Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Смирнов, С. В. Кузнецова, И. В. Майорова, Описание когомологий банаховых и полинормированных алгебр на языке A_∞ -структур, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1998, том 62, выпуск 4, 155–172

DOI: <https://doi.org/10.4213/im197>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 13:14:40

УДК 513.83

В. А. Смирнов, С. В. Кузнецова, И. В. Майорова

Описание когомологий банаховых и полинормированных алгебр на языке A_∞ -структур

Рассматривается вопрос о том, как методы описания когомологий алгебр, основанные на использовании A_∞ -структур Сташеффа, могут быть применены для описания когомологий банаховых и полинормированных алгебр.

Библиография: 4 наименования.

Вопрос о вычислении или описании когомологий алгебр является чрезвычайно важным для многих разделов математики. Частным случаем когомологий алгебр являются когомологии дискретных групп, которые играют важную роль в теории групп. Когомологии классифицирующих пространств также являются частным случаем когомологий алгебр и их вычисление необходимо для решения задач дифференциальной геометрии и топологии, в частности теории кобордизмов гладких многообразий. Когомологии алгебр играют существенную роль в алгебраической топологии и теории гомотопий, поскольку основные спектральные последовательности для вычисления гомотопических групп топологических пространств в качестве начального члена E^2 имеют когомологии тех или иных алгебр. В частности, член E^2 спектральной последовательности Адамса стабильных гомотопических групп сфер изоморфен когомологиям алгебры Стинрода.

В то же время проблема вычисления когомологий алгебр является чрезвычайно трудной. Среди общих подходов к ее решению отметим результаты Гутенхейма и Мэя [1], которые показали, что если когомологии алгебры рассматривать не просто как алгебру, а добавить так называемые произведения Масси, то в хороших случаях одномерные когомологии будут содержать все образующие в том смысле, что все остальные элементы в когомологиях могут быть получены из одномерных элементов применением к ним произведений Масси. Одномерные когомологии легко вычисляются, что позволяет практически во всех случаях найти образующие для когомологий алгебр, а остальные элементы получать как произведения Масси от образующих.

Вопрос, который оставался открытым для полного описания когомологий алгебр, заключался в нахождении соотношений между произведениями Масси. Основная трудность состояла в том, что произведения Масси являются частичными и многозначными операциями, и поэтому неясно, как описывать соотношения между ними. Избежать этого помогает язык A_∞ -структур, введенный Сташеффом [2] и использованный в работе [3] для описания когомологий алгебр, нахождения образующих и соотношений. Здесь мы рассмотрим вопрос о том, как методы описания

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-01049).

когомологий алгебр, основанные на использовании A_∞ -структур Стасеффа, могут быть применены для описания когомологий банаховых и полинормированных алгебр.

Для простоты изложения мы будем рассматривать случай когомологий алгебр с тривиальными коэффициентами в поле комплексных чисел. Вначале напомним необходимые сведения из гомологической алгебры в категории банаховых пространств [4]. Для определенности мы будем рассматривать банаховы пространства, хотя все конструкции могут быть распространены на полные полинормированные алгебры – алгебры Аренса–Майкла.

§ 1. Комплексы в категории банаховых пространств

Банаховым комплексом будем называть семейство $X = \{X_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ банаховых пространств X_n и непрерывных операторов $d = \{d_n\}$, $d_n: X_n \rightarrow X_{n-1}$, называемых *дифференциалами* и удовлетворяющих соотношениям $d_{n-1} \circ d_n = 0$. Как правило, мы будем рассматривать банаховы комплексы $X = \{X_n\}$, для которых $X_n = 0$ при $n < 0$ или $X_n = 0$ при $n > 0$.

Банахов комплекс X будем называть *допустимым*, если существует семейство непрерывных операторов $s = \{s_n\}$, $s_n: X_{n-1} \rightarrow X_n$, удовлетворяющих соотношениям $d_n \circ s_n \circ d_n = d_n$.

Пространства $Z_n(X) = \text{Ker}\{d_n: X_n \rightarrow X_{n-1}\}$ называются *пространствами n -мерных циклов*. Пространства $B_n(X) = \text{Im}\{d_{n+1}: X_{n+1} \rightarrow X_n\}$ называются *пространствами n -мерных границ*. Ясно, что $B_n(X) \subset Z_n(X)$. Факторпространства $H_n(X) = Z_n(X)/B_n(X)$ называется *n -мерными гомологиями банахова комплекса X* . Семейство $H_*(X) = \{H_n(X)\}$ называется *гомологиями банахова комплекса X* . В случае если X – допустимый банахов комплекс, то отображение $d_{n+1} \circ s_n: Z_n(X) \rightarrow B_n(X)$ будет обратным к вложению $i_n: B_n(X) \rightarrow Z_n(X)$. Следовательно, гомологии $H_*(X)$ в этом случае будут состоять из банаховых пространств $H_n(X)$. Короткие точные последовательности

$$0 \longrightarrow B_n(X) \xrightarrow{i_n} Z_n(X) \xrightarrow{p_n} H_n(X) \longrightarrow 0$$

расщепляются, т.е. существуют непрерывные операторы $q_n: H_n(X) \rightarrow Z_n(X)$, для которых выполняются соотношения

$$p_n \circ q_n = \text{Id}: H_n(X) \rightarrow H_n(X), \quad \text{Id} - q_n \circ p_n = d_{n+1} \circ s_n: Z_n(X) \rightarrow B_n(X).$$

Для банахова комплекса X обозначим через $\bar{X}$ двойственный комплекс, $\bar{X} = \{\bar{X}_n\}$, для которого $\bar{X}_n$ – банахово пространство, сопряженное к X_{-n} . Дифференциалы $d_n: X_n \rightarrow X_{n-1}$ индуцируют дифференциалы $\bar{d}_n: \bar{X}_{-n+1} \rightarrow \bar{X}_{-n}$. Ясно, что если X был допустимым банаховым комплексом, то $\bar{X}$ также будет допустимым банаховым комплексом. Гомологии двойственного комплекса $\bar{X}$ называются *когомологиями комплекса X* и обозначаются $H^*(X) = \{H^n(X)\}$, $H^n(X) = H_{-n}(\bar{X})$.

Отображением банаховых комплексов $f: X \rightarrow Y$ размерности m будем называть семейство $f = \{f_n\}$ непрерывных операторов $f_n: X_n \rightarrow Y_{n+m}$.

Ясно, что такие отображения образуют линейное пространство, обозначаемое $\text{Hom}_m(X, Y)$.

Определим линейные операторы $d: \text{Hom}_m(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{m-1}(X, Y)$, называемые *дифференциалами*, полагая

$$d(f)_n = d_{n+m} \circ f_n + (-1)^m f_{n-1} \circ d_n: X_n \rightarrow Y_{n+m-1}.$$

Легко видеть, что $d \circ d = 0$, и таким образом, семейство $\text{Hom}(X, Y) = \{\text{Hom}_m(X, Y)\}$ образует комплекс в категории линейных пространств.

Цепным отображением банаховых комплексов будем называть отображение $f: X \rightarrow Y$ размерности нуль, удовлетворяющее соотношению $d(f) = 0$, или, что то же самое, $d_n \circ f_n = f_{n-1} \circ d_n$.

Цепное отображение банаховых комплексов $f: X \rightarrow Y$ индуцирует отображение гомологий

$$H_*(f) = \{H_n(f)\}: H_*(Y) \rightarrow H_*(X), \quad H_n(f): H_n(Y) \rightarrow H_n(X),$$

и когомологий

$$H^*(f) = \{H^n(f)\}: H^*(X) \rightarrow H^*(Y), \quad H^n(f): H^n(X) \rightarrow H^n(Y).$$

Два цепных отображения $f, g: X \rightarrow Y$ банаховых комплексов называются *гомотопными* (обозначается $f \simeq g$), если существует отображение $h: X \rightarrow Y$ размерности 1, удовлетворяющее соотношению $d(h) = g - f$, или, что то же самое, $d_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ d_n = g_n - f_n$. Отображение h при этом называется *гомотопией между отображениями f и g* . Легко видеть, что отношение гомотопности является отношением эквивалентности.

Банаховы комплексы X и Y называются *гомотопически эквивалентными* (обозначается $X \simeq Y$), если существуют цепные отображения $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow X$ такие, что $g \circ f \simeq \text{Id}_X, f \circ g \simeq \text{Id}_Y$. Банахов комплекс называется *стягиваемым*, если он гомотопически эквивалентен нулевому комплексу.

Легко видеть, что если $f \simeq g: X \rightarrow Y$, то $\bar{f} \simeq \bar{g}: \bar{Y} \rightarrow \bar{X}$, и если $X \simeq Y$, то $\bar{X} \simeq \bar{Y}$. Кроме того, гомотопные отображения индуцируют одинаковые гомоморфизмы гомологий и когомологий, а гомотопически эквивалентные банаховы комплексы имеют изоморфные гомологии и когомологии.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Если X – допустимый банахов комплекс, то его гомологии $H_*(X)$, рассматриваемые как банахов комплекс с нулевым дифференциалом, будут гомотопически эквивалентны $X: H_*(X) \simeq X$.*

Действительно, рассмотрим отображение $\text{Id} - s \circ d: X \rightarrow Z(X)$. Его композицию с проекцией $p: Z(X) \rightarrow H_*(X)$ обозначим $\eta: X \rightarrow H_*(X)$. Рассмотренное выше отображение $q: H_*(X) \rightarrow Z(X)$ дает отображение $\xi: H_*(X) \rightarrow X$. Легко видеть, что $\eta \circ \xi = \text{Id}: H_*(X) \rightarrow H_*(X)$. Покажем, что отображения $s_n: X_n \rightarrow X_{n+1}$ дают требуемую гомотопию между отображениями Id и $\xi \circ \eta$. Имеем

$$\text{Id} - \xi_n \circ \eta_n = \text{Id} - q_n \circ p_n(\text{Id} - s_n \circ d_n) = d_{n+1} \circ s_n + s_n \circ d_n.$$

Из этого предложения, в частности получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. *Для допустимого банахова комплекса X имеет место изоморфизм $H^*(X) \cong \overline{H_*(X)}$.*

Действительно, из гомотопической эквивалентности $X \simeq H_*(X)$ следует гомотопическая эквивалентность $\overline{X} \simeq \overline{H_*(X)}$, и поэтому имеем указанный изоморфизм.

Пусть X – банахов комплекс. Определим банахов комплекс SX , называемый *надстройкой над X* , полагая $(SX)_{n+1} = X_n$. Элементы в SX будем обозначать $[x]$, где $x \in X$. Если $x \in X$ имеет размерность n , то $[x]$ будет иметь размерность $n + 1$. Дифференциал на SX определим формулой $d[x] = -[d(x)]$.

Ясно, что если X – допустимый банахов комплекс, то надстройка SX будет допустимым банаховым комплексом, и гомологии надстройки изоморфны надстройке над гомологиями, т.е. $H_*(SX) \cong SH_*(H)$.

Аналогичным образом для банахова комплекса X можно определить денадстройку $S^{-1}X$, полагая $(S^{-1}X)_{n-1} = X_n$. Элементы в денадстройке, когда это не будет вызывать недоразумений, мы будем обозначать $[x]$, где $x \in X$. Если $x \in X$ имеет размерность n , то $[x]$ будет иметь размерность $n - 1$. Дифференциал на SX определим формулой $d[x] = -[d(x)]$.

Ясно, что функторы надстройки и денадстройки являются взаимно обратными.

Тензорным произведением банаховых комплексов X' и X'' называется банахов комплекс $X = X' \otimes X''$, для которого

$$(X' \otimes X'')_n = \sum_{p+q=n} X'_p \otimes X''_q,$$

и дифференциал определен формулой

$$d_n(x'_p \otimes x''_q) = d'_p(x'_p) \otimes x''_q + (-1)^p x'_p \otimes d''_q(x''_q), \quad p + q = n.$$

Для отображений $f': X' \rightarrow Y'$, $f'': X'' \rightarrow Y''$ размерности m' и m'' соответственно определим отображение $f = f' \otimes f'': X' \otimes X'' \rightarrow Y' \otimes Y''$ размерности $m = m' + m''$, положив на образующих $x'_p \otimes x''_q \in X'_p \otimes X''_q$

$$(f' \otimes f'')(x'_p \otimes x''_q) = (-1)^{m''p} f'_p(x'_p) \otimes f''_q(x''_q).$$

Формулу для дифференциала в тензорном произведении банаховых комплексов можно переписать в виде $d = d' \otimes 1 + 1 \otimes d''$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Тензорное произведение допустимых банаховых комплексов является допустимым банаховым комплексом.*

Действительно, пусть (X', d', s') , (X'', d'', s'') – допустимые банаховы комплексы. Определим $s: X' \otimes X'' \rightarrow X' \otimes X''$, положив

$$s = s' \otimes 1 + 1 \otimes s'' - (d' \circ s' + s' \circ d') \otimes s''.$$

Непосредственные вычисления показывают, что справедливо требуемое соотношение $d \circ s \circ d = d$.

Если отображения $f': X' \rightarrow Y'$, $f'': X'' \rightarrow Y''$ соответственно гомотопны отображениям $g': X' \rightarrow Y'$, $g'': X'' \rightarrow Y''$, то $f' \otimes f'': X' \otimes X'' \rightarrow Y' \otimes Y''$ будет гомотопно отображению $g' \otimes g'': X' \otimes X'' \rightarrow Y' \otimes Y''$. Требуемая гомотопия $h: X' \otimes X'' \rightarrow Y' \otimes Y''$ определяется формулой $h = h' \otimes g'' + f' \otimes h''$, где h' , h'' – соответствующие гомотопии между f' , g' и f'' , g'' .

Из этого, в частности, следует, что гомотопически эквивалентные цепные комплексы $X' \simeq Y'$, $X'' \simeq Y''$ дают гомотопически эквивалентные тензорные произведения $X' \otimes X'' \simeq Y' \otimes Y''$.

Из предложения 1 получаем

СЛЕДСТВИЕ 2. Для допустимых банаховых комплексов X и Y имеет место изоморфизм $H_*(X \otimes Y) \cong H_*(X) \otimes H_*(Y)$.

§ 2. Гомологии и когомологии банаховых алгебр

Пусть A – банахова алгебра, т.е. банахово пространство вместе с ассоциативным умножением $\pi: A \otimes A \rightarrow A$. Рассмотрим комплекс BA , называемый *B-конструкцией над A* , для которого

$$(BA)_n = \begin{cases} A^{\otimes n}, & n \geq 1, \\ 0, & n \leq 0. \end{cases}$$

Образующие элементы размерности n в $A^{\otimes n}$ обозначаются $[x_1, \dots, x_n]$, $x_i \in A$. Дифференциал d определен формулами

$$d_n[x_1, \dots, x_n] = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+1} [x_1, \dots, \pi(x_i \otimes x_{i+1}), \dots, x_n].$$

Банахову алгебру A будем называть *допустимой*, если допустим комплекс BA .

Ясно, что любая конечномерная банахова алгебра допустима. В качестве примера бесконечномерной допустимой банаховой алгебры рассмотрим алгебру $A = l_1$ абсолютно сходящихся рядов $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ с умножением

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} x_k \cdot y_{n-k} \right).$$

Обозначим через e_i ряд, у которого на i -м месте стоит единица, а на остальных нули. Определим отображения $s: A^{\otimes n} \rightarrow A^{\otimes n+1}$, полагая

$$s(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_n}) = \begin{cases} e_1 \otimes e_{i_1-1} \otimes \dots \otimes e_{i_n}, & i_1 > 1, \\ 0, & i_1 = 1. \end{cases}$$

На остальных элементах s определяется по линейности и непрерывности.

Непосредственные вычисления показывают, что имеет место соотношение $d \circ s \circ d = d$, означающее, что A – допустимая алгебра.

Среди свойств допустимых банаховых алгебр выделим следующие свойства.

СВОЙСТВО 1. Тензорное произведение допустимых банаховых алгебр является допустимой банаховой алгеброй.

Действительно, пусть A' , A'' – допустимые алгебры, $s': A'^{\otimes n} \rightarrow A'^{\otimes n+1}$, $s'': A''^{\otimes n} \rightarrow A''^{\otimes n+1}$ – соответствующие отображения в B -конструкциях. Тогда искомого отображение $s: A^{\otimes n} \rightarrow A^{\otimes n+1}$ для алгебры $A = A' \otimes A''$ определяется как тензорное произведение s' и s'' .

СВОЙСТВО 2. *Прямая сумма допустимых банаховых алгебр является допустимой банаховой алгеброй.*

Действительно, пусть A', A'' – допустимые алгебры, $s': A'^{\otimes n} \rightarrow A'^{\otimes n+1}$, $s'': A''^{\otimes n} \rightarrow A''^{\otimes n+1}$ – соответствующие отображения в B -конструкциях.

Рассмотрим банахову алгебру $A = A' \oplus A''$. Образующие элементы в $A^{\otimes n}$ представляют собой наборы $a_1 \otimes \cdots \otimes a_n$, где a_i принадлежит A' или A'' . Разобьем этот набор на блоки b_i , состоящие из элементов одной и той же алгебры, и перепишем его в виде $b_1 \otimes \cdots \otimes b_m$, где блоки $b_1, \dots, b_m$ являются тензорными произведениями элементов из A' или A'' , причем соседние блоки содержат элементы из разных алгебр. Таким образом, $b_i \in BA'$ или $b_i \in BA''$.

Определим отображение $s: A^{\otimes n} \rightarrow A^{\otimes n+1}$, полагая

$$\begin{aligned} s(b_1 \otimes \cdots \otimes b_m) &= s(b_1) \otimes b_2 \otimes \cdots \otimes b_m \\ &\quad + (-1)^{n_1} (b_1 - d \circ s(b_1)) \otimes s(b_2) \otimes \cdots \otimes b_m + \dots \\ &\quad \dots + (-1)^{n_1 + \dots + n_{m-1}} (b_{m-1} - d \circ s(b_{m-1})) \otimes s(b_m), \end{aligned}$$

где n_i – размерности b_i .

Непосредственные вычисления показывают, что справедливы требуемые соотношения.

Гомологии (когомологии) B -конструкции BA над алгеброй A называются *гомологиями (когомологиями) алгебры A* и обозначаются $H_*(A)$ ($H^*(A)$). Таким образом, по определению $H_*(A) = H_*(BA)$ ($H^*(A) = H^*(BA)$).

Отметим, что гомологии и когомологии уместно рассматривать только для алгебр без единицы. Действительно, если A – алгебра с единицей e , то B -конструкция BA является стягиваемым комплексом, стягивающая гомотопия $h: BA \rightarrow BA$ в котором определена формулой $h[x_1, \dots, x_n] = [e, x_1, \dots, x_n]$. Следовательно, гомологии и когомологии алгебры A тривиальны. Поэтому в случае, если A – алгебра с единицей, рассматривают алгебру $A/\mathbb{C}$, являющуюся факторизацией алгебры A по единице. Гомологиями (когомологиями) алгебры A считают гомологии (когомологии) алгебры $A/\mathbb{C}$.

Другим вариантом алгебр являются аугментированные алгебры A , т.е. такие, для которых задано отображение алгебр $\varepsilon: A \rightarrow \mathbb{C}$, называемое *аугментацией*. В этом случае гомологиями (когомологиями) алгебры A считаются гомологии (когомологии) идеала аугментации $I = \text{Ker } \varepsilon$.

Вопрос о гомологической тривиальности (аменабельности) банаховой алгебры достаточно хорошо разработан. В частности, если алгебра A с единицей обладает диагональю, т.е. таким элементом $d \in A \otimes A$, что $a \cdot d = d \cdot a$ для всех $a \in A$ и $\pi(d)$ – единица в A , то гомологии алгебры A будут тривиальны.

Примерами таких алгебр являются алгебры $(n \times n)$ -матриц $\mathcal{M}_n$. Если через e_{kl} обозначить матрицу с единицей на $(k \times l)$ -м месте и нулями на остальных, то диагональю будет элемент

$$d_n = \frac{1}{n} \sum_{k,l=1}^n e_{kl} \otimes e_{lk}.$$

Более слабым условием на алгебру A , также приводящим к гомологической тривиальности, является наличие аппроксимативной диагонали, т.е. такой направленности $d_\nu \in A \otimes A$, что $\lim_\nu (a \cdot d_\nu - d_\nu \cdot a) = 0$ для всех $a \in A$ и $\pi(d_\nu)$ – аппроксимативная единица в A .

Примером такой алгебры является алгебра $\mathcal{K}(H)$ компактных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве H .

Другим примером гомологически тривиальной банаховой алгебры является алгебра $L_1(G)$ на локально компактной аменабельной группе G .

В качестве примеров банаховых и полинормированных алгебр с нетривиальными гомологиями рассмотрим следующие.

1. $A = \mathbb{C}$ с тривиальным умножением. В этом случае $(BA)_n \cong \mathbb{C}$ и дифференциал тождественно равен нулю. Поэтому гомологии этой алгебры в каждой размерности $n \geq 1$ изоморфны $\mathbb{C}$.

2. $A = l_1$ – банахова алгебра абсолютно сходящихся рядов. Известно, что одномерные гомологии этой алгебры изоморфны $\mathbb{C}$, а остальные равны нулю.

3. $A = l_1^{(m)}$ – подалгебра в l_1 , состоящая из рядов, у которых m первых членов равны нулю. Непосредственно из определения гомологий следует, что одномерные гомологии этой алгебры изоморфны $\mathbb{C}^{\times m+1}$.

4. $A = l_1^m = l_1/l_1^{(m)}$. Легко видеть, что одномерные гомологии этой алгебры изоморфны $\mathbb{C}$.

5. $A = \mathcal{O}_{z_0}(\mathcal{D})$ – полинормированная алгебра аналитических функций в области $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$, обращающихся в нуль в точке $z_0 \in \mathcal{D}$. Известно, что одномерные гомологии этой алгебры изоморфны $\mathbb{C}$, а остальные равны нулю.

6. $A = \mathcal{O}_{z_0}^{(m)}(\mathcal{D})$ – полинормированная алгебра аналитических функций в области $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$, обращающихся в нуль в точке z_0 вместе со своими производными до m -го порядка включительно. Непосредственно из определения гомологий следует, что одномерные гомологии этой алгебры изоморфны $\mathbb{C}^{\times m+1}$.

§ 3. В-конструкции для дифференциальных банаховых алгебр

Банахов комплекс X будем называть *дифференциальной банаховой алгеброй*, если задано отображение $\pi: X \otimes X \rightarrow X$, называемое *умножением*, удовлетворяющее соотношению ассоциативности: $\pi(\pi \otimes 1) = \pi(1 \otimes \pi)$.

Двойственным образом, банахов комплекс Y будем называть *дифференциальной банаховой коалгеброй*, если задано отображение $\nabla: Y \rightarrow Y \otimes Y$, называемое *коумножением*, удовлетворяющее соотношению $(\nabla \otimes 1)\nabla = (1 \otimes \nabla)\nabla$.

Ясно, что если Y – дифференциальная банахова коалгебра, то двойственный комплекс $\bar{Y}$ будет дифференциальной банаховой алгеброй, умножение в которой определяется как композиция $\bar{Y} \otimes \bar{Y} \xrightarrow{i} \overline{Y \otimes Y} \xrightarrow{\bar{\nabla}} \bar{Y}$.

Градуированной банаховой алгеброй (коалгеброй) будем называть дифференциальную банахову алгебру (коалгебру) с нулевым дифференциалом.

Легко видеть, что если X – допустимая дифференциальная банахова алгебра, то ее гомологии $H_*(X)$ будут градуированной банаховой алгеброй, умножение

$\pi_*: H_*(X) \otimes H_*(X) \rightarrow H_*(X)$ в которой задается формулой $\pi_* = \eta \circ \pi \circ (\xi \otimes \xi)$, где $\xi: H_*(X) \rightarrow X$, $\eta: X \rightarrow H_*(X)$, $\pi: X \otimes X \rightarrow X$.

Двойственным образом, гомологии допустимой дифференциальной банаховой коалгебры являются градуированной банаховой коалгеброй. В частности, гомологии $H_*(Y)$ допустимой банаховой коалгебры Y будут градуированной банаховой коалгеброй, а когомологии $H^*(Y)$ – градуированной банаховой алгеброй.

Для дифференциальной банаховой алгебры X определим дифференциальную коалгебру BX , называемую *B-конструкцией над X* . Для этого рассмотрим тензорную алгебру $TX = \sum_{n \geq 1} X^{\otimes n}$. Элементы $x_1 \otimes \dots \otimes x_n \in X^{\otimes n}$ обозначают $[x_1, \dots, x_n]$ и их размерностью считают число, равное сумме размерностей элементов x_i плюс n . Дифференциал определен формулой

$$\begin{aligned} d[x_1, \dots, x_n] &= - \sum_{i=1}^n (-1)^{\varepsilon_{i-1}} [x_1, \dots, d(x_i), \dots, x_n] \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{\varepsilon_i} [x_1, \dots, \pi(x_i \otimes x_{i+1}), \dots, x_n], \end{aligned}$$

где $\varepsilon_i = \dim(x_1) + \dots + \dim(x_i) + i$.

Тензорная алгебра TX с такой градуировкой и дифференциалом называется *B-конструкцией над X* и обозначается BX . Помимо структуры цепного комплекса на BX имеется коумножение $\nabla: BX \rightarrow BX \otimes BX$, превращающее ее в дифференциальную коалгебру,

$$\nabla[x_1, \dots, x_n] = \sum_{i=1}^{n-1} [x_1, \dots, x_i] \otimes [x_{i+1}, \dots, x_n].$$

Двойственным образом, для дифференциальной банаховой коалгебры Y определена дифференциальная алгебра FY , называемая *ко-B-конструкцией над Y* . Она является тензорной алгеброй TY , элементы $y_1 \otimes \dots \otimes y_n$ в которой обозначаются $[y_1, \dots, y_n]$ и имеют размерность, равную сумме размерностей элементов y_i минус n . Дифференциал определен формулой

$$\begin{aligned} d[y_1, \dots, y_n] &= - \sum_{i=1}^n (-1)^{\varepsilon_{i-1}} [y_1, \dots, d(y_i), \dots, y_n] \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{\varepsilon_i} [y_1, \dots, x'_i, x''_i, \dots, y_n], \end{aligned}$$

где $\nabla(y_i) = \sum y'_i \otimes y''_i$.

Умножение $\pi: FY \otimes FY \rightarrow FY$ определено формулой

$$\pi([y_1, \dots, y_n] \otimes [y_{n+1}, \dots, y_{n+m}]) = [y_1, \dots, y_{n+m}].$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Для произвольной дифференциальной банаховой алгебры X имеет место гомотопическая эквивалентность $FBX \simeq X$.*

Определим отображение $\xi: X \rightarrow FBX$, положив $\xi(x) = [[x]]$, и отображение алгебр $\eta: FBX \rightarrow X$, положив на образующих $\eta[[x_1, \dots, x_n]] = x_1$, если $n = 1$, и

нуль в остальных случаях. Ясно, что имеет место формула $\eta \circ \xi = \text{Id}: X \rightarrow X$. Покажем, что $\xi \circ \eta: FBX \rightarrow FBX$ гомотопно тождественному отображению. Определим гомотопию $h: FBX \rightarrow FBX$, положив

$$h\left([x_1], [x_2, \dots, x_n], \dots, [x_{m+1}, \dots, x_k]\right) = [x_1, x_2, \dots, x_n], \dots, [x_{m+1}, \dots, x_k],$$

и нуль в остальных случаях. Непосредственные вычисления показывают, что h является искомой гомотопией.

Для дифференциальной полинормированной алгебры X рассмотрим убывающую фильтрацию

$$X = X^1 \supset X^2 = X \cdot X \supset \dots \supset X^n \supset \dots$$

и обозначим $\hat{X} = \varprojlim X/X^n$.

$\hat{X}$ является полинормированной алгеброй, и имеет место естественное отображение алгебр $X \rightarrow \hat{X}$. Алгебру X будем называть *совершенной*, если это отображение – изоморфизм.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Для совершенной алгебры X имеет место гомотопическая эквивалентность алгебр $\hat{FBX} \simeq X$.*

Действительно, отображение алгебр $\eta: FBX \rightarrow X$ индуцирует отображение $\hat{\eta}: \hat{FBX} \rightarrow X$. Кроме того, имеет место вложение $\hat{\xi}: X \rightarrow \hat{FBX}$, $\hat{\eta} \circ \hat{\xi} = \text{Id}$. Рассмотренная ранее гомотопия $h: FBX \rightarrow FBX$ сохраняет фильтрацию и, следовательно, индуцирует гомотопию $\hat{h}: \hat{FBX} \rightarrow \hat{FBX}$, $d(\hat{h}) = \hat{\xi} \circ \hat{\eta} - \text{Id}$.

Рассмотрим теперь двойственную ситуацию. Для полинормированной коалгебры Y определим фильтрацию $Y^1 \subset Y^2 \subset \dots \subset Y^n \subset \dots \subset Y$, полагая

$$Y^1 = PY = \{y \in Y: \nabla(y) = 0\}, \quad Y^2 = \{y \in Y: \nabla(y)Y^1 \otimes Y^1\},$$

и так далее.

Обозначим через $\check{Y}$ прямой предел Y^n , $\check{Y} = \varinjlim Y^n$. Ясно, что $\check{Y}$ будет подкоалгеброй коалгебры Y . Коалгебру Y будем называть *совершенной*, если $\check{Y} = Y$.

Имеет место следующее предложение, двойственное к предложению 4.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4'. *Для совершенной коалгебры Y имеет место гомотопическая эквивалентность коалгебр $BFY \simeq Y$.*

§ 4. Дифференциальные A_∞ -алгебры и A_∞ -коалгебры

Банахов комплекс X будем называть *дифференциальной A_∞ -алгеброй*, если на нем заданы операции $\pi_n: X^{\otimes n+2} \rightarrow X$ размерности $n \geq 0$, удовлетворяющие соотношениям

$$d(\pi_{n+1}) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \pi_i (1 \otimes \dots \otimes \pi_{n-i} \otimes \dots \otimes 1),$$

где $\varepsilon = nk + ik + n + k$.

Например, если $n = 0$, то для операции $\pi_0: X_* \otimes X_* \rightarrow X_*$ эта формула дает соотношение гомотопической ассоциативности

$$d(\pi_1) = \pi_0(-\pi_0 \otimes 1 + 1 \otimes \pi_0).$$

Если $n = 1$, то мы имеем соотношение

$$d(\pi_2) = -\pi_0(\pi_1 \otimes 1 + 1 \otimes \pi_1) + \pi_1(\pi_0 \otimes 1 \otimes 1 - 1 \otimes \pi_0 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes \pi_0),$$

которое является в некотором смысле соотношением гомотопической ассоциативности между π_0 и π_1 . И так далее.

Градуированной банаховой алгеброй будем называть дифференциальную банахову алгебру с нулевым дифференциалом.

Двойственным образом, банахов комплекс Y будем называть *дифференциальной A_∞ -коалгеброй*, если на нем заданы операции $\nabla_n: Y \rightarrow Y^{\otimes n+2}$ размерности $n \geq 0$, удовлетворяющие соотношениям

$$d(\nabla_{n+1}) = \sum_{i=0}^n (-1)^\varepsilon (1 \otimes \cdots \otimes \nabla_{n-i} \otimes \cdots \otimes 1) \nabla_i,$$

где $\varepsilon = nk + ik + ni + i + k + 1$.

Для того чтобы избежать трудностей с определением знаков, мы переформулируем определения дифференциальных A_∞ -алгебры и A_∞ -коалгебры. А именно, пусть X – банахов комплекс. Рассмотрим надстройку SX и тензорную алгебру

$$TSX = \sum_{n \geq 1} (SX)^{\otimes n}.$$

Элементы в TSX будем обозначать $[x_1, \dots, x_n]$, $x_i \in A$. Они имеют размерность, равную сумме размерностей x_i плюс n . TSX является коалгеброй, коумножение $\nabla: TSX \rightarrow TSX \otimes TSX$ в которой определяется формулой

$$\nabla[x_1, \dots, x_n] = \sum_{i=1}^{n-1} [x_1, \dots, x_i] \otimes [x_{i+1}, \dots, x_n].$$

Градуированной банаховой коалгеброй будем называть дифференциальную банахову коалгебру с нулевым дифференциалом.

Легко видеть, что задание дифференциала в TSX , превращающего ее в дифференциальную коалгебру, равносильно заданию дифференциала в SX и операций $\pi(i): (SX)^{\otimes i} \rightarrow SX$, понижающих размерность на единицу и удовлетворяющих соотношениям

$$d(\pi(n)) + \sum_{i=2}^{n-1} \pi(i)(1 \otimes \cdots \otimes \pi(n-i+1) \otimes \cdots \otimes 1) = 0.$$

Рассмотренное семейство операций обозначим через $\pi = \{\pi(i)\}$ и определим семейство операций $\pi \cup \pi$, положив

$$\pi \cup \pi(n) = \sum_{i=2}^{n-1} \pi(i)(1 \otimes \cdots \otimes \pi(n-i+1) \otimes \cdots \otimes 1).$$

Тогда соотношение для структуры A_∞ -алгебры можно переписать в виде $d(\pi) + \pi \cup \pi = 0$.

Покажем, что задание семейства операций $\pi = \{\pi(i)\}$ равносильно заданию на X структуры дифференциальной A_∞ -алгебры. Действительно, рассмотрим взаимно обратные отображения $\xi: X \rightarrow SX$ и $\eta: SX \rightarrow X$. Если на X задана структура дифференциальной A_∞ -алгебры, состоящая из операций $\pi_i: X^{\otimes i+2} \rightarrow X$, то в качестве операций $\pi(i+2): (SX)^{\otimes i+2} \rightarrow SX$ возьмем такие операции, чтобы выполнялись равенства $\eta \circ \pi(i+2) = \pi_i \circ \eta^{\otimes i+2}$. Имеем

$$\begin{aligned} & \left\{ d(\pi_{n+1}) + \sum_{i=0}^n (-1)^{nk+ik+n+k} \pi_i(1 \otimes \cdots \otimes \pi_{n-i} \otimes \cdots \otimes 1) \right\} \eta^{\otimes n+3} \\ &= d(\pi_{n+1} \eta^{\otimes n+3}) + \sum_{i=0}^n (-1)^{i-k} \pi_i(\eta \otimes \cdots \otimes \eta \pi(n-i+2) \otimes \cdots \otimes \eta) \\ &= \eta \left\{ \pi(n+3) + \sum_{i=0}^n \pi(i+2)(1 \otimes \cdots \otimes \pi(n-i+2) \otimes \cdots \otimes 1) \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что первое выражение равно нулю тогда и только тогда, когда равно нулю третье выражение.

Дифференциальная коалгебра TSX , построенная для дифференциальной A_∞ -алгебры X называется *B-конструкцией над X* и обозначается BX . Легко видеть, что в случае, если высшие операции π_i при $i \geq 1$ тривиальны, т.е. X является обычной дифференциальной алгеброй, то B -конструкция BX совпадает с обычной B -конструкцией BX над алгеброй X .

Двойственным образом, для банахова комплекса Y рассмотрим денадстройку $S^{-1}Y$ и тензорную алгебру $\hat{T}S^{-1}Y$. Тогда задание на Y структуры дифференциальной A_∞ -коалгебры равносильно заданию в $\hat{T}S^{-1}Y$ дифференциала, превращающего ее в дифференциальную алгебру, которая называется *ко-B-конструкцией над Y* и обозначается $\hat{F}Y$. В случае если Y является обычной дифференциальной банаховой коалгеброй, т.е. высшие операции ∇_i при $i \geq 1$ тривиальны, то эта ко-B-конструкция совпадает с обычной ко-B-конструкцией $\hat{F}Y$ над Y .

Пусть X', X'' — дифференциальные A_∞ -алгебры. *Отображением A_∞ -алгебр $f: X' \rightarrow X''$* называется семейство отображений $f_i: X'^{\otimes i+1} \rightarrow X''$ размерности i , для которых соответствующие отображения $f(i+1): (SX')^{\otimes i+1} \rightarrow SX''$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} d(f(n)) &= \sum_{i=1}^{n-1} f(i)(1 \otimes \cdots \otimes \pi'(n-i+1) \otimes \cdots \otimes 1) \\ &\quad - \sum_{n_1+\cdots+n_i=n} \pi''(i)(f(n_1) \otimes \cdots \otimes f(n_i)). \end{aligned}$$

Легко видеть, что задание таких операций равносильно заданию отображения дифференциальных банаховых коалгебр $B(f): BX' \rightarrow BX''$.

Используя произведения семейств $f \cup \pi'$ и $\pi'' \cup f$, соотношения для отображения A_∞ -алгебр можно переписать в виде $d(f) = f \cup \pi' - \pi'' \cup f$.

Отображения $f, g: X' \rightarrow X''$ дифференциальных A_∞ -алгебр называются *гомотопными* (обозначается $f \simeq g$), если существует семейство $h = \{h(i)\}$, для которого выполняется соотношение $d(h) = g - f - \pi'' \cup h - h \cup \pi'$. Семейство h называется *гомотопией между f и g* . Легко проверяется, что если f и g гомотопны, то соответствующие отображения B -конструкций $Bf, Bg: BX' \rightarrow BX''$ также будут гомотопны. Дифференциальные A_∞ -алгебры X', X'' называются *гомотопически эквивалентными* и обозначается $X' \simeq X''$, если существуют отображения $f: X' \rightarrow X'', g: X'' \rightarrow X'$, для которых $g \circ f \simeq \text{Id}_{X'}$, $f \circ g \simeq \text{Id}_{X''}$.

Двойственным образом определяются понятия отображения дифференциальных A_∞ -коалгебр, гомотопности и гомотопической эквивалентности дифференциальных A_∞ -коалгебр.

ТЕОРЕМА 1. *Если X – допустимая дифференциальная банахова алгебра, то на ее гомологиях $X_* = H_*(X)$ имеется структура градуированной A_∞ -алгебры и гомотопическая эквивалентность A_∞ -алгебр $X \simeq X_*$, индуцирующая гомотопическую эквивалентность дифференциальных коалгебр $BX \simeq BX_*$.*

Действительно, рассмотрим отображения $\xi: X_* \rightarrow X$, $\eta: X \rightarrow X_*$ и гомотопию $h: X \rightarrow X$ такие, что

$$\eta \circ \xi = \text{Id}, \quad d(h) = \xi \circ \eta - \text{Id}, \quad h \circ \xi = 0, \quad \eta \circ h = 0, \quad h \circ h = 0,$$

и определим структуру A_∞ -алгебры $\pi = \{\pi(i)\}$, положив

$$\pi(i) = \eta\pi(h\pi \otimes 1 + 1 \otimes h\pi) \dots (h\pi \otimes \dots \otimes 1 + \dots + 1 \otimes \dots \otimes h\pi)(\xi \otimes \dots \otimes \xi).$$

Непосредственные вычисления показывают, что имеют место требуемые соотношения.

Определим также отображения $\xi_i: X_*^{\otimes i+1} \rightarrow X$, $\eta_i: X^{\otimes i+1} \rightarrow X_*$ и гомотопию $h_i: X^{\otimes i+1} \rightarrow X$, положив

$$\begin{aligned} \xi(i) &= \pi(h\pi \otimes 1 + 1 \otimes h\pi) \dots (h\pi \otimes \dots \otimes 1 + \dots + 1 \otimes \dots \otimes h\pi)(\xi \otimes \dots \otimes \xi), \\ \eta(i) &= \eta\pi(h\pi \otimes 1 + 1 \otimes h\pi) \dots (h\pi \otimes \xi\eta \otimes \dots \otimes \xi\eta + \dots + 1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes h\pi), \\ h(i) &= h\pi(h\pi \otimes 1 + 1 \otimes h\pi) \dots (h\pi \otimes \xi\eta \otimes \dots \otimes \xi\eta + \dots + 1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes h\pi). \end{aligned}$$

Непосредственные вычисления показывают, что имеют место требуемые соотношения.

Двойственным образом, имеет место

ТЕОРЕМА 1'. *Если Y – допустимая дифференциальная банахова коалгебра, то на ее гомологиях $Y_* = H_*(Y)$ имеется структура градуированной A_∞ -коалгебры и гомотопическая эквивалентность A_∞ -коалгебр $Y \simeq Y_*$, индуцирующая гомотопическую эквивалентность дифференциальных алгебр $\hat{F}Y \simeq \hat{F}Y_*$.*

В частности, на гомологиях $H_*(A)$ допустимой банаховой алгебры A имеется структура A_∞ -коалгебры, а на когомологиях $H^*(A)$ – структура A_∞ -алгебры.

§ 5. Описание градуированных банаховых A_∞ -алгебр

Рассмотрим теперь вопрос о том, что означает описание A_∞ -алгебр и A_∞ -коалгебр. Обычные алгебры описываются заданием неразложимых элементов и соотношений между их произведениями. Но что означает неразложимость в случае A_∞ -алгебр? Неправильным было бы определить разложимые элементы в A_∞ -алгебре A , как те элементы, которые принадлежат образам некоторых произведений $\pi_n: A^{\otimes n+2} \rightarrow A$. Для того чтобы дать правильное определение, нужно просто переформулировать определение разложимых элементов для алгебр с произведениями Масси на случай A_∞ -алгебр. Для упрощения знаков, как и раньше, перейдем к надстройкам.

Пусть A — A_∞ -алгебра. Последовательность $(x^2, \dots, x^n)$ элементов $x^i \in SA^{\otimes i}$ называется *последовательностью Масси* [3], если выполнены соотношения

$$\begin{aligned} &(\pi(2) \otimes \dots \otimes 1 + \dots + 1 \otimes \dots \otimes \pi(2))(x^n) = 0, \\ &(\pi(3) \otimes \dots \otimes 1 + \dots + 1 \otimes \dots \otimes \pi(3))(x^n) \\ &\quad + (\pi(2) \otimes \dots \otimes 1 + \dots + 1 \otimes \dots \otimes \pi(2))(x^{n-1}) = 0, \\ &\dots\dots\dots \\ &(\pi(n-1) \otimes 1 + 1 \otimes \pi(n-1))(x^n) \\ &\quad + (\pi(n-2) \otimes 1 + 1 \otimes \pi(n-2))(x^{n-1}) + \dots \\ &\quad \dots + (\pi(2) \otimes 1 + 1 \otimes \pi(2))(x^3) = 0. \end{aligned}$$

Для таких последовательностей Масси $(x^2, \dots, x^n)$ определяется произведение Масси $\mu(x^2, \dots, x^n) = \pi(2)(x^2) + \dots + \pi(2)(x^n)$. Элемент $x \in A$ называется *разложимым*, если он является образом какого-нибудь произведения Масси. Фактор A по разложимым элементам называется *модулем неразложимых элементов* и обозначается JA .

Переведем это определение на язык B -конструкций. Рассмотрим B -конструкцию BA над A_∞ -алгеброй A . Вложение $i: A \rightarrow BA$ индуцирует короткую точную последовательность

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} BA \xrightarrow{p} B^1A = BA/A \longrightarrow 0$$

и длинную точную последовательность гомологий

$$\dots \longrightarrow A \xrightarrow{i_*} H_*(BA) \xrightarrow{p_*} H_*(B^1A) \xrightarrow{\mu_*} A \longrightarrow \dots$$

Из определения последовательности Масси следует, что последовательность $(x^2, \dots, x^n)$ является последовательностью Масси в том и только том случае, когда элемент $x = x^2 + \dots + x^n$ является циклом в $B^1(A)$. Более того, отображение μ_* индуцируется произведением Масси. Таким образом, элемент $x \in A$ разложим тогда и только тогда, когда он принадлежит образу μ_* . Следовательно, модуль неразложимых элементов JA изоморфен образу отображения $i_*: A \rightarrow H_*(BA)$.

Двойственным образом, для градуированной A_∞ -коалгебры K рассмотрим ко- B -конструкцию $\hat{F}K$. Проекция $p: \hat{F}K \rightarrow K$ индуцирует короткую точную последовательность

$$0 \longrightarrow \hat{F}^1K \xrightarrow{i} \hat{F}K \xrightarrow{p} K \longrightarrow 0$$

Для A_∞ -алгебры A обозначим для краткости гомологии ее B -конструкции через K , т.е. $K = H_*(BA)$. Пусть далее $\bar{A}_\infty K$ обозначает свободную A_∞ -коалгебру, порожденную K ; $\bar{A}_\infty^1 K = \bar{A}_\infty K / K$. Структура A_∞ -коалгебры в K индуцирует отображение $\tau: K \rightarrow \bar{A}_\infty^1 K$. Кроме этого имеется отображение двойственности $\psi: \bar{A}_\infty^1 K \rightarrow A_\infty^1 A$ (см. [3]). Рассмотрим отображение $K \rightarrow A_\infty^1 A$, являющееся композицией отображений τ , ψ и проекции $A_\infty^1 A \rightarrow A_\infty^1 A$. Тогда имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} K & \longrightarrow & H_*(B^1 A) & \longrightarrow & A \\ & \searrow & \downarrow & \nearrow & \\ & & A_\infty^1 A & & \end{array}$$

Из этой диаграммы следует, что для нахождения соотношений в A_∞ -алгебре A нужно найти образ отображения $K \rightarrow A_\infty^1 A$. Подводя итог вышесказанному, получаем, что для описания A_∞ -алгебры A нужно:

- 1) найти гомологии $H_*(BA)$ B -конструкции BA над алгеброй A ;
- 2) вычислить образ гомоморфизма $A \rightarrow H_*(BA)$; этот образ будет модулем JA неразложимых элементов A_∞ -алгебры A ;
- 3) вычислить образ гомоморфизма $H_*(BA) \rightarrow A_\infty^1 A$; этот образ будет давать соотношения в A_∞ -алгебре A .

Двойственным образом, для описания A_∞ -коалгебры K нужно:

- 1') найти гомологии $H_*(\hat{F}K)$ ко- B -конструкции $\hat{F}K$ над коалгеброй K ;
- 2') вычислить образ гомоморфизма $H_*(\hat{F}K) \rightarrow K$; этот образ будет модулем примитивных элементов A_∞ -коалгебры K ;
- 3') вычислить ядро гомоморфизма $\bar{A}_\infty^1 K \rightarrow H_*(\hat{F}K)$; это ядро будет давать порождающие элементы в искомой A_∞ -коалгебре.

§ 6. Нахождение образующих и соотношений в когомологиях банаховых алгебр

Для описания A_∞ -алгебр и коалгебр в первую очередь нужно найти неразложимые и примитивные элементы соответственно.

Рассмотрим алгебру A и найдем примитивные элементы гомологий ее B -конструкции $H_*(BA)$. Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 2. *Для совершенной алгебры A пространство примитивных элементов $PH_*(BA)$ гомологий B -конструкции BA изоморфно пространству неразложимых элементов алгебры A : $PH_*(BA) \cong JA$.*

Действительно, по определению примитивных элементов имеем

$$PH_*(BA) = \text{Im}\{H_*(\hat{F}H_*(BA)) \rightarrow H_*(BA)\}.$$

Используя изоморфизм $H_*(\hat{F}BA) \cong A$, получаем требуемый изоморфизм

$$PH_*(BA) \cong \text{Im}\{A \rightarrow H_*(BA)\} \cong JA.$$

Рассмотрим теперь коалгебру K и найдем пространство неразложимых элементов $JH_*(FK)$ гомологий ее ко- B -конструкции FK . Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 2'. Для совершенной коалгебры K пространство $JH_*(FK)$ неразложимых элементов в гомологиях $H_*(FK)$ изоморфно пространству примитивных элементов PK коалгебры K .

Действительно, по определению неразложимых элементов A_∞ -алгебры имеем

$$JH_*(FK) = \text{Im}\{H_*(FK) \rightarrow H_*(BH_*(FK))\}.$$

Используя изоморфизм $H_*(BH_*(FK)) \cong K$, получаем требуемый изоморфизм

$$JH_*(FK) \cong \text{Im}\{H_*(FK) \rightarrow K\} \cong PK.$$

Заметим, что если гомологии $A_* = H_*(BA)$ алгебры A являются градуированным пространством со свойством аппроксимации, то когомологии $A^* = H^*(BA)$ будут A_∞ -алгеброй, причем пространство неразложимых элементов JA^* этой A_∞ -алгебры будет изоморфно пространству $\overline{PA}_*$, двойственному к пространству примитивных элементов PA_* в A_∞ -коалгебре A_* . Если при этом A – совершенная алгебра, то пространство неразложимых элементов в когомологиях алгебры A изоморфно пространству одномерных когомологий, $JH^*(BA) \cong H^1(BA)$.

Рассмотрим теперь совершенную коалгебру K и гомологии ее ко- B -конструкции $A_* = H_*(FK)$. Как показано в теореме 1', пространство неразложимых элементов A_* изоморфно пространству $PK = H_1(FK)$ примитивных элементов коалгебры K . Таким образом, для описания гомологий ко- B -конструкции осталось найти соотношения между операциями в $H_*(FK)$.

Обозначим через $\nabla(n): K \rightarrow K^{\otimes n}$ итерацию коумножения $\nabla: K \rightarrow K \otimes K$ и через $p: K \rightarrow PK$ проекцию на пространство примитивных элементов. Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 3. Для совершенной коалгебры K соотношения в A_∞ -алгебре $A_* = H_*(FK)$ записываются в виде

$$\sum_{n \geq 0} \pi_n(p \otimes \cdots \otimes p) \nabla(n+2)(x) = 0, \quad x \in K.$$

Для доказательства требуемой формулы нужно вычислить образ отображения $K \cong H_*(BA_*) \rightarrow A_\infty^1 * A_*$. Соответствующие вычисления проведены в работе [3].

Заметим, что для произвольных элементов $x_1, \dots, x_n \in PK = H_1(FK)$ элементы $\pi_{n-2}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)$ принадлежат $H_2(FK)$. Поэтому все соотношения, описанные в теореме 2, являются соотношениями в $H_2(FK)$, а соотношения в гомологиях высших размерностей определяются структурой A_∞ -алгебры в $H_*(FK)$. Поэтому имеем

СЛЕДСТВИЕ. Для совершенной коалгебры K гомологии $H_*(FK)$ определяются гомологиями $H_1(FK)$, $H_2(FK)$ и операциями $\pi_n: H_1(FK)^{\otimes n+2} \rightarrow H_2(FK)$.

Двойственным образом, для совершенной алгебры A рассмотрим гомологии $K_* = H_*(BA)$. Как показано в теореме 1, пространство примитивных элементов K_* изоморфно пространству $JA = H_1(BA)$ неразложимых элементов алгебры A . Таким образом, для описания гомологий B -конструкции осталось найти порождающие элементы в $\bar{A}_\infty^1 JA$. Обозначим через $q: JA \rightarrow A$ отображение вложения неразложимых элементов алгебры A в саму алгебру A и через $\pi(n): A^{\otimes n} \rightarrow A$ итерацию умножения $\pi: A \otimes A \rightarrow A$.

ТЕОРЕМА 3'. Для совершенной алгебры A порождающие элементы в A_∞ -коалгебре $H_*(BA)$ записываются в виде

$$\sum_{n \geq 0} \nabla_n(x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n+2}),$$

где элементы $x_1, \dots, x_{n+2} \in JA$ таковы, что $\sum_{n \geq 0} \pi(n+2) \times (x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n+2}) = 0$.

СЛЕДСТВИЕ. Для совершенной алгебры A гомологии $H_*(BA)$ определяются гомологиями $H_1(BA)$, $H_2(BA)$ и операциями $\nabla_n: H_2(BA) \rightarrow H_1(BA)^{\otimes n+2}$.

ТЕОРЕМА 3''. Если A – совершенная алгебра и гомологии $A_* = H_*(BA)$ являются градуированным пространством со свойством аппроксимации, то соотношения в когомологиях $A^* = H^*(BA)$, рассматриваемых как A_∞ -алгебра, записываются в виде

$$\sum_{n \geq 0} \pi_n(\overline{q \otimes \cdots \otimes q}) \bar{\pi}(n+2)(x) = 0, \quad x \in \bar{A}.$$

Отметим, что вместо условия совершенности алгебр и коалгебр можно накладывать условие гомологической совершенности. Алгебра A и коалгебра K называются гомологически совершенными, если соответствующие отображения $A \rightarrow \hat{A}$, $K \rightarrow \check{K}$ индуцируют изоморфизм гомологий. Ясно, что приведенные выше теоремы относительно образующих элементов и соотношений будут справедливы и в этом случае.

В качестве примеров описания когомологий алгебр рассмотрим следующие.

1. $A = l_1^m$. Ясно, что эта алгебра является совершенной. В $H^*(A)$ имеется одна образующая $u_1 \in H^1(A)$, соответствующая элементу $e_1 \in l_1^m$, и соотношения

$$\pi_{n-2}(u_1 \otimes \cdots \otimes u_1) = 0, \quad 2 \leq n \leq m.$$

Из этого описания следует, что одномерные когомологии $H^1(A)$ изоморфны $\mathbb{C}$. Двумерные когомологии изоморфны $\mathbb{C}$ и имеют одну образующую $u_2 = \pi_{m-1}(u_1 \otimes u_1)$. Четномерные когомологии изоморфны $\mathbb{C}$ и имеют образующие $u_2^n = u_2 \dots u_2 \in H^{2n}(A)$. Нечетномерные когомологии изоморфны $\mathbb{C}$ и имеют образующие $u_2^n \cdot u_1 \in H^{2n+1}(A)$.

2. $A = l_1$. Эта алгебра не является совершенной. Соответствующая алгебра $\hat{l}_1$ состоит из всех формальных рядов с комплексными коэффициентами. В когомологиях $H^*(\hat{l}_1)$ имеется одна образующая $u_1 \in H^1(\hat{l}_1)$, соответствующая элементу $e_1 \in l_1$, и соотношения

$$\pi_{n-2}(u_1 \otimes \cdots \otimes u_1) = 0, \quad n \geq 2.$$

Из этого описания следует, что одномерные когомологии $H^1(\hat{l}_1)$ изоморфны $\mathbb{C}$ и все высшие когомологии равны нулю. С другой стороны, используя изоморфизм $H^*(A) \cong \text{Ext}_A(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, легко видеть, что $H^1(l_1) \cong \mathbb{C}$ и $H^n(l_1) = 0$, $n \geq 2$. Таким

образом, отображение $l_1 \rightarrow \hat{l}_1$ индуцирует изоморфизм когомологий, и, следовательно, l_1 – гомологически совершенная алгебра.

3. $A = l_1^{(m)}$. Из точности последовательности $0 \rightarrow l_1^{(m)} \rightarrow l_1 \rightarrow l_1^m \rightarrow 0$ и гомологической совершенности алгебр l_1 и l_1^m следует гомологическая совершенность алгебры $l_1^{(m)}$.

В когомологиях $H^1(A)$ имеются образующие $u_{m+1}, \dots, u_{2m+1}$, соответствующие элементам $e_{m+1}, \dots, e_{2m+1} \in A$. Соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} u_{m+1}u_{m+1} &= 0, \\ u_{m+1}u_{m+2} + u_{m+2}u_{m+1} &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ u_{m+1}u_{2m+1} + \dots + u_{2m+1}u_{m+1} &= 0, \\ \pi_1(u_{m+1} \otimes u_{m+1} \otimes u_{m+1}) + u_{m+2}u_{2m+1} + \dots + u_{2m+1}u_{m+2} &= 0, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

4. $A = \mathcal{O}_{z_0}(\mathcal{D})$. Аналогично предыдущему показывается, что эта алгебра является гомологически совершенной. В когомологиях $H^*(A)$ имеется одна образующая $u \in H^1(A)$, соответствующая элементу $z - z_0 \in A$, и соотношения

$$\pi_{n-2}(u \otimes \dots \otimes u) = 0, \quad n \geq 2.$$

Из этого описания следует, что одномерные когомологии $H^1(A)$ изоморфны $\mathbb{C}$ и все высшие когомологии равны нулю.

Список литературы

1. *Gugenheim V. K., May J. P.* On the theory and applications of differential torsion products // Mem. AMS. 1974. V. 142. P. 1–93.
2. *Stasheff J. D.* Homotopy associativity of H -spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. V. 108. № 2. P. 275–312.
3. *Смирнов В. А.* Гомологии B -конструкций и ко- B -конструкций // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 4. С. 80–96.
4. *Хелемский А. Я.* Банаховы и полинормированные алгебры. М.: Наука, 1989.

Поступило в редакцию
17.X.1996