Общероссийский математический портал

В. А. Краснов, Вещественные алгебраические GMZ-поверхности, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1998, том 62, выпуск 4, 51–80

DOI: <https://doi.org/10.4213/im196>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 13:47:37

УДК 513.6+517.6

В. А. Краснов

Вещественные алгебраические GMZ-поверхности

Доказываются необходимые и достаточные условия для того, чтобы вещественная алгебраическая поверхность была GMZ-поверхностью. Вычисляются группа Нерона–Севери $NS(X)$, группа Брауэра $Br(X)$ и алгебраическая группа когомологий $H^1_d(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$, где X – вещественная проективная поверхность. Также доказывается сравнение В.В. Никулина для произвольной ориентируемой M -поверхности.

Библиография: 15 наименований.

Введение

Далее X – неособая вещественная проективная алгебраическая поверхность, $g: X(\mathbb{C}) \rightarrow X(\mathbb{C})$ – инволюция комплексного сопряжения, $G = \{1, g\}$ – группа второго порядка, действующая на $X(\mathbb{C})$, $Y = X(\mathbb{C})/G$ – факторпространство, $f: X(\mathbb{C}) \rightarrow Y$ – проекция. Предполагается, что $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$.

Напомним, что выполняются следующие три неравенства:

$$\dim H^*(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \leq \dim H^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2), \quad (0.1)$$

$$\dim H^*(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \leq \dim H^1(G, H^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)), \quad (0.2)$$

$$\begin{aligned} \dim H^*(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) &\leq \dim H^1(G, H^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})) \\ &\quad + \dim H^2(G, H^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})), \end{aligned} \quad (0.3)$$

где $H^*(-, -) = \bigoplus_q H^q(-, -)$.

В случае, когда неравенство (0.1) становится равенством, X называется M -поверхностью (см. [15]). Если неравенство (0.2) становится равенством, то X называется GM-поверхностью (см. [3]). А если неравенство (0.3) становится равенством, то X называется GMZ-поверхностью (см. [3]).

Заметим, что M -поверхность является GM-поверхностью. А если группа $H^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ свободная, то правые части неравенств (0.2), (0.3) совпадают, поэтому в этом случае X является GMZ-поверхностью тогда и только тогда, когда X – GM-поверхность (см. [3]). Но если группа $H^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ имеет кручение, то это утверждение неверно (см. [9], [12]).

Применение эквивариантных когомологий для исследования топологии и геометрии поверхности X часто требует, чтобы X была GM- или GMZ-поверхностью.

В работе [11] мы пробовали ответить на вопрос: когда X является GM-поверхностью? В частности, был доказан следующий критерий: X является GM-поверхностью тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$(1 + g^*)H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) = f^*H^1(Y, X(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2). \quad (0.4)$$

Отметим, что в общем случае имеет место только включение

$$(1 + g^*)H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) \subset f^*H^1(Y, X(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2).$$

Подгруппа $f^*H^1(Y, \mathbb{F}_2) \subset H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)^G$ имеет следующее геометрическое описание. Если $\theta \in H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)^G$ – ненулевой элемент, то он определяет неразветвленное двулистное накрытие $\pi: W_\theta \rightarrow X(\mathbb{C})$ с двумя инволюциями $g^{(i)}: W_\theta \rightarrow W_\theta$, $i = 1, 2$, накрывающими инволюцию $g: X(\mathbb{C}) \rightarrow X(\mathbb{C})$. Если положить $X(\mathbb{R})_\theta^{(i)} = \pi(W_\theta^{g^{(i)}})$, $i = 1, 2$, то получим разбиение $X(\mathbb{R})$ на части $X(\mathbb{R})_\theta^{(1)}$, $X(\mathbb{R})_\theta^{(2)}$. Будем называть элемент θ *неразбивающим* $X(\mathbb{R})$, если одна из частей $X(\mathbb{R})_\theta^{(i)}$ пуста. В [11] показано, что подгруппа $f^*H^1(Y, \mathbb{F}_2)$ состоит из элементов $H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)^G$, неразбивающих $X(\mathbb{R})$. Таким образом, подгруппа

$$f^*H^1(Y, X(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2) \subset H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)^G$$

состоит из неразбивающих $X(\mathbb{R})$ элементов, которые обращаются в нуль при ограничении их на $X(\mathbb{R})$. Следовательно, равенство (0.4) выполняется тогда и только тогда, когда каждый ненулевой элемент из $H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)^G$, неразделяющий $X(\mathbb{R})$ и обращающийся в нуль на $X(\mathbb{R})$, разлагается в сумму $a + g^*(a)$, где $a \in H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$.

В данной работе мы пытаемся ответить на вопрос: когда X является GMZ-поверхностью? Сначала мы сформулируем семь определений топологического GMZ-пространства. Соответствующая теорема об эквивалентности этих определений изложена в § 1, ее доказательство мы не приводим, так как аналогичная теорема о GM-пространствах доказана в [11]. Затем докажем, что каждое M -пространство является GMZ-пространством, а также докажем необходимое и достаточное условия для того, чтобы GM-пространство было GMZ-пространством.

Для вещественной алгебраической поверхности этот критерий дает

ТЕОРЕМА 0.1. *Вещественная алгебраическая GM-поверхность тогда и только тогда будет GMZ-поверхностью, когда гомоморфизм Бокштейна*

$$\delta: H^{q-1}(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)^G \rightarrow {}_2H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})^G$$

эпиморфен при $q = 2, 3$, где ${}_2H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})^G$ – подгруппа $H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})^G$, состоящая из элементов второго порядка.

С помощью этой теоремы мы доказываем следующий геометрический критерий.

ТЕОРЕМА 0.2. Пусть поверхность X такая, что группа $H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ 2-элементарная и инволюция

$$g_*: H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$$

тривиальна. Тогда X является GMZ-поверхностью, если и только если неразделяющие элементы из $H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$ удовлетворяют условию $\theta^2|_{X(\mathbb{R})} \neq 0$, а разделяющие элементы удовлетворяют условию $\theta|_{X(\mathbb{R})} = 0$.

Эта теорема обобщает соответствующий результат о поверхности Энрикеса (см. [12]). Далее мы пытаемся подойти к решению поставленной задачи с другой стороны, а именно применяем вычисления первой спектральной последовательности для эквивариантных когомологий, приведенные в [9]. Чтобы сформулировать полученный результат, заметим сначала, что имеют место следующие короткие комплексы:

$${}_2H_1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(Y, \mathbb{Z}) \xrightarrow{f^!} H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}), \quad (0.5)$$

$$H_1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \rightarrow H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})/(1 + g_*)H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \xrightarrow{1-g_*} H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}), \quad (0.6)$$

где первый гомоморфизм в (0.5) индуцирован вложением $X(\mathbb{R}) \subset Y$, а первый гомоморфизм в (0.6) индуцирован вложением $X(\mathbb{R}) \subset X(\mathbb{C})$ (заметим, что $H_1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z})/(1 + g_*)H_1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}) = H_1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$).

ТЕОРЕМА 0.3. Пусть поверхность X такая, что $H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) = 0$. Тогда X будет GMZ-поверхностью, если и только если последовательности (0.5), (0.6) точные.

Мы показываем, что из теоремы 0.3 следует теорема 0.2.

Далее мы занимаемся применением эквивариантных когомологий и теории GMZ-поверхностей к вычислению группы Нерона–Севери $NS(X)$, группы Брауэра $Br(X)$, алгебраической группы гомологий $H_1^{\text{alg}}(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$. Эти вычисления обобщают некоторые результаты из [8], [10], [12]. Соответствующие формулировки теорем во введении мы не приводим (см. §6–8). Кроме этого мы обобщаем одно сравнение В.В. Никулина на произвольные ориентируемые M -поверхности, а именно доказываем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 0.4. Пусть X – M -поверхность такая, что связные компоненты множества $X(\mathbb{R})$ ориентируемые и их эйлеровы характеристики сравнимы с нулем по модулю 2^μ , $\mu \geq 2$. Тогда эйлерова характеристика всего множества $X(\mathbb{R})$ сравнима с нулем по модулю $2^{\mu+3}$.

В.В. Никулиным эта теорема была доказана в [13] с помощью сложной арифметической теории для поверхностей с $H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) = 0$. Применение эквивариантных когомологий в [6] позволило упростить доказательство В.В. Никулина, причем там эта теорема доказана в случае, когда группа $H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ свободная. Разработанная в данной статье теория позволяет избавиться от этого предположения.

§ 1. Различные определения GMZ-пространства

Сначала через X мы будем обозначать конечный клеточный комплекс с клеточной инволюцией $g: X \rightarrow X$. Через Y обозначим факторпространство X/G , где $G = \{1, g\}$ – группа второго порядка, действующая на X , а через Z обозначим множество неподвижных точек X^G . Будем предполагать, что Z является непустым подкомплексом X . Тогда выполняется неравенство

$$\dim H^*(Z, \mathbb{F}_2) \leq \dim H^1(G, H^*(X, \mathbb{Z})) + \dim H^2(G, H^*(X, \mathbb{Z})).$$

Если это неравенство становится равенством, то (X, g) называется GMZ-пространством.

Чтобы сформулировать другие определения GMZ-пространства, нам потребуются ввести следующие обозначения. Через $\mathbb{Z}_+, \mathbb{Z}_-$ будем обозначать постоянные G -пучки на X , со слоем $\mathbb{Z}$, на которых инволюция g действует умножением на ± 1 соответственно. Тогда определены эквивариантные когомологии $H^q(X; G, \mathbb{Z}_\pm)$. Через $\Pi_r^{p,q}(\mathbb{Z}_\pm)$ обозначим вторые спектральные последовательности, сходящиеся к этим когомологиям. Заметим, что

$$\Pi_2^{p,q} = H^p(G, H^q(X, \mathbb{Z}_\pm)).$$

Через $\{F^k H^q(X; G, \mathbb{Z}_\pm)\}$ обозначим возрастающие фильтрации, которые дают эти спектральные последовательности. Через

$$\alpha: H^q(X; G, \mathbb{Z}_\pm) \rightarrow H^q(X, \mathbb{Z}_\pm)^G$$

обозначим краевой гомоморфизм, который является гомоморфизмом забывания вещественной структуры на X . Через

$$\beta: H^q(X; G, \mathbb{Z}_\pm) \rightarrow H^q(Z; G, \mathbb{Z}_\pm)$$

обозначим гомоморфизм ограничения. Если pt – одноточечное G -пространство, то $H^1(\text{pt}; G, \mathbb{Z}_-)$ – группа второго порядка, образующую которой обозначим через t . Отображение $X \rightarrow \text{pt}$ индуцирует гомоморфизм

$$H^1(\text{pt}; G, \mathbb{Z}_-) \rightarrow H^1(X; G, \mathbb{Z}_-),$$

поэтому определено умножение на t классов когомологий из $H^q(X; G, \mathbb{Z}_\pm)$, которое задает гомоморфизм

$$T^*: H^q(X; G, \mathbb{Z}_\pm) \rightarrow H^{q+1}(X; G, \mathbb{Z}_\mp).$$

В [11] имеется конструктивное определение этого гомоморфизма, там он назван *гомоморфизмом сдвига*. Пусть $f: X \rightarrow Y = X/G$ – проекция; тогда рассмотрим пучки $f_*^G(\mathbb{Z}_\pm)$. Пучок $f_*^G(\mathbb{Z}_+)$ равен $\mathbb{Z}_Y$, а пучок $f_*^G(\mathbb{Z}_-)$ будет “скрученным”

пучком со слоем $\mathbb{Z}$, равным нулю в точках из Z . Его будем обозначать через $\mathbb{Z}'$. Проекция $f: X \rightarrow Y$ индуцирует гомоморфизмы

$$f^*: H^q(Y, Z; f_*^G(\mathbb{Z}_\pm)) \rightarrow H^q(X, \mathbb{Z}_\pm),$$

т.е. гомоморфизмы

$$f^*: H^q(Y, Z; \mathbb{Z}) \rightarrow H^q(X, \mathbb{Z}), \quad f^*: H^q(Y, \mathbb{Z}') \rightarrow H^q(X, \mathbb{Z}).$$

ТЕОРЕМА 1.1. Следующие условия на (X, g) эквивалентны:

- 1) (X, g) является GMZ-пространством;
- 2) вырождается одна из спектральных последовательностей $\Pi_r^{p,q}(\mathbb{Z}_\pm)$ при $r \geq 2$;
- 3) при каждом q оба гомоморфизма забывания вещественной структуры $\alpha: H^q(X; G, \mathbb{Z}_\pm) \rightarrow H^q(X, \mathbb{Z}_\pm)^G$ эпиморфны;
- 4) при каждом q оба гомоморфизма ограничения

$$\beta: F^{q-1}H^q(X; G, \mathbb{Z}_\pm) \rightarrow H^q(Z; G, \mathbb{Z}_\pm)$$

мономорфны;

- 5) при каждом q оба гомоморфизма сдвига

$$T^*: F^{q-1}H^q(X; G, \mathbb{Z}_\pm) \rightarrow H^{q+1}(X; G, \mathbb{Z}_\mp)$$

мономорфны;

- 6) при каждом q выполняются равенства

$$\alpha(\text{Ker}[\beta: H^q(X; G, \mathbb{Z}_\pm) \rightarrow H^q(Z; G, \mathbb{Z}_\pm)]) = (1 + g^*)H^q(X, \mathbb{Z}_\pm);$$

- 7) при каждом q выполняются равенства

$$f^*H^q(Y, Z; f_*^G(\mathbb{Z}_\pm)) = (1 + g^*)H^q(X, \mathbb{Z}_\pm).$$

Мы не будем приводить подробное доказательство этой теоремы, так как она доказывается так же, как соответствующая теорема об GM-пространствах в [11]. Здесь мы сделаем только несколько замечаний.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Спектральная последовательность $\Pi_r^{p,q}(\mathbb{Z}_\pm)$, где знак фиксирован, вырождается при $r \geq 2$ тогда и только тогда, когда равны нулю дифференциалы $d_r^{0,q}(\mathbb{Z}_\pm)$, $d_r^{1,q}(\mathbb{Z}_\pm)$ при $r \geq 2$ и любом q . Эту спектральную последовательность можно “сжать” в две диагонали, как это делает И. О. Калинин в [1]. Заметим также, что $d_r^{1,q}(\mathbb{Z}_\pm) = 0$ тогда и только тогда, когда $d_r^{0,q}(\mathbb{Z}_\mp) = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. В условиях 3)–7) теоремы 1.1 число q произвольное, если же q – фиксированное число, то справедливы следующие утверждения.

1) Гомоморфизм

$$\alpha: H^q(X; G, \mathbb{Z}_\pm) \rightarrow H^q(X, \mathbb{Z}_\pm)^G$$

эпиморфен тогда и только тогда, когда равны нулю дифференциалы $d_r^{0,q}(Z_\pm)$ при $r \geq 2$, где знаки соответствуют друг другу.

2) Гомоморфизм

$$\beta: F^{q-1}H^q(X; G, \mathbb{Z}_\pm) \rightarrow H^q(Z; G, \mathbb{Z}_\pm)$$

мономорфен тогда и только тогда, когда равны нулю дифференциалы $d_r^{\bar{k}, q+k}(Z_\pm)$, где $k \geq 0$, $r \geq 2 + k$,

$$\bar{k} = \begin{cases} 0 & \text{при } k \text{ нечетном,} \\ 1 & \text{при } k \text{ четном,} \end{cases}$$

а знаки соответствуют друг другу.

3) Гомоморфизм

$$T^*: F^{q-1}H^q(X; G, \mathbb{Z}_\pm) \rightarrow H^{q+1}(X; G, \mathbb{Z}_\mp)$$

мономорфен тогда и только тогда, когда равны нулю дифференциалы $d_r^{1,q}(Z_\pm)$ при $r \geq 2$, а знаки соответствуют друг другу.

4) Равенство из условия 6) теоремы 1.1 выполняется тогда и только тогда, когда выполняется соответствующее равенство из условия 7). Равенство из условия 7) для пучка $\mathbb{Z}_+$ выполняется тогда и только тогда, когда равны нулю дифференциалы $d_r^{0, q+r-1}(Z_\pm)$, где $r \geq 2$ и при четном r берется знак “+”, а при нечетном r знак “−”. Чтобы выполнялось равенство из условия 7) для пучка $\mathbb{Z}_-$, нужно потребовать обращения в нуль таких же дифференциалов, но условие на знаки изменить на противоположное.

§ 2. GM- и GMZ-пространства

Если A – абелева группа, то через $A(2)$ будем обозначать 2-примарную подгруппу, а через ${}_2A$ – подгруппу, состоящую из элементов второго порядка. Из теоремы 1.1 следует, что для GMZ-пространства X имеет место точная последовательность

$$0 \rightarrow F^{q-1}H^q(X; G, \mathbb{Z}_\pm) \rightarrow H^q(X; G, \mathbb{Z}_\pm)(2) \xrightarrow{\alpha} H^q(X, \mathbb{Z}_\pm)^G(2) \rightarrow 0. \quad (2.1)$$

ЛЕММА 2.1. Если X – GMZ-пространство, то точная последовательность (2.1) расщепляется.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как группа $F^{q-1}H^q(X; G, \mathbb{Z}_\pm)$ 2-элементарная, т.е. равна $(\mathbb{Z}/2)^m$ (см. [8]), то достаточно проверить, что каждый ненулевой элемент $a \in F^{q-1}H^q(X; G, \mathbb{Z}_\pm)$ не делится на 2 в $H^q(X; G, \mathbb{Z}_\pm)$. Для этого рассмотрим гомоморфизм ограничения

$$\beta: F^{q-1}H^q(X; G, \mathbb{Z}_\pm) \rightarrow F^{q-1}H^q(Z; G, \mathbb{Z}_\pm). \quad (2.2)$$

Для эквивариантных когомологий пространства Z имеет место точная последовательность вида (2.1), которая расщепляется. Это вытекает из вычислений группы $H^q(Z; G, \mathbb{Z}_\pm)$ в [7]. Осталось заметить, что по теореме 1.1 гомоморфизм (2.2) мономорфен. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. *Если X – GMZ-пространство, то гомоморфизм*

$$\alpha: {}_2H^q(X; G, \mathbb{Z}_\pm) \rightarrow {}_2H^q(X, \mathbb{Z}_\pm)^G$$

эпиморфен.

ЛЕММА 2.3. *Если X является GMZ-пространством, то гомоморфизм Бокиштейна*

$$\delta: H^{q-1}(X, \mathbb{F}_2)^G \rightarrow {}_2H^q(X, \mathbb{Z}_\pm)^G$$

эпиморфен при каждом q .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H^{q-1}(X; G, \mathbb{F}_2) & \xrightarrow{\alpha} & H^{q-1}(X, \mathbb{F}_2)^G \longrightarrow 0 \\ \downarrow \delta & & \downarrow \delta \\ {}_2H^q(X; G, \mathbb{Z}_\pm) & \xrightarrow{\alpha} & {}_2H^q(X, \mathbb{Z}_\pm)^G \longrightarrow 0. \end{array} \quad (2.3)$$

В ней левый гомоморфизм δ эпиморфен, а также нижний гомоморфизм α эпиморфен, поэтому эпиморфен правый гомоморфизм δ . Лемма доказана.

ЛЕММА 2.4. *Пусть X является GM-пространством, гомоморфизм Бокиштейна*

$$\delta: H^{q-1}(X, \mathbb{F}_2)^G \rightarrow {}_2H^q(X, \mathbb{Z}_\pm)^G$$

эпиморфен; тогда каждый ненулевой элемент из $F^{q-1}H^q(X; G, \mathbb{Z}_\pm)$ не делится на 2 в $H^q(X; G, \mathbb{Z}_\pm)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как X – GM-пространство, то гомоморфизм

$$\alpha: H^{q-1}(X; G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^{q-1}(X, \mathbb{F}_2)^G$$

эпиморфен, поэтому в коммутативной диаграмме (2.3) нижний гомоморфизм α эпиморфен. Предположим теперь, что утверждение леммы не выполняется, т.е. существуют ненулевой элемент $a \in F^{q-1}(X; G, \mathbb{Z}_\pm)$ и элемент $b \in H^q(X; G, \mathbb{Z}_\pm)$ такие, что $a = 2b$. Тогда $\alpha(a) = 2\alpha(b) = 0$, поэтому $\alpha(b) \in {}_2H^q(X, \mathbb{Z}_\pm)^G$. Следовательно, существует элемент $b' \in {}_2H^q(X; G, \mathbb{Z}_\pm)$ такой, что $\alpha(b') = \alpha(b)$. Так как ядро гомоморфизма

$$\alpha: H^q(X; G, \mathbb{Z}_\pm) \rightarrow H^q(X, \mathbb{Z}_\pm)^G$$

равно 2-элементарной группе $F^{q-1}H^q(X; G, \mathbb{Z}_\pm)$, то разность $b - b'$ имеет второй порядок. Следовательно, $a = 2b = 0$. Противоречие. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2.5. *Если X является GM-пространством, то X будет GM $\mathbb{Z}$ -пространством тогда и только тогда, когда при каждом q гомоморфизм Бокштейна*

$$\delta: H^{q-1}(X, \mathbb{F}_2)^G \rightarrow {}_2H^q(X, \mathbb{Z})^G \quad (2.4)$$

эпиморфен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам нужно проверить только обратное утверждение, т.е. показать, что если X – GM-пространство и гомоморфизмы Бокштейна (2.4) эпиморфны при каждом q , то X является GM $\mathbb{Z}$ -пространством. Для этого рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} F^{q-1}H^q(X; G, \mathbb{Z}_\pm) & \xrightarrow{\beta} & F^{q-1}H^q(Z; G, \mathbb{Z}_\pm) \\ \downarrow R & & \downarrow R \\ F^{q-1}H^q(X; G, \mathbb{F}_2) & \xrightarrow{\beta} & F^{q-1}H^q(Z; G, \mathbb{F}_2) \end{array} \quad (2.5)$$

где R – гомоморфизм редукции по $\mod 2$. Нижний гомоморфизм в ней мономорфен, так как X – GM-пространство. Левый гомоморфизм редукции является мономорфизмом в силу леммы 2.4. Правый гомоморфизм редукции всегда является мономорфизмом (см. [7]). Таким образом, верхний гомоморфизм в диаграмме (2.5) мономорфен. Осталось применить теорему 1.1. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.6. *Если X является M-пространством, то X будет также GM $\mathbb{Z}$ -пространством.*

§ 3. Эquivariantные гомоморфизмы Бокштейна

Из точной последовательности G -пучков

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_{\pm} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}_{\pm} \rightarrow \mathbb{F}_2 \rightarrow 0$$

получается связывающий гомоморфизм

$$\delta: H^q(X; G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^{q+1}(X; G, \mathbb{Z}_{\pm}).$$

Композицию его с гомоморфизмом редукции

$$R: H^{q+1}(X; G, \mathbb{Z}_{\pm}) \rightarrow H^{q+1}(X; G, \mathbb{F}_2)$$

будем обозначать через

$$\delta_G^{\pm}: H^q(X; G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^{q+1}(X; G, \mathbb{F}_2)$$

и называть *equivariantным гомоморфизмом Бокштейна*.

Если инволюция g действует на X тривиально, то существует канонический изоморфизм

$$H^q(X; G, \mathbb{F}_2) = \bigoplus_{k=0}^q H^k(X, \mathbb{F}_2). \quad (3.1)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть инволюция g действует на X тривиально, $a \in H^q(X; G, \mathbb{F}_2)$ и $a = a^q + a^{q-1} + a^{q-2} + a^{q-3} + \dots$ – разложение в силу равенства (3.1), где $a^k \in H^k(X, \mathbb{F}_2)$, $k = 0, 1, 2, \dots, q$. Тогда

$$\delta_G^+(a) = (\delta a^q + \delta a^{q-1} + \delta a^{q-2} + \dots) + (a^{q-1} + a^{q-3} + a^{q-5} + \dots), \quad (3.2)$$

$$\delta_G^-(a) = (\delta a^q + \delta a^{q-1} + \delta a^{q-2} + \dots) + (a^q + a^{q-2} + a^{q-4} + \dots), \quad (3.3)$$

где δ – обычный гомоморфизм Бокштейна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы будем использовать конструктивное определение equivariantных коомологий из [14] для произвольного G -комплекса X . Пусть A – абелева группа, на которой действует инволюция g , $C^q = C^q(X, A)$ – группа цепей, на ней также действует инволюция g . Тогда рассмотрим бикомплекс

$$\begin{array}{ccccccc} & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & \uparrow_{1-g} & & \uparrow_{1-g} & & \uparrow_{1-g} \\ 0 & \longrightarrow & C^0 & \xrightarrow{\partial} & C^1 & \xrightarrow{\partial} & C^2 \xrightarrow{\partial} \dots \\ & & \uparrow_{1+g} & & \uparrow_{1+g} & & \uparrow_{1+g} \\ 0 & \longrightarrow & C^0 & \xrightarrow{\partial} & C^1 & \xrightarrow{\partial} & C^2 \xrightarrow{\partial} \dots \\ & & \uparrow_{1-g} & & \uparrow_{1-g} & & \uparrow_{1-g} \\ 0 & \longrightarrow & C^0 & \xrightarrow{\partial} & C^1 & \xrightarrow{\partial} & C^2 \xrightarrow{\partial} \dots \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

Эквивариантные когомологии $H^q(X; G, A)$ совпадают с полными когомологиями этого бикомплекса, т.е.

$$H^q(X; G, A) = \frac{\text{Ker}[d: C^q \oplus C^{q-1} \oplus \dots \oplus C^0 \rightarrow C^{q+1} \oplus C^q \oplus \dots \oplus C^0]}{\text{Im}[d: C^{q-1} \oplus C^{q-2} \oplus \dots \oplus C^0 \rightarrow C^q \oplus C^{q-1} \oplus \dots \oplus C^0]}.$$

Перейдем к доказательству равенств (3.2), (3.3). Они доказываются аналогично, поэтому приведем здесь доказательство только одного из них, а именно второго, так как только оно нам потребуется. Итак, пусть $\tilde{a}^q, \dots, \tilde{a}^0$ – коциклы, задающие классы когомологий $a^q, \dots, a^0$. Это коцепи с коэффициентами в $\mathbb{F}_2$; будем рассматривать их как коцепи с коэффициентами в $\mathbb{Z}_-$, принимающие значения 0 или 1. Тогда

$$\begin{aligned} d(\tilde{a}^q + \tilde{a}^{q-1} + \tilde{a}^{q-2} + \tilde{a}^{q-3} + \dots) \\ = \partial\tilde{a}^q \pm 2\tilde{a}^q + \partial\tilde{a}^{q-1} + \partial\tilde{a}^{q-2} \pm 2\tilde{a}^{q-2} + \partial\tilde{a}^{q-3}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Все слагаемые в этой сумме делятся на 2. После деления на 2 получаем сумму коцепей; рассмотрим их коэффициенты по mod 2. Тогда получим сумму коциклов с коэффициентами из $\mathbb{F}_2$, которая определяет класс $\delta_G^-(a)$. Из разложения (3.4) после этих операций получаем формулу (3.3). Предложение доказано.

§ 4. Вещественные алгебраические GMZ-поверхности

Далее X – неособая проективная вещественная алгебраическая поверхность. Предполагается, что $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$. Во введении было показано, как каждый ненулевой элемент $\theta \in H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)^G$ осуществляет разбиение $X(\mathbb{R})$ на части $X(\mathbb{R})_\theta^{(i)}$, $i = 1, 2$. В [11] было дано также алгебраическое описание частей $X(\mathbb{R})_\theta^{(i)}$. Это описание мы сейчас изложим.

Так как гомоморфизм $\alpha: H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)^G$ эпиморфен, то существует элемент $\theta \in H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$ такой, что $\alpha(\theta) = \theta$. Этот элемент определяет накрытие $\pi: W_\theta \rightarrow X(\mathbb{C})$ с фиксированной вещественной структурой $W_\theta \rightarrow W_\theta$, накрывающей вещественную структуру на $X(\mathbb{C})$. Таких элементов два, будем обозначать их через $\theta^{(i)}$, $i = 1, 2$, полагая, что $\theta^{(i)}$ соответствует вещественной структуре $g^{(i)}: W_\theta \rightarrow W_\theta$. Заметим теперь, что имеет место точная последовательность

$$0 \rightarrow H^1(Y, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{i^*} H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\beta_1} H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2),$$

где гомоморфизмы i^*, β_1 – это краевые гомоморфизмы первой спектральной последовательности

$$I_2^{p,q} = H^p(Y, \mathcal{H}^q(G, \mathbb{F}_2)) \Rightarrow H^{p+q}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2).$$

О них нужно сказать еще следующее. Композиция гомоморфизмов

$$H^1(Y, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{i^*} H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\alpha} H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$$

равна гомоморфизму

$$f^*: H^1(Y, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2).$$

Гомоморфизм β_1 равен композиции гомоморфизма ограничения

$$\beta: H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^1(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{F}_2) = H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \oplus H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$$

и проекции

$$H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \oplus H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \rightarrow H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2).$$

В [11] доказано

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Выполняются равенства*

$$\beta_1(\theta^{(1)}) = (X(\mathbb{R})_\theta^{(2)}), \quad \beta_1(\theta^{(2)}) = (X(\mathbb{R})_\theta^{(1)}),$$

где $(X(\mathbb{R})_\theta^{(i)}) \in H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$ – классы когомологий, соответствующие частям $X(\mathbb{R})_\theta^{(i)}$ множества $X(\mathbb{R})$.

Теперь мы докажем несколько лемм.

ЛЕММА 4.2. *Пусть X – GM-поверхность, ненулевой элемент $\theta \in H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)^G$ не разделяет $X(\mathbb{R})$ и $\theta^2|_{X(\mathbb{R})} = 0$. Тогда*

$$\theta^2 \in (1 + g^*)H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как θ не разделяет $X(\mathbb{R})$, то $\theta \in f^*H^1(Y, \mathbb{F}_2)$. Пусть $\theta = f^*(\omega)$; тогда $\theta^2 = f^*(\omega^2)$, $\theta^2|_{X(\mathbb{R})} = \omega^2|_{X(\mathbb{R})} = 0$, т.е. $\theta^2 \in f^*H^2(Y, X(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2)$. Так как X – GM-поверхность, то выполняется равенство (см. [11])

$$f^*H^2(Y, X(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2) = (1 + g^*)H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2).$$

Следовательно, $\theta^2 \in (1 + g^*)H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 4.3. *Пусть X – GM-поверхность, ненулевой элемент $\theta \in H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)^G$ разделяет $X(\mathbb{R})$ и $\theta|_{X(\mathbb{R})} = 0$. Тогда $\theta^2 \in (1 + g^*)H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\theta \in H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$ – такой элемент, что $\alpha(\theta) = \theta$. В силу предложения 3.1 имеем равенства

$$\beta(\delta_G^-(\theta)) = \delta_G^-(\beta(\theta)) = \theta|_{X(\mathbb{R})} + \delta(\theta)|_{X(\mathbb{R})} = 0.$$

Так как X – GM-поверхность, то из равенства $\beta(\delta_G^-(\theta)) = 0$ следует равенство (см. [11])

$$\alpha(\delta_G^-(\theta)) \in (1 + g^*)H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2).$$

Осталось заметить, что $\alpha(\delta_G^-(\theta)) = \delta(\theta) = \theta^2$. Лемма доказана.

ЛЕММА 4.4. Пусть X – GM-поверхность и существует ненулевой элемент $\theta \in H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)^G$ такой, что $\theta^2 \in (1 + g^*)H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$. Тогда или θ не разделяет $X(\mathbb{R})$, или существует ненулевой разделяющий $X(\mathbb{R})$ элемент $\tilde{\theta} \in H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)^G$ такой, что $\tilde{\theta}|_{X(\mathbb{R})} = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если θ не разделяет $X(\mathbb{R})$, то лемма доказана, поэтому можно считать, что θ разделяет $X(\mathbb{R})$. Пусть $\theta \in H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$ – такой элемент, что $\alpha(\theta) = \theta$. Так как

$$\alpha(\delta_G^-(\theta)) = \delta(\theta) = \theta^2 \in (1 + g^*)H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2),$$

а для GM-поверхности

$$(1 + g^*)H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) = \alpha(\text{Ker}[\beta: H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^2(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{F}_2)]),$$

то существует элемент $\omega \in \text{Ker} \beta$ такой, что $\alpha(\delta_G^-(\theta) + \omega) = 0$. Это равенство означает, что

$$\delta_G^-(\theta) + \omega \in F^1 H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2).$$

Поэтому

$$\beta(\delta_G^-(\theta)) = \beta(\delta_G^-(\theta) + \omega) \in \beta F^1 H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) = \beta H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2).$$

Пусть $\theta' \in H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$ – такой элемент, что $\beta(\delta_G^-(\theta)) = \beta(\theta')$; тогда элемент $\tilde{\theta} = \theta + \theta'$, где $\theta' = \alpha(\theta')$, – искомый элемент. Действительно,

$$\beta(\delta_G^-(\theta)) = \theta|_{X(\mathbb{R})} + \theta^2|_{X(\mathbb{R})}, \quad \beta(\theta') = \beta_1(\theta') + \theta'|_{X(\mathbb{R})}.$$

Следовательно, из равенства $\beta(\delta_G^-(\theta)) = \beta(\theta')$ получаем равенства

$$\beta_1(\theta') = 0, \quad \theta'|_{X(\mathbb{R})} = \theta|_{X(\mathbb{R})}.$$

Поэтому $\beta_1(\tilde{\theta}) = \beta_1(\theta)$ ($\tilde{\theta} = \theta + \theta'$), т.е. $\tilde{\theta}$ разделяет $X(\mathbb{R})$, а также $\tilde{\theta}|_{X(\mathbb{R})} = 0$. Лемма доказана.

ЛЕММА 4.5. Пусть GM $\mathbb{Z}$ -поверхность X такая, что группа $H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ 2-элементарная. Тогда X является GM-поверхностью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Гомоморфизм редукции $H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \rightarrow H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$ является изоморфизмом, поэтому индуцированный гомоморфизм $\Pi_2^{p,3}(\mathbb{Z}) \rightarrow \Pi_2^{p,3}(\mathbb{F}_2)$ – также изоморфизм. Так как дифференциал $d_r^{p,3}(\mathbb{Z})$ равен нулю, то дифференциал $d_r^{p,3}(\mathbb{F}_2)$ также равен нулю. Отсюда вытекает равенство

$$\Pi_\infty^{p,3}(\mathbb{F}_2) = \Pi_2^{p,3}(\mathbb{F}_2).$$

Используя двойственность Пуанкаре, получим равенство (см. [1])

$$\Pi_\infty^{p,1}(\mathbb{F}_2) = \Pi_2^{p,1}(\mathbb{F}_2).$$

Из этих двух равенств вытекает, что спектральная последовательность $\Pi_r^{p,q}(\mathbb{F}_2)$ вырождается при $r \geq 2$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 4.6. *Пусть поверхность X такая, что группа $H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ 2-элементарная и инволюция $g_*: H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ тривиальна. Тогда X является GMZ-поверхностью, если и только если неразделяющие элементы из $H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$ удовлетворяют условию $\theta^2|_{X(\mathbb{R})} \neq 0$, а разделяющие элементы удовлетворяют условию $\theta|_{X(\mathbb{R})} \neq 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При доказательстве необходимости условий теоремы мы можем считать, что X является GM-поверхностью. Это вытекает из леммы 2.5. При доказательстве достаточности условий мы также можем считать, что X – GM-поверхность, это вытекает из результата из [11]. Кроме этого, отметим, что в данном случае гомоморфизм Бокштейна

$$\delta: H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)^G \rightarrow {}_2H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})^G$$

эпиморфен, поэтому согласно теореме 2.5 нам нужно установить необходимые и достаточные условия на GM-поверхность, чтобы гомоморфизм Бокштейна

$$\delta: H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)^G \rightarrow {}_2H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})^G$$

был эпиморфизмом, если группа $H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ и инволюция на ней удовлетворяют условиям теоремы. По условию теоремы этот гомоморфизм совпадает с гомоморфизмом Бокштейна с коэффициентами в $\mathbb{F}_2$

$$\delta: H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)^G \rightarrow H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2). \quad (4.1)$$

Следовательно, нужно установить, когда гомоморфизм (4.1) будет эпиморфизмом. Рассмотрим сопряженный гомоморфизм

$$\delta^*: (H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2))^* \rightarrow (H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)^G)^*. \quad (4.2)$$

Нужно установить, когда он будет мономорфизмом. Если использовать $\smile$ -произведение, то гомоморфизм (4.2) можно отождествлять с гомоморфизмом

$$\delta: H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)/(1 + g^*)H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2).$$

Остается применить леммы 4.2, 4.3 и 4.4. Теорема доказана.

§ 5. Применение первой спектральной последовательности

В работе [9] получены длинные точные последовательности, помогающие вычислять эквивариантные когомологии вещественной алгебраической поверхности. Они получались с помощью первой спектральной последовательности эквивариантных когомологий

$$I_2^{p,q} = H^p(Y, \mathcal{H}^q(G, \mathbb{Z}_{\pm})) \Rightarrow H^{p+q}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_{\pm}).$$

Здесь нам потребуются только фрагменты этих точных последовательностей. Итак, имеют место точные последовательности

$$H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \xrightarrow{d_3^{0,2}} H^3(Y, \mathbb{Z}) \xrightarrow{i^*} H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\beta} H^3(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{Z}), \quad (5.1)$$

$$H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \xrightarrow{d_2^{1,1}} H^3(Y, \mathbb{Z}') \xrightarrow{i^*} H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \xrightarrow{\beta} H^3(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{Z}_-), \quad (5.2)$$

где $\mathbb{Z}' = f_*^G(\mathbb{Z}_-)$, $d_3^{0,2}$ – дифференциал спектральной последовательности $I(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z})$, он равен композиции гомоморфизма Гизина

$$j^*: H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \rightarrow H^2(Y, \mathbb{F}_2)$$

и гомоморфизма Бокштейна

$$\delta: H^2(Y, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^3(Y, \mathbb{Z}),$$

$d_2^{1,1}$ – дифференциал спектральной последовательности $I(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)$, он равен аналогу гомоморфизма Гизина

$$j': H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \rightarrow H^3(Y, \mathbb{Z}'),$$

который устроен следующим образом. Пусть $\Gamma \subset X(\mathbb{R})$ – кривая, определяющая класс когомологий $a \in H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$, т.е. $a = [\Gamma]^*$. Тогда возьмем эквивариантную трубчатую окрестность U кривой Γ в $X(\mathbb{C})$ и положим $V = U/G$. Оказывается, что группа когомологий $H^3(\bar{V}, \partial V; \mathbb{Z}')$ изоморфна $\mathbb{Z}/2$; образ образующей этой группы в $H^3(Y, \mathbb{Z}')$ обозначим через A . Тогда по определению $j'(a) = A$. Заметим еще, что гомоморфизмы i^* в последовательностях (5.1), (5.2) – это краевые гомоморфизмы первых спектральных последовательностей.

ЛЕММА 5.1. *Гомоморфизм ограничения*

$$\beta: F^2 H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}) \rightarrow H^3(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{Z})$$

будет мономорфизмом тогда и только тогда, когда точна следующая последовательность:

$$H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \xrightarrow{d_3^{0,2}} H^3(Y, \mathbb{Z}) \xrightarrow{f^*} H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}). \quad (5.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Группа $F^2 H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z})$ равна ядру гомоморфизма

$$\alpha: H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}) \rightarrow H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}).$$

С другой стороны, композиция гомоморфизмов

$$H^3(Y, \mathbb{Z}) \xrightarrow{i^*} H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\alpha} H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$$

совпадает с гомоморфизмом $f^*: H^3(Y, \mathbb{Z}) \rightarrow H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$. Осталось применить точную последовательность (5.1). Лемма доказана.

Аналогично доказывается следующая

ЛЕММА 5.2. *Гомоморфизм ограничения*

$$\beta: F^2 H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \rightarrow H^3(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{Z}_-)$$

будет мономорфизмом тогда и только тогда, когда точна следующая последовательность:

$$H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \xrightarrow{d_2^{1,1}} H^3(Y, \mathbb{Z}') \xrightarrow{f^*} H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}). \quad (5.4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.3. Точность последовательности (5.3) лучше описать в терминах гомологий. А именно, используя двойственность Пуанкаре и верхнее описание дифференциала $d_3^{0,2}$, мы получаем, что она будет точной тогда и только тогда, когда точна последовательность

$${}_2 H_1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(Y, \mathbb{Z}) \xrightarrow{f^!} H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}), \quad (5.3')$$

в которой первый гомоморфизм индуцирован вложением $X(\mathbb{R}) \subset Y$.

Чтобы описать более наглядно условие точности последовательности (5.4), нам потребуется вычислить группу $H^3(Y, \mathbb{Z}')$.

ЛЕММА 5.4. *Существует канонический изоморфизм*

$$H^3(Y, \mathbb{Z}') = H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) / (1 + g^*) H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}),$$

который отождествляет гомоморфизм

$$f^*: H^3(Y, \mathbb{Z}') \rightarrow H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$$

с гомоморфизмом

$$1 - g^*: H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) / (1 + g^*) H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \rightarrow H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала заметим, что отображение пучков

$$1 - g^*: f_*(\mathbb{Z}) \rightarrow f_*(\mathbb{Z})$$

индуцирует точную последовательность пучков на Y

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_Y \xrightarrow{i^*} f_*(\mathbb{Z}) \xrightarrow{1-g^*} \mathbb{Z}' \rightarrow 0,$$

из которой получаем изоморфизм

$$H^3(Y, \mathbb{Z}') = H^3(Y, f_*(\mathbb{Z})) / i^* H^3(Y, \mathbb{Z}) = H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) / f^* H^3(Y, \mathbb{Z}),$$

причем гомоморфизм

$$f^*: H^3(Y, \mathbb{Z}') \rightarrow H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$$

совпадает с гомоморфизмом

$$1 - g^*: H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) / f^* H^3(Y, \mathbb{Z}) \rightarrow H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}).$$

Осталось доказать равенство

$$f^* H^3(Y, \mathbb{Z}) = (1 + g^*) H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}).$$

Для этого сначала заметим, что

$$f^* H^3(Y, \mathbb{Z}) = f^* H^3(Y, X(\mathbb{R}); \mathbb{Z}),$$

поэтому достаточно проверить следующее равенство:

$$f^* H^3(Y, X(\mathbb{R}); \mathbb{Z}) = (1 + g^*) H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}).$$

Но это равенство следует из замечания 1.3, 4), так как дифференциал

$$d_2^{0,4}: H^0(G, H^4(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})) \rightarrow H^2(G, H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}))$$

равен нулю (см. [3]). Лемма доказана.

Согласно последней лемме дифференциал $d_2^{1,1}$ из последовательности (5.4) определяет гомоморфизм

$$d_2^{1,1}: H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \rightarrow H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) / (1 + g^*) H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}).$$

Если использовать двойственность Пуанкаре, то получаем гомоморфизм

$$d_2^{1,1}: H_1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \rightarrow H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) / (1 + g_*) H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}). \quad (5.5)$$

Так как

$$\begin{aligned} H_1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) &= H_1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}) / 2H_1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}) \\ &= H_1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}) / (1 + g_*) H_1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}), \end{aligned}$$

то определен гомоморфизм

$$H_1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \rightarrow H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) / (1 + g_*) H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}),$$

индуцированный вложением $X(\mathbb{R}) \subset X(\mathbb{C})$.

ЛЕММА 5.5. *Дифференциал (5.5) совпадает с гомоморфизмом, индуцированным вложением $X(\mathbb{R}) \subset X(\mathbb{C})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем класс когомологий $a \in H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$. Пусть он определяется замкнутой кривой $\Gamma \subset X(\mathbb{R})$, т.е. $a = [\Gamma]^*$. Пусть U – эквивариантная трубчатая окрестность Γ в $X(\mathbb{C})$, $V = U/G$. Рассуждая так же, как при доказательстве леммы 5.4, мы получаем равенства

$$H^3(\bar{V}, \partial V; \mathbb{Z}') = H^3(\bar{U}, \partial U; \mathbb{Z}) / (1 + g^*) H^3(\bar{U}, \partial U; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2.$$

Образ образующей этой группы в

$$H^3(Y, \mathbb{Z}') = H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) / (1 + g^*) H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$$

обозначим через A ; тогда выполняется равенство $d_2^{1,1}(a) = A$. Из этого описания дифференциала $d_2^{1,1}$ вытекает, что имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H_1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) & \xrightarrow{d_2^{1,1}} & H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) / (1 + g_*) H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}), \end{array}$$

где верхний гомоморфизм индуцирован вложением $X(\mathbb{R}) \subset X(\mathbb{C})$. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.6. Из лемм 5.4, 5.5 вытекает, что последовательность (5.4) точная тогда и только тогда, когда точна последовательность

$$H_1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \rightarrow H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) / (1 + g_*) H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \xrightarrow{1-g_*} H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}), \quad (5.4')$$

где первый гомоморфизм индуцирован вложением $X(\mathbb{R}) \subset X(\mathbb{C})$.

ТЕОРЕМА 5.7. *Пусть поверхность X такая, что $H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) = 0$; тогда X будет GMZ-поверхностью, если и только если последовательности (5.3'), (5.4') точные.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предыдущим утверждениям точность последовательностей (5.3'), (5.4') означает, что гомоморфизмы ограничения

$$\beta: F^2 H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_{\pm}) \rightarrow H^3(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{Z}_{\pm})$$

мономорфны. По теореме 1.1 это необходимое условие. С другой стороны, если эти гомоморфизмы мономорфны, то согласно замечанию 1.3, 2) равны нулю дифференциалы $d_r^{1,3}(\mathbb{Z}_{\pm})$ при $r \geq 2$ во вторых спектральных последовательностях $\Pi(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_{\pm})$. Равенство нулю других дифференциалов следует из условий на поверхность: $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$, $H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) = 0$ (см. [3]). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.8. Из теоремы 5.7 следует теорема 4.6. Приведем набросок доказательства этого утверждения. Так как $H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ – 2-элементарная группа, то $H_1(Y, \mathbb{Z})$ также 2-элементарная группа (гомоморфизм $f_*: H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(Y, \mathbb{Z})$ эпиморфен). Из того, что инволюция $g_*: H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ тривиальна, следует, что гомоморфизм $f^!: H_1(Y, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ равен нулю. Следовательно, точность последовательностей (5.3'), (5.4') в условиях теоремы 4.5 означает, что эпиморфны гомоморфизмы

$${}_2H_1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(Y, \mathbb{Z}), \quad H_1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \rightarrow H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2).$$

Эпиморфность первого из них равносильна эпиморфности композиции гомоморфизмов

$$H_2(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\delta} H_1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \rightarrow H_1(Y, \mathbb{Z}),$$

где δ – гомоморфизм Бокштейна. Если перейти к двойственным гомоморфизмам, то получим, что точность последовательностей (5.3'), (5.4') равносильна мономорфности композиции

$$H^1(Y, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \xrightarrow{(\)^2} H^2(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$$

и гомоморфизма ограничения

$$H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) \rightarrow H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2).$$

А эти требования равносильны тому, чтобы неразделяющие элементы из $H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$ удовлетворяли условию $\theta^2|_{X(\mathbb{R})} \neq 0$, а разделяющие – условию $\theta|_{X(\mathbb{R})} \neq 0$, что и требовалось показать.

§ 6. Группа Нерона–Севери вещественной алгебраической поверхности

Имеются три определения группы Нерона–Севери $\text{NS}(X)$. Согласно первому определению она равна группе классов алгебраической эквивалентности дивизоров на X , т.е.

$$\text{NS}(X) = \text{Div}(X) / \text{Div}_a(X),$$

где $\text{Div}_a(X)$ – подгруппа дивизоров, алгебраически эквивалентных нулю. Согласно второму определению группа $\text{NS}(X)$ равна образу отображения цикла

$$\text{cl}: \text{Div}(X) \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1]),$$

где $\mathbb{Z}[1] = 2\pi i\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$ и инволюция g действует на $\mathbb{Z}[1]$ с помощью комплексного сопряжения. Согласно третьему определению группа $\text{NS}(X)$ равна ядру отображения

$$H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1]) \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}); G, \theta),$$

индуцированного вложением $\mathbb{Z}[1] \subset \mathcal{O}$. Доказательство равносильности этих определений мы опускаем, так как оно аналогично доказательству соответствующего утверждения для комплексных алгебраических многообразий, впрочем, равносильность второго и третьего определений изложена в [5]. Здесь мы изучим гомоморфизм забывания вещественной структуры

$$\alpha: \mathrm{NS}(X) \rightarrow \mathrm{NS}(X_{\mathbb{C}})^G. \quad (6.1)$$

ЛЕММА 6.1. *Ядро гомоморфизма (6.1) равно группе $H^1(G, H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}[1]))$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{NS}(X) & \longrightarrow & H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1]) & \longrightarrow & H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{O}) \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{NS}(X_{\mathbb{C}}) & \longrightarrow & H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}[1]) & \longrightarrow & H^2(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}) \end{array} \quad (6.2)$$

в которой строки точны. Гомоморфизм

$$\alpha: H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{O}) \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}), \mathcal{O})$$

является вложением; это следует из рассмотрения второй спектральной последовательности. Тогда из данной коммутативной диаграммы получаем, что ядро левого гомоморфизма α равно ядру среднего, которое равно группе $H^1(G, H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}[1]))$, что вытекает из рассмотрения второй спектральной последовательности. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.2. Группа $H^1(G, H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}[1]))$ является 2-элементарной, число элементов в ней равно числу компонент связности множества вещественных точек многообразия Альбанезе поверхности X (см. [2], [4]). Отметим также, что выполняются равенства

$$\mathrm{NS}(X)(p) = H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1])(p) \stackrel{p \neq 2}{=} H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}[1])^G(p) = \mathrm{NS}(X_{\mathbb{C}})^G(p),$$

где среднее равенство выполняется при $p \neq 2$. Все это вытекает из диаграммы (6.2) и рассмотрения второй спектральной последовательности.

ЛЕММА 6.3. *Если дифференциал второй спектральной последовательности*

$$d_2^{0,2}: H^0(G, H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}[1])) \rightarrow H^2(G, H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}[1]))$$

равен нулю, то имеет место точная последовательность

$$0 \rightarrow (\mathbb{Z}/2)^d \rightarrow \mathrm{NS}(X) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{NS}(X_{\mathbb{C}})^G \rightarrow 0, \quad (6.3)$$

где $d = \dim H^1(G, H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}[1]))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Диаграмму (6.2) можно переделать в следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathrm{NS}(X) & \longrightarrow & H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1]) & \longrightarrow & H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{O}) \\
 & & \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha & & \cong \downarrow \alpha \\
 0 & \longrightarrow & \mathrm{NS}(X_{\mathbb{C}})^G & \longrightarrow & H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}[1])^G & \longrightarrow & H^2(X(\mathbb{C}), \mathcal{O})^G
 \end{array}$$

строки в которой точные, правый гомоморфизм α всегда является изоморфизмом, средний гомоморфизм α будет эпиморфизмом по условию леммы. Следовательно, левый гомоморфизм α также будет эпиморфизмом, поэтому имеет место точная последовательность (6.3). Лемма доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.4. *Если X является $\mathrm{GM}\mathbb{Z}$ -поверхностью, то точная последовательность (6.3) расщепляется.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что если $a \in (\mathbb{Z}/2)^d$ – ненулевой элемент, то он не делится на 2 в $\mathrm{NS}(X)$. Покажем, что a не делится на 2 даже в $H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1])$. Действительно, пучок $\mathbb{Z}[1]$ изоморфен пучку $\mathbb{Z}_-$, поэтому это утверждение следует из леммы 2.1. Предложение доказано.

ТЕОРЕМА 6.5. *Пусть $\mu: X \rightarrow A$ – отображение Альбанезе. Если множество $\mu(X(\mathbb{R}))$ порождает группу $A(\mathbb{R})$, то имеет место точная последовательность (6.3).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем алгебраическую кривую C на X такую, чтобы соответствующее отображение компонент связности $\pi_0(C(\mathbb{R})) \rightarrow \pi_0(X(\mathbb{R}))$ было сюръективно. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
 C & \longrightarrow & X \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 J & \longrightarrow & A
 \end{array}$$

где $\mu: C \rightarrow J$ – отображение Абеля–Якоби. Через $C(\mathbb{R})^{(k)}$, $X(\mathbb{R})^{(k)}$ обозначим k -кратные симметрические произведения. Так как множество $\mu(C(\mathbb{R}))$ всегда порождает группу $J(\mathbb{R})$ (см. [4]), а множество $\mu(X(\mathbb{R}))$ порождает группу $A(\mathbb{R})$ по условию теоремы, то при $k \gg 1$ отображения

$$\mu: C(\mathbb{R})^{(k)} \rightarrow J(\mathbb{R}), \quad \mu: X(\mathbb{R})^{(k)} \rightarrow A(\mathbb{R})$$

сюръективны. Тогда из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_0(C(\mathbb{R})^{(k)}) & \longrightarrow & \pi_0(X(\mathbb{R})^{(k)}) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \pi_0(J(\mathbb{R})) & \longrightarrow & \pi_0(A(\mathbb{R}))
 \end{array}$$

получаем, что отображение

$$\pi_0(J(\mathbb{R})) \rightarrow \pi_0(A(\mathbb{R})) \quad (6.4)$$

сюръективно. Обозначим через $J(\mathbb{R})_0$, $A(\mathbb{R})_0$ компоненты $J(\mathbb{R})$, $A(\mathbb{R})$, содержащие нуль; тогда факторгруппы $J(\mathbb{R})/J(\mathbb{R})_0$, $A(\mathbb{R})/A(\mathbb{R})_0$ являются 2-элементарными группами, которые равны соответственно группам (см. [2])

$$H^1(G, H_1(C(\mathbb{C}), \mathbb{Z})), \quad H^1(G, H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})/\text{Tors}).$$

Таким образом, из сюръективности отображения (6.4) следует эпиморфность гомоморфизма

$$H^1(G, H_1(C(\mathbb{C}), \mathbb{Z})) \rightarrow H^1(G, H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})/\text{Tors}),$$

индуцированного отображением $C(\mathbb{C}) \rightarrow X(\mathbb{C})$, или мономорфность двойственного гомоморфизма (см. [4])

$$H^1(G, H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})) \rightarrow H^1(G, H^1(C(\mathbb{C}), \mathbb{Z})).$$

Следовательно, мономорфны гомоморфизмы

$$H^p(G, H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})) \rightarrow H^p(G, H^1(C(\mathbb{C}), \mathbb{Z}))$$

при каждом нечетном p . Откуда получаем, что равен нулю дифференциал $d_2^{1,2}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z})$ из второй спектральной последовательности, так как для кривой C она вырождается (см. [3]). Поэтому равен нулю дифференциал

$$d_2^{0,2}: H^0(G, H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)) \rightarrow H^2(G, H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)).$$

Осталось применить лемму 6.3. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.6. Не известно, будет ли последовательность (6.3) расщепляться, если выполняется условие теоремы 6.5. Но если еще гомоморфизм Бокштейна

$$\delta: H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)^G \rightarrow {}_2H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_\pm)^G$$

эпиморфен, то последовательность (6.3) расщепляется. Действительно, так как всегда гомоморфизм

$$\alpha: H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)^G$$

эпиморфен, то рассуждения из доказательства леммы 2.4 показывают, что каждый ненулевой элемент из $F^1H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)$ не делится на 2 в $H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)$.

Факторгруппу $H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1])/\text{NS}(X)$ будем обозначать через

$$H_{\text{tr}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1])$$

и называть *трансцендентной группой когомологий*. Из точности последовательности

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{NS}(X) \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1]) \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{O}) \\ \parallel \\ H^2(X(\mathbb{C}), \mathcal{O})^G \end{aligned}$$

следует, что группа $H_{\text{tr}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1])$ свободная. Ее ранг обозначим через $\rho_0(X)$ и назовем *числом Лефшеца*; таким образом,

$$H_{\text{tr}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1]) = \mathbb{Z}^{\rho_0(X)}.$$

**§ 7. Алгебраическая группа когомологий
множества вещественных точек**

Образ отображения цикла $\text{cl}_{\mathbb{R}}: \text{Div}(X) \rightarrow H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$ будем обозначать через $H_a^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$ и называть *алгебраической группой когомологий*. Размерность ее обозначим через $h_a^1(X(\mathbb{R}))$; аналогично через $h^1(-)$ будем обозначать размерность пространства $H^1(-, \mathbb{F}_2)$.

ТЕОРЕМА 7.1. *Выполняется неравенство*

$$h_a^1(X(\mathbb{R})) \geq h^1(X(\mathbb{R})) - h^1(X(\mathbb{C})) + q(X) - \rho_0(X),$$

которое становится равенством для M -поверхности, где $q(X)$ – иррегулярность поверхности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $k_n(Y)$ размерность ядра гомоморфизма $H_n(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \rightarrow H_n(Y, \mathbb{F}_2)$, индуцированного вложением $X(\mathbb{R}) \subset Y$. Тогда выполняется неравенство (см. [8])

$$\dim_2 \text{Br}(X) \geq 2s - k_2(Y) + k_1(Y) - h_a^1(X(\mathbb{R})), \quad (7.1)$$

которое становится равенством для M -поверхности, где s – число компонент связности множества $X(\mathbb{R})$. С другой стороны, в [10] доказано равенство

$$\dim_2 \text{Br}(X) = \rho_0(X) - q(X) + k^1(Y) + 2s - 1, \quad (7.2)$$

где $k^1(Y)$ – размерность ядра гомоморфизма $H^1(Y, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$, индуцированного вложением $X(\mathbb{R}) \subset Y$. Из (7.1), (7.2) вытекает неравенство

$$h_a^1(X(\mathbb{R})) \geq (k_1(Y) - k^1(Y)) - k_2(Y) + q(X) - \rho_0(X) + 1,$$

которое становится равенством для M -поверхности. Заметим теперь, что

$$k_1(Y) - k^1(Y) = h^1(X(\mathbb{R})) - h^1(Y),$$

поэтому получаем неравенство

$$h_a^1(X(\mathbb{R})) \geq h^1(X(\mathbb{R})) - h^1(Y) - k_2(Y) + q(X) - \rho_0(X) + 1, \quad (7.3)$$

которое становится равенством для M -поверхности. С другой стороны, справедливо равенство (см. [8, замечание 3.9])

$$k_2(Y) = \dim H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)^G - h^1(Y) + 1,$$

из него вытекает неравенство

$$k_2(Y) \leq h^1(X(\mathbb{C})) - h^1(Y) + 1, \quad (7.4)$$

которое становится равенством для M -поверхности. Осталось заметить, что из неравенств (7.3), (7.4) следует требуемое неравенство, которое становится равенством для M -поверхности. Теорема доказана.

Рассмотрим гомоморфизм из § 5

$$H_1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \rightarrow H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) / (1 + g_*) H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}),$$

индуцированный вложением $X(\mathbb{R}) \subset X(\mathbb{C})$, размерность его ядра будем обозначать через $\varkappa_1(X)$. Тогда справедлива

ТЕОРЕМА 7.2. *Выполняются неравенства*

$$\kappa_1(X) - \rho_0(X) \leq h_a^1(X(\mathbb{R})) \leq \kappa_1(X),$$

причем для M -поверхности левое неравенство становится равенством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим гомоморфизм ограничения

$$\beta: H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \rightarrow H^2(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{Z}_-).$$

Так как группа $H^2(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{Z}_-)$ канонически изоморфна группе $H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$ (см. [7]), то получаем гомоморфизм

$$\beta: H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \rightarrow H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2). \quad (7.5)$$

Будем отождествлять пучок $\mathbb{Z}[1]$ с пучком $\mathbb{Z}_-$; тогда имеем отображение цикла

$$\text{cl}: \text{Div}(X) \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-),$$

композиция его с гомоморфизмом (7.5) совпадает с отображением цикла $\text{cl}_{\mathbb{R}}$ (см. [7]). Итак, если рассматривать группу Нерона–Севери $\text{NS}(X)$ вложенной в $H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)$, то группа $H_a^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$ равна $\beta(\text{NS}(X))$, где β – гомоморфизм (7.5). Рассмотрим теперь еще один фрагмент точной последовательности для пучка $\mathbb{Z}_-$ из [9]:

$$H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \xrightarrow{\beta} H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \xrightarrow{d_2^{1,1}} H^3(Y, \mathbb{Z}'). \quad (7.6)$$

Дифференциал $d_2^{1,1}$ был изучен в § 5. Если отождествить группу $H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$ с помощью изоморфизма Пуанкаре с группой $H_1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$, то согласно результатам из § 5 верхнюю точную последовательность можно записать следующим образом:

$$H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \xrightarrow{\beta} H_1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \rightarrow H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) / (1 + g_*) H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}). \quad (7.6')$$

Так как $H_a^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) = \beta(\text{NS}(X))$, то из точной последовательности (7.6) получаем вложение $H_a^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \subset \text{Ker } d_2^{1,1}$, поэтому $h_a^1(X(\mathbb{R})) \leq \kappa_1(X)$. Из точной последовательности

$$0 \rightarrow \text{NS}(X) \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \rightarrow H_{\text{tr}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \rightarrow 0$$

получаем точную последовательность

$$0 \rightarrow \text{NS}(X) \otimes \mathbb{F}_2 \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \otimes \mathbb{F}_2 \rightarrow H_{\text{tr}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \otimes \mathbb{F}_2 \rightarrow 0,$$

так как группа $H_{\text{tr}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)$ свободная. Следовательно, справедливы соотношения

$$\begin{aligned} h_a^1(X(\mathbb{R})) &= \dim \beta(\text{NS}(X) \otimes \mathbb{F}_2) \geq \dim \beta(H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \otimes \mathbb{F}_2) \\ &\quad - \dim H_{\text{tr}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \otimes \mathbb{F}_2 = \kappa_1(X) - \rho_0(X), \end{aligned}$$

причем неравенство становится равенством, если отображение

$$\beta: H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \otimes \mathbb{F}_2 \rightarrow H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$$

мономорфно, что выполняется для M -поверхности (см. [5]). Теорема доказана.

§ 8. Группа Брауэра вещественной алгебраической поверхности

В работах [8], [12] была вычислена группа Брауэра поверхности Энриквеса, в [10] этот результат обобщен на поверхности, у которых $H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2$. Здесь мы обобщаем и этот результат.

ТЕОРЕМА 8.1. *Если группа $H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ 2-элементарная, инволюция $g_*: H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ тривиальна, то*

$$\mathrm{Br}(X) = (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\rho_0(X)} \oplus (\mathbb{Z}/2)^a \oplus (\mathbb{Z}/4)^b,$$

где

$$\begin{aligned} a &= 2s + 2k^1(Y) - k^1(X(\mathbb{C})) - 1, \\ b &= k^1(X(\mathbb{C})) - k^1(Y), \\ k^1(-) &= \dim \mathrm{Ker}[H^1(-, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)]. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В работе [8] показано, что

$$\mathrm{Br}(X) = (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\rho_0(X)} \oplus H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)_\mathrm{tors}.$$

Таким образом, нужно показать, что

$$H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)_\mathrm{tors} = (\mathbb{Z}/2)^a \oplus (\mathbb{Z}/4)^b,$$

где числа a, b вычисляются по указанным выше формулам. Для этого рассмотрим следующий отрезок точной последовательности из [9]:

$$\begin{aligned} H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) &\xrightarrow{d_2^{1,1}} H^3(Y, \mathbb{Z}') \xrightarrow{i^*} H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \\ &\xrightarrow{\beta} H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \oplus H^2(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \rightarrow \mathbb{F}_2 \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (8.1)$$

Группу $H^3(Y, \mathbb{Z}')$ мы вычисляли в § 5. В силу леммы 5.4 сейчас она равна

$$H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) = H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2).$$

Из описания дифференциала $d_2^{1,1}$ в § 5 следует, что в данном случае он совпадает с гомоморфизмом Гизина

$$j^*: H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \rightarrow H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2),$$

поэтому точная последовательность (8.1) приобретает вид

$$\begin{aligned} H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) &\xrightarrow{j^*} H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) \xrightarrow{i^*} H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \\ &\xrightarrow{\beta} H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \oplus H^2(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \rightarrow \mathbb{F}_2 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Следовательно, группа $H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)$ включается в точную последовательность

$$0 \rightarrow (\mathbb{Z}/2)^{k^1(X(\mathbb{C}))} \rightarrow H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \rightarrow (\mathbb{Z}/2)^{2s-1} \rightarrow 0, \quad (8.2)$$

поэтому группа $H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)$ имеет вид

$$(\mathbb{Z}/2)^{\tilde{a}} \oplus (\mathbb{Z}/4)^{\tilde{b}}.$$

Нам осталось показать, что $\tilde{a} = a$, $\tilde{b} = b$.

Из точной последовательности (8.2) имеем равенство

$$\tilde{a} + 2\tilde{b} = k^1(X(\mathbb{C})) + 2s - 1. \quad (8.3)$$

С другой стороны, в силу (7.2)

$$\begin{aligned} \tilde{a} + \tilde{b} &= \dim_2 H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \\ &= \dim_2 \text{Br}(X) - \rho_0(X) = k^1(Y) + 2s - 1. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Из равенств (8.3), (8.4) получаем

$$\begin{aligned} \tilde{a} &= 2s + 2k^1(Y) - k^1(X(\mathbb{C})) - 1, \\ \tilde{b} &= k^1(X(\mathbb{C})) - k^1(Y). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 8.2. Число b равно максимальному числу линейно независимых элементов $\theta \in H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$ таких, что $\theta|_{X(\mathbb{R})} = 0$ и обе части $X(\mathbb{R})_\theta^{(i)}$ непустые. Для доказательства этого утверждения рассмотрим гомоморфизм редукции по $\text{mod } 2$ точной последовательности (8.1) в соответствующую точную последовательность для когомологий $H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$, которая имеет вид (см. [9])

$$\begin{aligned} H^0(X(\mathbb{R})) \oplus H^1(X(\mathbb{R})) &\xrightarrow{\delta_2} H^3(Y) \xrightarrow{i^*} H^2(X(\mathbb{C}); G) \\ &\xrightarrow{\beta} \bigoplus_{q=0}^2 H^q(X(\mathbb{R})) \rightarrow \mathbb{F}_2 \rightarrow 0, \end{aligned}$$

где все когомологии с коэффициентами в $\mathbb{F}_2$. Гомоморфизм δ_2 в этой последовательности устроен следующим образом: на слагаемом $H^1(X(\mathbb{R}))$ он равен гомоморфизму Гизина, а образующие (X_k) , $k = 1, \dots, s$, группы $H^0(X(\mathbb{R}))$, определенные компонентами X_k , он переводит в $j^*(w_1(X_k))$. Если использовать изоморфизм

$$H^3(Y, \mathbb{Z}') = H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2),$$

то гомоморфизм редукции индуцирует коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
 H^1(X(\mathbb{R})) & \xrightarrow{j^*} & H^3(X(\mathbb{C})) & \xrightarrow{i^*} & H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) & \longrightarrow & H^{\text{even}}(X(\mathbb{R})) \\
 \downarrow & & \downarrow f_! & & \downarrow R & & \downarrow \\
 H^{\leq 1}(X(\mathbb{R})) & \xrightarrow{\delta_2} & H^3(Y) & \xrightarrow{i^*} & H^3(X(\mathbb{C}); G) & \longrightarrow & H^*(X(\mathbb{R}))
 \end{array}$$

где пропущенные коэффициенты равны $\mathbb{F}_2$. Число b равно размерности ядра гомоморфизма редукции

$$R: H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \rightarrow H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2).$$

Поэтому из верхней диаграммы вытекает, что число b равно размерности ядра гомоморфизма

$$f_!: H^3(X(\mathbb{C}))/\text{Im } j^* \rightarrow H^3(Y)/\text{Im } j^*.$$

Если перейдем к сопряженному гомоморфизму, то получим, что число b равно размерности коядра гомоморфизма

$$f^*: H^1(Y)^0 \rightarrow H^1(X(\mathbb{C}))^0,$$

где $H^1(-)^0$ – ядро гомоморфизма ограничения $H^1(-) \rightarrow H^1(X(\mathbb{R}))$. Так как элементы из подгруппы $f^*H^1(Y) \subset H^1(X(\mathbb{C}))$ не разделяют $X(\mathbb{R})$, а элементы из дополнения $H^1(X(\mathbb{C})) \setminus f^*H^1(Y)$ разделяют $X(\mathbb{R})$, то получаем сформулированное вначале утверждение.

§ 9. Сравнение Никулина для общей ориентируемой M -поверхности

Далее полагаем, что

$$\begin{aligned}
 H^* &= H^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}), & T^* &= \text{Tors } H^*, & L^* &= H^*/T^*, \\
 \tilde{T}^* &= \bigoplus_{p \neq 2} H^*(p), & \tilde{L}^* &= H^*/\tilde{T}^*.
 \end{aligned}$$

ЛЕММА 9.1. Если X – M -поверхность, то гомоморфизм

$$H^q(G, H^*(2)) \rightarrow H^q(G, \tilde{L}^*), \quad (9.1)$$

индуцированный вложением $H^*(2) \subset \tilde{L}^*$, является мономорфизмом при $q = 1, 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим точную последовательность модулей

$$0 \rightarrow H^*(2) \rightarrow \tilde{L}^* \rightarrow L^* \rightarrow 0,$$

из нее получаем длинную точную последовательность когомологий

$$\dots \rightarrow H^q(G, H^*(2)) \rightarrow H^q(G, \tilde{L}^*) \rightarrow H^q(G, L^*) \rightarrow \dots$$

Поэтому выполняются неравенства

$$\dim H^q(G, \tilde{L}^*) \leq \dim H^q(G, H^*(2)) + \dim H^q(G, L^*) \quad (9.2)$$

при $q = 1, 2$, которые будут равномерными тогда и только тогда, когда гомоморфизмы (9.1) мономорфны при $q = 1, 2$. Будем доказывать, что для M -поверхности неравенства (9.2) превращаются в равенства. Так как M -поверхность является GMZ-поверхностью, то имеем равенство

$$\dim H^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) = \dim H^1(G, H^*) + \dim H^2(G, H^*). \quad (9.3)$$

Из точной последовательности

$$0 \rightarrow \tilde{T}^* \rightarrow H^* \rightarrow \tilde{L}^* \rightarrow 0$$

и равенства нулю когомологий $H^q(G, \tilde{T}^*)$ при $q = 1, 2$ получаем равенство

$$\dim H^1(G, H^*) + \dim H^2(G, H^*) = \dim H^1(G, \tilde{L}^*) + \dim H^2(G, \tilde{L}^*). \quad (9.4)$$

В силу неравенств (9.2) имеем следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \dim H^1(G, \tilde{L}^*) + \dim H^2(G, \tilde{L}^*) &\leq \dim H^1(G, H^*(2)) + \dim H^2(G, H^*(2)) \\ &+ \dim H^1(G, L^*) + \dim H^2(G, L^*) \leq 2h^*(2) + l^*, \end{aligned} \quad (9.5)$$

где $l^* = \text{rk } L^*$, $h^*(2) = \dim H^*(2) \otimes \mathbb{F}_2$.

Заметим теперь, что

$$2h^*(2) + l^* = \dim H^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2). \quad (9.6)$$

Из (9.3)–(9.6) следует, что неравенства в (9.5) на самом деле являются равенствами. Лемма доказана.

Далее будем предполагать, что каждая компонента $X_1, \dots, X_s$ множества $X(\mathbb{R})$ ориентируемая, и выберем на них ориентацию. Через $x_1, \dots, x_s \in L^2$ будем обозначать элементы, определенные этими ориентированными поверхностями. Пусть $L_Y^2 = H^2(Y, \mathbb{Z}) / \text{Tors}$; тогда справедлива

ЛЕММА 9.2. Если X – M -поверхность, то выполняется равенство

$$(L^2)^G = f^* L_Y^2 + \mathcal{L}(x_1, \dots, x_s),$$

где $\mathcal{L}(x_1, \dots, x_s)$ – линейная оболочка элементов $x_1, \dots, x_s$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В [9] показано, что для $GM\mathbb{Z}$ -поверхности X с ориентируемыми компонентами $X_1, \dots, X_s$ выполняется равенство

$$H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})^G = f^* H^2(Y, \mathbb{Z}) + \mathcal{L}([X_1]^*, \dots, [X_s]^*).$$

Поэтому достаточно проверить, что гомоморфизм $(H^2)^G \rightarrow (L^2)^G$ является эпиморфизмом. Из точной последовательности

$$0 \rightarrow \tilde{T}^2 \rightarrow H^2 \rightarrow \tilde{L}^2 \rightarrow 0$$

и равенства нулю группы $H^1(G, \tilde{T}^2)$ получаем эпиморфность гомоморфизма $(H^2)^G \rightarrow (\tilde{L}^2)^G$. Покажем теперь, что гомоморфизм $(\tilde{L}^2)^G \rightarrow (L^2)^G$ также эпиморфен. Из точной последовательности G -модулей

$$0 \rightarrow H^2(2) \rightarrow \tilde{L}^2 \rightarrow L^2 \rightarrow 0$$

получаем точную последовательность когомологий

$$0 \rightarrow (H^2(2))^G \rightarrow (\tilde{L}^2)^G \rightarrow (L^2)^G \rightarrow H^1(G, H^2(2)) \rightarrow H^1(G, \tilde{L}^2) \rightarrow \dots$$

Остается применить лемму 9.1. Лемма доказана.

Далее через χ_i обозначается эйлерова характеристика компоненты X_i , $i = 1, \dots, s$. Тогда $\chi = \chi_1 + \dots + \chi_s$ – эйлерова характеристика множества $X(\mathbb{R})$.

ТЕОРЕМА 9.3. Пусть X – ориентируемая M -поверхность, $\chi_i \equiv 0 \pmod{2^\mu}$ при каждом $i \in \overline{1, s}$, $\mu \geq 2$. Тогда $\chi \equiv 0 \pmod{2^{\mu+3}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что существуют нечетные числа $l_1, \dots, l_s$ такие, что

$$l_1 x_1 + \dots + l_s x_s \equiv 0 \pmod{2^\mu}. \quad (9.7)$$

Заметим сначала, что справедливо сравнение $x_1 + \dots + x_s \equiv 0 \pmod{2}$, так как X – M -поверхность (см. [5]). А затем будем доказывать существование чисел $l_1, \dots, l_s$ от противного. Тогда должно существовать число $\nu < \mu$ такое, что при некоторых нечетных числах $m_1, \dots, m_s$ выполняется сравнение

$$m_1 x_1 + \dots + m_s x_s \equiv 0 \pmod{2^\nu}$$

и при любых нечетных числах $n_1, \dots, n_s$ не выполняется сравнение

$$n_1 x_1 + \dots + n_s x_s \equiv 0 \pmod{2^{\nu+1}}.$$

В этом случае положим

$$d = \frac{m_1 x_1 + \dots + m_s x_s}{2^\nu}.$$

Далее будем обозначать через $L_\pm^2$ инвариантную и антиинвариантную относительно g^* подгруппы L^2 . Заметим, что $L_+^2 \oplus L_-^2 = L^2$, так как $X - M$ -поверхность (см. [15]), и квадратичные формы на $L_\pm^2$, заданные $\smile$ -произведением, унимодулярны. Согласно лемме 9.2 выполняется равенство

$$L_+^2 = f^* L_Y^2 + \mathcal{L}(x_1, \dots, x_s). \quad (9.8)$$

Элемент d принадлежит L_+^2 , но можно так изменить коэффициенты $m_1, \dots, m_s$, что d будет принадлежать $f^* L_Y^2$. Действительно, согласно равенству (9.8) существуют целые числа $k_1, \dots, k_s$ такие, что

$$\frac{m_1 x_1 + \dots + m_s x_s}{2^\nu} + k_1 x_1 + \dots + k_s x_s \in f^* L_Y^2,$$

остается заменить m_i , $i = 1, \dots, s$, на $m_i + k_i \cdot 2^\nu$. Итак, $d \in f^* L_Y^2$; рассмотрим линейную форму на L_+^2 , заданную равенством $l(x) = dx$, где $x \in L_+^2$. Из того что $d \in f^* L_Y^2$, следует четность этой линейной формы на $f^* L_Y^2$. С другой стороны, из равенства $x_i^2 = -\chi_i$ и сравнений $\chi_i \equiv 0 \pmod{2^\mu}$, $i \in \overline{1, s}$, следует, что форма $l(x) = dx$ принимает четные значения на $\mathcal{L}(x_1, \dots, x_s)$, так как $\nu < \mu$. Таким образом, линейная форма $l(x) = dx$ принимает только четные значения на L_+^2 . Из унимодулярности квадратичной формы на L_+^2 тогда следует, что d делится на 2 в L_+^2 , что противоречит выбору числа ν . Итак, выполняется соотношение (9.1).

Положим

$$h = \frac{l_1 x_1 + \dots + l_s x_s}{2^\mu}.$$

Этот элемент принадлежит L_+^2 , но можно изменить числа $l_1, \dots, l_s$ так, что он будет принадлежать $f^* L_Y^2$. Это делается так же, как для элемента d . Следовательно, $h^2 \equiv 0 \pmod{2}$, поэтому

$$l_1^2 x_1^2 + \dots + l_s^2 x_s^2 \equiv 0 \pmod{2^{2\mu+1}}.$$

Так как $x_i^2 = -\chi_i$, то получаем сравнение

$$l_1^2 \chi_1 + \dots + l_s^2 \chi_s \equiv 0 \pmod{2^{2\mu+1}}. \quad (9.9)$$

С другой стороны, $l_i^2 \equiv 1 \pmod{2^3}$, $\chi_i \equiv 0 \pmod{2^\mu}$, $i \in \overline{1, s}$, поэтому

$$l_1^2 \chi_1 + \dots + l_s^2 \chi_s \equiv \chi_1 + \dots + \chi_s \pmod{2^{\mu+3}}. \quad (9.10)$$

Из сравнений (9.9), (9.10) следует сравнение $\chi \equiv 0 \pmod{2^{\mu+3}}$. Теорема доказана.

Список литературы

1. *Калинин И. О.* Когомологические характеристики вещественных проективных гиперповерхностей // Алгебра и анализ. 1991. Т. 3. № 2. С. 91–110.
2. *Краснов В. А.* Отображение Альбанезе для вещественных алгебраических многообразий // Матем. заметки. 1982. Т. 32. № 3. С. 365–374.
3. *Краснов В. А.* Неравенства Гарнака–Тома для отображений вещественных алгебраических многообразий // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1983. Т. 46. № 2. С. 268–297.
4. *Краснов В. А.* Отображение Альбанезе для $GM\mathbb{Z}$ -многообразий // Матем. заметки. 1984. Т. 35. № 5. С. 739–747.
5. *Краснов В. А.* Характеристические классы векторных расслоений на вещественном алгебраическом многообразии // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1991. Т. 55. № 4. С. 716–746.
6. *Краснов В. А.* О классах когомологий, определенных вещественными точками вещественной алгебраической GM -поверхности // Изв. РАН. Сер. матем. 1993. Т. 57. № 5. С. 210–221.
7. *Краснов В. А.* Об эквивариантных когомологиях Гротендика вещественного алгебраического многообразия и их приложениях // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 3. С. 36–52.
8. *Краснов В. А.* Когомологическая группа Брауэра вещественного алгебраического многообразия // Изв. РАН. Сер. матем. 1996. Т. 60. № 5. С. 57–88.
9. *Краснов В. А.* Эквивариантные когомологии вещественной алгебраической поверхности и их приложения // Изв. РАН. Сер. матем. 1996. Т. 60. № 6. С. 101–126.
10. *Краснов В. А.* О группе Брауэра вещественной алгебраической поверхности // Матем. заметки. 1996. Т. 60. № 6. С. 935–938.
11. *Краснов В. А.* Вещественные алгебраические GM -многообразия // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62. № 3. С. 39–66.
12. *Mangolte P., van Hamel J.* Algebraic cycles and topology of real Enriques surfaces // Compositio Math. (to appear).
13. *Никulin В. В.* Инволюция целочисленных квадратичных форм и их приложения к вещественной алгебраической геометрии // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1983. Т. 47. № 1. С. 109–177.
14. *Nikulin V. V.* On the Brauer group of real algebraic surfaces // Algebraic Geometry and its Applications. Yaroslavl'. 1992. P. 113–136.
15. *Рохлин В. А.* Сравнения по модулю 16 в шестнадцатой проблеме Гильберта // Функцион. анализ и его прилож. 1972. Т. 6. № 4. С. 58–64; 1973. Т. 7. № 2. С. 91–92.

Поступило в редакцию
20.XI.1996