Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. А. Попов, Поведение асимптотики положительно-го спектра семейства периодических задач Штурма–Лиувилля при непрерывном переходе от дефинитной к индефинитной задаче, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2009, том 73, выпуск 3, 151–182

DOI: <https://doi.org/10.4213/im1969>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 14:17:07

УДК 517.927.25

Д. А. Попов

**Поведение асимптотики положительного спектра
семейства периодических задач Штурма–Лиувилля
при непрерывном переходе
от дефинитной к индефинитной задаче**

Рассматривается задача о спектре зависящего от параметра $a \in \mathbb{R}$ семейства периодических задач Штурма–Лиувилля для уравнения вида $u'' + \lambda^2(g(x) - a)u = 0$, где λ – спектральный параметр. Предполагается, что $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – достаточно гладкая периодическая функция, имеющая на периоде, равном 2π , один простой максимум $g(x_{\max}) = a_1 > 0$ и один простой минимум $g(x_{\min}) = a_2 > 0$. Кроме того, предполагается, что функции $g(x - x_{\min})$ и $g(x - x_{\max})$ являются четными. При этих предположениях на всем интервале $0 \leq a < a_1$, включая окрестности точек $a = a_1$ и $a = a_2$, явно вычислены первые два члена асимптотики положительных собственных значений. Показано, что при $\lambda \gg 1$ спектр состоит из двух ветвей $\lambda = \lambda_{\pm}(a, p)$, нумеруемых выбором знака $\pm$ и целым числом $p \in \mathbb{Z}^+$, $p \gg 1$. Получена единая интерполяционная формула, описывающая поведение асимптотики ветвей спектра при переходе от дефинитной (классической) при $a < a_2$ к индефинитной при $a > a_2$ задаче.

Библиография: 26 наименований.

Ключевые слова: дефинитная и индефинитная задачи Штурма–Лиувилля, асимптотика спектра, точки поворота.

§ 1. Введение

В настоящей работе рассматривается периодическая задача Штурма–Лиувилля

$$\frac{d^2 u}{dx^2}(x) + \lambda^2(g(x) - a)u(x) = 0, \quad u(-\pi) = u(\pi), \quad \frac{du}{dx}(-\pi) = \frac{du}{dx}(\pi). \quad (1.1)$$

Здесь $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – достаточно гладкая периодическая, с периодом 2π , функция, λ – спектральный параметр и $a \in \mathbb{R}$ – параметр. Функцию g можно рассматривать как функцию, заданную на окружности $\mathbb{S}^1$, причем предполагается, что на этой окружности она имеет один простой максимум $g(x_{\max}) = a_1$ и один простой минимум $g(x_{\min}) = a_2$. Точное описание класса $\mathcal{G}$ рассматриваемых функций g будет дано в § 2. Уравнение (1.1) не меняется при одновременной замене $a \mapsto a + C$, $g(x) \mapsto g(x) + C$, и поэтому мы будем считать, что $0 < a_2 \leq g(x) \leq a_1$. Поскольку при $a > a_1$ уравнение (1.1) не имеет периодических решений, ограничимся рассмотрением интервала $\mathfrak{A}$, в котором $0 \leq a < a_1$. В рассматриваемой задаче при $0 \leq a < a_2$ нет точек поворота – нулей функции $r(x) = g(x) - a$. При $a_2 < a < a_1$ таких точек две, и они сливаются при $a = a_i$, $i = 1, 2$. Таким образом, при $a = a_2$ происходит непрерывный переход от дефинитной (классической) к индефинитной при $a > a_2$ задаче Штурма–Лиувилля.

Напомним, что краевая задача для уравнения $-y'' + q(x)y = \mu r(x)y$, $a \leq x \leq b$, называется *дефинитной*, если $r(x) > 0$, $x \in [a, b]$, и *индефинитной*, если функция $r(x)$ меняет знак на интервале (a, b) .

Цель настоящей работы состоит в построении равномерной по параметру $a \in \mathfrak{A}$ на всем полуинтервале $\mathfrak{A}$ ($0 \leq a < a_1$) асимптотики положительных собственных значений $\lambda = \lambda(a)$ при $\lambda \rightarrow \infty$. Ниже такая асимптотика будет построена при предположении “четности” функции $g(x)$, в соответствии с которым функции $g(x - x_{\min})$ и $g(x - x_{\max})$ являются четными.

При $a < a_2$ функция $r(x) = g(x) - a$ больше нуля, и с помощью преобразования Лиувилля [1], [2]: $y(z) = (r(x))^{1/4}u(x)$, $z = B^{-1} \int_{-\pi}^x (r(t))^{1/2} dt$, $B = \int_{-\pi}^{\pi} (r(x))^{1/2} dx$, – задача (1.1) сводится к классической задаче Штурма–Лиувилля

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dz^2}(z) + (\tilde{\lambda} - q(z))y(z) &= 0, & 0 < z < 1, \\ y(0) &= y(1), & \frac{dy}{dz}(0) = \frac{dy}{dz}(1). \end{aligned} \quad (1.2)$$

При этом

$$q(z) = \frac{B^2}{4r^2} \left(\frac{d^2 r}{dx^2} - \frac{5}{4} \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} \right), \quad \tilde{\lambda} = B^2 \lambda^2. \quad (1.3)$$

Спектр задачи (1.2) хорошо известен [3]–[5]. Собственные значения $\tilde{\lambda}_k$ образуют бесконечную последовательность вида

$$-\infty < \tilde{\lambda}_0 < \tilde{\lambda}_1 \leq \tilde{\lambda}_2 < \dots < \tilde{\lambda}_{2n+3} \leq \tilde{\lambda}_{2n-2} < \tilde{\lambda}_{2n-1} \leq \tilde{\lambda}_{2n} < \tilde{\lambda}_{2n+1} \leq \dots \quad (1.4)$$

При этом собственные функции $y_{2n-1}(z)$, $y_{2n}(z)$, отвечающие соответственно собственным значениям $\tilde{\lambda}_{2n-1}$, $\tilde{\lambda}_{2n}$, имеют $2n$ нулей на полуинтервале $[0, 1)$ и $\tilde{\lambda}_{2n-1}$, $\tilde{\lambda}_{2n}$ имеют одинаковые асимптотические разложения вида

$$\sqrt{\tilde{\lambda}_{2n}} = 2\pi n + \frac{c_1}{n} + \frac{c_3}{n^3} + \dots, \quad (1.5)$$

если функция $q(z)$ гладкая. В рассматриваемом случае $q(z) \rightarrow \infty$ при $a \rightarrow a_2 - 0$ и разложение (1.5) не является равномерным при $a \rightarrow a_2$.

Рассмотрим область $a > a_2$. В этой области функция $r(x) = g(x) - a$ меняет знак и мы имеем дело с индефинитной задачей Штурма–Лиувилля. Эта задача для уравнения $y'' + (\mu r - q)y = 0$ на конечном интервале (d_1, d_2) при разделенных граничных условиях $y(d_i) \cos \alpha_i - y'(d_i) \sin \alpha_i = 0$, $i = 1, 2$, рассматривалась в работах [6]–[13]. С точки зрения спектральной теории индефинитная задача вписывается в рамки теории операторных пучков и теории пространств с индефинитной метрикой. В указанных работах, в частности, показано, что рассматриваемая задача может иметь конечное число невещественных собственных значений и существуют две бесконечные последовательности $\mu_n^\pm \rightarrow \pm\infty$, $n \rightarrow \infty$, вещественных собственных значений, для которых имеет место асимптотическая формула

$$\mu_n^\pm \sim \pm \pi^2 n^2 \left[\int_{d_1}^{d_2} (r_\pm(x))^{1/2} dx \right]^{-2}, \quad r_\pm(x) = \max\{\pm r(x), 0\}. \quad (1.6)$$

Полное асимптотическое разложение вещественных собственных значений для задачи с разделенными граничными условиями и N простыми точками

поворота получено в работе [14]. Периодическая задача при аналогичных предположениях рассматривалась в работе [15]. В методе склеивания асимптотических разложений, используемом в этих работах, предполагается, что расстояние между точками поворота ограничено снизу, и это не позволяет получить равномерные асимптотики, пригодные в окрестностях точек $a = a_i$, $i = 1, 2$.

Поскольку при выполнении условия четности периодическая задача сводится к двум задачам с разделенными граничными условиями, то в области $a_1 - c_1 \leq a \leq a_2 + c_2$, $c_i > 0$, для решения нашей задачи можно воспользоваться результатами, полученными в работе [14]. В настоящей работе метод склеивания не используется, а применяемый ниже метод модельных уравнений позволяет исследовать асимптотику спектра при всех $a \in \mathfrak{A}$.

Давно было ясно, что в случае слияния двух простых точек поворота в качестве модельного уравнения необходимо использовать уравнение Вебера (см. [1], [2], [16] и цитируемую в этих работах литературу). Исследованию спектра задачи (1.1) на основе этой идеи посвящена первая часть работы [16]. Результат работы [16], касающийся рассматриваемой задачи, можно сформулировать следующим образом. При $\lambda \gg 1$ имеются две ветви спектра $\lambda_{\pm}(a, p)$, где $p \in \mathbb{Z}^+$, $p \gg 1$, и они находятся из уравнений

$$\lambda F(a) = 2\pi p + G_{\pm}(\lambda, a); \quad (1.7)$$

здесь

$$F(a) = \int_{g(x) > a} \sqrt{g(x) - a} dx, \quad (1.8)$$

где интегрирование ведется по пересечению области $g(x) > a$ с интервалом $[-\pi, \pi]$, и

$$G_{\pm}(\lambda, a) = \begin{cases} \pm \frac{\pi}{2} + O(\lambda^{-2/3} \ln \lambda), & a_2 + C\lambda^{-2/3} \leq a < a_1, \\ O(\lambda^{-2/3} \ln \lambda), & 0 \leq a \leq a_2 - C\lambda^{-2/3}, \end{cases} \quad (1.9)$$

где $C > 0$ – некоторая константа. Используемый метод позволяет найти асимптотику функций $G_{\pm}(\lambda, a)$ и при $|a - a_2| \leq C\lambda^{-2/3}$. В работе [16] утверждается, что асимптотически весь положительный спектр исчерпывается двумя указанными ветвями $\lambda_{\pm}(a, p)$. Это находится в полном соответствии с результатами, полученными в работах [6]–[9], [14], где рассматривается задача с разделенными граничными условиями.

Заметим, что, хотя точки спектра $\lambda_{\pm}(a, p)$ нумеруются целыми числами p , остается задача о связи числа p с естественным номером n собственных значений $\lambda_{n,a}$, упорядоченных по величине:

$$\cdots \leq \lambda_{n-1,a} \leq \lambda_{n,a} \leq \lambda_{n+1,a} \leq \cdots$$

При решении этой задачи надо учитывать, что для индефинитной периодической задачи осцилляционная теорема, устанавливающая связь номера n с числом нулей соответствующей собственной функции, по-видимому, до сих пор не доказана.

Поскольку стандартному ВКБ-приближению отвечает $G_{\pm} = 0$ при $a < a_2$ и $G_{\pm} = \pm\pi/2$ при $a > a_2$, то вышеприведенный результат (1.7), (1.9) состоит

в указании границ применимости этого приближения. Неточности, допущенные в работе [16], приводят к тому, что эти границы указаны неверно и равенство (1.9) нарушается при $|a - a_2| < C\lambda^{-1/3}$. Заметим, что результат (1.9), полученный в [16], противоречит результатам, полученным в работах [14], [15], из которых так же, как и из общей структуры ВКБ-разложения, следует, что в выражении $G_{\pm}(\lambda, a)$ должен содержаться член вида $C(\lambda|a - a_2|)^{-1}$ (см. ниже (1.10)). Этот член при $|a - a_2| \leq \lambda^{-2/3}$ имеет порядок $\lambda^{-1/3}$, что противоречит каждому из равенств (1.9).

Для получения равномерных асимптотик спектра в настоящей работе используется тот же метод, что и в работе [16]. Этот метод состоит в использовании полученных Ф. Олвером в работе [17] равномерных по a асимптотик фундаментальной системы решений уравнения (1.1) с равномерными оценками остаточных членов в этих асимптотиках. Класс $\mathcal{G}$ рассматриваемых ниже функций по существу совпадает с классом функций, рассматриваемых Олвером. Отметим при этом, что в работе [17] условие “четности” предполагается выполненным только в области $a < a_2$. Таким образом, ниже приводятся аккуратные вычисления спектра в задаче (1.1) на основе результатов Олвера. В частности, будет показано, что в формуле (1.7) (см. далее (2.13), (2.16))

$$G_{\pm}(\lambda, a) = \begin{cases} \pm \frac{\pi}{2} - \frac{1}{12\lambda\alpha_2^2} + O(\lambda^{-2/3} \ln \lambda), & a - a_2 > C\lambda^{-7/9}(\ln \lambda)^{-1/3}, \\ \frac{1}{12\lambda\alpha_2^2} + O(\lambda^{-1/2}(\ln \lambda)^{-1/2}), & a_2 - a > C\lambda^{-2/3}(\ln \lambda)^{-1/3}. \end{cases} \quad (1.10)$$

Величина $\alpha_2 \equiv \alpha_2(a)$ будет определена ниже (см. (2.1)), и $\alpha_2^2 \asymp |a - a_2|$. Будет показано, что во всем интервале $\mathfrak{A}$, $0 \leq a < a_1$, имеет место единая интерполяционная формула

$$G_{\pm}(\lambda, a) = H_{\pm}(b_2) + O(p^{-1/2+\varepsilon}) \quad \forall \varepsilon > 0$$

с явным указанием вида функций $H_{\pm}(x)$ и в этой формуле $b_2 = \lambda\alpha_2^2/2$ при $a > a_2$ и $b_2 = -\lambda\alpha_2^2/2$ при $a < a_2$.

Заметим, что если g — гладкая функция, то в области $a_2 - a > C > 0$ выполняется соотношение $|\lambda_+(a, p) - \lambda_-(a, p)| = O(p^{-\infty})$, а если g — целая функция, то, как показано в работах [18], [19], в этой области при $p \rightarrow +\infty$ выполняется соотношение $|\lambda_+(a, p) - \lambda_-(a, p)| \sim e^{-\kappa p}$.

Результаты Олвера позволяют (при $g \in \mathcal{G}$) получить равномерную по параметру a асимптотику спектра и в задаче с разделенными граничными условиями. Краткие замечания по этому поводу сделаны в конце § 6. Мы рассматриваем периодическую задачу в связи с тем, что в работах [15], [16], [20], [21] указано применение результатов, полученных для этой задачи, к задаче о спектре оператора Лапласа–Бельтрами на двумерном торе с метрикой Лиувилля.

Далее везде через C обозначаются различные положительные константы, не зависящие от параметра a и, возможно, зависящие только от функции $g \in \mathcal{G}$. Все эти константы могут быть явно указаны.

Если утверждается, что для некоторой величины имеется оценка вида $O(f(\lambda, a))$ ($O(f(p, a))$), то это означает, что существуют зависящие только от функции $g \in \mathcal{G}$ величины Λ , P и A такие, что $\forall \lambda > \Lambda$ ($\forall p > P$) соответствующая величина по модулю меньше, чем $Af(\lambda, a)$ ($Af(p, a)$). Условия $\lambda \gg 1$ и $p \gg 1$ означают, что существуют величины Λ и P , зависящие

только от $g \in \mathcal{G}$ и такие, что соответствующие утверждения справедливы для любых $\lambda > \Lambda$ и $p > P$. В большинстве случаев, если не во всех, величины Λ , P и A могут быть явно указаны, но ниже этот вопрос не рассматривается.

Автор благодарен А. А. Шкаликову за стимулирующий интерес к этой работе.

§ 2. Формулировка результатов

Введем класс $\mathcal{G}$ рассматриваемых функций g . Будем говорить, что $g \in \mathcal{G}$, если выполняются следующие условия:

1) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – периодическая функция с периодом 2π , имеющая шесть ограниченных производных $g^{(n)}(x)$, $|g^{(n)}(x)| \leq C$, $n = 0, 1, \dots, 6$;

2) функция g имеет на полуинтервале $[-\pi, \pi)$ один простой минимум в точке $x_{\min}$ и один простой максимум в точке $x_{\max}$, при этом $|g^{(1)}(x)| \neq 0$ при $x \neq x_{\min}, x_{\max}$ и $g(x_{\max}) = a_1 > 0$, $g(x_{\min}) = a_2 > 0$, $|g^{(2)}(x_{\text{ex}})| \geq C > 0$, $x_{\text{ex}} = x_{\min}, x_{\max}$;

3) функции $g(x - x_{\min})$ и $g(x - x_{\max})$ четные;

4) если $x_{\min} = 0$, то при $|x| \leq \pi$ выполняется тождество $g(x) = g_1(x^2)$ и четная функция $h(x)$, определенная при $|x| \leq \pi$ равенством $h(x) = g_1(-x^2)$, имеет при $|x| \leq \pi$ по крайней мере шесть ограниченных производных $|h^{(n)}(x)| \leq C$, $n = 0, 1, \dots, 6$; имеется точка $x_0 \in [0, \pi - C]$, $C > 0$, такая, что $h(x_0) = 0$, функция $h(x)$ при $x \in [0, x_0]$ имеет один простой максимум в точке $x = 0$, и $h(0) = a_2$, при этом на отрезке $[0, x_0]$ функция $h(x)$ монотонно убывает и

$$0 \leq h(x) \leq a_2, \quad h^{(1)}(x) < 0, \quad 0 < |x| \leq x_0.$$

Условие 3) будем называть *условием четности*.

Заметим, что для аналитических функций g выполнено $h(x) = g(ix)$.

Приведем примеры функций из класса $\mathcal{G}$. К классу $\mathcal{G}$ при $x_{\min} = 0$ или $x_{\max} = 0$ принадлежат периодические продолжения функций вида $g(x) = f(x^2)$, $0 \leq x \leq \pi$, при соответствующих ограничениях, налагаемых на функцию f . Можно показать, что в случае $x_{\min} = 0$ функции вида

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(nx), \quad |c_n| \leq C e^{-\pi n(1+\delta)}, \quad \delta > 0,$$

при выполнении условий

$$c_n \leq 0, \quad n \geq 1, \quad |c_1| \leq \frac{\pi}{2} \sum_{n=2}^{\infty} n |c_n|, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < c_0 < \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \operatorname{ch}(\pi n)$$

также принадлежат классу $\mathcal{G}$.

Интересующий нас полуинтервал $0 \leq a < a_1$ параметра a обозначается через $\mathfrak{A}$. Будем различать три области $\mathfrak{A}_i \subset \mathfrak{A}$, $i = 1, 2, 3$, изменения параметра a такие, что $\mathfrak{A} = \bigcup_i \mathfrak{A}_i$. По определению $a \in \mathfrak{A}_1$, если $a_2 < a_0 \leq a < a_1$; $a \in \mathfrak{A}_2$, если $a_2 \leq a \leq a'_0$ и $a'_0 \geq a_0$; $a \in \mathfrak{A}_3$, если $0 \leq a \leq a_2$. При $a \in \mathfrak{A}_1$ начало координат выбирается в точке $x_{\max}$ ($x_{\max} = 0$), а при $a \in \mathfrak{A}_2 \cup \mathfrak{A}_3$ – в точке $x_{\min}$ ($x_{\min} = 0$). Таким образом, ниже через $g(x)$ в зависимости от a обозначаются различные функции, и если при $a \in \mathfrak{A}_1$ имеет место тождество $g(x) = \tilde{g}(x)$, то при $a \in \mathfrak{A}_2 \cup \mathfrak{A}_3$ – тождество $g(x) = \tilde{g}(x - \pi)$.

Если $a \in \mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2$, то через $x_1 = -x_2$, $x_2 > 0$ ($x_i \equiv x_i(a)$) обозначаются точки поворота – корни уравнения $g(x) = a$. При $a \in \mathfrak{A}_3$ через $x_1 = -x_2$, $x_2 > 0$ обозначаются корни уравнения $h(x) = a$. Предполагается, что величины a_0 и a'_0 фиксированы и выбраны таким образом, что $\pi - x_2(a) \geq C > 0$ при $a = a_0, a'_0$. Из условий 2), 3) следует, что $|x_{\min} - x_{\max}| = \pi$. Качественное поведение функций $g(x)$ и $h(x)$ приведено на рис. 1.

Рис. 1

В каждой из областей $\mathfrak{A}_i$, $i = 1, 2, 3$, введем величины $\alpha^2 \equiv \alpha^2(a)$, $\alpha_2^2 \equiv \alpha_2^2(a)$ согласно следующим определяющим их равенствам:

$$\alpha^2 = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{g(x) - a} dx, & x \in \mathfrak{A}_1, \\ \frac{2}{\pi} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{a - g(x)} dx, & x \in \mathfrak{A}_2, \\ \frac{2}{\pi} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{h(x) - a} dx, & x \in \mathfrak{A}_3, \end{cases} \quad \alpha_2^2 = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \int_{a > g(x)} \sqrt{a - g(x)} dx, & x \in \mathfrak{A}_1, \\ \alpha^2, & x \in \mathfrak{A}_2, \\ \alpha^2, & x \in \mathfrak{A}_3. \end{cases} \quad (2.1)$$

Заметим, что в области $\mathfrak{A}_1$ выполнено $\alpha^2 \rightarrow 0$ при $a \rightarrow a_1$, тогда как в области $\mathfrak{A}_2 \cup \mathfrak{A}_3$ выполнено $\alpha^2 \rightarrow 0$ при $a \rightarrow a_2$.

Везде ниже

$$b \equiv b(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{2}\lambda\alpha^2, & a \in \mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2, \\ -\frac{1}{2}\lambda\alpha^2, & a \in \mathfrak{A}_3, \end{cases} \quad b_2 \equiv b_2(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{2}\lambda\alpha_2^2, & a \in \mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2, \\ b, & a \in \mathfrak{A}_3. \end{cases} \quad (2.2)$$

Для фиксированного значения параметра a через $\lambda_{n,a}$ обозначим точки спектра задачи (1.1) при их естественном упорядочении:

$$\cdots \leq \lambda_{n-1,a} \leq \lambda_{n,a} \leq \lambda_{n+1,a} \leq \cdots, \quad n \in \mathbb{Z}^+. \quad (2.3)$$

ТЕОРЕМА. Пусть $g \in \mathcal{G}$ и рассматривается задача (1.1). Тогда справедливы следующие утверждения:

1) положительная часть спектра при $\lambda \gg 1$ для любого $a \in \mathfrak{A}$ состоит из двух ветвей $\lambda_{\pm}(a, p)$, нумеруемых выбором знака $\pm$ и целым числом $p \gg 1$, и имеют место равенства

$$\lambda_{\pm}(a, p) = \lambda_p^0 + (F(a))^{-1} H_{\pm}(b_2(\lambda_p^0)) + R_{\pm}(a, p), \quad (2.4)$$

где

$$\lambda_p^0 \equiv \lambda^0(a, p) = 2\pi p (F(a))^{-1}, \quad (2.5)$$

величина $F(a)$ определена в (1.8), имеют место оценки

$$R_{\pm}(a, p) = \begin{cases} (F(a))^{-1} O((\lambda_p^0)^{-2/3} \ln \lambda_p^0), & a_2 \leq a < a_1, \\ O((\lambda_p^0)^{-1/2} (\ln \lambda_p^0)^{1/2}), & 0 \leq a \leq a_2, \end{cases} \quad (2.6)$$

и функции $H_{\pm}$ определяются равенствами

$$H_{\pm}(x) = \pm \arctg e^{\pi x} - x + x \ln |x| - \arg \Gamma\left(\frac{1}{2} + ix\right), \quad (2.7)$$

в которых $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция и ветвь аргумента выбрана таким образом, что $\arg z = 0$, $z \in \mathbb{R}^+$, $|\arg z| \leq \pi$;

2) упорядоченные собственные значения $\lambda_{n,a}$, (2.3), при $n \gg 1$ и $a \leq a_2 - C\lambda^{-1}$ удовлетворяют соотношениям

$$\lambda_{n,a} = \begin{cases} \lambda_+\left(a, \frac{n}{2}\right) \text{ или } \lambda_-\left(a, \frac{n}{2}\right), & n - \text{четное число}, \\ \lambda_+\left(a, \frac{n+1}{2}\right) \text{ или } \lambda_-\left(a, \frac{n+1}{2}\right), & n - \text{нечетное число}, \end{cases}$$

и при $a \geq a_2 + C\lambda^{-1}$ – соотношениям

$$\lambda_{n,a} = \begin{cases} \lambda_+\left(a, \frac{n}{2}\right), & n - \text{четное число}, \\ \lambda_-\left(a, \frac{n+1}{2}\right), & n - \text{нечетное число}, \end{cases} \quad (2.8)$$

и собственные функции, принадлежащие собственным значениям $\lambda_{\pm}(a, p)$, имеют $2p$ нулей на полуинтервале $[-\pi, \pi)$.

Свойства функций $H_{\pm}(x)$ будут рассмотрены ниже. Обратим внимание на то, что эти функции непрерывны, но их производные имеют особенность вида $\ln|x|$ при $x \rightarrow 0$. Функции $H_{\pm}(x)$ немонотонны, и их качественное поведение ясно из рис. 2.

Основой для доказательства сформулированной теоремы является лемма о спектре, дающая, кроме того, несколько более точную информацию об асимптотике собственных значений. Для формулировки этой леммы, кроме введенных выше величин $F(a)$, $\alpha^2 \equiv \alpha^2(b)$, $b \equiv b(\lambda, a)$, понадобятся величина

$$k(b) = (1 + e^{2\pi b})^{1/2} - e^{\pi b}, \quad (2.9)$$

величины $\zeta_2 \equiv \zeta_2(a)$, определяемые равенствами

$$\begin{aligned} \int_{x_2}^{\pi} \sqrt{a - g(x)} dx &= \int_{\alpha}^{\zeta_2} \sqrt{\zeta^2 - \alpha^2} d\zeta \\ &= \frac{1}{2} \zeta_2 \sqrt{\zeta_2^2 - \alpha^2} - \frac{\alpha^2}{2} \ln \left(\frac{\zeta_2}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \sqrt{\zeta_2^2 - \alpha^2} \right), \quad a \in \mathfrak{A}_1, \\ \int_{x_2}^{\pi} \sqrt{g(x) - a} dx &= \int_{\alpha}^{\zeta_2} \sqrt{\zeta^2 - \alpha^2} d\zeta, \quad a \in \mathfrak{A}_2, \\ \int_0^{\pi} \sqrt{g(x) - a} dx &= \int_0^{\zeta_2} \sqrt{\zeta^2 + \alpha^2} d\zeta \\ &= \frac{1}{2} \zeta_2 \sqrt{\zeta_2^2 + \alpha^2} + \frac{\alpha^2}{2} \ln \left(\frac{\zeta_2}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \sqrt{\zeta_2^2 + \alpha^2} \right), \quad a \in \mathfrak{A}_3, \end{aligned} \quad (2.10)$$

и величина

$$\Psi(\lambda, a) = \lambda \zeta_2^2 - 2b \ln(\zeta_2 \sqrt{2\lambda}) + \arg \Gamma \left(\frac{1}{2} + ib \right). \quad (2.11)$$

Введем более детальное, чем $\mathfrak{A} = \bigcup_i \mathfrak{A}_i$, разбиение интервала $\mathfrak{A}$, а именно $\mathfrak{A} = \bigcup_{i=1}^5 \mathcal{A}_i$. По определению (см. рис. 1)

$$\begin{aligned} a \in \mathcal{A}_1 &= \mathfrak{A}_1, & a_0 &\leq a < a_1, \\ a \in \mathcal{A}_2 &\subset \mathfrak{A}_2, & a_2 + C\lambda^{-1+\varepsilon_1} &\leq a \leq a'_0, \quad 0 < \varepsilon_1 < 1, \quad C > 0, \\ a \in \mathcal{A}_3 &\subset \mathfrak{A}_2, & a_2 &\leq a \leq a_2 + C\lambda^{-1+\varepsilon_2}, \quad 0 < \varepsilon_2 < \frac{1}{2}, \quad C > 0, \\ a \in \mathcal{A}_4 &\subset \mathfrak{A}_3, & a_2 - C\lambda^{-1+\varepsilon'_2} &\leq a \leq a_2, \quad 0 < \varepsilon'_2 < \frac{1}{2}, \quad C > 0, \\ a \in \mathcal{A}_5 &\subset \mathfrak{A}_3, & 0 &\leq a \leq a_2 - C\lambda^{-1+\varepsilon'_1}, \quad 0 < \varepsilon'_1 < 1, \quad C > 0. \end{aligned}$$

ЛЕММА О СПЕКТРЕ. Пусть $g \in \mathcal{G}$, $a \in \mathfrak{A}$ и $\lambda \gg 1$ – любое положительное собственное значение для задачи (1.1). Тогда для любого такого λ существуют целое число $p \in \mathbb{Z}^+$ ($p \gg 1$) и выбор знака $\pm$ такие, что выполняются следующие утверждения:

1) если $a \in \mathcal{A}_1$, то имеет место равенство

$$\lambda F(a) = 2\pi p \pm \frac{\pi}{2} + O(\lambda^{-2/3} \ln \lambda); \quad (2.12)$$

2) если $a \in \mathcal{A}_2$, то для любого ε_1 такого, что $0 < \varepsilon_1 < 1$, имеет место равенство

$$\lambda F(a) = 2\pi p \pm \frac{\pi}{2} - \frac{1}{24b} + O(b^{-3} + \lambda^{-2/3} \ln \lambda); \quad (2.13)$$

3) если $a \in \mathcal{A}_3$, то для любого ε_2 такого, что $0 < \varepsilon_2 < 1/2$, имеет место равенство

$$\Psi(\lambda, a) = 2\pi p \pm \arccos \frac{2k(b)}{1 + k^2(b)} - \frac{b^2}{2\zeta_2^2 \lambda} + O\left(\frac{b^4}{\lambda^2} + \lambda^{-2/3} \ln \lambda\right); \quad (2.14)$$

4) если $a \in \mathcal{A}_4$, то для любого ε'_2 такого, что $0 < \varepsilon'_2 < 1/2$, имеет место равенство

$$\Psi(\lambda, a) = 2\pi p \pm \arccos \frac{2k(b)}{1 + k^2(b)} - \frac{b^2}{2\zeta_2^2 \lambda} + O\left(\frac{b^4}{\lambda^2} + \lambda^{-1} \ln \lambda\right); \quad (2.15)$$

5) если $a \in \mathcal{A}_5$, то для любого ε'_1 такого, что $0 < \varepsilon'_1 < 1$, имеет место равенство

$$\lambda F(a) = 2\pi p - \frac{1}{24b} + O(|b|^{-3/2} + \lambda^{-1/2}(\ln \lambda)^{1/2}). \quad (2.16)$$

Рассмотрим свойства функций $H_{\pm}(x)$.

В случае $|x| \gg 1$ воспользуемся формулой Стирлинга [22]

$$\ln \Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right) \ln z - z + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + \sum_{n=1}^m \frac{B_{2n}}{2n(2n-1)z^{2n-1}} + O(|z|^{-2m-1}),$$

$$B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad \dots, \quad |\arg z| < \pi.$$

Поскольку $\arg \Gamma(\frac{1}{2} + ix) = \operatorname{Im} \ln \Gamma(\frac{1}{2} + ix)$, то

$$\arg \Gamma\left(\frac{1}{2} + ix\right) = x \ln |x| - x + \frac{1}{24x} + \frac{7}{24 \cdot 120} \frac{1}{x^3} + O(|x|^{-5})$$

и, следовательно, при $|x| \gg 1$

$$H_{\pm}(x) = \begin{cases} \pm \frac{\pi}{2} - \frac{1}{24x} - \frac{7}{24 \cdot 120} \frac{1}{x^3} + O(|x|^{-5}), & x > 0, \\ \frac{1}{24x} - \frac{7}{24 \cdot 120} \frac{1}{x^3} + O(|x|^{-5}), & x < 0. \end{cases} \quad (2.17)$$

В случае $|x| \ll 1$ можно воспользоваться следующей формулой (см. [23]):

$$\arg \Gamma(x + iy) = y\psi\left(\frac{1}{2}\right) + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{y}{x+n} - \operatorname{arctg} \frac{x}{2n+1}\right),$$

где $\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$. Из этой формулы следует, что

$$\arg \Gamma\left(\frac{1}{2} + ix\right) = x\psi\left(\frac{1}{2}\right) + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2x}{2n+1} - \operatorname{arctg} \frac{2x}{2n+1}\right).$$

Разлагая функцию $\operatorname{arctg} \frac{2x}{2n+1}$ в ряд Тейлора, получим

$$\arg \Gamma\left(\frac{1}{2} + ix\right) = x\psi\left(\frac{1}{2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n+1} x^{2n+1},$$

$$A_{2n+1} = (-1)^{n+1} \frac{2^{2n+1}}{2n+1} \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1)^{-2n-1}, \quad \psi\left(\frac{1}{2}\right) = \gamma - 2 \ln 2 = -1.9635 \dots$$

Поскольку

$$\arctg e^{\pi x} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{1}{2}(\pi x)^3 + O(|x|^5),$$

то при $|x| \ll 1$

$$H_{\pm}(x) = \pm \frac{\pi}{4} + x \ln |x| + x \left(\pm \frac{\pi}{2} - 1 - \psi \left(\frac{1}{2} \right) \right) + x^3 \left(\mp \frac{\pi^3}{12} - A_3 \right) + O(|x|^5). \quad (2.18)$$

Из определений (2.7) функций $H_{\pm}(x)$ следует, что

$$H_+(x) = H_-(x) + 2 \arctg e^{\pi x}, \quad H_{\pm}(-x) = \pm \frac{\pi}{2} - H_{\pm}(x), \quad (2.19)$$

таким образом, достаточно провести анализ поведения функции $H_+(x)$ при $x \geq 0$. Из формул (2.17), (2.18) следует, что при $x \geq 0$ эта функция имеет минимум в точке $x_{\min}^+ \simeq 0.0293$ и $H_+(x_{\min}^+) \simeq \pi/4 - x_{\min}^+$. Функция $H_-(x)$ также имеет один минимум в точке $x_{\min}^- \simeq 1.683$, и $H_-(x_{\min}^-) \simeq \pi/2 - 0.0203$. Вид функций $H_{\pm}(x)$ представлен на рис. 2.

Рис. 2

С качественной точки зрения полученный результат означает, что в рассматриваемой задаче величины $s_{n,a} = F(a)\lambda_{n,a}$ при $n \gg 1$, $a \in \mathfrak{A}$ ведут себя так же, как величины $\sqrt{\tilde{\lambda}_n}$ в классической (дефинитной) задаче Штурма–Лиувилля, т. е. группируются в пары, и между этими парами имеются лакуны, ширина Δ которых в рассматриваемой задаче имеет асимптотику вида

$$\begin{aligned} F(a)\Delta &= 2\pi - 2 \arctg e^{\pi b_2(\lambda)} + O(\lambda^{-1/2}(\ln \lambda)^{1/2}) \\ &\geq \pi + H_-(x_{\min}^-) + O(\lambda^{-1/2}(\ln \lambda)^{1/2}). \end{aligned} \quad (2.20)$$

§ 3. Результаты Олвера

В этом параграфе будут кратко описаны результаты работы [17] в той их части, которая нам необходима. Попутно будут введены нужные определения, обозначения и будет доказано, что результаты работы [17] применимы при $g \in \mathcal{G}$.

Как уже отмечалось, класс $\mathcal{G}$ был определен таким образом, чтобы для него были верны результаты, полученные в работе [17].

Точки поворота $x_i \equiv x_i(a)$, $x_1 = -x_2$, $x_2 > 0$, были определены выше, и при $g \in \mathcal{G}$ функция $x_2(a)$ имеет обратную $a = a(x_2)$. Рассмотрим функцию

$$f(x, a) = a - g(x). \quad (3.1)$$

Для применимости результатов Олвера достаточно, чтобы имели место представления

$$f(x, a) = \begin{cases} (x^2 - x_2^2)\rho_1(x, x_2), & a \in \mathfrak{A}_1, \\ (x_2^2 - x^2)\rho_2(x, x_2), & a \in \mathfrak{A}_2, \\ -(x^2 + x_2^2)\rho_3(x, x_2), & a \in \mathfrak{A}_3, \end{cases}$$

в которых функции $\rho_i(x, x_2) \geq C > 0$ имеют по крайней мере четыре ограниченные производные по x . Кроме того, предполагается, что функция $f(x, a(x_2))$ не возрастает с ростом x_2 при $a \in \mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_3$ и не убывает при $a \in \mathfrak{A}_2$. Докажем, что эти условия выполняются при $g \in \mathcal{G}$ и $a \in \mathfrak{A}$. Пусть $a \in \mathfrak{A}_1$. Поскольку x_2 убывает с ростом a (см. рис. 1), то из определения (3.1) следует, что функция $f(x, a(x_2))$ убывает с ростом x_2 . Представление $f(x, a) = (x^2 - x_2^2)\rho_1(x, x_2)$ следует из формулы Тейлора:

$$f(x, a) = (x - x_2) \int_0^1 f^{(1)}(x_2 + s(x - x_2)) ds = (x - x_2)f_1(x, a).$$

Применяя эту формулу с заменой x_2 на $x_1 = -x_2$ к функции $f_1(x, a)$, получим, что при $a \in \mathfrak{A}_1$

$$\rho_1(x, x_2) = \int_0^1 \int_0^1 f^{(2)}(x_2 + s(-2x_2 + t(x + x_2))) ds dt.$$

Условие $\rho_1(x, x_2) \geq C > 0$ следует из простоты нулей x_i функции f и того, что $g^{(2)}(0) \leq -C$ (где $C > 0$). Таким образом, при $a \in \mathfrak{A}_1$ применимы результаты Олвера. При $a \in \mathfrak{A}_2$ доказательство аналогично, надо только заменить f на $-f$. При $a \in \mathfrak{A}_3$ эти же рассуждения надо применить к функции $\tilde{f}(x, a) = a - h(x)$. Таким образом, при $g \in \mathcal{G}$ и любом $a \in \mathfrak{A}$ можно применять результаты работы [17].

Метод Олвера построения асимптотик фундаментальной системы решений уравнения (1.1) основан на применении преобразования Лиувилля, более сложного, чем указанное в § 1. Это преобразование (см. [1], [2]) определяется соотношениями

$$u(x) = (\varphi'(\zeta))^{1/2} w(\zeta), \quad x = \varphi(\zeta), \quad (3.2)$$

где w – новая зависимая, а ζ – новая независимая переменные. В новых переменных уравнение (1.1) принимает вид

$$w''(\zeta) = \left(\lambda^2 (f(\varphi'))^2 - \frac{1}{2} \{\varphi, \zeta\} \right) w(\zeta), \quad (3.3)$$

где $\{\varphi, \zeta\}$ – производная Шварца ($\{\varphi, \zeta\} = \varphi'''(\varphi')^{-1} - \frac{3}{2}(\varphi'')^2(\varphi')^{-2}$). В этих формулах и везде ниже штрих обозначает производную по ζ .

Рассмотрим случай $a \in \mathfrak{A}_1$. Тогда функция φ определяется из условий

$$(\varphi')^2 f = \zeta^2 - \alpha^2, \quad \varphi(\alpha) = x_2, \quad \varphi(-\alpha) = x_1 = -x_2, \quad (3.4)$$

в которых величина $\alpha = \alpha(a)$ определена равенствами (2.1). Отсюда получаем, что переменные ζ и x при $a \in \mathfrak{A}_1$ связаны соотношениями

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^x \sqrt{-f} dt &= \int_{-\alpha}^{\zeta} \sqrt{\alpha^2 - t^2} dt, & x_1 < x < x_2, \\ \int_x^{x_1} \sqrt{f} dt &= \int_{\zeta}^{-\alpha} \sqrt{t^2 - \alpha^2} dt, & x < x_1, \\ \int_{x_2}^x \sqrt{f} dt &= \int_{\alpha}^{\zeta} \sqrt{t^2 - \alpha^2} dt, & x > x_2. \end{aligned} \quad (3.5)$$

В области $\mathfrak{A}_2$ функция $\varphi(\zeta)$ определяется из уравнения

$$(\varphi')^2 f = \alpha^2 - \zeta^2, \quad (3.6)$$

и надо только заменить в (3.5) функцию f на $-f$.

В области $\mathfrak{A}_3$ функция φ определяется из условий

$$(\varphi')^2 f = -\alpha^2 - \zeta^2, \quad \varphi(0) = 0, \quad (3.7)$$

и, следовательно,

$$\int_0^x \sqrt{-f} dt = \int_0^{\zeta} \sqrt{\alpha^2 + t^2} dt. \quad (3.8)$$

При всех $a \in \mathfrak{A}$ функция $x = \varphi(\zeta)$ имеет обратную функцию $\zeta = \zeta(x)$, которая монотонно возрастает на отрезке $|x| \leq \pi$, и имеют место соотношения

$$\zeta_2 = \zeta(\pi) = -\zeta_1 = \zeta(-\pi), \quad \zeta_2 > C > 0. \quad (3.9)$$

Из уравнения (3.3) без члена, содержащего $\{\varphi, \zeta\}$, получим в соответствии с равенствами (3.4), (3.6) и (3.7) следующие модельные уравнения:

$$v''(\zeta) = \begin{cases} \lambda^2(\zeta^2 - \alpha^2)v(\zeta), & a \in \mathfrak{A}_1, \\ \lambda^2(\alpha^2 - \zeta^2)v(\zeta), & a \in \mathfrak{A}_2, \\ -\lambda^2(\alpha^2 + \zeta^2)v(\zeta), & a \in \mathfrak{A}_3. \end{cases} \quad (3.10)$$

Линейной заменой координат эти уравнения приводятся к уравнениям Вебера

$$\frac{d^2 y}{dz^2}(z) = \left(\beta \pm \frac{z^2}{4} \right) y(z). \quad (3.11)$$

Различные частные решения этого уравнения называются *функциями Вебера* или *функциями параболического цилиндра*. Далее так же, как в работе [17], будут использоваться две конкретные системы линейно независимых решений уравнения (3.11): $U(\beta, z)$, $\bar{U}(\beta, z)$ и $W(\beta, \pm z)$. Все нужные нам результаты о свойствах этих решений содержатся в работах [17], [24], [25]. Функции $U(\beta, z)$,

$\bar{U}(\beta, z)$ и $W(\beta, \pm z)$ следующим образом связаны со стандартными функциями параболического цилиндра $D_\nu(z)$ и функциями Уиттекера $W_{\kappa, \nu}(z)$ [26]:

$$\begin{aligned} U(\beta, z) &= D_{-\beta-1/2}(z) = 2^{-\beta/2} z^{-1/2} W_{-\beta/2, -1/4}(z), \\ \bar{U}(\beta, z) &= \operatorname{tg}(\pi\beta) U(\beta, z) - \sec(\pi\beta) U(\beta, -z), \\ W(\beta, z) &= \sqrt{2k(\beta)} e^{i\pi\beta/4} \operatorname{Re}\{e^{i(\phi/2+1/8)} U(i\beta, e^{-i\pi/4}z)\}, \\ W(\beta, -z) &= \sqrt{\frac{2}{k(\beta)}} e^{i\pi\beta/4} \operatorname{Im}\{e^{i(\phi/2+1/8)} U(i\beta, e^{-i\pi/4}z)\}. \end{aligned}$$

В этих формулах $\phi = \arg \Gamma(\frac{1}{2} + i\beta)$ и величина $k(\beta)$ определена равенством (2.9). При $a \in \mathfrak{A}_1$ первое из уравнений (3.10) приводится к уравнению (3.11) со знаком $+$ в правой части и в качестве фундаментальной системы решений уравнения (3.10) для $v(\zeta)$ удобно выбрать

$$v_1(\zeta) = U(\beta, z), \quad v_2(\zeta) = \bar{U}(\beta, z), \quad \beta = -\frac{1}{2}\lambda\alpha^2, \quad z = \zeta\sqrt{2\lambda}.$$

В качестве фундаментальной системы решений можно выбрать и функции $U(\beta, -z)$, $\bar{U}(\beta, -z)$, между этими системами имеются уравнения связи

$$\begin{aligned} U(\beta, -z) &= \cos(\pi\beta)\bar{U}(\beta, z) - \sin(\pi\beta)U(\beta, z), \\ \bar{U}(\beta, -z) &= \sin(\pi\beta)\bar{U}(\beta, z) + \cos(\pi\beta)U(\beta, z). \end{aligned} \quad (3.12)$$

В случае $a \in \mathfrak{A}_2 \cup \mathfrak{A}_3$ соответствующее уравнение (3.10) приводится к уравнению (3.11) со знаком $-$ в правой части и в качестве фундаментальных систем решений уравнений (3.10) выбираются соответственно

$$v_i(\zeta) = \begin{cases} W\left(\frac{1}{2}\lambda\alpha^2, \pm\zeta\sqrt{2\lambda}\right), & a \in \mathfrak{A}_2, \\ W\left(-\frac{1}{2}\lambda\alpha^2, \pm\zeta\sqrt{2\lambda}\right), & a \in \mathfrak{A}_3, \end{cases}$$

при $i = 1, 2$.

Из результатов работы [17] вытекают следующие нужные нам утверждения.

Пусть $a \in \mathfrak{A}_1$. Тогда уравнение (3.3) при $g \in \mathcal{G}$ имеет два линейно независимых решения вида

$$\begin{aligned} w_1(\zeta) &= U\left(-\frac{1}{2}\lambda\alpha^2, \zeta\sqrt{2\lambda}\right) + R_1(\zeta), \\ w_2(\zeta) &= \bar{U}\left(-\frac{1}{2}\lambda\alpha^2, \zeta\sqrt{2\lambda}\right) + R_2(\zeta) \end{aligned} \quad (3.13)$$

и при $\zeta \in [0, \zeta_2]$ для функций $R_i(\zeta)$ и их производных $R'_i(\zeta)$ справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} R_1(\zeta) &= (E(\beta, z))^{-1} M(\beta, z) O(\lambda^{-2/3} \ln \lambda), \\ R_2(\zeta) &= E(\beta, z) M(\beta, z) O(\lambda^{-2/3} \ln \lambda), \\ R'_1(\zeta) &= (E(\beta, z))^{-1} N(\beta, z) O(\lambda^{-1/6} \ln \lambda), \\ R'_2(\zeta) &= E(\beta, z) N(\beta, z) O(\lambda^{-1/6} \ln \lambda). \end{aligned} \quad (3.14)$$

В этих равенствах $\beta = -\lambda\alpha^2/2$, $z = \zeta\sqrt{2\lambda}$. При $a \in \mathfrak{A}$ нам понадобятся только значения функций $E(\beta, z)$, $M(\beta, z)$ и $N(\beta, z)$ при $\beta < 0$ и $z > \rho(\beta)$, где $\rho(\beta)$ – максимальный действительный корень уравнения $U(\beta, z) = \bar{U}(\beta, z)$, и при $|\beta| \gg 1$, $\beta < 0$, выполняется соотношение

$$\rho(\beta) = 2\sqrt{-\beta} + C(-\beta)^{1/2} + O(|\beta|^{-5/6}), \quad C \simeq -0.366 \dots \quad (3.15)$$

Если $a \in \mathfrak{A}_1$, $\beta < 0$, $z > \rho(\beta)$, то в равенствах (3.14)

$$\begin{aligned} E(\beta, z) &= (\bar{U}(\beta, z))^{1/2} (U(\beta, z))^{-1/2}, \quad M(\beta, z) = [2U(\beta, z)\bar{U}(\beta, z)]^{1/2}, \\ N(\beta, z) &= \left[(U^{(1)}(\beta, z))^2 \frac{\bar{U}(\beta, z)}{U(\beta, z)} + (\bar{U}^{(1)}(\beta, z))^2 \frac{U(\beta, z)}{\bar{U}(\beta, z)} \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Здесь и ниже $U^{(1)}(\beta, z) = \frac{d}{dz}U(\beta, z)$, $\bar{U}^{(1)}(\beta, z) = \frac{d}{dz}\bar{U}(\beta, z)$. Для оценки остаточных членов при $\zeta < 0$, как показано в работе [17], существуют два линейно независимых решения $w_3(\zeta)$, $w_4(\zeta)$ уравнения (3.3) такие, что при $a \in \mathfrak{A}_1$ выполнено

$$\begin{aligned} w_3(\zeta) &= U\left(-\frac{1}{2}\lambda\alpha^2, -\zeta\sqrt{2\lambda}\right) + R_3(\zeta), \\ w_4(\zeta) &= \bar{U}\left(-\frac{1}{2}\lambda\alpha^2, -\zeta\sqrt{2\lambda}\right) + R_4(\zeta) \end{aligned} \quad (3.17)$$

и величины $R_3(\zeta)$, $R'_3(\zeta)$ при $\zeta \in [\zeta_1, 0]$ удовлетворяют тем же равенствам (3.14), что и $R_1(\zeta)$, $R'_1(\zeta)$, а $R_4(\zeta)$, $R'_4(\zeta)$ – тем же равенствам (3.14), что и $R_2(\zeta)$, $R'_2(\zeta)$, но в равенствах (3.14) теперь надо положить $z = -\zeta\sqrt{2\lambda}$.

При $a \in \mathfrak{A}_1$ в уравнениях связи

$$w_1(\zeta) = A_1 w_3(\zeta) + B_1 w_4(\zeta), \quad w_2(\zeta) = A_2 w_3(\zeta) + B_2 w_4(\zeta) \quad (3.18)$$

для коэффициентов A_1 , B_1 , A_2 , B_2 имеют место равенства

$$\begin{aligned} A_1 &= -\sin\left(\frac{\pi}{2}\lambda\alpha^2\right) + O(\lambda^{-2/3}\ln\lambda), & B_1 &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\lambda\alpha^2\right) + O(\lambda^{-2/3}\ln\lambda), \\ A_2 &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\lambda\alpha^2\right) + O(\lambda^{-2/3}\ln\lambda), & B_2 &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\lambda\alpha^2\right) + O(\lambda^{-2/3}\ln\lambda). \end{aligned} \quad (3.19)$$

В случае $a \in \mathfrak{A}_2$ нужная нам часть результатов Олвера формулируется следующим образом: при $g \in \mathcal{G}$, $a \in \mathfrak{A}_2$ имеются такие два линейно независимых решения w_1 , w_2 уравнения (3.3), что

$$\begin{aligned} w_1(\zeta) &= (k(b))^{-1/2} W(b, \zeta\sqrt{2\lambda}) + R_1(\zeta), \\ w_2(\zeta) &= (k(b))^{1/2} W(b, -\zeta\sqrt{2\lambda}) + R_2(\zeta), \quad b = \frac{1}{2}\lambda\alpha^2, \end{aligned} \quad (3.20)$$

и при этом для $\zeta \in [0, \zeta_2]$ снова выполняются равенства (3.14), в которых $\beta = b = \lambda\alpha^2/2$, $z = \zeta\sqrt{2\lambda}$, $E(\beta, z) = 1$. Нам будут нужны только выражения для $M(\beta, z)$, $N(\beta, z)$ при $z \geq \sigma(\beta)$, где $\sigma(\beta)$ – минимальный положительный корень уравнения $(k(b))^{-1/2} W(b, z) = (k(b))^{1/2} W(b, -z)$, и при $b \gg 1$

$$\sigma(b) = 2b^{1/2} - Cb^{-1/6} + O(b^{-5/6}), \quad C \simeq -0.366 \dots \quad (3.21)$$

Если $z \geq \sigma(b)$, $\beta = b \geq 0$ и $a \in \mathfrak{A}_2$, то в равенствах (3.14)

$$\begin{aligned} M(\beta, z) &= [(k(b))^{-1}W^2(b, z) + k(b)W^2(b, -z)]^{1/2}, \\ N(\beta, z) &= [(k(b))^{-1}(W^{(1)}(b, z))^2 + k(b)(W^{(1)}(b, -z))^2]^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Кроме того, при $a \in \mathfrak{A}_2$ имеются два линейно независимых решения w_3, w_4 уравнения (3.3):

$$\begin{aligned} w_3(\zeta) &= (k(b))^{-1/2}W(b, -\zeta\sqrt{2\lambda}) + R_3(\zeta), \\ w_4(\zeta) &= (k(b))^{1/2}W(b, \zeta\sqrt{2\lambda}) + R_4(\zeta), \end{aligned} \quad (3.23)$$

для которых при $\zeta \in [\zeta_1, 0]$ величины $R_{3,4}(\zeta)$, $R'_{3,4}(\zeta)$ оцениваются точно так же, как описано выше при $a \in \mathfrak{A}_1$. В уравнениях связи (3.18) при $a \in \mathfrak{A}_2$

$$\begin{aligned} A_1 &= O(\lambda^{-2/3} \ln \lambda), & B_1 &= (k(b))^{-1}(1 + O(\lambda^{-2/3} \ln \lambda)), \\ A_2 &= k(b)(1 + O(\lambda^{-2/3} \ln \lambda)), & B_2 &= O(\lambda^{-2/3} \ln \lambda). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Наконец, при $a \in \mathfrak{A}_3$ в работе [17] доказано, что на всем отрезке $[\zeta_1, \zeta_2]$ имеются два линейно независимых решения w_1, w_2 уравнения (3.3):

$$\begin{aligned} w_1(\zeta) &= W(b, \zeta\sqrt{2\lambda}) + R_1(\zeta), \\ w_2(\zeta) &= W(b, -\zeta\sqrt{2\lambda}) + R_2(\zeta), \quad b = -\frac{1}{2}\lambda\alpha^2, \end{aligned} \quad (3.25)$$

с оценками остаточных членов

$$R_{1,2}(\zeta) = M(b, z)O(\lambda^{-1} \ln \lambda), \quad R'_{1,2}(\zeta) = N(b, z)O(\lambda^{-1/2} \ln \lambda). \quad (3.26)$$

Величины $M(b, z)$ и $N(b, z)$ при этом определяются соотношениями (3.22), в которых $\beta = b = -\lambda\alpha^2/2$, $z = \zeta\sqrt{2\lambda}$.

§ 4. Уравнение для спектра

Уравнение для спектра получается из условия существования нетривиальных периодических решений уравнения (1.1), для которых должны выполняться условия

$$u(-\pi) = u(\pi), \quad \frac{du}{dx}(-\pi) = \frac{du}{dx}(\pi). \quad (4.1)$$

Переходя к переменным ζ, w (см. (3.2)) и учитывая определения (3.9) величин ζ_i , $i = 1, 2$, перепишем условия (4.1) в виде

$$w(\zeta_1)(\varphi'(\zeta_1))^{1/2} = w(\zeta_2)(\varphi'(\zeta_2))^{1/2}, \quad (4.2)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\varphi''(\zeta_1)}{(\varphi'(\zeta_1))^{3/2}} w(\zeta_1) + \frac{1}{(\varphi'(\zeta_1))^{1/2}} w'(\zeta_1) = \frac{1}{2} \frac{\varphi''(\zeta_2)}{(\varphi'(\zeta_2))^{3/2}} w(\zeta_2) + \frac{1}{(\varphi'(\zeta_2))^{1/2}} w'(\zeta_2). \quad (4.3)$$

Из периодичности функции f (см. (3.1)) и равенств (3.9) следует, что во всей области $\mathfrak{A}$ выполняется равенство $\varphi'(\zeta_1) = \varphi'(\zeta_2)$. Поскольку $\varphi'(\zeta) > C > 0$, уравнение (4.2) приводит к равенству $w(\zeta_1) = w(\zeta_2)$.

Пусть $a \in \mathfrak{A}_1$. Дифференцируя уравнение (3.4) и учитывая, что в силу четности функции $g \in \mathcal{G}$ выполняются равенства $\frac{df}{dx}(\pm\pi) = 0$, получим равенство $\varphi''(\zeta_2) = \zeta_2(f(\pi)\varphi'(\zeta_2))^{-1} = -\varphi''(\zeta_1)$. Поскольку $\zeta_1 = -\zeta_2$, в области $\mathfrak{A}_1$ условия (4.2), (4.3) принимают вид

$$w(-\zeta_2) = w(\zeta_2), \quad w'(-\zeta_2) = w'(\zeta_2) + \frac{\zeta_2}{\zeta_2^2 - \alpha^2} w(\zeta_2). \quad (4.4)$$

При выводе второго из условий (4.4) было использовано равенство

$$\varphi''(\zeta_2)(\varphi'(\zeta_2))^{-1} = \zeta_2(\varphi'(\zeta_2))^2(f(\pi))^{-1} = \zeta_2(\zeta_2^2 - \alpha^2)^{-1}.$$

Точно так же получим, что условия (4.4) имеют место и в области $\mathfrak{A}_2$, а в области $\mathfrak{A}_3$ необходимо в правой части второго из условий (4.4) заменить $\zeta_2^2 - \alpha^2$ на $\zeta_2^2 + \alpha^2$. Таким образом, граничные условия для уравнения (3.3) при всех $a \in \mathfrak{A}$ имеют вид

$$w(-\zeta_2) = w(\zeta_2), \quad w'(-\zeta_2) = w'(\zeta_2) + \gamma w(\zeta_2), \quad (4.5)$$

при этом

$$\gamma = \begin{cases} \zeta_2(\zeta_2^2 - \alpha^2)^{-1}, & a \in \mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2, \\ \zeta_2(\zeta_2^2 + \alpha^2)^{-1}, & a \in \mathfrak{A}_3. \end{cases} \quad (4.6)$$

Чтобы получить уравнение для спектра, запишем общее решение уравнения (3.3) в виде

$$w(\zeta) = Aw_1(\zeta) + Bw_2(\zeta), \quad (4.7)$$

где $w_i(\zeta)$, $i = 1, 2$, – решения, построенные в § 3. Подставляя (4.7) в граничные условия (4.5), получим систему двух однородных уравнений для коэффициентов A и B . Приравнявая определитель этой системы нулю, имеем уравнение для спектра

$$\begin{aligned} [w_1(\zeta_2) - w_1(-\zeta_2)][w_2'(\zeta_2) - w_2'(-\zeta_2) + \gamma w_2(\zeta_2)] \\ = [w_2(\zeta_2) - w_2(-\zeta_2)][w_1'(\zeta_2) - w_1'(-\zeta_2) + \gamma w_1(\zeta_2)]. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Заметим, что полученная задача для уравнения (3.3) уже не является периодической.

§ 5. Доказательство леммы о спектре

Лемма о спектре, сформулированная в § 2, содержит пять утверждений, которые последовательно доказываются в настоящем параграфе.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 1). Здесь предполагается, что $a \in \mathcal{A}_1$, т. е. $a_0 \leq a < a_1$. Введем обозначения

$$\begin{aligned} U &\equiv U\left(-\frac{1}{2}\lambda\alpha^2, \zeta_2\sqrt{2\lambda}\right), & U^{(1)} &\equiv U^{(1)}\left(-\frac{1}{2}\lambda\alpha^2, \zeta_2\sqrt{2\lambda}\right), \\ \bar{U} &\equiv \bar{U}\left(-\frac{1}{2}\lambda\alpha^2, \zeta_2\sqrt{2\lambda}\right), & \bar{U}^{(1)} &\equiv \bar{U}^{(1)}\left(-\frac{1}{2}\lambda\alpha^2, \zeta_2\sqrt{2\lambda}\right). \end{aligned}$$

Из соотношений (3.13) следует, что

$$\begin{aligned} w_1(\zeta_2) &= U + R_1(\zeta_2), & w_2(\zeta_2) &= \bar{U} + R_2(\zeta_2), \\ w'_1(\zeta_2) &= \sqrt{2\lambda}U^{(1)} + R'_1(\zeta_2), & w'_2(\zeta_2) &= \sqrt{2\lambda}\bar{U}^{(1)} + R'_2(\zeta_2). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Для вычисления величин $w_i(-\zeta_2)$, $w'_i(-\zeta_2)$, $i = 1, 2$, необходимо воспользоваться определением (3.17) и уравнениями связи (3.18). Тогда

$$\begin{aligned} w_1(-\zeta_2) &= A_1[U + R_3(-\zeta_2)] + B_1[\bar{U} + R_4(-\zeta_2)], \\ w_2(-\zeta_2) &= A_2[U + R_3(-\zeta_2)] + B_2[\bar{U} + R_4(-\zeta_2)], \\ w'_1(-\zeta_2) &= A_1[-\sqrt{2\lambda}U^{(1)} + R'_3(-\zeta_2)] + B_1[-\sqrt{2\lambda}\bar{U}^{(1)} + R'_4(-\zeta_2)], \\ w'_2(-\zeta_2) &= A_2[-\sqrt{2\lambda}U^{(1)} + R'_3(-\zeta_2)] + B_2[-\sqrt{2\lambda}\bar{U}^{(1)} + R'_4(-\zeta_2)], \end{aligned} \quad (5.2)$$

где коэффициенты A_i , B_i удовлетворяют равенствам (3.19). Учитывая определение величин $R_i(\zeta)$, $i = 3, 4$, данное в § 3, замечаем, что достаточно оценить величины $R_i(\zeta_2)$, $R'_i(\zeta_2)$, $i = 1, 2$, и полученные оценки будут справедливы для величин $R_i(-\zeta_2)$, $R'_i(-\zeta_2)$ соответственно при $i = 3, 4$. Общая для всех случаев $a \in \mathcal{A}_i$, $i = 1, \dots, 5$, схема доказательства соответствующих утверждений из леммы о спектре состоит в подстановке выражений типа (5.1) и (5.2) для $w_i(\pm\zeta_2)$, $w'_i(\pm\zeta_2)$ в уравнение (4.8) для спектра и использовании затем асимптотик функций Вебера. При этом оказывается, что все нужные асимптотики известны и содержатся в работах [24], [25].

При $a \in \mathcal{A}_1$ рассмотрим случай, когда $\lambda\alpha^2 > \lambda^\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, и введем величины

$$\mu^2 = \lambda\alpha^2, \quad t = \zeta_2\alpha^{-1}, \quad \mu t\sqrt{2} = \zeta_2\sqrt{2\lambda}. \quad (5.3)$$

Поскольку $\varphi(\zeta_2) = \pi$, $\varphi(x_2) = \alpha$ и $\pi - x_2 > C > 0$, то при $a \in \mathcal{A}_1$ выполняются неравенства $t - 1 > C > 0$. Тогда можно воспользоваться асимптотическим разложением из работы [24], справедливым при $t > 1$. Получаем разложение вида

$$U = l_1(\mu) \frac{e^{-\mu^2\xi(t)}}{(t^2 - 1)^{1/4}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{u_s(t)}{(t^2 - 1)^{3s/2}} \frac{1}{\mu^{2s}}. \quad (5.4)$$

Здесь $u_s(t)$ – полином степени $3s$ при нечетных s и степени $3s - 2$ при четных s . В частности,

$$u_0(t) = 1, \quad u_1(t) = \frac{1}{24}(t^3 - 6t), \quad u_2(t) = \frac{1}{1152}(9t^4 + 249t^2 + 145).$$

Функция $\xi(t)$ в (5.4) определяется равенством

$$\xi(t) = \int_1^t \sqrt{y^2 - 1} dy = \frac{t}{2} \sqrt{t^2 - 1} - \frac{1}{2} \ln(1 + \sqrt{t^2 - 1}). \quad (5.5)$$

Соответствующие разложения для производной $U^{(1)}$ имеют вид (см. [24])

$$\begin{aligned} U^{(1)} &= -\frac{\mu l_1(\mu)}{\sqrt{2}} (t^2 - 1)^{1/4} e^{-\mu^2\xi(t)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{v_s(t)}{(t^2 - 1)^{3s/2}} \frac{1}{\mu^{2s}}, \\ v_0(t) &= 1, \quad v_1(t) = \frac{1}{24}(t^3 + 6t), \quad v_2(t) = \frac{1}{1152}(15t^4 - 327t^2 - 143), \end{aligned} \quad (5.6)$$

и степени полиномов $v_s(t)$ такие же, как полиномов $u_s(t)$. Аналогичные разложения имеют место и для величин $\bar{U}$, $\bar{U}^{(1)}$:

$$\begin{aligned}\bar{U} &= 2l_1(\mu) \frac{e^{\mu^2 \xi(t)}}{(t^2 - 1)^{1/4}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s u_s(t)}{(t^2 - 1)^{3s/2}} \frac{1}{\mu^{2s}}, \\ \bar{U}^{(1)} &= \sqrt{2} l_1(\mu) (t^2 - 1)^{1/4} e^{\mu^2 \xi(t)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s v_s(t)}{(t^2 - 1)^{3s/2}} \frac{1}{\mu^{2s}}.\end{aligned}\quad (5.7)$$

Явный вид константы $l_1(\mu)$ нам не важен, так как $l_1(\mu) > C > 0$ при $\mu^2 \gg 1$ (см. [24]). Как уже указывалось в §2, величина a_0 , входящая в определение области $\mathcal{A}_1$, выбрана таким образом, что $\pi - x_2 > C$. Используя это и полагая $\zeta = \zeta_2$ в (3.5), получим, что при $a \in \mathcal{A}_1$ выполняется $t^2 - 1 \geq Ct^2$ и, следовательно, $|u_s(t)(t^2 - 1)^{-3s/2}| \leq C_s$, $|v_s(t)(t^2 - 1)^{-3s/2}| \leq C_s$. Необходимые нам асимптотики при $\mu^2 > \lambda^\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, теперь прямо следуют из разложений (5.4), (5.6), (5.7) и имеют вид

$$\begin{aligned}U &= l_1(\mu) (t^2 - 1)^{-1/4} e^{-\mu^2 \xi(t)} (1 + O(\mu^{-2})), \\ U^{(1)} &= -\mu l_1(\mu) (t^2 - 1)^{1/4} e^{-\mu^2 \xi(t)} (1 + O(\mu^{-2})), \\ \bar{U} &= 2l_1(\mu) (t^2 - 1)^{-1/4} e^{\mu^2 \xi(t)} (1 + O(\mu^{-2})), \\ U^{(1)} &= \sqrt{2} \mu l_1(\mu) (t^2 - 1)^{1/4} e^{\mu^2 \xi(t)} (1 + O(\mu^{-2})).\end{aligned}\quad (5.8)$$

Поскольку в соответствии с определениями (5.3), (5.5) и (2.2) выполняется $\int_{x_2}^{\pi} \sqrt{f} dx = \alpha^2 \xi(t)$, то в области $\mathcal{A}_1$ при $\mu^2 > \lambda^\varepsilon$ выполняются неравенства $\xi(t) > C\alpha^{-2}$, $\mu^2 \xi(t) > C\lambda$, $t^2 - 1 > C$, и тогда из (5.8) следует, что

$$U = l_1(\mu) O(e^{-C\lambda}), \quad U^{(1)} = l_1(\mu) O(e^{-C\lambda}). \quad (5.9)$$

Оценим величины $R_i(\zeta_2)$, $R'_i(\zeta_2)$, $i = 1, 2$. В интересующем нас случае в равенствах (3.14) будет $\beta = -\mu^2/2$, $z = \alpha t \sqrt{2\lambda}$, и из (3.15) следует, что $\rho(\beta) \simeq \alpha \sqrt{2\lambda}$. Таким образом, $z > \rho(\beta)$, и можно воспользоваться равенствами (3.16), из которых с учетом оценок (5.9) получим

$$\begin{aligned}R_1(\zeta_2) &= l_1(\mu) O(e^{-C\lambda}), & R'_1(\zeta_2) &= l_1(\mu) O(e^{-C\lambda}), \\ R_2(\zeta_2) &= \bar{U} O(\lambda^{-2/3} \ln \lambda), & R'_2(\zeta_2) &= \bar{U}^{(1)} O(\lambda^{-1/6} \ln \lambda).\end{aligned}\quad (5.10)$$

Как уже указывалось, величины $R_3(-\zeta_2)$, $R'_3(-\zeta_2)$ оцениваются так же, как $R_1(\zeta_2)$, $R'_1(\zeta_2)$, а величины $R_4(-\zeta_2)$, $R'_4(-\zeta_2)$ – как $R_2(\zeta_2)$, $R'_2(\zeta_2)$. Используя эти оценки в равенствах (5.1), получим

$$\begin{aligned}w_1(\zeta_2) &= l_1(\mu) O(e^{-C\lambda}), & w'_1(\zeta_2) &= l_1(\mu) O(e^{-C\lambda}), \\ w_2(\zeta_2) &= \bar{U} (1 + O(\lambda^{-2/3} \ln \lambda)), & w'_2(\zeta_2) &= \bar{U}^{(1)} (\sqrt{2\lambda} + O(\lambda^{-1/6} \ln \lambda)).\end{aligned}\quad (5.11)$$

Соответственно, из (5.2) получаем, что

$$\begin{aligned}w_1(-\zeta_2) &= B_1 \bar{U} (1 + O(\lambda^{-2/3} \ln \lambda)) + l_1(\mu) O(e^{-C\lambda}), \\ w_2(-\zeta_2) &= B_2 \bar{U} (1 + O(\lambda^{-2/3} \ln \lambda)) + l_1(\mu) O(e^{-C\lambda}), \\ w'_1(-\zeta_2) &= B_1 \bar{U}^{(1)} (-\sqrt{2\lambda} + O(\lambda^{-1/6} \ln \lambda)) + l_1(\mu) O(e^{-C\lambda}), \\ w'_2(-\zeta_2) &= B_2 \bar{U}^{(1)} (-\sqrt{2\lambda} + O(\lambda^{-1/6} \ln \lambda)) + l_1(\mu) O(e^{-C\lambda}).\end{aligned}\quad (5.12)$$

Подставляя выражения (5.11), (5.12) в уравнение для спектра (4.8) и используя асимптотики (5.8), после простых преобразований приводим уравнение для спектра при $a \in \mathcal{A}_1$ и $\mu^2 > \lambda^\varepsilon$ к виду

$$B_1 \left[2 + \frac{\gamma}{(t^2 - 1)^{1/4} \mu \sqrt{\lambda}} + \left(1 + \frac{\gamma}{(t^2 - 1)^{1/4} \mu \sqrt{\lambda}} \right) O(\lambda^{-2/3} \ln \lambda + \mu^{-2}) \right] = O(e^{-C\lambda}). \quad (5.13)$$

С учетом выражений (3.19) для B_1 и (4.6) для γ отсюда следует, что

$$\frac{\pi \lambda \alpha^2}{2} = n\pi + \frac{\pi}{2} + O(\lambda^{-2/3} \ln \lambda), \quad n \in \mathbb{Z}^+, \quad n \gg 1.$$

Остается воспользоваться выражением (2.1) для α^2 в области $\mathfrak{A}_1$, чтобы записать уравнение для спектра в виде

$$\lambda \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{g(x) - a} dx = n\pi + \frac{\pi}{2} + O(\lambda^{-2/3} \ln \lambda).$$

Две ветви спектра в уравнении (2.12) получаются отсюда при $n = 2p$, $n = 2p - 1$, и утверждение 1) при $\mu^2 \geq \lambda^\varepsilon$ доказано.

Рассмотрим случай $\mu^2 \leq \lambda^\varepsilon$. В этом случае воспользуемся асимптотическими разложениями

$$\begin{aligned} U(\beta, z) &= e^{-z^2/4} z^{-\beta-1/2} \left[1 - \frac{(\beta + 1/2)(\beta + 3/2)}{2z^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\beta + 1/2)(\beta + 3/2)(\beta + 5/2)(\beta + 7/2)}{2(2z^2)^2} + \dots \right], \\ \bar{U}(\beta, z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2} - \beta\right) e^{z^2/4} z^{\beta-1/2} \left[1 + \frac{(\beta - 1/2)(\beta - 3/2)}{2z^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\beta - 1/2)(\beta - 3/2)(\beta - 5/2)(\beta - 7/2)}{2(2z^2)^2} + \dots \right] \end{aligned}$$

из работы [25]. Эти разложения справедливы при $z \gg |\beta|$, и их можно дифференцировать по z . При $z \gg |\beta|$, таким образом, получаем

$$\begin{aligned} U(\beta, z) &= e^{-z^2/4} z^{-\beta-1/2} \left(1 + O\left(\frac{1 + \beta^2}{z^2}\right) \right), \\ U^{(1)}(\beta, z) &= -\frac{1}{2} e^{-z^2/4} z^{-\beta+1/2} \left(1 + O\left(\frac{1 + \beta^2}{z^2}\right) \right), \\ \bar{U}(\beta, z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2} - \beta\right) e^{z^2/4} z^{\beta-1/2} \left(1 + O\left(\frac{1 + \beta^2}{z^2}\right) \right), \\ \bar{U}^{(1)}(\beta, z) &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2} - \beta\right) e^{z^2/4} z^{\beta+1/2} \left(1 + O\left(\frac{1 + \beta^2}{z^2}\right) \right). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Чтобы найти соответствующие асимптотики при $z < 0$, $|z| \gg |\beta|$, снова воспользуемся уравнениями связи (3.12). В интересующем нас случае $\beta = -\lambda\alpha^2/2$, $z = \zeta_2 \sqrt{2\lambda}$. Поскольку $\zeta_2 > C$, то $|\beta z^{-1}| = O(\lambda^{1/2+\varepsilon})$, и при $\varepsilon < 1/2$ имеем $|\beta z^{-1}| \ll 1$. Определенная в §3 функция $\rho(\beta)$ (см. (3.15)) возрастает с ростом β ,

и $\beta(0) = 0$ [17]. Так как в рассматриваемом случае $|\beta| \leq C\lambda^\varepsilon$ и $|z| \geq C\lambda^{1/2}$, то, как и выше, $z > \rho(\beta)$. Далее доказательство аналогично тому, что было сделано выше при $\mu^2 > \lambda^\varepsilon$, только теперь используются асимптотики (5.14). Уравнение для спектра снова приводится к виду $B_1 = O(e^{-C\lambda})$ (см. (5.13)). Таким образом, утверждение 1) доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 2). Здесь рассматривается область $\mathcal{A}_2$, в которой $a_2 + C\lambda^{-1+\varepsilon_1} \leq a \leq a'_0$. Как и в доказательстве утверждения 1), задача состоит в том, чтобы найти нужные асимптотики величин $w_i(\pm\zeta_2)$, $w'_i(\pm\zeta_2)$, $i = 1, 2$, где функции $w_i(\zeta)$ задаются равенствами (3.20) при $\zeta > 0$ и равенствами (3.18), (3.23) при $\zeta < 0$. Величины μ , t , как и выше, определяются соотношениями (5.3).

По определению (2.1) в области $\mathcal{A}_2$ выполняется равенство

$$\alpha^2 = 4\pi^{-1} \int_0^{x_2} \sqrt{a - g(x)} dx.$$

Поскольку $x_{\min} = 0$, то при малых x выполняется $g(x) = a_2 + \frac{1}{2}g^{(2)}(0)x^2 + O(x^4)$, $g^{(2)}(0) > C > 0$, и, следовательно, $x_2 \simeq (2(a - a_2)/g_2(0))^{1/2}$. Таким образом, $\alpha^2 \asymp a - a_2$ и $\mu^2 > C\lambda^{\varepsilon_1}$ при $a \in \mathcal{A}_2$. Из условия $\pi - x_2 > C$ следует, что $\zeta_2\alpha^{-1} - 1 > C > 0$ и $t^2 - 1 > Ct^2$. При выполнении этих условий нужные асимптотики функций $W(\mu^2/2, \pm\mu t\sqrt{2})$ получены в работе [24], где показано, что при $t > 1$ имеют место разложения

$$\begin{aligned} W\left(\frac{\mu^2}{2}, \mu t\sqrt{2}\right) &= \frac{e^{-\pi\mu^2/4}l(\mu)}{\sqrt{2}(t^2 - 1)^{1/4}}(S_1 \cos \phi - S_2 \sin \phi), \\ W\left(\frac{\mu^2}{2}, -\mu t\sqrt{2}\right) &= \frac{\sqrt{2}e^{\pi\mu^2/4}l(\mu)}{(t^2 - 1)^{1/4}}(S_1 \sin \phi + S_2 \cos \phi), \end{aligned} \quad (5.15)$$

и в формулах (5.15)

$$S_1 = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s u_{2s}(t)}{(t^2 - 1)^{3s} \mu^{4s}}, \quad S_2 = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s u_{2s+1}(t)}{(t^2 - 1)^{3s+3/2} \mu^{4s+2}},$$

а полиномы $u_s(t)$ те же, что и в формуле (5.4). Функция $\phi \equiv \phi(t, \mu)$ в правой части равенств (5.15) определяется равенством

$$\phi = \mu^2 \xi(t) + \frac{\pi}{4}, \quad (5.16)$$

в котором величина $\xi(t)$ определена в (5.5). Константа $l(\mu)$ при $\mu \gg 1$ имеет асимптотику вида

$$l(\mu) = 2^{1/4} \mu^{-1/4} \sum_{s=0}^{\infty} l_s \mu^{-4s}, \quad \text{где } l_0 = 1, \quad l_1 = -\frac{1}{1152}, \dots$$

Из (5.15) следует, что

$$\begin{aligned} W\left(\frac{\mu^2}{2}, \mu t\sqrt{2}\right) &= \frac{e^{-\pi\mu^2/4}l(\mu)}{\sqrt{2}(t^2 - 1)^{1/4}} \left[\left(1 - \frac{P_2}{\mu^4}\right) \cos \phi - \frac{P_1}{\mu^2} \sin \phi + O(\mu^{-6}) \right], \\ W\left(\frac{\mu^2}{2}, -\mu t\sqrt{2}\right) &= \frac{\sqrt{2}e^{\pi\mu^2/4}l(\mu)}{(t^2 - 1)^{1/4}} \left[\left(1 - \frac{P_2}{\mu^4}\right) \sin \phi + \frac{P_1}{\mu^2} \cos \phi + O(\mu^{-6}) \right]. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Здесь

$$P_1 = \frac{u_1(t)}{(t^2 - 1)^{3/2}} = \frac{1}{24} \frac{t^3 - 6t}{(t^2 - 1)^{3/2}}, \quad P_2 = \frac{u_2(t)}{(t^2 - 1)^3} = \frac{-9t^4 + 249t^2 + 145}{1152(t^2 - 1)^3}. \quad (5.18)$$

Разложения (5.15) можно дифференцировать, таким образом, получаются нужные разложения производных:

$$\begin{aligned} W^{(1)}\left(\frac{\mu^2}{2}, \mu t\sqrt{2}\right) &= -\frac{1}{2} e^{-\pi\mu^2/4} \mu l(\mu)(t^2 - 1)^{1/4} \left[\left(1 - \frac{P_2^1}{\mu^4}\right) \sin \phi + \frac{P_1^1}{\mu^2} \cos \phi + O(\mu^{-6}) \right], \\ W^{(1)}\left(\frac{\mu^2}{2}, -\mu t\sqrt{2}\right) &= -e^{\pi\mu^2/4} \mu l(\mu)(t^2 - 1)^{1/4} \left[\left(1 - \frac{P_2^1}{\mu^4}\right) \cos \phi - \frac{P_1^1}{\mu^2} \sin \phi + O(\mu^{-6}) \right]. \end{aligned} \quad (5.19)$$

В формулах (5.19)

$$P_1^1 = \frac{1}{24} \frac{t^3 + 6t}{(t^2 + 1)^{3/2}}, \quad P_2^1 = \frac{-81t^4 + 249t^2 - 143}{1152(t^2 - 1)^3}. \quad (5.20)$$

Оценим величины $R_i(\zeta_2)$, $R'_i(\zeta_2)$, $i = 1, 2$. В рассматриваемой области имеем $b = \mu^2/2 > C\lambda^{\varepsilon_1}$, и, следовательно (см. (2.9)),

$$\begin{aligned} k(b) &= \frac{1}{2} e^{-\pi\mu^2/2} (1 + O(e^{-\pi\mu^2})), & (k(b))^{-1} &= 2e^{\pi\mu^2} (1 + O(e^{-\pi\mu^2})), \\ (k(b))^{1/2} &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\pi\mu^2/4} (1 + O(e^{-\pi\mu^2})), & (k(b))^{-1/2} &= \sqrt{2} e^{\pi\mu^2/4} (1 + O(e^{-\pi\mu^2})). \end{aligned}$$

Поскольку в соответствии с (3.21) выполняется $z = \zeta_2\sqrt{2\lambda} > \sigma(b) \simeq \alpha\sqrt{2\lambda}$, можно воспользоваться равенством (3.14), в котором $\beta = b = \mu^2/2$, $E(\beta, z) = 1$, и, используя выражения (5.17) и (5.19), получить, что

$$R_i(\zeta_2) = l(\mu)O(\lambda^{-2/3} \ln \lambda), \quad R'_i(\zeta_2) = \mu l(\mu)O(\lambda^{-1/6} \ln \lambda), \quad i = 1, 2. \quad (5.21)$$

Все это позволяет получить нужные выражения для $w_i(\zeta_2)$, $w'_i(\zeta_2)$, $i = 1, 2$, по формулам (3.20) после подстановки в них выражений (5.17) и (5.19). Чтобы получить соответствующие формулы для величин $w_i(-\zeta_2)$, $w'_i(-\zeta_2)$, $i = 1, 2$, воспользуемся соотношениями (3.18), (3.24) и асимптотиками (5.17), (5.19). При этом, в связи со сказанным в § 3, величины $R_i(-\zeta_2)$, $R'_i(-\zeta_2)$, $i = 3, 4$, оцениваются так же, как $R_i(\zeta_2)$, $R'_i(\zeta_2)$, $i = 1, 2$ (см. (5.21)).

Будем считать, что величины $w_i(\pm\zeta_2)$, $w'_i(\pm\zeta_2)$ найдены. Переходим к решению уравнения для спектра (4.8), которое запишем в виде

$$H_1 H_3 = H_2 H_4. \quad (5.22)$$

Здесь и ниже

$$\begin{aligned} H_1 &= w_1(-\zeta_2) - w_1(\zeta_2), & H_2 &= w_2(-\zeta_2) - w_2(\zeta_2), \\ H_3 &= w'_2(-\zeta_2) - w'_2(\zeta_2) - \gamma w_2(\zeta_2), & H_4 &= w'_1(-\zeta_2) - w'_1(\zeta_2) - \gamma w_1(\zeta_2). \end{aligned} \quad (5.23)$$

Используя найденные выражения $w_i(\pm\zeta_2)$, $w'_i(\pm\zeta_2)$, $i = 1, 2$, получим

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{2e^{\pi\mu^2/2}l(\mu)}{(t^2-1)^{1/4}}(E_- + O(\lambda^{-2/3}\ln\lambda)), \\ H_2 &= -\frac{l(\mu)}{(t^2-1)^{1/4}}(E_- + O(\lambda^{-2/3}\ln\lambda)), \\ H_3 &= -\mu l(\mu)\sqrt{\lambda}(t^2-1)^{1/4}(E_+ + O(\lambda^{-2/3}\ln\lambda)) \\ &\quad + \frac{\gamma l(\mu)}{(t^2-1)^{1/4}}(E_- + O(\lambda^{-2/3}\ln\lambda)), \\ H_4 &= -2\mu l(\mu)\sqrt{\lambda}e^{\pi\mu^2/2}(t^2-1)^{1/4}(E_+ + O(\lambda^{-2/3}\ln\lambda)), \end{aligned}$$

и в этих равенствах

$$\begin{aligned} E_- &= \sin\phi + \frac{P_1}{\mu^2}\cos\phi - \frac{P_2}{\mu^4}\sin\phi + O(\mu^{-6}), \\ E_+ &= \cos\phi - \frac{P_1^1}{\mu^2}\sin\phi - \frac{P_2^1}{\mu^4}\cos\phi + O(\mu^{-6}). \end{aligned}$$

Это позволяет переписать уравнение (5.22) в виде

$$2E_-E_+ = -\frac{\gamma(E_-)^2}{\mu\sqrt{\lambda}(t^2-1)^{1/2}} + O(\lambda^{-2/3}\ln\lambda). \quad (5.24)$$

Перемножим выражения, выписанные в левой части уравнения (5.24). При сделанных предположениях первый член в правой части уравнения (5.24) оценивается как $O(\lambda^{-1})$. Учитывая, что $P_1 + P_1^1 = \frac{1}{12}\zeta_2^3(\zeta_2^2 - \alpha^2)^{-3/2}$, и используя определение (5.16) величины ϕ , получим следующее уравнение для спектра:

$$2\mu^2\xi(t) = k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{12} \frac{\zeta_2^3}{(\zeta_2^2 - \alpha^2)^{3/2}} \frac{1}{\mu^2} + O(\mu^{-6} + \lambda^{-2/3}\ln\lambda). \quad (5.25)$$

Остается воспользоваться равенством $2\mu^2\xi(t) = \lambda F(a)$, чтобы получить соотношение (2.13). Различный выбор знаков в равенстве (2.13) соответствует случаям $k = 2p$ и $k = 2p - 1$. Утверждение 2) доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 3). В рассматриваемой здесь области $\mathcal{A}_3$ выполняется $\mu^2 \leq C\lambda^{\varepsilon_2}$, и нас интересуют асимптотики величин $W(\beta, \pm z)$, $W^{(1)}(\beta, \pm z)$ при $\beta = b = \mu^2/2$, $z = \zeta_2\sqrt{2\lambda}$. Если $\varepsilon_2 < 1/2$, то $\beta z^{-1} = O(\lambda^{-1/2+\varepsilon_2})$, и для этого случая нужны асимптотические разложения имеются в работе [25]. В рассматриваемой области при любом знаке β эти разложения имеют вид

$$\begin{aligned} W(\beta, z) &= \left(\frac{2k(\beta)}{z}\right)^{1/2} (T_1 \cos\theta - T_2 \sin\theta), \\ W(\beta, -z) &= \left(\frac{2}{zk(\beta)}\right)^{1/2} (T_1 \sin\theta + T_2 \cos\theta), \end{aligned} \quad (5.26)$$

и в этих формулах величины T_i задаются асимптотическими равенствами

$$\begin{aligned} T_1 &= p_0 + \frac{q_2}{1!2z^2} - \frac{p_4}{2!(2z^2)^2} - \frac{q_6}{3!(2z^2)^3} + \frac{p_8}{4!(2z^2)^4} + \frac{q_{10}}{5!(2z^2)^5} - \dots, \\ T_2 &= -\frac{p_2}{1!2z^2} - \frac{q_4}{2!(2z^2)^2} + \frac{p_6}{3!(2z^2)^3} + \frac{q_8}{4!(2z^2)^4} - \frac{p_{10}}{5!(2z^2)^5} - \frac{q_{12}}{6!(2z^2)^6} + \dots, \end{aligned}$$

в которых коэффициенты $p_n \equiv p_n(\beta)$, $q_n \equiv q_n(\beta)$ определяются из соотношений $p_n + iq_n = \frac{\Gamma(n+1/2+i\beta)}{\Gamma(n+i\beta)}$. Таким образом,

$$p_0 = 1, \quad p_2 = \frac{3}{4} - \beta^2, \quad p_4 = \frac{105}{16} - \frac{43}{2} \beta^2 + \beta^4, \\ q_2 = 2\beta, \quad q_4 = 2\beta \left(\frac{11}{2} - 4\beta^2 \right),$$

и имеют место оценки $|p_n| \leq C_n(1 + \beta^n)$, $|q_n| \leq C_n(1 + \beta^n)$. Общий член в рядах T_i оценивается, как и $C_n(1 + \beta^n)z^{-n}$, и в рассматриваемой области выполняются условия $z \gg 1$, $\beta z^{-1} \ll 1$. Таким образом, из (5.26) получаем нужные представления

$$W(\beta, z) = \left(\frac{2k(\beta)}{z} \right)^{1/2} \left[\left(1 + \frac{\beta}{z^2} \right) \cos \theta - \frac{4\beta^2 - 3}{8z^4} \sin \theta + O\left(\frac{1 + \beta^4}{z^4} \right) \right], \\ W(\beta, -z) = \left(\frac{2}{zk(\beta)} \right)^{1/2} \left[\left(1 + \frac{\beta}{z^2} \right) \sin \theta - \frac{4\beta^2 - 3}{8z^4} \cos \theta + O\left(\frac{1 + \beta^4}{z^4} \right) \right]. \quad (5.27)$$

Во всех этих формулах

$$\theta = \frac{1}{4} z^2 - \beta \ln z + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arg \Gamma\left(\frac{1}{2} + i\beta \right), \quad \beta = b = \frac{\mu^2}{2}. \quad (5.28)$$

Соответствующие выражения для производных получаются дифференцированием равенств (5.26) и имеют вид

$$W^{(1)}(\beta, z) = - \left(\frac{zk(\beta)}{2} \right)^{1/2} \left[\left(1 - \frac{\beta}{z^2} \right) \sin \theta + \frac{4\beta^2 + 5}{8z^4} \cos \theta + O\left(\frac{1 + \beta^4}{z^4} \right) \right], \\ W^{(1)}(\beta, -z) = - \left(\frac{2}{zk(\beta)} \right)^{1/2} \left[\left(1 - \frac{\beta}{z^2} \right) \cos \theta - \frac{4\beta^2 + 5}{8z^4} \sin \theta + O\left(\frac{1 + \beta^4}{z^4} \right) \right]. \quad (5.29)$$

Остается оценить величины $R_i(\zeta_2)$, $R'_i(\zeta_2)$, $i = 1, 2$, и $R_i(-\zeta_2)$, $R'_i(-\zeta_2)$, $i = 3, 4$. При $b \ll 1$ из определения (2.9) функции $k(b)$ следует, что

$$k(b) = \sqrt{2} - 1 + \pi b \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + O(b^2), \quad k(b) \leq C.$$

Поскольку $z > \sigma(b)$, то, используя равенства (5.27), (5.29), (3.14) и (3.22), получим

$$R_i(\zeta_2) = O(\lambda^{-11/12} \ln \lambda), \quad R'_i(\zeta_2) = O(\lambda^{1/12} \ln \lambda), \quad i = 1, 2. \quad (5.30)$$

Как указывалось выше, эти оценки верны и для величин $R_i(-\zeta_2)$, $R'_i(-\zeta_2)$ при $i = 3, 4$. Равенства (5.27) и (5.29) вместе с оценками (5.30) дают нужные выражения для величин $w_i(\zeta_2)$, $w'_i(\zeta_2)$, $i = 1, 2$ (см. (3.20)). Соответствующие выражения для $w_i(-\zeta_2)$, $w'_i(-\zeta_2)$, $i = 1, 2$, получаются с помощью формул (3.18), (3.23), (3.24). Используя все эти выражения, получим, что в (5.22)

$$H_1 = -\frac{1}{k(b)} \sqrt{\frac{2}{z}} (F_- + O_1), \quad H_2 = \sqrt{\frac{2}{z}} (F_- + O_2), \\ H_3 = \sqrt{\lambda z} (F_+ + O_3), \quad H_4 = (k(b))^{-1} (F_+ + O_4),$$

и в этих формулах

$$\begin{aligned} F_- &= A(k(b) \cos \theta - \sin \theta) + B(k(b) \sin \theta + \cos \theta), \\ F_+ &= A'(k(b) \sin \theta - \cos \theta) + B'(k(b) \cos \theta + \sin \theta), \\ A &= 1 + \frac{\mu^2}{2z^2}, \quad A' = 1 - \frac{\mu^2}{2z^2}, \quad B = -\frac{\mu^4 - 3}{8z^2}, \quad B' = \frac{\mu^4 + 5}{8z^2}, \\ z &= \zeta_2 \sqrt{2\lambda}, \end{aligned}$$

а все величины O_i допускают оценку вида $O_i = O(\mu^8 \lambda^{-2} + \lambda^{-2/3} \ln \lambda)$. Уравнение для спектра (5.22) теперь записывается в виде

$$F_+ F_- = O(\mu^8 \lambda^{-8} + \lambda^{-2/3} \ln \lambda).$$

Заметим, что если в выражениях $F_{\pm}$ ограничиться главными членами, то $F_- \sim k(b) \cos \theta - \sin \theta$, $F_+ \sim k(b) \sin \theta - \cos \theta$. Таким образом, величины F_- , F_+ не могут быть малы одновременно. Рассуждая так же, как в конце доказательства утверждения 2), получим, что уравнение для спектра приближенно факторизуется и записывается в виде двух уравнений

$$F_{\pm} = O(\mu^8 \lambda^{-8} + \lambda^{-2/3} \ln \lambda). \quad (5.31)$$

Учитывая, что $2\theta = \Psi(\lambda, a) + \pi/2$, где функция $\Psi(\lambda, a)$ определена соотношением (2.11), из (5.31) и полученных выражений для функций $F_{\pm}$ получается равенство (2.14) с соответствующим выбором знаков. Утверждение 3) доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 4). В области $\mathcal{A}_4 \subset \mathfrak{A}_3$ при вычислении величин $w_i(\pm\zeta_2)$, $w'_i(\pm\zeta_2)$, $i = 1, 2$, будем исходить из равенств (3.25) и оценок (3.26). Поскольку в этой области $\mu^2 = \lambda\alpha^2 < C\lambda^{\varepsilon_2}$, можно воспользоваться равенствами (5.27), (5.29), в которых $\beta = b = -\mu^2/2$. Из этих равенств с помощью (3.26) получаем, что в рассматриваемой области $R_i(\pm\zeta_2) = O(\lambda^{-5/4} \ln \lambda)$, $R'_i(\pm\zeta_2) = O(\lambda^{-1/4} \ln \lambda)$, $i = 1, 2$. Дальнейший ход доказательства аналогичен доказательству утверждения 3). Утверждение 4) доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 5). Рассуждая так же, как в доказательстве утверждения 2), получим, что в области $\mathcal{A}_5$ выполняются соотношения $\mu^2 = \lambda\alpha^2 \geq C\lambda^{\varepsilon_1}$. Равенства (3.25), в которых $b = -\mu^2/2$, показывают, что для вычисления величин $w_i(\pm\zeta_2)$, $w'_i(\pm\zeta_2)$, $i = 1, 2$, нужны асимптотики функций $W(\beta, z)$ при $\beta = -\mu^2/2 < 0$. Поскольку в области $\mathfrak{A}_3$ соотношения (3.25) справедливы при любом знаке ζ , то, в отличие от предыдущего, где параметр t определялся равенством (5.3), будем считать, что t при любом z определяется равенством $z = \mu t \sqrt{2}$.

Согласно работе [24] при $\beta = -\mu^2/2 < 0$ равномерно по t ($|t| < \infty$) имеют место следующие асимптотические равенства:

$$\begin{aligned} W\left(-\frac{\mu^2}{2}, \mu t \sqrt{2}\right) &= \frac{l(\mu)}{(t^2 + 1)^{1/4}} [\bar{S}_1 \cos \bar{\phi} - \bar{S}_2 \sin \bar{\phi}], \\ W^{(1)}\left(-\frac{\mu^2}{2}, \mu t \sqrt{2}\right) &= -\frac{\mu}{\sqrt{2}} l(\mu)(t^2 + 1) [\bar{S}_3 \sin \bar{\phi} + \bar{S}_4 \cos \bar{\phi}]. \end{aligned} \quad (5.32)$$

В этих равенствах

$$\bar{\phi} \equiv \bar{\phi}(t) = \mu^2 \bar{\xi}(t) + \frac{\pi}{4},$$

$$\bar{\xi}(t) = \int_0^t \sqrt{y^2 + 1} dy = \frac{t}{2} \sqrt{t^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln(t + \sqrt{t^2 + 1})$$

и $\bar{S}_i$ – асимптотические ряды вида

$$\bar{S}_1 = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \bar{u}_{2s}(t)}{(t^2 + 1)^{3s} \mu^{4s}}, \quad \bar{S}_2 = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \bar{u}_{2s+1}(t)}{(t^2 + 1)^{3s+3/2} \mu^{4s+2}},$$

$$\bar{S}_3 = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \bar{v}_{2s}(t)}{(t^2 + 1)^{3s} \mu^{4s}}, \quad \bar{S}_4 = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \bar{v}_{2s+1}(t)}{(t^2 + 1)^{3s+3/2} \mu^{4s+2}}.$$

Как и фигурирующие в равенствах (5.4), (5.6) величины $u_s(t)$, $v_s(t)$, здесь $\bar{u}_s(t)$ и $\bar{v}_s(t)$ – полиномы степени $3s$ для нечетных s и степени $3s - 2$, $s \geq 2$, для четных s . При этом

$$\begin{aligned} \bar{u}_0(t) = \bar{v}_0(t) = 1, \quad \bar{u}_1(t) = -\frac{1}{24}(t^3 + 6t), \quad \bar{v}_1(t) = -\frac{1}{24}(t^3 - 6t), \\ \bar{u}_2(t) = \frac{1}{1152}(9t^4 + 249t^2 - 145), \quad \bar{v}_2(t) = \frac{1}{1152}(-15t^4 - 327t^2 + 143). \end{aligned} \quad (5.33)$$

Из разложений (5.32) следует, что

$$\begin{aligned} W\left(-\frac{\mu^2}{2}, \mu t \sqrt{2}\right) &= \frac{l(\mu)}{(t^2 + 1)^{1/4}} \\ &\times \left[\left(1 - \frac{\bar{u}_2(t)}{\mu^4(t^2 + 1)^3}\right) \cos \bar{\phi} - \frac{\bar{u}_1(t)}{\mu^2(t^2 + 1)^{3/2}} \sin \bar{\phi} + O(\mu^{-6}) \right], \\ W^{(1)}\left(-\frac{\mu^2}{2}, \mu t \sqrt{2}\right) &= -\frac{\mu l(\mu)}{\sqrt{2}}(t^2 + 1)^{1/4} \\ &\times \left[\left(1 - \frac{\bar{v}_2(t)}{\mu^4(t^2 + 1)^3}\right) \sin \bar{\phi} + \frac{\bar{v}_1(t)}{\mu^2(t^2 + 1)^{3/2}} \cos \bar{\phi} + O(\mu^{-6}) \right]. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Используя вытекающие отсюда грубые оценки

$$\begin{aligned} W\left(-\frac{\mu^2}{2}, \mu t \sqrt{2}\right) &= \frac{l(\mu)}{(t^2 + 1)^{1/4}} O(1), \\ W^{(1)}\left(-\frac{\mu^2}{2}, \mu t \sqrt{2}\right) &= \mu l(\mu)(t^2 + 1)^{1/4} O(1), \end{aligned}$$

согласно формулам (3.22), (3.23) получаем следующие оценки остаточных членов:

$$R_i(\zeta) = \frac{l(\mu)O(\lambda^{-1} \ln \lambda)}{(t^2 + 1)^{1/4}}, \quad R'_i(\zeta) = \mu l(\mu)(t^2 + 1)^{1/4} O(\lambda^{-1/2} \ln \lambda), \quad i = 1, 2. \quad (5.35)$$

Далее будем использовать следующие обозначения: $\phi_i = \bar{\phi}(t_i)$, $i = 1, 2$, где величины t_i определяются из соотношений $\sqrt{2} \mu t_i = \zeta_i \sqrt{2\lambda}$. Поскольку

$\zeta_2 = -\zeta_1$, то $t_1 = -t_2$ и везде ниже $t \equiv t_2$. Из равенств (3.25), (5.34) и (5.35) получаем значения $w_i(\pm\zeta_2)$, $w'_i(\pm\zeta_2)$, $i = 1, 2$, а затем и значения величин H_i , входящих в уравнение для спектра (5.22). Учитывая, что

$$\phi_1 + \phi_2 = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\gamma}{\mu\sqrt{\lambda}(t^2+1)^{1/2}} = O(\lambda^{-1}),$$

после соответствующих вычислений получаем

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{l(\mu)}{(t^2+1)^{1/4}}(\bar{E}_2 - \bar{E}_1 + O_1), & H_3 &= \mu l(\mu)\sqrt{\lambda}(t^2+1)^{1/4}(\bar{E}_3 - \bar{E}_4 + O_3), \\ H_2 &= \frac{l(\mu)}{(t^2+1)^{1/4}}(\bar{E}_1 - \bar{E}_2 + O_2), & H_4 &= \mu l(\mu)\sqrt{\lambda}(t^2+1)^{1/4}(\bar{E}_3 - \bar{E}_4 + O_4), \end{aligned} \quad (5.36)$$

и при этом справедливы оценки

$$O_i = O(\mu^{-6} + \lambda^{-1} \ln \lambda).$$

Величины $\bar{E}_i$ в равенствах (5.36) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \bar{E}_1 &= \left(1 + \frac{\bar{P}_2}{\mu^4}\right) \sin \phi_2 - \frac{\bar{P}_1}{\mu^2} \cos \phi_2, & \bar{P}_1 &= -\frac{\bar{u}_1(t)}{(t^2+1)^{3/2}}, \\ \bar{E}_2 &= \left(1 + \frac{\bar{P}_2}{\mu^4}\right) \cos \phi_2 + \frac{\bar{P}_1}{\mu^2} \sin \phi_2, & \bar{P}_2 &= \frac{\bar{v}_1(t)}{(t^2+1)^{3/2}}, \\ \bar{E}_3 &= \left(1 + \frac{\bar{P}_2^1}{\mu^4}\right) \cos \phi_2 - \frac{\bar{P}_1^1}{\mu^2} \sin \phi_2, & \bar{P}_1^1 &= -\frac{\bar{u}_2(t)}{(t^2+1)^3}, \\ \bar{E}_4 &= \left(1 + \frac{\bar{P}_2^1}{\mu^4}\right) \sin \phi_2 + \frac{\bar{P}_1^1}{\mu^2} \cos \phi_2, & \bar{P}_2^1 &= -\frac{\bar{v}_2(t)}{(t^2+1)^3}. \end{aligned}$$

Подставляя выражения (5.36) для H_i в уравнение (5.22) для спектра, получаем, что это уравнение можно записать в виде

$$(\bar{E}_2 - \bar{E}_1)(\bar{E}_3 - \bar{E}_4) = O(\mu^{-6} + \lambda^{-1} \ln \lambda). \quad (5.37)$$

В отличие от предыдущих случаев, главные члены асимптотических разложений величин $\bar{E}_2 - \bar{E}_1$ и $\bar{E}_3 - \bar{E}_4$ совпадают и равны $\cos \phi_2 - \sin \phi_2$. Положим $\phi_2 = \pi/4 + \pi p + \delta$. Поскольку $\bar{P}_1^1 = -P_1 + O(\lambda^{-1})$, то из (5.37) получаем следующее уравнение для δ :

$$\left(1 + \frac{\bar{P}_2 + \bar{P}_2^1}{\mu^4}\right) \sin^2 \delta - 2 \cdot \frac{\bar{P}_1}{\mu^2} \sin \delta \cos \delta + \frac{(\bar{P}_1)^2}{\mu^4} \cos^2 \delta = O(\mu^{-6} + \lambda^{-1} \ln \lambda). \quad (5.38)$$

Так как $\bar{P}_1 = (24)^{-1} + O(\lambda^{-2})$, $|\bar{P}_2 + \bar{P}_2^1| \leq C\alpha^2$, из (5.38) получаем, что это уравнение имеет двойной корень вида $\delta = -(48b)^{-1} + O(|b|^{-3/2} + \lambda^{-1/2}(\ln \lambda)^{1/2})$. Учитывая равенства

$$2\phi_2 = 2\mu^2\bar{\xi}(t) + \frac{\pi}{2}, \quad 2\mu^2\bar{\xi}(t) = 2\lambda \int_0^\pi \sqrt{g(x) - a} dx,$$

получаем (2.16). Утверждение 5) доказано, что и завершает доказательство леммы о спектре.

§ 6. Доказательство теоремы

Результат леммы о спектре означает, что все точки положительного спектра, если они существуют, асимптотически близки к решениям уравнений (2.12)–(2.16).

Проведем доказательство теоремы в три этапа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СУЩЕСТВОВАНИЯ ДВУХ ВЕТВЕЙ СПЕКТРА. Здесь будет доказано, что во всем интервале $\mathfrak{A}$ уравнения для спектра (2.12)–(2.16) можно записать в виде

$$\lambda F(a) = 2\pi p + H_{\pm}(b_2) + R_{\pm}(\lambda, a). \quad (6.1)$$

При этом выполняются оценки

$$|R_{\pm}(\lambda, a)| = \begin{cases} O(\lambda^{-2/3} \ln \lambda), & a \geq a_2, \\ O(\lambda^{-1/2} (\ln \lambda)^{1/2}), & a \leq a_2, \end{cases} \quad (6.2)$$

и решения уравнений (6.1) существуют.

Определим границу между областями $\mathcal{A}_2$ и $\mathcal{A}_3$ из условия $b_2^3 = \lambda^{2/3}$. Поскольку при $a \in \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ выполняется равенство $b_2 = \lambda \alpha_2^2/2$ и величина $\alpha_2 \equiv \alpha_2(a)$ растет с ростом a , в рассматриваемой области имеем $b_2 \geq \lambda^{2/9} \gg 1$. Тогда из (2.17) следует, что $H_{\pm}(b_2) = \pm\pi/2 - (24b_2)^{-1} + O(b_2^{-3})$, и нужный результат (6.1) при $a \in \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ получается из равенств (2.12) и (2.13).

Рассмотрим область $\mathcal{A}_3 \subset \mathfrak{A}_1$, в которой $b_2^3 \leq \lambda^{2/3}$. В этой области в силу первого из равенств (2.10) имеем

$$F(a) = 2 \int_{x_2}^{\pi} \sqrt{g(x) - a} dx = \zeta_2 \sqrt{\zeta_2^2 - \alpha^2} - \alpha^2 \ln \left(\frac{\zeta_2}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \sqrt{\zeta_2^2 - \alpha^2} \right).$$

Учитывая определение (2.11) функции Ψ и определение (2.7) функций $H_{\pm}$, из уравнений (2.14) получим, что в рассматриваемой области

$$\lambda F(a) = 2\pi p + H_{\pm}(b_2) + O\left(\frac{b^4}{\lambda^2} + \lambda^{-2/3} \ln \lambda\right),$$

и так как при $a \in \mathcal{A}_3$ выполняется неравенство $b_2 \leq \lambda^{2/9}$, то для $a \geq a_2$ имеют место уравнения (6.1) и оценки (6.2).

При $a \leq a_2$ доказательство аналогично приведенному, надо только выбрать границу между областями $\mathcal{A}_4$ и $\mathcal{A}_5$ из условия $|b| = \lambda^{1/3}$.

Остается доказать, что решения $\lambda_{\pm}(a, p)$ уравнений (6.1) существуют. Из результатов Олвера следует, что все остаточные члены, обозначаемые в § 3 через $R_i(\lambda)$, являются непрерывными функциями λ (где $\lambda \gg 1$). Отсюда следует, что и функции $R_{\pm}(\lambda, a)$ в уравнениях (6.1) являются непрерывными по λ при $\lambda \gg 1$.

Рассмотрим случай $a \in \mathfrak{A}_1$. Так как в этой области $b_2 \geq C\lambda$ ($\alpha_2 \geq C$), уравнение (6.1) совпадает с уравнением (2.12). Запишем это уравнение в виде $f(x) = 0$, где

$$f(x) = x - x_0^{\pm} - R_{\pm}(F^{-1}x, a), \quad x = \lambda F, \quad x_0^{\pm} = 2\pi p \pm \frac{\pi}{2}.$$

Поскольку функция $f(x)$ непрерывна и меняет знак внутри отрезка $[x_0^\pm - \Delta x, x_0^\pm + \Delta x]$, $\Delta x = O(F^{-1}x_0^\pm)$, то на этом отрезке имеются корни $x^\pm$ уравнения $f(x) = 0$, причем $x^\pm = x_0^\pm + R_\pm(F^{-1}x_0^\pm) + R_\pm(F^{-1}x^\pm) - R_\pm(F^{-1}x_0^\pm)$. Из оценки Δx следует, что $|R_\pm(F^{-1}x) - R_\pm(F^{-1}x_0^\pm)| = O((x_0^\pm/F)^{-2/3} \ln(x^\pm/F))$, и утверждение 1) теоремы при $a \in \mathfrak{A}_1$ доказано.

Рассмотрим случай $a \in \mathfrak{A}_2 \cup \mathfrak{A}_3$. В этом случае имеем $F(a) \geq C > 0$, и уравнение (6.1) имеет вид $f(\lambda) = 0$, где

$$f(\lambda) = \lambda - \lambda_p^0 - \frac{1}{F(a)} H_\pm(b_2) - \frac{1}{F(a)} R_\pm(\lambda).$$

Поскольку $|H_\pm(b_2)| \leq C$ и $|F| \geq C$, то на отрезке $|\lambda - \lambda_p^0| \leq C$ имеется корень $\lambda = \lambda_p^0 + \Delta\lambda$ уравнения $f(\lambda) = 0$ и $|\Delta\lambda| \leq C$. При этом

$$\begin{aligned} \Delta\lambda &= (F(a))^{-1} H_\pm\left(\frac{\lambda_p^0 \alpha^2}{2}\right) - (F(a))^{-1} \Delta H_\pm(\lambda) + (F(a))^{-1} R_\pm(\lambda), \\ \Delta H_\pm(\lambda) &= H_\pm\left((\lambda_p^0 + \Delta\lambda) \frac{\alpha^2}{2}\right) - H_\pm\left(\frac{\lambda_p^0 \alpha^2}{2}\right). \end{aligned} \quad (6.3)$$

Так как $|\Delta\lambda| \leq C$, то в оценке $R_\pm(\lambda)$ можно заменить λ на λ_p^0 . Покажем, что

$$|\Delta H_\pm(\lambda)| \leq C \lambda^{-2/3}. \quad (6.4)$$

Рассмотрим область $\alpha^2 \geq C(\lambda_p^0)^{-1+2/15}$, в которой выполнено неравенство $|b| \geq C(\lambda_p^0)^{2/15}$ (или $|b|^5 \geq C(\lambda_p^0)^{2/3}$). Тогда оценка (6.4) следует из асимптотических разложений (2.17).

Рассмотрим область $\alpha^2 \leq C(\lambda_p^0)^{-1+2/15}$ и воспользуемся оценками

$$|H_\pm(x)| \leq C \max \left| \frac{dH_\pm}{dx} \right| |\Delta\lambda| \alpha^2, \quad |\Delta\lambda| \leq C. \quad (6.5)$$

Из определения (2.7) функций $H_\pm(x)$ следует, что

$$\frac{dH_\pm}{dx} = \pm \frac{\pi e^{\pi x}}{1 + e^{2\pi x}} + \ln|x| - \operatorname{Im} \left(i\psi \left(\frac{1}{2} + ix \right) \right),$$

где $\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$. Для оценки последнего члена в правой части этого равенства воспользуемся интегральным представлением для функции $\psi(x)$ (см. [22]):

$$\psi(\tau) = \ln \tau - \frac{1}{2\tau} - 2 \int_0^\infty t(t^2 + 1)^{-1} (e^{2\pi t} - 1)^{-1} dt. \quad (6.6)$$

Рассмотрим случай $\tau = 1/2 + ix$, следовательно, $|\tau| \geq 1/2$. В этом случае из (6.6) получаем, что $|\psi(\tau)| \leq |\ln|\tau|| + C$, и, таким образом, $\left| \frac{dH_\pm}{dx} \right| \leq C + 2|\ln|x||$, а потому оценка (6.4) следует из оценок (6.5). Существование решений $\lambda_\pm(a, p)$ с оценками (2.6) доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ О СТРУКТУРЕ СПЕКТРА. Здесь мы докажем асимптотическую полноту двух построенных ветвей спектра $\lambda_\pm(a, p)$, т. е. докажем, что весь положительный спектр задачи (1.1) при $\lambda \gg 1$ исчерпывается ветвями $\lambda_\pm(a, p)$.

При $a_2 - a > C$ задача дефинитна и структура спектра известна [3]–[5]. В этом случае ветви $\lambda_{\pm}(a, p)$ действительно исчерпывают весь спектр, так как последний состоит из двух ветвей с одинаковой асимптотикой (см. [1], [4], [5]). При $a > a_2$ задача индефинитна и основная сложность состоит в том, что для периодической индефинитной задачи осцилляционная теорема, по-видимому, не доказана. Условие четности функции $g(x)$ позволяет свести периодическую задачу к двум задачам с разделенными граничными условиями, а затем воспользоваться результатами работы [9] (см. также [8], [14]).

Рассмотрим две вспомогательные задачи для уравнения (1.1) на интервале $(0, \pi)$: задачу D (задачу Дирихле)

$$y'' + \lambda^2(g(x) - a)y = 0, \quad y(0) = y(\pi) = 0, \quad (6.7)$$

и задачу N (задачу Неймана)

$$y'' + \lambda^2(g(x) - a)y = 0, \quad y'(0) = y'(\pi) = 0. \quad (6.8)$$

Обозначим спектры этих задач через $\{\lambda^D\}$ и $\{\lambda^N\}$ соответственно. Из условия четности функции g следует, что спектр $\{\lambda\}$ задачи (1.1) является объединением спектров $\{\lambda^D\}$ и $\{\lambda^N\}$: $\{\lambda\} = \{\lambda^D\} \cup \{\lambda^N\}$. При $\lambda = \lambda^D$ собственная функция задачи (1.1) является нечетным продолжением на интервал $(-\pi, \pi)$ соответствующей собственной функции задачи D, (6.7), а при $\lambda = \lambda^N$ – четным продолжением соответствующей собственной функции задачи N, (6.8).

Заметим, что, хотя задачи D и N – задачи с одной точкой поворота, нас интересует случай, когда точки поворота близки к концам интервала $(0, \pi)$, в которых $g'(0) = g'(\pi) = 0$. В силу этого при анализе задач D и N мы вновь используем замену (3.2).

Асимптотики собственных значений λ^D и λ^N строятся точно так же, как было сделано выше для задачи (1.1). Проведя это построение, получаем, что имеют место аналоги формул (2.4):

$$\begin{aligned} \lambda^D(a, p) &= \lambda_p^0 + (F(a))^{-1} H_-(b_2(\lambda_p^0)) + R_D(a, p), \\ \lambda^N(a, p) &= \lambda_p^0 + (F(a))^{-1} H_+(b_2(\lambda_p^0)) + R_N(a, p), \end{aligned} \quad (6.9)$$

и, следовательно, $\lambda^D(a, p) = \lambda_-(a, p)$, $\lambda^N(a, p) = \lambda_+(a, p)$. При этом для величин R_D и R_N справедливы оценки (2.6).

Докажем асимптотическую полноту спектров $\{\lambda^D(a, p)\}$ и $\{\lambda^N(a, p)\}$, т. е. отсутствие при $p \gg 1$ других собственных значений, близких к $\lambda^D(a, p)$ и $\lambda^N(a, p)$. Это следует из осцилляционной теоремы, доказанной в индефинитном случае для задачи Штурма–Лиувилля с разделенными граничными условиями в работе [9]. Из результатов этой работы следует, что для доказательства асимптотической полноты спектров $\{\lambda^D(a, p)\}$ и $\{\lambda^N(a, p)\}$ достаточно доказать, что для любого $k \gg 1$ в задаче D (соответственно, задаче N) существует собственная функция, отвечающая собственному значению $\lambda^D(a, p)$ (соответственно, $\lambda^N(a, p)$) для некоторого $p \gg 1$ и имеющая k нулей в интервале $(0, \pi)$. С помощью оценок из работы [17] задача сводится к исследованию вопроса о количестве нулей в интервале $(0, \zeta_2)$ соответствующей функции Вебера. Используя результаты о нулях этих функций, содержащиеся в работах [17], [24], [25], получим, что функция $w(\zeta)$ (напомним, что $u(x) = (\varphi'(\zeta))^{1/2} w(\zeta)$), отвечающая собственному значению $\lambda_-(a, p)$ в задаче D, имеет $p - 1$ нулей в интервале

$(0, \zeta_2)$, а функция $w(\zeta)$, отвечающая собственному значению $\lambda_+(a, p)$ в задаче N, имеет p нулей в интервале $(0, \zeta_2)$.

Таким образом, спектры $\{\lambda^D(a, p)\}$ в задаче D и $\{\lambda^N(a, p)\}$ в задаче N асимптотически полны, а следовательно, асимптотически полон и спектр $\{\lambda_{\pm}(a, p)\}$ в задаче (1.1). Утверждение 1) теоремы доказано. Кроме того, доказано, что собственные функции периодической задачи, отвечающие собственным значениям $\lambda_{\pm}(a, p)$, имеют $2p$ нулей на полуинтервале $[-\pi, \pi)$.

Заметим, что $\lambda = 0$ – собственное значение задачи N и соответствующая собственная функция равна константе. Таким образом, естественно предположить, что при $a > a_2$, $n \gg 1$ выполняются равенства (2.8). Это будет доказано далее независимо от результатов работы [9].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 2). Рассмотрим область $\mathfrak{A}'_3 \subset \mathfrak{A}_3$, в которой $a_2 - a > C > 0$. В этой области задача дефинитна. Переходя с помощью преобразования Лиувилля, описанного в § 1, к классической задаче Штурма–Лиувилля (1.2) и анализируя нули собственных функций задачи (1.2) (см. [4]), снова получим, что собственная функция, отвечающая собственному значению $\lambda_{\pm}(a, p)$, имеет $2p$ нулей на полуинтервале $[-\pi, \pi)$. Тогда по осцилляционной теореме для периодической задачи Штурма–Лиувилля [3], [4] получаем, что при $a \in \mathfrak{A}'_3$, $n \gg 1$ имеют место равенства (2.8). Покажем, что эти равенства справедливы для любого $a \in \mathfrak{A}$. Рассмотрим величины $s_{n,a}$, $s_{\pm}(a, p)$ и отрезки I_p вида

$$s_{n,a} = F(a)\lambda_{n,a}, \quad s_{\pm}(a, p) = F(a)\lambda_{\pm}(a, p),$$

$$I_p = \left[2\pi p - \frac{\pi}{2} - \delta, 2\pi p + \frac{\pi}{2} + \delta \right], \quad \delta = \frac{\pi}{10}.$$

Отрезки I_p не перекрываются, и так как $|H_{\pm}(x)| \leq \pi/2 + \pi/20$ (см. § 2), то при $p \gg 1$ имеются только два собственных значения $s_{\pm}(a, p) \in I_p$ для любого $a \in \mathfrak{A}$. Поскольку для любого фиксированного a при $k \gg 1$, $p \gg 1$ имеет место взаимно однозначное соответствие $\{s_{n,a}\} \leftrightarrow \{s_{\pm}(a, p)\}$ и $s_{2k-1,a}, s_{2k,a} \in I_k$ при $a \in \mathfrak{A}'_3$, утверждения (2.8) справедливы для любого $a \in \mathfrak{A}$. При $a > a_2$ выполняется неравенство $s_+(a, k) > s_-(a, k)$, и по определению порядка имеем $s_{2k,a} \geq s_{2k-1,a}$. Отсюда следует, что $s_{2k-1,a} = s_-(a, k)$, $s_{2k,a} = s_+(a, k)$ для любого $k \gg 1$ и $a > a_2$. Утверждение 2) доказано, что и завершает доказательство теоремы.

Полученные результаты показывают, что асимптотическая структура спектра задачи (1.1) при $g \in \mathcal{G}$, $a_1 - a > C$ не меняется при переходе от дефинитной при $a < a_2$ к индефинитной при $a > a_2$ задаче. При этом происходит только снятие асимптотического вырождения, имеющего место при $a < a_2$ (см. (1.5)). Остается справедливой и осцилляционная теорема.

В заключение сделаем два замечания. Первое состоит в том, что полученные результаты непосредственно обобщаются на периодическую задачу Штурма–Лиувилля для уравнения вида $y'' + \lambda^2 f(x, a)y = 0$, если для этого уравнения справедливы результаты Олвера. Отметим также, что приведенные в п. 1) теоремы результаты при $a - a_2 > C$ справедливы и без предположения четности. Второе замечание состоит в том, что функции $H_{\pm}(x)$, по-видимому, при любых граничных условиях (см. (6.9)) описывают асимптотику положительного

дискретного спектра в окрестности точек типа $a = a_2$, где рождаются (умирают) две простые точки поворота, для зависящих от параметра a задач Штурма–Лиувилля.

Список литературы

1. Ф. Олвер, *Асимптотика и специальные функции*, Наука, М., 1990; пер. с англ.: F. W. J. Olver, *Asymptotics and special functions*, Computer Science and Applied Mathematics, Academic Press, New York–London, 1974.
2. М. В. Федорюк, *Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1983.
3. Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон, *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений*, ИЛ, М., 1958; пер. с англ.: E. A. Coddington, N. Levinson, *Theory of ordinary differential equations*, McGraw-Hill, New York–Toronto–London, 1955.
4. Б. М. Левитан, И. С. Саргсян, *Введение в спектральную теорию. Самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы*, Наука, М., 1970; англ. пер.: B. M. Levitan, I. S. Sargsjan, *Introduction to spectral theory: selfadjoint ordinary differential operators*, Translations of Mathematical Monographs, **39**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1975.
5. Б. М. Левитан, И. С. Саргсян, *Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака*, Наука, М., 1988; англ. пер.: B. M. Levitan, I. S. Sargsjan, *Sturm–Liouville and Dirac operators*, Math. Appl. (Soviet Ser.), **59**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1991.
6. A. B. Mingarelli, “Indefinite Sturm–Liouville problems”, *Ordinary and partial differential equations* (Dundee, 1982), Lecture Notes in Math., **964**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1982, 519–528.
7. A. B. Mingarelli, “Asymptotic distribution of the eigenvalues of non-definite Sturm–Liouville problems”, *Ordinary differential equations and operators* (Dundee, 1982), Lecture Notes in Math., **1032**, Springer-Verlag, Berlin, 1983, 375–383.
8. F. W. Atkinson, A. B. Mingarelli, “Asymptotic of the number of zeros and of eigenvalues of general weighted Sturm–Liouville problems”, *J. Reine Angew. Math.*, **375/376** (1987), 380–393.
9. P. A. Binding, H. Volkmer, “Oscillation theory for Sturm–Liouville problems with indefinite coefficients”, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, **131**:5 (2001), 989–1002.
10. Т. Я. Азизов, И. С. Иохвидов, “Линейные операторы в пространствах с индефинитной метрикой и их приложения”, *Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ*, **17**, ВИНТИ, М., 1979, 113–205; англ. пер.: T. Ya. Azizov, I. S. Iokhvidov, “Linear operators in spaces with indefinite metric and their applications”, *J. Soviet Math.*, **15**:4 (1981), 438–490.
11. K. Daho, H. Langer, “Sturm–Liouville operators with an indefinite weight function”, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, **78**:1–2 (1977), 161–191.
12. B. Čurgus, H. Langer, “A Krein space approach to symmetric ordinary differential operators with an indefinite weight function”, *J. Differential Equations*, **79**:1 (1989), 31–61.
13. С. Г. Пятков, “Индефинитные эллиптические спектральные задачи”, *Сиб. матем. журн.*, **39**:2 (1998), 409–426; англ. пер.: S. G. Pyatkov, “Indefinite elliptic spectral problems”, *Siberian Math. J.*, **39**:2 (1998), 358–372.
14. А. В. Дьяченко, “Асимптотические формулы для собственных значений индефинитной задачи Штурма–Лиувилля с конечным числом точек поворота”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2001, № 5, 3–11; англ. пер.: A. V. D'yachenko, “Asymptotic formulas for eigenvalues of the indefinite Sturm–Liouville problem with finite number of turn points”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **56**:5 (2001), 1–9.

15. P. M. Bleher, "Quasi-classical expansions and the problem of quantum chaos", *Geometric aspects of functional analysis*, Lecture Notes in Math., **1469**, Springer-Verlag, Berlin, 1991, 60–89.
16. Д. В. Косыгин, А. А. Минасов, Я. Г. Синай, "Статистические свойства операторов Лапласа–Бельтрами на поверхностях Лиувилля", *УМН*, **48:4** (1993), 3–130; англ. пер.: D. V. Kosygin, A. A. Minasov, Ya. G. Sinai, "Statistical properties of the spectra of Laplace–Beltrami operators on Liouville surfaces", *Russian Math. Surveys*, **48:4** (1993), 1–142.
17. F. W. J. Olver, "Second-order linear differential equations with two turning points", *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, **278**:1279 (1979), 137–174.
18. М. В. Федорюк, "Асимптотика дискретного спектра оператора $w''(x) - \lambda^2 p(x)w(x)$ ", *Матем. сб.*, **68(110)**:1 (1965), 81–110.
19. С. Ю. Доброхотов, А. И. Шафаревич, "Туннельное расщепление спектра операторов Лапласа–Бельтрами на двумерных поверхностях с квадратично интегрируемым геодезическим потоком", *Функц. анализ и его прил.*, **34:2** (2000), 67–69; англ. пер.: S. Yu. Dobrokhотов, A. I. Shafarevich, "Tunnel splitting of the spectrum of the Beltrami–Laplace operators on two-dimensional surfaces with square integrable geodesic flow", *Funct. Anal. Appl.*, **34:2** (2000), 133–134.
20. Ya. G. Sinai, "Mathematical problems in the theory of quantum chaos", *Geometric aspects of functional analysis* (1989–90), **1469**, Springer-Verlag, Berlin, 1991, 41–59.
21. P. M. Bleher, D. W. Kosygin, Ya. G. Sinai, "Distribution of energy levels of quantum free particle on the Liouville surface and trace formulae", *Comm. Math. Phys.*, **170:2** (1995), 375–403.
22. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции: Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра*, Наука, М., 1965; пер. с англ.: A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, G. Francesco, *Higher transcendental functions*, vol. I, McGraw-Hill, New York–Toronto–London, 1953.
23. М. Абрамовиц, И. Стиган, *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами*, Наука, М., 1979; пер. с англ.: M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, National Bureau of Standards Applied Mathematics Series, **55**, U.S. Government Printing Office, Washington, DC, 1964.
24. F. W. J. Olver, "Uniform asymptotic expansions for Weber parabolic cylinder functions of large orders", *J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B*, **63** (1959), 131–169.
25. Дж. Ч. П. Миллер, *Таблицы функций Вебера (функции параболического цилиндра). Решения дифференциального уравнения $\frac{d^2 y}{dx^2} + (\frac{1}{4}x^2 - a)y = 0$* , ВЦ АН СССР, М., 1968; пер. с англ.: J. C. P. Miller, *Tables of Weber parabolic cylinder functions, giving solutions of the differential equation $\frac{d^2 y}{dx^2} + (\frac{1}{4}x^2 - a)y = 0$* , Her Majesty's Stationery Office, London, 1955.
26. Г. Бейтман, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции: Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены*, Наука, М., 1966; пер. с англ.: A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, G. Francesco, *Higher transcendental functions*, vol. II, McGraw-Hill, New York–Toronto–London, 1953.

Д. А. Попов (D. A. Popov)

Научно-исследовательский институт физико-химической
биологии им. А. Н. Белозерского,
МГУ им. М. В. Ломоносова

Поступило в редакцию
26.10.2006