Общероссийский математический портал

Е. И. Бережной, В. И. Буренков, Улучшенные интерполяционные теоремы для одного класса операторов, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1998, том 62, выпуск 4, 3–24

DOI: <https://doi.org/10.4213/im195>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 14:16:55

УДК 513.88+517.5

Е. И. Бережной, В. И. Буренков

Улучшенные интерполяционные теоремы для одного класса операторов

Для класса операторов, переводящих конус положительных функций в конус монотонно убывающих функций, приведены новые теоремы интерполяции, основанные на понятии K^c -функционала. Предложена формула для вычисления K^c -функционала для некоторых пар пространств. Приведен пример интерполяционной пары пространств, для которой конусы, получаемые с помощью K -функционала Питре и K^c -функционала, различны.

Библиография: 16 наименований.

§ 1. Введение

Теория интерполяции линейных операторов, начиная от пионерских работ Рисса, Торина и Марцинкевича [1]–[5], интерполирует основное свойство линейного оператора – ограниченность нормы.

В дальнейшем неоднократно предпринимались попытки проинтерполировать более тонкие свойства операторов. Например, успешно удалось проинтерполировать различные количественные характеристики свойства компактности [5, с. 122]. С другой стороны, представляет интерес при рассмотрении некоторых специальных классов операторов с дополнительными свойствами попытка улучшить общие интерполяционные теоремы для этих специальных классов. К этому вопросу и относится настоящая работа, которая посвящена теоремам интерполяции для специального класса линейных операторов в идеальных пространствах, названного в работе *классом* B и содержащего, например, операторы интегрирования, вольтеровские с положительными и монотонными ядрами и близкие к ним.

Операторы этого класса нашли различное применение в гармоническом анализе (см., например, [6]–[9]). Они обладают замечательным свойством: переводят положительные функции в монотонные. Поэтому, с одной стороны, их ограниченность можно проверять лишь на положительных функциях, а с другой стороны, образ конуса положительных функций идеального пространства будет содержаться в конусе монотонных функций. Используя это наблюдение, в работе вводится понятие K^c -функционала, определенного для монотонных функций и построенного по разложению их по монотонным же функциям, и приводится формула для его вычисления в некоторых идеальных пространствах. На основе этого вычисления приведен пример интерполяционной пары идеальных пространств, когда классический K -функционал Питре и K^c -функционал, введенный в работе, не эквивалентны. Исходя из этого приведен пример интерполяционной пары идеальных пространств, для которой интерполяционные пространства, получаемые с помощью

K -функционала Питре и введенного K^c -функционала, дают различные пространства, т.е. нормы на этих пространствах не эквивалентны. Для некоторых же классических пар идеальных пространств интерполяционные пространства, полученные с помощью K -функционала и K^c -функционала, совпадают.

§ 2. Основные теоремы

Прежде всего отметим, что термины “положительная функция f ” и “отрицательная функция g ” в настоящей работе означают, что $f(t) \geq 0$ и $g(t) \leq 0$, а термины “убывающая функция f ” и “возрастающая функция g ” означают, что если $t \geq s$, то $f(t) \leq f(s)$ и $g(t) \geq g(s)$ соответственно. Аналогичные соглашения действуют и для других высказываний, содержащих термины “положительный”, “отрицательный” и “убывающий”, “возрастающий”.

Приведем некоторые сведения из теории интерполяции линейных операторов и идеальных пространств.

Пусть $S(\mathbb{R}^+, \Sigma, \mu)$ – пространство измеримых относительно меры μ функций $x: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$. Через $S(\mu)^+$ обозначим конус неотрицательных функций в $S(\mu)$:

$$S(\mu)^+ = \{x \in S(\mu): x(t) \geq 0 \text{ п.в.}\},$$

а через $S(\mu)^c$ обозначим конус монотонно убывающих функций в $S(\mu)$:

$$S(\mu)^c = \{x \in S(\mu)^+: x(t) \downarrow\}.$$

Напомним [4], [10], что пространство X называется *идеальным*, если из выполнения п.в. неравенства $|x(t)| \leq |y(t)|$ и из $x \in S(\mu)$, $y \in X$ следует, что $x \in X$ и выполнено неравенство $\|x|X\| \leq \|y|X\|$. (Символом $\|x|X\|$ обозначается норма элемента x в пространстве X .) Для идеального пространства X символами X^+ , X^c обозначим конусы в пространстве X :

$$X^+ = S(\mu)^+ \cap X, \quad X^c = S(\mu)^c \cap X.$$

Будем считать, что на конусах X^+ , X^c норма индуцирована нормой из X , т.е. для $x \in X^+$ верно равенство $\|x|X^+\| = \|x|X\|$, а для $x \in X^c$ верно равенство $\|x|X^c\| = \|x|X\|$. Классическими примерами идеальных пространств являются пространства Лебега L^p , Орлича L_N , Лоренца $\Lambda(\psi)$, Марцинкевича $M(\psi)$. Изложение теории идеальных пространств можно найти в [4], [10], [11].

Если X – идеальное пространство, $\omega \in S(\mu)^+$ – весовая функция, то символом $X(\omega)$ обозначается новое идеальное пространство, норма в котором задается равенством

$$\|x|X(\omega)\| = \|x\omega|X\|.$$

В частности, в пространстве $L^p(\omega)$ норма имеет вид

$$\|x|L^p(\omega)\| = \left(\int_0^\infty |x(t)\omega(t)|^p d\mu(t) \right)^{1/p}$$

с обычной модификацией при $p = \infty$.

Введем теперь классы операторов, которые будут играть важную роль в работе.

Будем говорить, что оператор T *положителен* ($T \in P$), если он переводит положительные функции в положительные.

Будем говорить, что линейный оператор T *принадлежит классу B* ($T \in B$), если он положительный и переводит положительные функции в убывающие.

Класс B достаточно широк. Например, он содержит оператор интегрирования

$$Qx(t) = \int_t^\infty x(s) d\mu(s)$$

и, более общо, операторы Вольтерра

$$Kx(t) = \int_t^\infty k(t, s)x(s) d\mu(s),$$

если ядро $k(t, s)$ положительно и убывает по первой переменной. Отметим, что для положительных линейных операторов для всех $x \in S(\mu)^+$ и $t \in \mathbb{R}^+$ верно неравенство

$$|Tx(t)| \leq T|x|(t). \quad (1)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} 0 &\leq T(|x|(t) + x(t)) = T|x|(t) + Tx(t), \\ 0 &\leq T(|x|(t) - x(t)) = T|x|(t) - Tx(t), \end{aligned}$$

поэтому выполнено (1).

Таким образом, если X, Y – идеальные пространства и T – положительный оператор, то из (1) следует равенство

$$\|T|X \rightarrow Y\| = \sup(\|Tx|Y^+\|: x \in X^+, \|x|X\| \leq 1). \quad (2)$$

(Символом $\|T|X \rightarrow Y\|$ обозначается норма оператора T из пространства X в пространство Y .) Аналогично, если T – оператор класса B , то

$$\|T|X \rightarrow Y\| = \sup(\|Tx|Y^c\|: x \in X^+, \|x|X\| \leq 1). \quad (3)$$

Напомним теперь некоторые обозначения и факты из теории интерполяции линейных операторов вещественным методом интерполяции [1]–[3].

Пусть A – некоторое линейное топологическое пространство. Пара банаховых пространств (A_0, A_1) , непрерывно вложенных в пространство A , называется *интерполяционной парой*. Пусть (A_0, A_1) – интерполяционная пара пространств. Для каждого $a \in A_0 + A_1$ и $t > 0$ определен функционал Питре

$$K(t, a; A_0, A_1) = \inf(\|a_0|A_0\| + t\|a_1|A_1\|: a = a_0 + a_1).$$

При каждом t эти функционалы являются нормой на $A_0 + A_1$. Именно функционал Питре является базой для определения вещественного метода интерполяции. Наряду с классическим $K(t, a; A_0, A_1)$ -функционалом для интерполяционной пары идеальных пространств (X_0, X_1) на соответствующих конусах можно определить следующие функционалы:

$$\begin{aligned} K^+(t, x; X_0, X_1) &= \inf(\|x_0\|_{X_0} + t\|x_1\|_{X_1} : x_0 \in X_0^+, x_1 \in X_1^+; x = x_0 + x_1), \\ K^c(t, x; X_0, X_1) &= \inf(\|x_0\|_{X_0} + t\|x_1\|_{X_1} : x_0 \in X_0^c, x_1 \in X_1^c; x = x_0 + x_1). \end{aligned}$$

Поскольку K^+ и K^c для каждого x есть нижняя грань линейных функций по t , то K^+ и K^c как функции t являются вогнутыми.

Отметим, что функционал $K^+(t, x; X_0, X_1)$ определен на конусе $X_0^+ + X_1^+$, а функционал $K^c(t, x; X_0, X_1)$ определен на конусе $X_0^c + X_1^c$. Легко видеть, что на общей области определения справедливы неравенства

$$K(t, x; X_0, X_1) \leq K^+(t, x; X_0, X_1) \leq K^c(t, x; X_0, X_1). \quad (4)$$

В дальнейшем нам потребуется следующее важное неравенство:

$$K^+(t, x; X_0, X_1) \leq 2K(t, x; X_0, X_1), \quad (5)$$

которое можно легко извлечь из работ [12], [13].

Пусть Φ – идеальное пространство на $\mathbb{R}^+$, содержащее функцию $\min(1, t)$.

Пространство $(X_0, X_1)_{K, \Phi}$ состоит из тех $x \in X_0 + X_1$, для которых конечна норма

$$\|x\|_{(X_0, X_1)_{K, \Phi}} = \|K(t, x; X_0, X_1)|\Phi\|.$$

Это пространство является интерполяционным [1]–[3].

Рассмотрим случай, когда идеальное пространство Φ есть пространство $\Phi_{\theta, q}$ ($0 < \theta < 1$, $1 \leq q \leq \infty$), состоящее из тех функций, для которых конечна норма

$$\|x\|_{\Phi_{\theta, q}} = \left(\int_0^\infty (t^{-\theta}|x(t)|)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}$$

со стандартной модификацией при $q = \infty$.

Наряду с пространством $(X_0, X_1)_{K, \Phi}$ введем следующие множества. Множество $(X_0, X_1)_{K^+, \Phi}$ состоит из тех $x \in X_0^+ + X_1^+$, для которых конечен функционал

$$\|x\|_{(X_0, X_1)_{K^+, \Phi}} = \|K^+(t, x; X_0, X_1)|\Phi\|.$$

Множество $(X_0, X_1)_{K^c, \Phi}$ состоит из тех $x \in X_0^c + X_1^c$, для которых конечен функционал

$$\|x\|_{(X_0, X_1)_{K^c, \Phi}} = \|K^c(t, x; X_0, X_1)|\Phi\|.$$

Соотношения (4) и (5) показывают, что конус положительных функций интерполяционного пространства $(X_0, X_1)_{K, \Phi}$ может быть получен из конусов X_0^+, X_1^+

положительных функций пространств X_0 и X_1 с помощью аналогичных конструкций.

Оформим это наблюдение в виде леммы.

ЛЕММА 1. Пусть (X_0, X_1) – интерполяционная пара идеальных пространств, Φ – идеальное пространство на $\mathbb{R}^+$. Тогда верно равенство

$$(X_0, X_1)_{K, \Phi}^+ = (X_0^+, X_1^+)_{K, \Phi},$$

причем для всех $x \in (X_0, X_1)_{K, \Phi}^+$ верны неравенства

$$\|x\|_{(X_0, X_1)_{K, \Phi}^+} \leq \|x\|_{(X_0^+, X_1^+)_{K, \Phi}} \leq 2\|x\|_{(X_0, X_1)_{K, \Phi}^+}.$$

Используя равенство (2), приходим к следующему варианту классической интерполяционной теоремы для вещественного метода интерполяции для положительных операторов.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $(X_0, X_1), (Y_0, Y_1)$ – две интерполяционные пары идеальных пространств. Пусть T – положительный оператор и $\|T|X_i \rightarrow Y_i\| = M_i$ ($i = 0, 1$). Тогда

$$\begin{aligned} T: (X_0^+, X_1^+)_{K, \Phi} &\rightarrow (Y_0^+, Y_1^+)_{K, \Phi}, \\ \|T|(X_0^+, X_1^+)_{K, \Phi} &\rightarrow (Y_0^+, Y_1^+)_{K, \Phi}\| \leq \max(M_0, M_1). \end{aligned}$$

Аналог этой теоремы для операторов класса B можно получить так.

ЛЕММА 2. Пусть $(X_0, X_1), (Y_0, Y_1)$ – две интерполяционные пары идеальных пространств. Пусть T – оператор класса B и $\|T|X_i \rightarrow Y_i\| = M_i$ ($i = 0, 1$). Тогда для любого $x \in X_0^+ + X_1^+$ справедливо неравенство

$$K^c(t, Tx; Y_0, Y_1) \leq \max(M_0, M_1)K(t, x; X_0^+, X_1^+).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$\begin{aligned} K^c(t, Tx; Y_0, Y_1) &= \inf\{\|g_0|Y_0\| + t\|g_1|Y_1\| : Tx = g_0 + g_1; g_0 \in Y_0^c, g_1 \in Y_1^c\} \\ &\leq \inf\{\|Tx_0|X_0\| + t\|Tx_1|X_1\| : x = x_0 + x_1; x_0 \in X_0^+, x_1 \in X_1^+\} \\ &\leq \max(M_0, M_1)K(t, x; X_0^+, X_1^+). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Используя леммы 1 и 2, приходим к следующей теореме.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $(X_0, X_1), (Y_0, Y_1)$ – две интерполяционные пары идеальных пространств. Пусть T – оператор класса B и $\|T|X_i \rightarrow Y_i\| = M_i$ ($i = 0, 1$). Тогда

$$\begin{aligned} T: (X_0, X_1)_{K, \Phi}^+ &\rightarrow (Y_0^c, Y_1^c)_{K, \Phi}, \\ \|T|(X_0, X_1)_{K, \Phi}^+ &\rightarrow (Y_0^c, Y_1^c)_{K, \Phi}\| \leq 2\max(M_0, M_1). \end{aligned}$$

Именно последняя теорема и является усилением классической интерполяционной теоремы для вещественного метода интерполяции Питре для операторов класса B . Это связано с тем, что конус $(Y_0^c, Y_1^c)_{K, \Phi}$ может быть существенно уже конуса $(Y_0^+, Y_1^+)_{K, \Phi}$, который согласно лемме 1 совпадает с конусом $(Y_0, Y_1)_{K, \Phi}^+$. В следующем параграфе мы продемонстрируем эту возможность.

§ 3. Некоторые результаты о вычислении K^c -функционала

Пусть ω – некоторая положительная функция на $\mathbb{R}^+$. Положим для всех $t \in \mathbb{R}^+$

$$\widehat{\omega}(t) = \operatorname{ess\,sup}\{\omega(s) : s \leq t\}. \quad (6)$$

Очевидно, что $\widehat{\omega}(t)$ – положительная возрастающая функция. Отметим, что если п.в. верно равенство $\omega_0(t) = \omega_1(t)$, то всюду верно равенство $\widehat{\omega}_0(t) = \widehat{\omega}_1(t)$. Поэтому, если это необходимо, можно исправить $\omega(t)$ на множестве меры нуль так, чтобы вычислять в (6) вместо существенной верхней грани обычную.

Следующая лемма показывает, что при вычислении нормы убывающей функции $x(t)$ в пространстве $L^\infty(\omega)$ можно заменить $\omega(t)$ на $\widehat{\omega}(t)$.

ЛЕММА 3. *Для любого положительного измеримого веса $\omega(t)$ и функции $x \in S(\mu)^c$ верно равенство*

$$\|x|L^\infty(\omega)\| = \|x|L^\infty(\widehat{\omega})\|. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in L^\infty(\omega)^c$. Без ограничения общности можно считать, что функции $x(t)$ и $\widehat{\omega}(t)$ непрерывны слева. Так как функция x монотонно убывает и п.в. $\omega(t) \leq \widehat{\omega}(t)$, то для п.в. t верно соотношение

$$x(t)\omega(t) \leq x(t)\widehat{\omega}(t).$$

Поэтому

$$\|x|L^\infty(\omega)\| \leq \|x|L^\infty(\widehat{\omega})\|. \quad (8)$$

Докажем обратное неравенство. Пусть

$$\|x|L^\infty(\omega)\| = M < \infty.$$

Это означает, что п.в. выполнено неравенство

$$x(t) \leq \frac{M}{\omega(t)}.$$

Поскольку $x(t)$ убывает и непрерывна слева, то верно соотношение

$$\begin{aligned} x(t) &= \operatorname{ess\,inf}\{x(s) : s \leq t\} \leq \operatorname{ess\,inf}\left\{\frac{M}{\omega(s)} : s \leq t\right\} \\ &= \frac{M}{\operatorname{ess\,sup}\{\omega(s) : s \leq t\}} = \frac{M}{\widehat{\omega}(t)}. \end{aligned}$$

Вспоминая определение нормы в $L^\infty(\widehat{\omega})$, окончательно получим

$$\|x|L^\infty(\widehat{\omega})\| \leq \|x|L^\infty(\omega)\|. \quad (9)$$

Объединяя (8) и (9), приходим к (7). Лемма доказана.

Непосредственно из леммы получим, что для любого $x \in S(\mu)^c$ верно равенство

$$K^c(t, x; X, L^\infty(\omega)) = K^c(t, x; X, L^\infty(\widehat{\omega})). \quad (10)$$

Используя очевидную формулу

$$K^c(t, x; X_0, X_1) = \frac{1}{t} K^c(t, x; X_1, X_0),$$

проиллюстрируем применение формулы (10) одним примером.

Пусть $\omega_0, \omega_1 \in S(\mu)^c$, $x \in S(\mu)^c$ и $c_0 = \lim_{s \rightarrow +0} \omega_0(s)$, $c_1 = \lim_{s \rightarrow +0} \omega_1(s)$. Тогда справедливо равенство

$$K^c(t, x; L^\infty(\omega_0), L^\infty(\omega_1)) = \min(c_0, c_1 t) \lim_{s \rightarrow +0} x(s).$$

Действительно,

$$\begin{aligned} K^c(t, x; L^\infty(\omega_0), L^\infty(\omega_1)) &= K^c(t, x; L^\infty(\widehat{\omega}_0), L^\infty(\widehat{\omega}_1)) \\ &= K^c(t, x; L^\infty(c_0), L^\infty(c_1)) = x(+0) \min(c_0, c_1 t). \end{aligned}$$

Прежде чем переходить к основной теореме этого параграфа, введем два понятия.

Пусть $x(t), \omega(t) \in S(\mu)^+$. Для каждого $t \in \mathbb{R}^+$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$ положим

$$x_{\alpha, \omega}(t) = \max \left\{ x(t) - \frac{\alpha}{\omega(t)}, 0 \right\}. \quad (11)$$

Пусть $x \in S(\mu)^+$. Для каждого t положим

$$\tilde{x}(t) = \text{ess sup} \{ x(s) : s \geq t \}. \quad (12)$$

Очевидно, что функция $\tilde{x}(t)$ убывает. Если это необходимо, то можно исправить $x(t)$ на множестве меры нуль так, чтобы вычислять в (12) вместо существенной верхней грани обычную.

Теперь мы можем сформулировать основную теорему.

ТЕОРЕМА 3. Пусть X – идеальное пространство и $\omega(t)$ – положительный измеримый вес. Тогда для любой функции $x(t) \in S(\mu)^c$ верно равенство

$$K^c(t, x; X, L^\infty(\omega)) = \inf \{ \|\tilde{x}_{\alpha, \widehat{\omega}}\| + t\alpha : \alpha \in \mathbb{R}^+ \}. \quad (13)$$

(Функция $\tilde{x}_{\alpha, \widehat{\omega}}$ определена с помощью формул (6), (11), (12); сначала строим функцию $x_{\alpha, \widehat{\omega}}$, а затем функцию $\tilde{x}_{\alpha, \widehat{\omega}}(\cdot)$.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 3 верно равенство

$$\|x\|_{L^\infty(\omega)} = \|x\|_{L^\infty(\widehat{\omega})}.$$

Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда $\omega(t)$ – положительная возрастающая функция и, следовательно, п.в. выполнено равенство $\omega(t) = \widehat{\omega}(t)$.

Докажем сначала неравенство

$$K^c(t, x; X, L^\infty(\omega)) \leq \inf\{\|\tilde{x}_{\alpha, \widehat{\omega}}\| + t\alpha : \alpha \in \mathbb{R}^+\}. \quad (14)$$

Без ограничения общности можно считать, что функции $x(t)$ и $\omega(t)$ непрерывны справа. Тогда функция $x_{\alpha, \omega}$ также непрерывна справа. Из того что п.в. выполнено равенство $\omega(t) = \widehat{\omega}(t)$, следует справедливость соотношения

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{\alpha, \omega}(t) &= \operatorname{ess\,sup}\{x_{\alpha, \omega}(s) : s \geq t\} = \operatorname{ess\,sup}\left\{\max\left\{x(s) - \frac{\alpha}{\omega(s)}, 0\right\} : s \geq t\right\} \\ &= \max\left\{\operatorname{ess\,sup}\left\{x(s) - \frac{\alpha}{\omega(s)} : s \geq t\right\}, 0\right\} \\ &= \max\left\{\operatorname{ess\,sup}\left\{x(s) - \frac{\alpha}{\widehat{\omega}(s)} : s \geq t\right\}, 0\right\} \\ &= \operatorname{ess\,sup}\left\{\max\left\{x(s) - \frac{\alpha}{\widehat{\omega}(s)}, 0\right\} : s \geq t\right\} = \tilde{x}_{\alpha, \widehat{\omega}}(t). \end{aligned} \quad (15)$$

Из неравенства

$$x(t) \geq \sup\{x(s) : s \geq t\} \geq \sup\left\{\max\left\{x(s) - \frac{\alpha}{\omega(s)}, 0\right\} : s \geq t\right\} = \tilde{x}_{\alpha, \omega}(t)$$

следует, что функция $x_0(t) = x(t) - \tilde{x}_{\alpha, \omega}(t)$ неотрицательна. Проверим, что она убывает на $\mathbb{R}^+$. Пусть $t_0 < t_1$. Если $\tilde{x}_{\alpha, \omega}(t_0) = \tilde{x}_{\alpha, \omega}(t_1)$, то

$$x_0(t_0) - x_0(t_1) = x(t_0) - x(t_1) \geq 0. \quad (16)$$

Если же $\tilde{x}_{\alpha, \omega}(t_0) > \tilde{x}_{\alpha, \omega}(t_1)$, то

$$\tilde{x}_{\alpha, \omega}(t_0) = \sup\left\{x(s) - \frac{\alpha}{\omega(s)} : t_0 \leq s < t_1\right\}.$$

Для каждого n выберем $s(n) \in [t_0, t_1)$ так, чтобы

$$\tilde{x}_{\alpha, \omega}(t_0) \leq x(s(n)) - \frac{\alpha}{\omega(s(n))} + \frac{1}{n}. \quad (17)$$

Тогда из неравенства

$$x_0(t_1) = x(t_1) - \sup\left\{x(s) - \frac{\alpha}{\omega(s)} : s \geq t_1\right\} \leq \frac{\alpha}{\omega(t_1)},$$

неравенства (17) и убывания функций $x(t)$ и $\frac{1}{\omega(t)}$ получим

$$x_0(t_0) - x_0(t_1) > x(t_0) - x(s(n)) + \frac{\alpha}{\omega(s(n))} - \frac{\alpha}{\omega(t_1)} - \frac{1}{n} \geq -\frac{1}{n}. \quad (18)$$

Из (18) с помощью предельного перехода получим, что и в этом случае тоже выполняется неравенство (16). Таким образом, мы убедились, что x_0 убывает на $\mathbb{R}^+$.

Оценим теперь величину $\|x - \tilde{x}_{\alpha, \omega}\|_{L^\infty(\omega)}$.

Из убывания функции $x(t)$ и определения функции $\tilde{x}_{\alpha, \omega}(t)$ получаем соотношение

$$\begin{aligned} |x(t) - \tilde{x}_{\alpha, \omega}(t)| &= x(t) - \tilde{x}_{\alpha, \omega}(t) = x(t) - \sup \left\{ x(s) - \frac{\alpha}{\omega(s)} : s \geq t \right\} \\ &\leq x(t) - \left(x(t) - \frac{\alpha}{\omega(t)} \right) = \frac{\alpha}{\omega(t)}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\|x - \tilde{x}_{\alpha, \omega}\|_{L^\infty(\omega)} \leq \alpha.$$

Если учесть выполнение п.в. соотношения (15), то можно выписать оценку сверху для K^c -функционала:

$$K^c(t, x; X, L^\infty(\omega)) \leq \inf \{ \|\tilde{x}_{\alpha, \hat{\omega}}\|_X + t\alpha : \alpha \in \mathbb{R}^+ \}.$$

Таким образом, (14) доказано.

Докажем теперь обратное неравенство:

$$K^c(t, x; X, L^\infty(\omega)) \geq \inf \{ \|\tilde{x}_{\alpha, \hat{\omega}}\|_X + t\alpha : \alpha \in \mathbb{R}^+ \}. \quad (19)$$

Пусть $g_0, g_1 \in S(\mu)^c$ и почти при всех t верно равенство $x(t) = g_0(t) + g_1(t)$. Если положить

$$\|g_1\|_{L^\infty(\omega)} = \|g_1\|_{L^\infty(\hat{\omega})} = \alpha, \quad (20)$$

то п.в. выполнено неравенство

$$0 \leq g_1(t) \leq \frac{\alpha}{\hat{\omega}(t)}.$$

Поэтому из соотношения

$$g_0(t) = x(t) - g_1(t) \geq x(t) - \frac{\alpha}{\hat{\omega}(t)}$$

и неравенства $g_0(t) \geq 0$ получим, что п.в. выполнено неравенство

$$g_0(t) \geq \max \left\{ 0, x(t) - \frac{\alpha}{\hat{\omega}(t)} \right\}.$$

Без ограничения общности можно считать, что g_0 непрерывна справа. Так как g_0 убывает, то для всех t получим

$$g_0(t) \geq \sup\{g_0(s) : s \geq t\} \geq \sup\left\{\max\left\{x(s) - \frac{\alpha}{\widehat{\omega}(s)}, 0\right\} : s \geq t\right\} = \tilde{x}_{\alpha, \widehat{\omega}}(t). \quad (21)$$

Из (20), (21) и идеальности пространства X получим, что

$$K^c(t, x; X, L^\infty(\omega)) \geq \inf\{\|\tilde{x}_{\alpha, \widehat{\omega}}\| + t\alpha : \alpha \in \mathbb{R}^+\}.$$

Объединяя (14) и (19), придем к (13). Теорема доказана.

Отметим, что формула (13) очень напоминает известную формулу для вычисления K -функционала Питре через E -функционал [1], [3].

Приведем теперь пример вычисления K^c -функционала для конкретной пары идеальных пространств.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $u \in S(\mu)^+$ – некоторый вес, для которого при некотором $s > 0$ верно соотношение

$$\int_0^s u(\tau) d\mu(\tau) < \infty.$$

Положим

$$\int_0^\infty u(\tau) d\mu(\tau) = M.$$

Пусть $x \in S(\mu)^c$. Для каждого $t \in (0, M)$ определим число $\tau(t)$ из уравнения

$$\int_0^{\tau(t)} u(s) d\mu(s) = t. \quad (22)$$

Тогда при $t \in (0, M)$ справедливо равенство

$$K^c(t, x; L^1(u), L^\infty) = \int_0^{\tau(t)} x(s)u(s) d\mu(s). \quad (23)$$

Если же $t \geq M$, то

$$K^c(t, x; L^1(u), L^\infty) = \int_0^\infty x(s)u(s) d\mu(s).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in S(\mu)^c$. Без ограничения общности можно считать, что $x(t)$ непрерывна справа. Поскольку $\omega(t) \equiv 1$, то функция $x_{\alpha,1}$ убывает, и поэтому справедливо равенство $\tilde{x}_{\alpha,1} \equiv x_{\alpha,1}$. Поэтому, применяя предыдущую теорему, придем к формуле

$$\begin{aligned} K^c(t, x; L^1(u), L^\infty) &= \inf \{ \|\tilde{x}_{\alpha,1}\| + t\alpha : \alpha \in \mathbb{R}^+ \} \\ &= \inf \{ \|x_{\alpha,1}\| + t\alpha : \alpha \in \mathbb{R}^+ \}. \end{aligned}$$

Разберем сначала случай $t \in (0, M)$. Положим

$$G(x, \alpha) = \|x_{\alpha,1}\| + t\alpha.$$

Покажем сначала, что для любого α справедливо неравенство

$$G(x, \alpha) \geq \int_0^{\tau(t)} x(s)u(s) d\mu(s). \quad (24)$$

Это можно сделать так. Из непрерывности справа и монотонности функции x следует, что

$$J(\alpha) = \{s : x_{\alpha,1}(s) > 0\} = [0, \tau^*(\alpha)).$$

Если $\tau^*(\alpha) < \tau(t)$, то $x(s) < \alpha$ при $s \in (\tau^*(\alpha), \tau(t))$, и поэтому

$$\begin{aligned} G(x, \alpha) &= \int_0^{\tau^*(\alpha)} x(s)u(s) d\mu(s) - \alpha \int_0^{\tau^*(\alpha)} u(s) d\mu(s) + \alpha \int_0^{\tau(t)} u(s) d\mu(s) \\ &= \int_0^{\tau^*(\alpha)} x(s)u(s) d\mu(s) + \alpha \int_{\tau^*(\alpha)}^{\tau(t)} u(s) d\mu(s) \\ &\geq \int_0^{\tau(t)} x(s)u(s) d\mu(s). \end{aligned} \quad (25)$$

Если $\tau^*(\alpha) > \tau(t)$, то $x(s) > \alpha$ при $s \in [0, \tau^*(\alpha))$, и поэтому

$$\begin{aligned} G(x, \alpha) &= \int_0^{\tau^*(\alpha)} x(s)u(s) d\mu(s) - \alpha \int_0^{\tau^*(\alpha)} u(s) d\mu(s) + \alpha \int_0^{\tau(t)} u(s) d\mu(s) \\ &= \int_0^{\tau(t)} x(s)u(s) d\mu(s) + \int_{\tau(t)}^{\tau^*(\alpha)} x(s)u(s) d\mu(s) - \alpha \int_{\tau(t)}^{\tau^*(\alpha)} u(s) d\mu(s) \\ &\geq \int_0^{\tau(t)} x(s)u(s) d\mu(s). \end{aligned} \quad (26)$$

Таким образом, из (25) и (26) следует, что неравенство (24) выполнено, и поэтому

$$K^c(t, x; L^1(u), L^\infty) \geq \int_0^{\tau(t)} x(s)u(s) d\mu(s). \quad (27)$$

Докажем теперь обратное неравенство

$$K^c(t, x; L^1(u), L^\infty) = \inf \{G(x, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}^+\} \leq \int_0^{\tau(t)} x(s)u(s) d\mu(s). \quad (28)$$

Выберем непрерывную функцию $g(t)$, которая удовлетворяет условиям: для всех $t \in \mathbb{R}^+$ верно неравенство $g(t) > 0$; если $s > t$, то $g(s) < g(t)$ и

$$\int_0^\infty g(s) d\mu(s) = C < \infty.$$

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим

$$x_n(t) = \begin{cases} x(t) + \frac{g(t)}{n} & \text{при } t < \tau(t), \\ x(t) & \text{при } t \geq \tau(t). \end{cases}$$

Тогда $x_n(t) \geq x(t)$ всюду и

$$\{s : x_n(s) > x(\tau(t))\} = [0, \tau(t)).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \inf \{G(x, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}^+\} &\leq \inf \{G(x_n, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}^+\} \leq G(x_n, x(\tau(t))) \\ &= \int_0^{\tau(t)} x_n(s)u(s) d\mu(s) - x(\tau(t)) \int_0^{\tau(t)} u(s) d\mu(s) \\ &\quad + x(\tau(t)) \int_0^{\tau(t)} u(s) d\mu(s) \\ &\leq \int_0^{\tau(t)} x(s)u(s) d\mu(s) + \frac{C}{n}. \end{aligned} \quad (29)$$

Устремляя в (29) n к бесконечности, приходим к (28). Объединяя (27) и (28), получим (23).

Случай $t \geq M$ разбирается аналогично. Теорема доказана.

Отметим один частный случай теоремы 4. Пусть $u(t) \equiv 1$ и $\mu(s)$ есть мера Лебега на $\mathbb{R}^+$. Тогда из теоремы 4 получим, что для всех $x \in S(\mu)$ верно равенство

$$K^c(t, x; L^1, L^\infty) = \int_0^t x(s) ds. \quad (30)$$

Если заметить, что для $x \in S(\mu)^c$ справедливо равенство $x(t) \equiv x^*(t)$ (напомним, что для функции x перестановка $x^*(t)$ по убыванию определяется равенством $x^*(t) = \inf \{\tau : \mu(s : |x(s)| \geq \tau) < t\}$), то (30) совпадает на $S(\mu)^c$ с известной формулой Питре [1]–[5] для K -функционала пары (L^1, L^∞) .

Результаты, аналогичные теоремам 3, 4, справедливы и для K^+ -функционала. Сформулируем их для полноты изложения.

ТЕОРЕМА 5. Пусть X – идеальное пространство и $\omega(t)$ – положительный измеримый вес. Тогда для любой функции $x(t) \in S(\mu)^+$ верно равенство

$$K^+(t, x; X, L^\infty(\omega)) = \inf \{ \|x_{\alpha, \omega}\|_X + t\alpha : \alpha \in \mathbb{R}^+ \},$$

где функция $x_{\alpha, \omega}$ определена равенством (11).

ТЕОРЕМА 6. Пусть $u \in S(\mu)^+$ – некоторый вес, для которого при некотором $s > 0$ верно соотношение

$$\int_0^s u(\tau) d\mu(\tau) < \infty.$$

Положим

$$\int_0^\infty u(\tau) d\mu(\tau) = M.$$

Пусть $x \in S(\mu)^+$. Для каждого $t \in (0, M)$ определим число $\tau(t)$ из уравнения

$$\int_0^{\tau(t)} u(s) d\mu(s) = t.$$

Тогда при $t \in (0, M)$ справедливо равенство

$$K^+(t, x; L^1(u), L^\infty) = \int_0^{\tau(t)} x(s)u(s) d\mu(s).$$

Если же $t \geq M$, то

$$K^+(t, x; L^1(u), L^\infty) = \int_0^\infty x(s)u(s) d\mu(s).$$

Формула (30) показывает, что для всех $x \in S(\mu)^c$, где μ – мера Лебега, верно равенство

$$K^c(t, x; L^1, L^\infty) = K(t, x; L^1, L^\infty). \quad (31)$$

Покажем, что в случае весовых пространств между K^c -функционалом и K -функционалом даже может не быть эквивалентности.

Рассмотрим пару $(L^1, L^\infty(\omega))$ на $\mathbb{R}^+$, и пусть μ есть мера Лебега. Пусть вес ω удовлетворяет следующим условиям: $\omega(t)$ – непрерывная функция; $\omega(t)$ убывает; $\omega(0) = 1$;

$$\sup \{ s\omega(s) : s \geq 1 \} = C < \infty. \quad (32)$$

Отметим, что из убывания ω следует, что $\hat{\omega}(s) \equiv 1$. Тогда для функции $x_\alpha(s) = s^\alpha$, $\alpha \in (-1, 0]$, согласно формулам (10) и (31) будем иметь

$$K^c(t, x_\alpha; L^1, L^\infty(\omega)) = K(t, x_\alpha; L^1, L^\infty) = \int_0^t x_\alpha(s) ds = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}. \quad (33)$$

С другой стороны,

$$K(t, x_\alpha; L^1, L^\infty(\omega)) \leq \inf \{ \|\chi(D)x_\alpha\|_{L^1} + t\|\chi(\mathbb{R}^+ \setminus D)x_\alpha\|_{L^\infty} : D \subset \mathbb{R}^+ \}.$$

(Здесь $\chi(D)$ – характеристическая функция множества D .) Поэтому

$$\begin{aligned} K(t, x_\alpha; L^1, L^\infty(\omega)) &\leq \inf \left\{ \int_0^\tau x_\alpha(s) ds + t\omega(\tau)x_\alpha(\tau) : \tau \geq 0 \right\} \\ &= \inf \left\{ \frac{\tau^{1+\alpha}}{\alpha+1} + t\omega(\tau)x_\alpha(\tau) : \tau \geq 0 \right\}. \end{aligned}$$

Для $t > 1$ положим $\tau = \sqrt{t}$. Тогда

$$\begin{aligned} K(t, x_\alpha; L^1, L^\infty(\omega)) &\leq \frac{t^{(1+\alpha)/2}}{\alpha+1} + t\omega(\sqrt{t})t^{\alpha/2} \\ &= \frac{t^{(1+\alpha)/2}}{\alpha+1} + \omega(\sqrt{t})t^{1+\alpha/2}. \end{aligned}$$

Таким образом, верно неравенство

$$K(t, x_\alpha; L^1, L^\infty(\omega)) \leq t^{(\alpha+1)/2} \left(\frac{1}{1+\alpha} + \omega(\sqrt{t})\sqrt{t} \right).$$

Из условия (32) следует, что при $t \geq 1$ верно неравенство

$$K(t, x_\alpha; L^1, L^\infty(\omega)) \leq C_1 t^{(\alpha+1)/2}. \quad (34)$$

Поэтому из (33) и (34) получим

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{K(t, x_\alpha; L^1, L^\infty(\omega))}{K^c(t, x_\alpha; L^1, L^\infty(\omega))} = 0.$$

Последнее равенство означает, что K -функционал Питре и K^c -функционал для пары $(L^1, L^\infty(\omega))$ не эквивалентны.

Продemonстрируем сейчас еще один эффект, связанный с различным поведением K - и K^c -функционалов. А именно мы покажем, что для любого симметричного пространства X найдется пара весов w_0 и w_1 такая, что на общем конусе множества

$$(X(\omega_0), X(\omega_1))_{K^c, \Phi_{\theta, q}}, \quad (X(\omega_0), X(\omega_1))_{K, \Phi_{\theta, q}}$$

имеют неэквивалентные нормы.

Пусть X – идеальное пространство, ω_0, ω_1 – две весовые функции, $X(\omega_0), X(\omega_1)$ – два весовых идеальных пространства, построенных по одному и тому же X . Хорошо известно, что справедлива формула [14, с. 53]

$$\frac{1}{c} \|\min(\omega_0, t\omega_1)x\|_X \leq K(t, x; X(\omega_0), X(\omega_1)) \leq c \|\min(\omega_0, t\omega_1)x\|_X, \quad (35)$$

причем константа c не зависит от $x \in X$ и весов ω_0, ω_1 .

Пусть X – симметричное пространство. Напомним (см., например, [4]), что идеальное пространство X называется *симметричным*, если из $x \in S(\mu)$, $y \in X$ и выполнения при всех $\alpha \in \mathbb{R}^+$ неравенства $\lambda(x, \alpha) \leq \lambda(y, \alpha)$, где $\lambda(z, \alpha)$ есть функция распределения функции z : $\lambda(z, \alpha) = \mu\{\tau: |z(\tau)| > \alpha\}$, следует, что $x \in X$ и $\|x\|_X \leq \|y\|_X$. Многочисленные примеры симметричных пространств приведены в [4].

Далее мы ограничимся случаем, когда областью определения функций из симметричного пространства X и соответственно из $X(\omega_0)$ и $X(\omega_1)$ является множество $(0, 1]$, а мера μ есть мера Лебега. Этого достаточно для демонстрации обещанного нами эффекта. В других случаях рассмотрения аналогичны.

Пусть a_i – убывающая положительная последовательность, причем $a_0 = 1$ и

$$\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = 0.$$

Положим $J_{2k} = (2^{-k} - 2^{-(k+2)}, 2^{-k}]$, $J_{2k+1} = (2^{-(k+1)}, 2^{-k} - 2^{-(k+2)}]$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Тогда $|J_{2k}| = |J_{2k+1}| = 2^{-(k+2)}$ и $(0, 1] = \bigcup_{i=0}^{\infty} J_i$.

Определим веса $\omega_0(s)$, $\omega_1(s)$ соотношениями

$$\begin{aligned} \omega_0(s) &= \begin{cases} 1 & \text{при } s \in J_{2i}, \\ a_i & \text{при } s \in J_{2i+1}, \end{cases} \\ \omega_1(s) &= \begin{cases} a_i & \text{при } s \in J_{2i}, \\ 1 & \text{при } s \in J_{2i+1}. \end{cases} \end{aligned}$$

Для каждого $x \in S(\mu)^+$ положим

$$x_k(\tau) = x(\tau) \chi\left(\bigcup_{i=k}^{\infty} J_{2i}\right).$$

Покажем сначала, что для $x \in S(\mu)^c$ при всех k выполнены неравенства

$$\min(1, t) \|x\|_X \geq K^c(t, x; X(\omega_0), X(\omega_1)) \geq \min(1, t) \|x_k\|_X. \quad (36)$$

Следует обратить внимание, что в (36) весовые пространства присутствуют только в центральной части неравенств.

Проверим первое неравенство в (36). Из того, что для $i = 0, 1$ при всех τ верно неравенство $0 < \omega_i(\tau) \leq 1$, следует соотношение

$$K^c(t, x; X(\omega_0), X(\omega_1)) \leq K^c(t, x; X(1), X(1)) \leq \min(1, t) \|x\|_X.$$

Поэтому первое неравенство в (36) доказано.

Проверим второе неравенство в (36). Пусть $x, g_0, g_1 \in S(\mu)^c$ и $x(\tau) \equiv g_0(\tau) + g_1(\tau)$. Положим $y_0(\tau) = g_0(\tau)\chi\left(\bigcup_{i=k}^{\infty} J_{2i}\right)$. Тогда из того, что X – идеальное пространство, очевидным образом выполнено неравенство

$$\begin{aligned} \|g_0|X(\omega_0)\| &\geq \left\| g_0\chi\left(\bigcup_{i=k}^{\infty} J_{2i}\right) \Big| X(\omega_0) \right\| = \left\| \omega_0 g_0\chi\left(\bigcup_{i=k}^{\infty} J_{2i}\right) \Big| X \right\| \\ &= \left\| g_0\chi\left(\bigcup_{i=k}^{\infty} J_{2i}\right) \Big| X \right\| = \|y_0|X\|. \end{aligned} \quad (37)$$

Для каждого $i \geq k$ и для $\tau \in J_{2i}$ определим функцию

$$y_1(\tau) = g_1(\tau - 2^{-(i+2)})$$

и продолжим ее в остальных точках $(0, 1]$ нулем. Тогда из включения $g_1 \in S(\mu)^c$ для любого $\tau \in J_{2i}$ следует неравенство

$$x(\tau) = g_0(\tau) + g_1(\tau) \leq g_0(\tau) + g_1(\tau - 2^{-(i+2)}) = y_0(\tau) + y_1(\tau).$$

Поэтому при всех $\tau \in (0, 1]$ верно неравенство

$$x_k(\tau) \leq y_0(\tau) + y_1(\tau). \quad (38)$$

Кроме того, из симметричности пространства X следует неравенство

$$\begin{aligned} \|g_1|X(\omega_1)\| &\geq \left\| g_1\chi\left(\bigcup_{i=k}^{\infty} J_{2i+1}\right) \Big| X(\omega_1) \right\| = \left\| \omega_1 g_1\chi\left(\bigcup_{i=k}^{\infty} J_{2i+1}\right) \Big| X \right\| \\ &= \left\| g_1\chi\left(\bigcup_{i=k}^{\infty} J_{2i+1}\right) \Big| X \right\| = \|y_1|X\|. \end{aligned} \quad (39)$$

Поэтому из (37)–(39) получим соотношение

$$\|g_0|X(\omega_0)\| + t\|g_1|X(\omega_1)\| \geq \|y_0|X(\omega_0)\| + t\|y_1|X(\omega_1)\| \geq \min(1, t)\|x_k|X\|$$

и, следовательно,

$$K^c(t, x; X(\omega_0), X(\omega_1)) \geq \min(1, t)\|x_k|X\|.$$

Таким образом, (36) полностью доказано.

Покажем теперь, что если $x \in S(\mu)^c$ и $\text{supp } x = \chi\left(\bigcup_{i=2k}^{\infty} J_i\right)$, то верны неравенства

$$\|x_k|X\| \leq \|x|X\| \leq 3\|x_k|X\|. \quad (40)$$

Отметим, что первое неравенство в (40) следует из идеальности X .

Для проверки второго неравенства в (40) можно поступить так.

Для $\tau \in (2^{-(i+1)}, 2^{-(i+1)} + 2^{-(i+3)}]$ положим $y(\tau) = x_k(\tau - 2^{-(i+3)})$, а для $\tau \in (2^{-(i+1)} + 2^{-(i+3)}, 2^{-(i+1)} + 2^{-(i+2)}]$ положим $z(\tau) = x_k(\tau - 2 * 2^{-(i+3)})$, $i = 0, 1, 2, \dots$, а при остальных τ доопределим $y(\tau)$ и $z(\tau)$ нулем.

Тогда из графика $x(\tau)$, включения $x \in S(\mu)^c$ и определения x_k следует неравенство

$$x(\tau) \leq x_k(\tau) + y(\tau) + z(\tau).$$

Кроме того, из построения $y(\tau)$, $z(\tau)$ и симметричности пространства X следуют неравенства

$$\|y|X\| \leq \|x_k|X\|, \quad \|z|X\| \leq \|x_k|X\|.$$

Поэтому и второе неравенство в (40) верно.

С другой стороны,

$$\min(\omega_0, t\omega_1) = \begin{cases} \min(1, ta_i) & \text{при } s \in J_{2i}, \\ \min(a_i, t) & \text{при } s \in J_{2i+1}. \end{cases} \quad (41)$$

Поэтому если $i \geq k$, то из монотонности a_i и (41) получим неравенство

$$\min(\omega_0, t\omega_1) \leq \max\{\min\{a_k, t\}, \min\{1, ta_k\}\}. \quad (42)$$

Непосредственно из (42) следует, что:

- если $0 < t < a_k$, то $\min(\omega_0, t\omega_1) \leq \max(t, ta_k) \leq t$;
- если $a_k \leq t \leq 1$, то $\min(\omega_0, t\omega_1) \leq \max(a_k, ta_k) \leq a_k$;
- если $1 \leq t \leq \frac{1}{a_k}$, то $\min(\omega_0, t\omega_1) \leq \max(a_k, ta_k) \leq ta_k$;
- если $t \geq \frac{1}{a_k}$, то $\min(\omega_0, t\omega_1) \leq \max(1, a_k) \leq 1$.

Поэтому, используя (35), для $x \in S(\mu)^c$ с $\text{supp } x \subset \bigcup_{j=2k}^{\infty} J_j$ получим неравенство

$$K(t, x; X(\omega_0), X(\omega_1)) \leq C \begin{cases} t\|x|X\| & \text{при } t \in (0, a_k], \\ a_k\|x|X\| & \text{при } t \in (a_k, 1], \\ ta_k\|x|X\| & \text{при } t \in (1, 1/a_k], \\ \|x|X\| & \text{при } t \in (1/a_k, \infty). \end{cases} \quad (43)$$

Пусть теперь $\varphi_0(s)$, $\varphi_1(s)$ – две произвольные функции $\varphi_i: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^+$, удовлетворяющие условиям: $\varphi_0(s)$ возрастает, $\varphi_1(s)$ убывает; для всех $s \in (0, 1)$ верны неравенства $\varphi_1(s) \geq 1$, $\varphi_0(s) \leq 1$;

$$\lim_{s \rightarrow 0} \varphi_1(s) = \infty, \quad \lim_{s \rightarrow 0} \varphi_0(s) = 0, \quad \lim_{s \rightarrow 0} s\varphi_1(s) = 0, \quad \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{\varphi_0(s)} = 0. \quad (44)$$

Тогда из (36), (40), (43) и (44) следует соотношение

$$\begin{aligned}
& \lim_{k \rightarrow \infty} \sup \left\{ \frac{K(t, x\chi(\bigcup_{j=2k}^{\infty} J_j); X(\omega_0), X(\omega_1))}{K^c(t, x\chi(\bigcup_{j=2k}^{\infty} J_j); X(\omega_0), X(\omega_1))} : \right. \\
& \quad \left. x \in X^c(\omega_0) + X^c(\omega_1), t \in [\varphi_0(a_k), \varphi_1(a_k)) \right\} \\
& \leq 3C \max \left\{ \lim_{k \rightarrow \infty} \sup \left\{ \frac{a_k \|x|X\|}{t \|x|X\|} : x \in X^c(\omega_0) + X^c(\omega_1), t \in [\varphi_0(a_k), 1) \right\}, \right. \\
& \quad \left. \lim_{k \rightarrow \infty} \sup \left\{ \frac{ta_k \|x|X\|}{\|x|X\|} : x \in X^c(\omega_0) + X^c(\omega_1), t \in [1, \varphi_1(a_k)) \right\} \right\} \\
& \leq 3C \lim_{k \rightarrow \infty} \max \left\{ \frac{a_k}{\varphi_0(a_k)}, a_k \varphi_1(a_k) \right\} = 0. \tag{45}
\end{aligned}$$

Соотношение (45) показывает, что для любого симметричного пространства X найдется такая пара весов ω_0 и ω_1 , что K -функционал и K^c -функционал равномерно неэквивалентны на некоторых конусах.

Покажем теперь, что на общем конусе множества

$$(X(\omega_0), X(\omega_1))_{K^c, \Phi_{\theta, q}}, \quad (X(\omega_0), X(\omega_1))_{K, \Phi_{\theta, q}}$$

с $0 < \theta < 1$, $q \geq 1$ имеют неэквивалентные нормы.

Из соотношений (36) и (40) следует, что если $x \in S(\mu)^c$ и $\text{supp } x = \bigcup_{j=2k}^{\infty} J_j$, то

$$\frac{1}{3} \min(1, t) \|x|X\| \leq K^c(t, x; X(\omega_0), X(\omega_1)) \leq \min(1, t) \|x|X\|.$$

Поэтому для $x \in S(\mu)^c$ с $\text{supp } x = \bigcup_{j=2k}^{\infty} J_j$ верны соотношения

$$\frac{1}{3} \min(1, t) \|\Phi_{\theta, q}\| \cdot \|x|X\| \leq \|x|(X(\omega_0), X(\omega_1))_{K^c, \Phi_{\theta, q}}\| \leq \|\min(1, t) \Phi_{\theta, q}\| \cdot \|x|X\|.$$

Поскольку верно равенство

$$\|\min(1, t) \Phi_{\theta, q}\| = \left(\frac{1}{(1-\theta)\theta q} \right)^{1/q},$$

то для $x \in S(\mu)^c$ с $\text{supp } x = \bigcup_{j=2k}^{\infty} J_j$ выполнены соотношения

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3} \left(\frac{1}{(1-\theta)\theta q} \right)^{1/q} \|x|X\| & \leq \|x|(X(\omega_0), X(\omega_1))_{K^c, \Phi_{\theta, q}}\| \\
& \leq \left(\frac{1}{(1-\theta)\theta q} \right)^{1/q} \|x|X\|. \tag{46}
\end{aligned}$$

Положим

$$\psi(t) = t\chi(0, a_k) + a_k\chi(a_k, 1) + ta_k\chi\left(1, \frac{1}{a_k}\right) + \chi\left(\frac{1}{a_k}, \infty\right).$$

Тогда из (43) получим справедливость для всех $x \in S(\mu)^c$ с $\text{supp } x = \bigcup_{j=2k}^{\infty} J_j$ неравенства

$$K(t, x; X(\omega_0), X(\omega_1)) \leq C \|\psi(t)|\Phi_{\theta, q}\| \|x|X\|,$$

где C не зависит от x .

Простой подсчет показывает, что

$$\|\psi(t)|\Phi_{\theta, q}\| \leq \left(\frac{1}{(1-\theta)\theta q}\right)^{1/q} \left(a_k^{(1-\theta)q} + a_k^{\theta q}\right)^{1/q}.$$

Поэтому для всех $x \in S(\mu)^c$ с $\text{supp } x = \bigcup_{j=2k}^{\infty} J_j$ верно неравенство

$$K(t, x; X(\omega_0), X(\omega_1)) \leq C \left(\frac{1}{(1-\theta)\theta q}\right)^{1/q} \left(a_k^{(1-\theta)q} + a_k^{\theta q}\right)^{1/q} \|x|X\|. \quad (47)$$

Поскольку $a_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, то, сравнивая (46) и (47), видим, что на общем конусе множества $(X(\omega_0), X(\omega_1))_{K^c, \Phi_{\theta, q}}$ и $(X(\omega_0), X(\omega_1))_{K, \Phi_{\theta, q}}$ с $q \geq 1$, $0 < \theta < 1$ имеют неэквивалентные нормы.

Теперь мы рассмотрим пример интерполяционной пары пространств с весом, которая очень часто встречается в гармоническом анализе и для которой конструкции вещественного метода интерполяции, построенные по K -функционалу Питре и по K^c -функционалу, совпадают. Некоторые интерполяционные пространства этой пары описывались в [15], [16].

Пусть снова μ есть мера Лебега. Как обычно, через $L^{p, q}$ обозначим пространство Лоренца, состоящее из тех функций, для которых конечна величина

$$\|x|L^{p, q}\| = \left(\int_0^\infty (t^{1/p} x^*(t))^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q}.$$

Хорошо известно [1], что $L^{p, p} = L^p$. В общем случае $L^{p, q}$ – квазинормированное пространство, но при $p > 1$ квазинорму можно заменить на норму, при введении которой $L^{p, q}$ становится банаховым пространством.

Для пространства $L^{p, q}$ положим $(L^{p, q})^c = L^{p, q} \cap S(\mu)^c$, а для пространства $(L^1(u), L^\infty)_{K, \Phi_{\theta, q}}$ соответственно

$$(L^1(u), L^\infty)_{K, \Phi_{\theta, q}}^c = (L^1(u), L^\infty)_{K, \Phi_{\theta, q}} \cap S(\mu)^c.$$

ТЕОРЕМА 7. Пусть $u(s) = s^\alpha$ и $1 \leq q \leq \infty$, $0 < \theta < 1$, $-1 < \alpha < \frac{\theta}{1-\theta}$, $1/p = (\alpha + 1)(1 - \theta)$.

Тогда с точностью до эквивалентных норм верно равенство

$$(L^1(u), L^\infty)_{K^c, \Phi_{\theta, q}} = (L^1(u), L^\infty)_{K, \Phi_{\theta, q}}^c = (L^{p, q})^c,$$

причем для $x \in S(\mu)^c$ при $1 < q \leq \infty$ верны неравенства

$$(\alpha + 1)^{\theta+1/q-1} \|x|L^{p, q}\| \leq \|x|(L^1(u), L^\infty)_{K^c, \Phi_{\theta, q}}\| \leq \frac{(\alpha + 1)^{\theta+1/q}}{(1 + \alpha)\theta} \|x|L^{p, q}\|,$$

а при $q = 1$ выполнено равенство

$$\frac{(\alpha + 1)^\theta}{\theta} \|x|L^{p, 1}\| = \|x|(L^1(u), L^\infty)_{K^c, \Phi_{\theta, 1}}\|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В нашем случае $p > 1$. Поэтому пространство $L^{p, q}$ является банаховым. Соотношение

$$(L^1(u), L^\infty)_{K, \Phi_{\theta, q}} = L^{p, q}$$

хорошо известно [16], откуда следует равенство

$$(L^1(u), L^\infty)_{K, \Phi_{\theta, q}}^c = (L^{p, q})^c.$$

Докажем, что

$$(L^1(u), L^\infty)_{K^c, \Phi_{\theta, q}} = (L^{p, q})^c. \quad (48)$$

Пусть $x \in S(\mu)^c$. Тогда из теоремы 4 получим

$$K^c(t, x; L^1(u), L^\infty) = \int_0^{\tau(t)} x(s)u(s) ds, \quad (49)$$

где

$$\tau(t) = ((\alpha + 1)t)^{1/(\alpha+1)}. \quad (50)$$

По определению

$$\begin{aligned} \|x|(L^1(u), L^\infty)_{K^c, \Phi_{\theta, q}}\| &= \left(\int_0^\infty (t^{-\theta} K^c(t, x, L^1(u), L^\infty))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \\ &= \left(\int_0^\infty \left(t^{-\theta} \int_0^{\tau(t)} x(s)u(s) ds \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Сделав замену переменных $s = \tau(t)\sigma$, получим

$$\|x|(L^1(u), L^\infty)_{K^c, \Phi_{\theta, q}}\| = \left(\int_0^\infty \left(t^{-\theta} \int_0^1 x(\sigma\tau(t))\tau(t)(\sigma\tau(t))^\alpha d\sigma \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}.$$

Из равенства (50) следует, что

$$\begin{aligned}
& \|x|(L^1(u), L^\infty)_{K^c, \Phi_{\theta, q}}\| \\
&= \left(\int_0^\infty \left(t^{-\theta} \int_0^1 x(\sigma\tau(t)) t(1+\alpha)\sigma^\alpha d\sigma \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \\
&= (\alpha+1) \left(\int_0^\infty \left(t^{1-\theta} \int_0^1 x(\sigma\tau(t)) \sigma^\alpha d\sigma \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \\
&= (\alpha+1) \left(\int_0^\infty \left(t^{1-\theta} \int_0^1 x(\sigma[(\alpha+1)t]^{1/(\alpha+1)}) \sigma^\alpha d\sigma \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}.
\end{aligned}$$

Далее, воспользуемся неравенством Минковского и получим

$$\begin{aligned}
& \|x|(L^1(u), L^\infty)_{K^c, \Phi_{\theta, q}}\| \\
&\leq (\alpha+1) \int_0^1 \left(\int_0^\infty (t^{1-\theta} x([(\alpha+1)t]^{1/(\alpha+1)} \sigma) \sigma^\alpha)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} d\sigma = K_1.
\end{aligned}$$

Отсюда с помощью замены переменных $\tau = [(\alpha+1)t]^{1/(\alpha+1)} \sigma$ придем к соотношению

$$\begin{aligned}
K_1 &= (\alpha+1)^{\theta+1/q} \int_0^1 \left(\int_0^\infty [\tau^{(1-\theta)(\alpha+1)} x(\tau)]^q \frac{d\tau}{\tau} \right)^{1/q} \sigma^{\theta(\alpha+1)-1} d\sigma \\
&= (\alpha+1)^{\theta+1/q} \int_0^1 \sigma^{\theta(\alpha+1)-1} d\sigma \|x|(L^{p, q})^c\| \\
&= \frac{(\alpha+1)^{\theta+1/q}}{\theta(\alpha+1)} \|x|(L^{p, q})^c\|.
\end{aligned}$$

Таким образом, мы получили

$$\|x|(L^1(u), L^\infty)_{K^c, \Phi_{\theta, q}}\| \leq \frac{(\alpha+1)^{\theta+1/q}}{\theta(\alpha+1)} \|x|(L^{p, q})^c\|. \quad (51)$$

Докажем обратное неравенство. Поскольку x убывает, то согласно теореме 4 и (49), (50) получим

$$\begin{aligned}
& \|x|(L^1(u), L^\infty)_{K^c, \Phi_{\theta, q}}\| = \left(\int_0^\infty t^{-\theta} \left(\int_0^{[(\alpha+1)t]^{1/(\alpha+1)}} x(s)u(s) ds \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \\
&\geq \left(\int_0^\infty (t^{-\theta} x([(\alpha+1)t]^{1/(\alpha+1)}))^q \left(\int_0^{[(\alpha+1)t]^{1/(\alpha+1)}} u(s) ds \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \\
&= \left(\int_0^\infty (t^{1-\theta} x([(\alpha+1)t]^{1/(\alpha+1)}))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}.
\end{aligned}$$

Положив $s = [(\alpha + 1)t]^{1/(\alpha+1)}$, окончательно получим

$$\|x|(L^1(u), L^\infty)_{K^c, \Phi_{\theta, q}}\| \geq (\alpha + 1)^{1/q + \theta - 1} \left(\int_0^\infty (s^{(\alpha+1)(1-\theta)} x(s))^q \frac{ds}{s} \right)^{1/q}.$$

Таким образом, справедливо и неравенство

$$(\alpha + 1)^{\theta + 1/q - 1} \|x|(L^{p, q})^c\| \leq \|x|(L^1(u), L^\infty)_{K^c, \Phi_{\theta, q}}\|. \quad (52)$$

Объединяя (51) и (52), приходим к (48). Для окончания доказательства в случае $q = 1$ достаточно просто воспользоваться теоремой Фуббини. Теорема доказана.

Список литературы

1. Берг Й., Лефстрем Й. Интерполяционные пространства. Введение. М.: Мир, 1980.
2. Брудный Ю. А., Крейн С. Г., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов // Итоги науки и техники. Сер. Матем. анализ. Т. 24. М.: ВИНТИ, 1986. С. 3–164.
3. Brudnyi Ju., Krugliak N. Interpolations Functors and Interpolations Spaces. North-Holland, 1991.
4. Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.
5. Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.
6. Мазья В. Г. Пространства С. Л. Соболева. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985.
7. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.
8. Бережной Е. И. Точные оценки операторов на конусах в идеальных пространствах // Тр. МИ РАН. 1993. Т. 204. С. 3–35.
9. Sawyer E. T. Boundedness of classical operators on classical Lorentz spaces // Studia Math. 1991. V. 96. P. 145–158.
10. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
11. Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach Spaces. 1, 2. N. Y.: Springer, 1973, 1979.
12. Бережной Е. И., Забрейко П. П. Интерполяция частично аддитивных операторов // ДАН БССР. 1986. Т. 30. № 2. С. 108–111.
13. Berezhtnoy E. I., Zabreiko P. P. Some interpolation theory for nonlinear operators // Non-linear Analysis. 1988. V. 12. № 2. P. 155–170.
14. Дмитриев В. И., Крейн С. Г., Овчинников В. И. Основы теории интерполяции линейных операторов // Геометрия линейных пространств и теория операторов. Ярославль, 1977. С. 31–75.
15. Лизоркин П. И. Интерполяция пространств L^p с весом // ДАН СССР. 1975. Т. 222. № 1. С. 32–35.
16. Maligranda L., Persson L. Interpolation between weighted L^p and Lorentz spaces // Bull. Pol. Acad. Sci. Math. 1987. V. 35. № 11–12. P. 765–768.

Ярославский университет
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: smirn@delta.yaroslavl.su

Поступило в редакцию
26.II.1997