняем в A как подпространство. Итак, пусть b – произвольный ненулевой необратимый элемент B . Так как $b = z_n^m c$ для некоторого обратимого элемента $c \in B$ и некоторого $m \in \mathbb{N}$, мы можем считать, что $b = z_n^m$. Очевидно, дополняемость идеала $N = Az_n^m$ в A достаточно доказать для $m = 1$. В этом случае непрерывный проектор на N дается формулой $a \mapsto a - \varkappa(a)$, где степенной ряд $\varkappa(a)$ получается из степенного ряда a подстановкой $z_n = 0$. Таким образом, идеал $N = Ab$ дополняем в A как подпространство, и для подалгебры $B \subset A$ выполнены условия предложения 2.6, поэтому J делим как B -модуль. В силу теоремы 2.2, (iii) J имеет кручение как B -модуль, и те же рассуждения, что и в случае $n = 1$, показывают, что найдется ненулевой элемент $x_0 \in J$, для которого $z_n \cdot x_0 = 0$.

Как известно (см., например, [10, II.5.20]), для любых множеств S и T существует изоморфизм локально выпуклых пространств $\mathbb{C}^S \widehat{\otimes} \mathbb{C}^T \rightarrow \mathbb{C}^{S \times T}$, переводящий элемент $x \otimes y$ в функцию $(s, t) \mapsto x(s)y(t)$. Полагая $S = \mathbb{Z}_+^{n-1}$ и $T = \mathbb{Z}_+$, мы получаем изоморфизм локально выпуклых пространств $i: \mathbb{C}[[z_1, \dots, z_{n-1}]] \widehat{\otimes} \mathbb{C}[[z_n]] \rightarrow$

$\mathbb{C}[[z_1, \dots, z_n]]$, который, как нетрудно проверить, является изоморфизмом алгебр. Положим $C = \mathbb{C}[[z_1, \dots, z_{n-1}]]$.

Пусть I – (единственный) максимальный идеал в B . Заметим, что при изоморфизме i идеал $C \hat{\otimes} I$ переходит в идеал $N \subset A$, порожденный элементом z_n . Рассмотрим C -модуль Фреше $J_0 = \text{Ann } N$. Заметим, что $J_0 \neq 0$ (так как $x_0 \in J_0$). Согласно лемме 4.3 J_0 инъективен, что противоречит предположению индукции. Теорема доказана.

Автор благодарен А. Я. Хелемскому за внимание к работе.

Список литературы

1. Акбаров С. С. Двойственность Понтрягина в теории топологических модулей // Функцион. анализ и прилож. 1995. Т. 29. № 4. С. 68–72.
2. Атья М., Макдональд И. Введение в коммутативную алгебру. М.: Мир, 1972.
3. Бурбаки Н. Гомологическая алгебра. М.: Наука, 1987.
4. Гамелин Т. Равномерные алгебры. М.: Мир, 1973.
5. Ганнинг Р., Росси Х. Аналитические функции многих комплексных переменных. М.: Мир, 1969.
6. Грауэрт Г., Реммерт Р. Аналитические локальные алгебры. М.: Наука, 1988.
7. Грауэрт Г., Реммерт Р. Теория пространств Штейна. М.: Наука, 1989.
8. Гротендик А. О пространствах (F) и (DF) // Математика. 1958. Т. 2. № 3. С. 81–127.
9. Фелпс Р. Лекции о теоремах Шоке. М.: Мир, 1968.
10. Хелемский А. Я. Гомология в банаховых и топологических алгебрах. М.: Изд-во МГУ, 1986.
11. Хелемский А. Я. Банаховы и полинормированные алгебры: общая теория, представления, гомологии. М.: Наука, 1989.
12. Шефер Х. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1971.
13. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986.
14. Bungart L. Holomorphic functions with values in locally convex spaces and applications to integral formulas // Trans. Amer. Math. Soc. 1964. V. 111. P. 317–344.
15. Eschmeier J., Putinar M. Spectral Decompositions and Analytic Sheaves. Oxford: Clarendon Press, 1996.
16. Helemskii A. Ya. 31 problems of the homology of the algebras of analysis, “Linear and complex analysis: problem book 3, part I” (Havin V.P., Nikolski N.K., eds.) // Lecture Notes in Math. 1994. № 1573. P. 54–78.
17. Mallios A. Topological Algebras: Selected Topics. Amsterdam: North Holland, 1986.
18. Perez Carreras P., Bonet J. Barreled Locally Convex Spaces. Amsterdam: North Holland, 1987.
19. Séminaire de géométrie analytique // Astérisque / Eds. A. Douady, J.L. Verdier. V. 16. Paris: Soc. Math. France, 1974.
20. Taylor J. L. Homology and cohomology for topological algebras // Adv. Math. 1972. V. 9. P. 137–182.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова,
Москва, Россия
e-mail: pirkosha@glasnet.ru

Поступило в редакцию
27.III.1997